

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Thèse

Présentée par

HAMDI Brahim

Pour l'obtention du titre de

Doctorat LMD

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Etude d'un problème à conditions aux limites nonlocales généralisées de
type Bitsadze-Samarskii dans le cadre des espaces L^p

Soutenue : le .. - juin -2021

Devant le jury :

Président	Benharrat BELAIDI , Pr. Université de Mostaganem
Examineurs	Mustapha CHEGGAG, Pr. ENP d'Oran Kheira LIMAM, MCA Université de Mostaghanem
Directeurs de thèse	Ahmed MEDEGHRI, Pr. Université de Mostaganem Stéphane MAINGOT, Pr. Université du Havre

Table des matières

Introduction	3
0.1 Historique	3
0.1.1 Conditions aux limites de type Sturm-Liouville	3
0.1.2 Conditions aux limites de type Dirichlet	4
0.1.3 Conditions aux limites de type Robin	4
0.1.4 Conditions aux limites de type non local	4
0.1.5 Le cas non commutatif	5
0.2 Le plan de ce travail	5
1 Rappels	12
1.1 Les opérateurs linéaires	12
1.2 Calcul et intégrale de Dunford	14
1.2.1 Calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels	14
1.3 Puissances complexes d'opérateurs	16
1.4 Semi-groupes	16
1.4.1 Semi-groupes fortement continus	16
1.4.2 Semi-groupes différentiables	18
1.4.3 Semi-groupes analytiques	18
1.5 Les espaces d'interpolation	20
1.6 La théorie des sommes d'opérateurs	21
1.6.1 Espaces <i>UMD</i>	22
1.6.2 Résultat de Dore et Venni	22
1.6.3 Application du théorème de Dore et Venni au problème de Cauchy	23
2 Problème à conditions aux limites non locales généralisées de type Bitsadze-Samarskii dans le cadre des espaces L^p	25
2.1 Position du problème	25
2.2 Hypothèses	25
2.3 Lemmes techniques	28
2.4 Représentation de la solution	29
2.4.1 Premier problème	29

2.4.2	Deuxième problème	31
2.5	Résultats principaux	32
2.5.1	Premier problème	32
2.5.2	Deuxième problème	36
2.6	Inversibilité de déterminant	37
2.6.1	Premier problème	37
2.6.2	Deuxième problème	42
2.7	Applications	44
2.7.1	Exemple :	44
3	Problème aux limites (cas B génère un groupe)	46
3.1	Position du problème	46
3.2	Hypothèses	46
3.3	Représentation de la solution	49
3.3.1	Premier problème	49
3.3.2	Deuxième problème	52
3.4	Résultats principaux	55
3.4.1	Premier problème	55
3.4.2	Deuxième problème	56
3.5	Problème avec un paramètre spectral	59
3.5.1	Premier problème	59
3.5.2	Deuxième problème	61
3.6	Application	63
3.6.1	Exemple :	63
4	Problème aux limites pour une équation complète (approche L et M)	65
4.1	Etude des Problèmes annexes (4.0.1) et (4.0.2)	65
4.1.1	Hypothèses	65
4.1.2	Représentation de la solution	69
4.1.3	Résultats principaux	73
4.2	Retour aux problèmes (3.1.1) et (3.1.2)	76
4.2.1	Premier problème	77
4.2.2	Deuxième problème	77
4.3	Problème avec un paramètre spectral	78
4.3.1	Premier problème	78
4.3.2	Deuxième problème	80
4.4	Application	81
4.4.1	Exemple :	82

Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien sûr à mes deux encadreurs :

- le Professeur Ahmed Medeghri, pour avoir accepté de m'encadrer et diriger cette thèse, pour ses conseils, ses informations ainsi que pour sa patience durant ces années de formation
- le Professeur Stéphane Maingot, pour les séances enrichissantes de travail, sa gentillesse et son aide précieuse dans la réalisation de cette thèse.

J'ai le plaisir de remercier infiniment le Professeur Belaidi Benharrat qui a bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement le Professeur Cheggag Mustapha et le docteur Limam Kheira pour l'honneur qu'ils me font d'accepter de faire partie du jury et d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur Rabah Labbas pour son aide, ses conseils très précieux et ses encouragements.

Je remercie aussi tous les membres de l'équipe de recherche "Equations Différentielles Abstraites (EDA)" du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées de l'université de Mostaganem.

Je dédie ce travail à mes très chers parents et toute ma famille ainsi qu'à mes amis et à toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'accomplissement de cette thèse.

Introduction

On étudie dans ce travail deux problèmes de type Bitsadze-Samarskii, plus précisément on considère l'équation opérationnelle du second ordre suivante

$$-u''(x) + (L - M)u'(x) - LMu(x) = f(x) \text{ p.p. } x \in]0, 1[, \quad (0.0.1)$$

avec :

– pour le premier problème les conditions aux limites non locales généralisées suivantes :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (0.0.2)$$

– pour le second problème les conditions aux limites non locales généralisées suivantes :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (0.0.3)$$

Ici X est un espace de Banach complexe, $f \in L^p(0, 1; X)$ où $p \in]1, +\infty[$, $u_0, u_{1,x_0} \in X$. De plus L, M et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X .

On cherche deux types de solutions (stricte, semi-stricte) : (voir Hammou et al. [28])

1. La solution stricte est une fonction u vérifiant le problème, tel que

$$u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(LM)) \text{ et } u' \in L^p(0, 1; D(L - M)).$$

2. La solution semi-stricte est une fonction u vérifiant le problème, tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(LM)) \text{ et } u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(L - M)) \cap L^p(0, 1; X).$$

L'objectif est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les données pour obtenir l'existence et l'unicité de telles solutions. La méthode utilisée est basée sur la recherche d'une formule de représentation de la solution dans chaque cas en utilisant les semi-groupes et les puissances fractionnaires des opérateurs. Ensuite une analyse de cette représentation est faite pour trouver des résultats de régularité de la solution à l'aide des espaces d'interpolation et la théorie des sommes d'opérateurs de Dore et Venni.

0.1 Historique

0.1.1 Conditions aux limites de type Sturm-Liouville

Parmi les premiers travaux sur les EDA d'ordre 2, on trouve celui de Krein en 1967, qui a étudié le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au + f(t) \quad (0 \leq t \leq T),$$

avec des conditions aux limites de type Sturm-Liouville, voir [29], p. 249, ici A est un opérateur elliptique, Krein a donné une représentation de la solution en utilisant la méthode de la réduction de l'ordre qui porte son nom, et les propriétés de la racine carrée \sqrt{A} . En 1975, les auteurs Da Prato et Grisvard, voir [15], ont étudié le même problème en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs, le calcul fonctionnel de Dunford et les espaces d'interpolation.

0.1.2 Conditions aux limites de type Dirichlet

A partir de 2004, dans une série d'articles, les auteurs Favini, Labbas, Maingot, Tanabe et Yagi se sont intéressés à l'équation différentielle complète

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (0.1.1)$$

avec des conditions aux limites de type Dirichlet, où X est un espace de Banach complexe, A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur X , les auteurs ont traités ce problème pour plusieurs cas, par exemple

- Dans le cadre des fonctions continues, i.e. le cas où $f \in C([0, 1]; X)$, l'opérateur $B^2 - A$ est un opérateur elliptique et B génère un groupe fortement continu, voir Favini et al [19].
- Dans le cadre des des espaces L^p , i.e. le cas où $f \in L^p(0, 1; X)$, les opérateurs $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ génèrent des semi-groupes analytiques, voir Favini et al [20] et [21].

0.1.3 Conditions aux limites de type Robin

Les auteurs Cheggag, Favini, Labbas, Maingot et Medeghri, à partir de 2008, se sont intéressés à l'équation (0.1.1), avec des conditions aux limites de type Robin généralisé

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \quad (0.1.2)$$

(généralisé c'est à dire les coefficient sont des opérateurs), ici H est un opérateur linéaire fermé sur X . Cheggag et ses co-auteurs ont traité le problème [(0.1.1), (0.1.2)] dans le cadre des espaces de Banach UMD, i.e. $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, et dans le cadre des espaces de Hölder i.e. $f \in C^\theta([0, 1]; X)$, $0 < \theta < 1$, et ont considéré le cas B génère un groupe fortement continu sur X , et celui où les opérateurs $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ génèrent des semi-groupes analytiques sur X , voir [9] – [12].

0.1.4 Conditions aux limites de type non local

Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à l'étude des équations différentielles elliptiques avec des conditions aux limites non locales. La première recherche dans ce domaine est due à Carleman [8], voir aussi Tamarkin [40]. Plus de références sur ce topic et des applications concrètes sont données dans la monographie de Skubachevski [39]. L'équation non linéaire avec des conditions aux limites non locales peut aussi être considérée, voir, par exemple, Wang [42].

Quelques papiers récents ont étudié l'équation différentielle opérationnelle de deuxième ordre avec des conditions aux limites non locales, et ont fourni une représentation de la solution, voir Aibeche et al. [1], [2] et Hammou et al. [27], [28].

Bitsadze et Samarskii ont présenté dans [6], quelques problèmes aux limites à conditions non locales venant de la théorie du plasma. Beaucoup d'auteurs ont étudié le problème de type Bitsadze-Samarskii, voir par exemple Ashyralyev [3], Ashyraliev et Ozturk [4] et récemment Ruzhansky, Tokmagambetov et Torebek [36], [37].

0.1.5 Le cas non commutatif

Dans tout ce qui précède, pour le cas $B \neq 0$, les auteurs ont fait l'hypothèse de commutativité $LM = ML$, avec

$$L = B - (B^2 - A)^{1/2} \text{ et } M = -B - (B^2 - A)^{1/2}.$$

En 2012, les auteurs Favini, Labbas, Maingot et Meisner ont réécrit l'équation

$$u''(x) + 2Bu'(x) + A_\omega u(x) = f(x),$$

sous la forme

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) + \frac{1}{4}[(L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2]A_\omega u(x) = f(x),$$

avec

$$\begin{cases} L_\omega - M_\omega \subset 2B, \\ -\frac{1}{2}(M_\omega L_\omega + L_\omega M_\omega) \subset A_\omega, \end{cases}$$

ici $M_\omega L_\omega \neq L_\omega M_\omega$ et L_ω, M_ω sont définis comme suit :

$$L = B - (B^2 - A + \omega I)^{1/2} \text{ et } M = -B - (B^2 - A + \omega I)^{1/2}.$$

Pour plus de détails, voir [22] et [23], voir aussi [13].

On cite aussi le travail fait par Cheggag, Labbas, Maingot et Kaid, ces auteurs ont considéré dans [14], le problème traité par Hammou et al. [27] et [28], mais sans faire l'hypothèse de commutativité suivante :

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta.$$

Ils ont donné une représentation de la solution adaptée, et des conditions nécessaires et suffisantes plus naturelles pour que le problème traité admet une solution stricte et semi-stricte.

Toujours dans le cadre non commutatif, le cas $B = 0$ et A variable, Da Prato et Grisvard ont traité l'équation non autonome

$$u''(x) + A(x)u(x) = f(x) \quad x \in (0, 1),$$

avec des conditions aux limites de type Sturm-Liouville, et $(-A(x))_{x \in [0,1]}$ est une famille d'opérateurs vérifiant l'hypothèse d'ellipticité de Krein et des hypothèses de différentiabilité sur la résolvante de type Tanabe et Yagi, voir [15], p. 373 et 375. Le même cas a été étudié par Labbas en 1986, avec une autre hypothèse sur les opérateurs elliptiques $(-A(x))_{x \in [0,1]}$, sans supposer la différentiabilité de la résolvante, voir [31].

0.2 Le plan de ce travail

Ce travail est composé de quatre chapitres :

Chapitre 1 On rappelle quelques notions et outils mathématiques utilisés dans ce travail : les opérateurs fermés, les puissances fractionnaires des opérateurs, les semi-groupes, les espaces d'interpolation, la théorie des sommes d'opérateurs. On donne aussi quelques lemmes techniques utiles pour l'étude de la régularité de la solution.

Chapitre 2 On détaille le cas $L = M$ et donc en posant $A = L^2$, on est amené à étudier les deux problèmes :

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0} \end{cases} \quad x_0 \in [0, 1[, \quad (0.2.1)$$

et

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0} \end{cases} \quad x_0 \in [0, 1[. \quad (0.2.2)$$

Dans la section 1, on fera les hypothèses suivantes :

Hypothèse UMD

$$X \text{ est espace UMD}, \quad (0.2.3)$$

(on rappelle que X est un espace de Banach UMD si et seulement si pour $p > 1$, la transformée de Hilbert est continue de $L^p(0, 1; X)$ dans lui même).

Hypothèse d'ellipticité

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X :]-\infty, 0] \subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists c > 0, \forall \lambda \geq 0 : \|(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{1 + \lambda}, \end{cases} \quad (0.2.4)$$

(de l'hypothèse (0.2.4) on déduit que l'opérateur $Q := -(A)^{\frac{1}{2}}$ existe et génère un semi-groupe analytique borné, noté $(e^{xQ})_{x \geq 0}$ (voir Balakrishnan [5]).

Hypothèse BIP

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists c > 1, \exists \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{\theta_A |s|}. \end{cases} \quad (0.2.5)$$

Hypothèse d'inclusion

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : D(Q^{k_0}) \subset D(H). \quad (0.2.6)$$

Hypothèse de commutativité

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \geq 0 : \\ (A + \lambda I)^{-1} \zeta \in D(H) \text{ et } (A + \lambda I)^{-1} H \zeta = H(A + \lambda I)^{-1} \zeta. \end{cases} \quad (0.2.7)$$

Hypothèse sur les déterminants Λ_1, Λ_2

Pour le problème 0.2.1, on va supposer que

$$0 \in \rho(\Lambda_1). \quad (0.2.8)$$

où $\Lambda_1 := I - e^{2Q} + H(e^{(1+x_0)Q} - e^{(1-x_0)Q})$.

Pour le problème 0.2.2, on suppose que

$$0 \in \rho(\Lambda_2). \quad (0.2.9)$$

où $\Lambda_2 := I - e^{2Q} + HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})$.

Dans la section 2, en supposant l'inversibilité de ses opérateurs, on construit la représentation de la solution en utilisant le semi-groupe analytique $(e^{xQ})_{x \geq 0}$.

La section 3 est consacrée aux principaux résultats obtenus, voir Hamdi et al. [26]. Pour les solutions semi-strictes on obtient :

Théorème 0.2.1 *Sous les hypothèses (0.2.3) \sim (0.2.8). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < \infty$, alors le problème (0.2.1) admet une unique solution semi-strictes u si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \\ (ii) e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (0.2.10)$$

Notons que :

– si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalent à

$$I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

car

$$e^{x_0 Q} H u_0, e^{x_0 Q} H J_0 \in D(Q) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

– si $x_0 = 0$ alors (ii) devient $u_0 \in D(H)$ et $u_{1,0} + H u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ car $I_0 = 0$.

Théorème 0.2.2 *Sous les hypothèses (0.2.3) \sim (0.2.7) et (0.2.9). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < \infty$. Le problème (2.1.2) admet une unique solution semi-strictes si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Q(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H Q(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (0.2.11)$$

De plus, dans ce cas, u est donnée par (2.4.4), notons que :

– si $x_0 \neq 0$ alors (2.5.6) est équivalent à

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H Q(I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

– si $x_0 = 0$ alors (2.5.6) devient

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(u_0 - 2J_0) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,0} + H Q(u_0 - 2J_0) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

Des résultats similaires (Théorèmes 2.5.2 et 2.5.4) sont obtenus pour le cas des solutions strictes.

Dans la section 4, on s'intéresse aux hypothèses d'inversibilité 0.2.8 et 0.2.9, on considère d'abord des cas particuliers d'opérateurs H pour lesquelles elles sont vérifiées :

– Pour le problème (0.2.1), $H = I$ et

$$H = -\alpha(-Q)^k, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0, k \in \mathbb{N}. \quad (0.2.12)$$

– Pour le problème (0.2.2),

$$H = -\alpha(-Q)^k, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0, k \in \mathbb{N}. \quad (0.2.13)$$

En particulier, dans les cas (0.2.12) et (0.2.13), on utilise le calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels pour inverser les déterminants opérationnels correspondants.

On considère ensuite, les problèmes (0.2.1) et (0.2.2) avec un paramètre spectral $\omega \geq 0$ dans l'équation. On montre que les hypothèses d'inversibilité sont vérifiées pour ω assez grand. On obtient alors des résultats similaires, à ceux décrits ci-dessus, pour les solutions semi-strictes et strictes.

Finalement, dans la section 5, on donne des exemples d'applications à des problèmes concrets d'EDP.

Chapitre 3 On considère A et B deux opérateurs linéaires fermés (avec une hypothèse de commutation adéquate) pour lesquels on peut définir $\sqrt{B^2 + A}$. En posant

$$L = -B - \sqrt{B^2 + A}, M = B - \sqrt{B^2 + A},$$

l'équation (0.0.1) s'écrit :

$$-u''(x) - 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \quad \text{p.p. } 0 < x < 1. \quad (0.2.14)$$

On étudie alors les problèmes aux limites [(0.2.14), (0.0.2)] et [(0.2.14), (0.0.3)]. On suppose que $A + B^2$ est BIP et que B génère un groupe fortement continu. On obtient alors des résultats similaires (voir section 3.4) pour le cas des solutions strictes et semi-strictes. On applique ces résultats à des exemples concrets d'EDP.

chapitre 4 On étudie les problèmes généraux [(0.0.1), (0.0.2)] et [(0.0.1), (0.0.3)] sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse UMD

$$X \text{ est un espace UMD}, \quad (0.2.15)$$

Hypothèses sur L et M

$$\begin{cases} D(L) = D(M), \\ D(ML) = D(LM), \end{cases} \quad (0.2.16)$$

$$ML = LM, \quad (0.2.17)$$

$$\exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[: -L \in BIP(\theta_L, X), -M \in BIP(\theta_M, X), \quad (0.2.18)$$

(de l'hypothèse (0.2.18), on déduit que L et M génèrent des semi-groupes analytiques dans X).

$$(L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \quad (0.2.19)$$

Hypothèse sur M en lien avec H

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(-M), \forall \xi \in D(H); \\ (M + \lambda I)^{-1} \xi \in D(H) \text{ et } H(M + \lambda I)^{-1} \xi = (M + \lambda I)^{-1} H \xi, \end{cases} \quad (0.2.20)$$

Hypothèse sur L en lien avec H

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(-L), \forall \xi \in D(H); \\ (L + \lambda I)^{-1} \xi \in D(H) \text{ et } H(L + \lambda I)^{-1} \xi = (L + \lambda I)^{-1} H \xi, \end{cases} \quad (0.2.21)$$

et

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : D(L^{k_0}) \subset D(H), \quad (0.2.22)$$

Hypothèse sur les déterminants Υ_1, Υ_2

Pour le problème [(0.0.1), (0.0.2)]

$$0 \in \rho(\Upsilon_1). \quad (0.2.23)$$

où $\Upsilon_1 = -H(-e^{x_0 L} e^M + e^{(1-x_0)M}) + (-e^L e^M + I)$,

Pour le problème [(0.0.1), (0.0.3)]

$$0 \in \rho(\Upsilon_2). \quad (0.2.24)$$

où $\Upsilon_2 = H(L e^{x_0 L} e^M + M e^{(1-x_0)M}) + (-e^L e^M + I)$,

On construit une représentation de la solution pour chaque problème en utilisant les semi-groupes $(e^{xL})_{x \geq 0}$, $(e^{xM})_{x \geq 0}$. On trouve les résultats suivants (pour la solution semi-stricte) :

Théorème 0.2.3 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, sous les hypothèses (0.2.15) \sim (0.2.23), le problème [(0.0.1), (0.0.2)] admet une unique solution semi-stricte si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \text{ et} \\ (ii) e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

De plus,

- si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalent à

$$I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

car

$$e^{x_0 L} H u_0, e^{x_0 L} H J_0 \in D(L) \subset (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

- si $x_0 = 0$ alors (ii) devient $u_0 \in D(H)$ et $u_{1,0} + H u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ car $I_0 = 0$.

Théorème 0.2.4 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$, sous les hypothèses (0.2.15) \sim (0.2.23), le problème [(0.0.1), (0.0.3)] admet une unique solution semi-stricte si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \text{ et} \\ (ii) L e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + L I_{x_0} - M J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(L e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + L I_{x_0} - M J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (0.2.25)$$

De plus,

– si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalent à

$$LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}$$

car

$$e^{x_0 L} H L u_0, e^{x_0 L} H L J_0 \in D(L^2) \subset (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

– si $x_0 = 0$ alors (ii) devient $L(u_0 - J_0) - MJ_0 \in D(H)$ et $u_{1,0} + H[L(u_0 - J_0) - MJ_0] \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ car $I_0 = 0$.

Des résultats similaires (Théorèmes 4.1.2 et 4.1.4) sont obtenus pour le cas des solutions strictes.

On s'intéresse aussi dans ce chapitre au problème avec un paramètre spectral, à la place de L et M on considère L_ω et M_ω avec

$$\begin{cases} L_\omega = -B - (B^2 + A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega = B - (B^2 + A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{et } A_\omega = A - \omega I. \end{cases}$$

Où A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur X . Nos problèmes deviennent :

$$\begin{cases} -u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) + L_\omega M_\omega u(x) = f(x), & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - H u(x_0) = u_{1,x_0}, & x_0 \in [0, 1[\end{cases} \quad (0.2.26)$$

$$\begin{cases} -u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) + L_\omega M_\omega u(x) = f(x), & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - H u'(x_0) = u_{1,x_0}, & x_0 \in [0, 1[\end{cases} \quad (0.2.27)$$

Sous de bonnes hypothèses on obtient (pour les solutions semi-strictes et strictes) :

Théorème 0.2.5 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, sous les hypothèses (0.2.15) et (4.3.2) \sim (4.3.8), le problème (0.2.26) admet une unique solution

– semi-strictes si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \text{ et} \\ (ii) e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases} \quad (0.2.28)$$

– strictes si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \text{ et} \\ (ii) e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \end{cases} \quad (0.2.29)$$

$$\text{ici } I_x = -(L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)L_\omega} f(s) ds \text{ et } J_x = (L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)M_\omega} f(s) ds.$$

Théorème 0.2.6 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, sous les hypothèses (0.2.15) et (4.3.2) \sim (4.3.8), le problème (0.2.27) admet une unique solution

– *semi-stricte si et seulement si* :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \text{ et} \\ (ii) L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (0.2.30)$$

– *stricte si et seulement si* :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \text{ et} \\ (ii) L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases} \quad (0.2.31)$$

$$\text{ici } I_x = -(L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)L_\omega} f(s) ds \text{ et } J_x = (L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)M_\omega} f(s) ds.$$

Finalement, on présente des exemples d'applications à des problèmes concrets d'EDP.

Rappels

1.1 Les opérateurs linéaires

Soient $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach complexes.

Définition 1.1.1 On dit que A est un opérateur linéaire de X dans Y , si A est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$, à valeurs dans Y . ($D(A)$ s'appelle domaine de A).

Définition 1.1.2 Soit A un opérateur linéaire de $D(A) \subset X$ dans Y , alors :

1. On dit que A est à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$.
2. On appelle image de A le sous espace vectoriel $\text{Im}(A)$, défini par

$$\text{Im}(A) = \{y \in Y : \exists x \in D(A), y = Ax\}.$$

3. On appelle graphe de A le sous espace vectoriel $G(A)$ de $X \times Y$, défini par :

$$\{(x, y) \in X \times Y : x \in D(A), y = Ax\}$$

4. On dit que A est un opérateur linéaire sur X si $Y = X$.

Définition 1.1.3 Soient A et B deux opérateurs linéaires de X dans Y . On dit que B est une extension de A , et on note $A \subset B$ si :

1. $D(A) \subset D(B)$,
2. $\forall x \in D(A), Ax = Bx$.

Définition 1.1.4 On dit qu'un opérateur A de X dans Y est **borné** si :

1. $D(A) = X$,
2. $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < +\infty$.

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires et bornés de X dans Y . si $X = Y$ on pose $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Proposition 1.1.1 *Si Y est un espace de Banach, alors l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

Définition 1.1.5 *Soit A un opérateur linéaire sur X , si A est injectif, on peut définir l'inverse de A , noté A^{-1} , par*

$$\begin{aligned} A^{-1} : \text{Im}(A) &\longrightarrow X \\ v &\longmapsto A^{-1}v = u, \end{aligned}$$

où $u \in D(A)$ et $Au = v$.

Proposition 1.1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, alors $I - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$.*

Définition 1.1.6 *Soit A un opérateur linéaire sur X , on définit l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A par :*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

L'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ s'appelle le **spectre** de A .

Définition 1.1.7 1. *On dit qu'un opérateur linéaire A de X dans Y est **fermé** si pour tout $(x, y) \in X \times Y$ et pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0} \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X et $Ax_n \longrightarrow y$ dans Y , alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

2. *On dit que A est **fermable** si et seulement s'il admet une extension fermée.*

Remarque 1.1.1 *Si A est un opérateur linéaire fermé et bijectif, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Définition 1.1.8 *Soient A et B deux opérateurs linéaires sur X . On définit l'opérateur $A+B$ et AB par*

$$\begin{cases} D(A+B) = D(A) \cap D(B), \\ (A+B)u = Au + Bu, u \in D(A+B), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(AB) = \{u \in D(B) : Bu \in D(A)\}, \\ (AB)u = A(Bu), u \in D(AB). \end{cases}$$

Proposition 1.1.3 *Soient A un opérateur linéaire fermé sur X et $B \in \mathcal{L}(X)$. Alors les deux opérateurs $A+B$ et AB sont fermés.*

Théorème 1.1.1 (*Grphe fermé*) *Soit A un opérateur linéaire fermé de $D(A) = X$ dans Y . Alors A est borné.*

Corollaire 1.1.1 *Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé et $B \in \mathcal{L}(X)$, avec $\text{Im}(B) \subset D(A)$. Alors*

$$AB \in \mathcal{L}(X).$$

1.2 Calcul et intégrale de Dunford

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule de Cauchy pour construire $f(A)$ où A est un opérateur linéaire borné et f est holomorphe.

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , on désigne par $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes de U dans \mathbb{C} .

Définition 1.2.1 Soient $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K , alors la formule de Cauchy nous donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

avec Γ est le bord positivement orienté de K .

Définition 1.2.2 Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et U un voisinage ouvert de $\sigma(A)$. Alors pour $f \in H(U)$, on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de d'un compact à bord K tel que $\sigma(A) \subset \overset{\circ}{K} \subset U$.

1.2.1 Calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels

Calcul fonctionnel borné

Définition 1.2.3 Soit $\omega \in [0, \pi]$, on définit l'ensemble S_ω par

$$S_\omega = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ et } |\arg z| < \omega\} & \text{si } 0 < \omega \leq \pi, \\]0, +\infty[& \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

Si $\omega \neq 0$, S_ω désigne le **secteur** ouvert, symétrique autour de l'axe réel positif, d'angle ω .

Définition 1.2.4 Soient $\omega \in [0, \pi[$ et A un opérateur linéaire sur X . Alors A est dit **sectoriel** d'angle ω , noté $A \in \text{Sect}(\omega)$, si

1. $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$,
2. $\forall \omega' \in]\omega, \pi[, \exists M > 0, \sup\{\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} \leq M$.

Dans la suite, on suppose que $A \in \text{Sect}(\omega_A)$, $\omega_A \in [0, \pi[$.

Définition 1.2.5 Soit $f \in H(S_\omega)$ avec $\omega > \omega_A$, on suppose que f vérifie :

1. $\sup\{|f(z)| : z \in S_\omega\} < +\infty$ et
2. $\exists s \geq 0, \sup\{\max(|z|^s, |z|^{-s}) |f(z)| : z \in S_\omega\} < +\infty$.

Alors, on définit l'opérateur linéaire borné $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\theta} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

avec γ_θ est le bord positivement orienté du secteur S_θ et $\theta \in]\omega_A, \omega[$.
Notons que, d'après les conditions 1. et 2., l'intégrale est convergente.

Définition 1.2.6 Soit $f \in H(S_\omega)$ avec $\omega > \omega_A$, on suppose que

$$\exists s > 0, |f| = O(|z|^{-s}) \text{ au voisinage de l'infini.} \quad (1.2.1)$$

Et on suppose que $0 \in \rho(A)$, donc il existe $R > 0$ tel que $B(0, R) \subset \rho(A)$. Alors, on définit l'opérateur linéaire borné $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\theta, R'}} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

avec $\gamma_{\theta, R'}$ est le bord positivement orienté du secteur $S_\theta \setminus B(0, R')$ et $\theta \in]\omega_A, \omega[$, $R' \in]0, R[$.

Définition 1.2.7 Soit $f \in H(S_\omega)$ avec $\omega > \omega_A$, on suppose que f admet un prolongement holomorphe sur $B(0, R)$ et vérifie

$$\exists s > 0, |f| = O(|z|^{-s}) \text{ au voisinage de l'infini.}$$

Alors, on définit l'opérateur linéaire borné $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\theta, R'}} f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

avec $\Gamma_{\theta, R'}$ est le bord positivement orienté du secteur $S_\theta \cup B(0, R')$ et $\theta \in]\omega_A, \omega[$, $R' \in]0, R[$.

Extension du calcul fonctionnel

Dans cette partie $f(A)$ est un opérateur linéaire fermé n'est pas nécessairement borné.

Définition 1.2.8 Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$$\psi(z) = \frac{1}{1+z},$$

et soit $f \in H(S_\omega)$ avec $\omega \in]\omega_A, \pi[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\psi^n f$ vérifie

1. $\sup\{ |(\psi^n f)(z)| : z \in S_\omega \} < +\infty$ et
2. $\exists s \geq 0, \sup\{ \max(|z|^s, |z|^{-s}) |(\psi^n f)(z)| : z \in S_\omega \} < +\infty$.

On définit l'opérateur $f(A)$ par

$$f(A) := (I + A)^n (\psi^n f)(A).$$

Il est clair que $f(A)$ est un opérateur fermé puisque on a $(\psi^n f)(A) \in \mathcal{L}(X)$ et $(I + A)^n$ est un opérateur fermé.

Définition 1.2.9 Soient ϕ une fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$$\phi(z) = \frac{z}{(1+z)^2},$$

et $f \in H(S_\omega)$ avec $\omega \in]\omega_A, \pi[$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\phi^n f$ vérifie

1. $\sup\{ |(\phi^n f)(z)| : z \in S_\omega \} < +\infty$ et
2. $\exists s > 0, \sup\{ \max(|z|^s, |z|^{-s}) |(\phi^n f)(z)| : z \in S_\omega \} < +\infty$.

On suppose que A est un opérateur injectif et on définit l'opérateur linéaire fermé $f(A)$ par

$$f(A) := (I + A)^{2n} A^{-n} (\phi^n f)(A).$$

1.3 Puissances complexes d'opérateurs

Dans cette partie, on veut définir l'opérateur $A^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$, en utilisant la fonction $f(z) = z^\alpha$, il est clair que $f \in H(S_\omega)$ avec $\omega \in]0, \pi[$. Alors on considère trois cas

- Soient $\alpha \in \mathbb{C}, 0 \in \rho(A)$ et $\operatorname{Re} \alpha < 0$, alors on a $A^\alpha = f(A) \in \mathcal{L}(X)$, on utilise la Définition 1.2.6, on obtient

$$A^\alpha = f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\theta, R'}} z^\alpha (zI - A)^{-1} dz$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on a la fonction f vérifie les conditions 1. et 2. de la Définition 1.2.8, si on suppose que $\operatorname{Re} \alpha > 0$, alors l'opérateur A^α est fermé et on a

$$A^\alpha = f(A) := \frac{1}{2i\pi} (I + A)^n \int_{\gamma_\theta} \frac{z^\alpha}{(1+z)^n} (zI - A)^{-1} dz$$

avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |\alpha|$, et γ_θ est le bord positivement orienté du secteur S_θ et $\theta \in]\omega_A, \omega[$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on suppose que A est injective, on utilise la Définition 1.2.9 pour définir l'opérateur linéaire fermé $A^\alpha = f(A)$ par

$$A^\alpha = f(A) := \frac{1}{2i\pi} (I + A)^{2n} A^{-n} \int_{\gamma_\theta} \frac{z^n z^\alpha}{(1+z)^{2n}} (zI - A)^{-1} dz$$

avec γ_θ est le bord positivement orienté du secteur S_θ et $\theta \in]\omega_A, \omega[$, et $n \in \mathbb{N}, n > |\alpha|$.

1.4 Semi-groupes

1.4.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.4.1 On appelle *semi-groupe* d'opérateurs linéaires toute famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant :

1. $S(0) = I$,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $t, s \geq 0$.

De plus, si pour tout $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0,$$

on dit que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continu (ou encore C_0 -semi-groupe).

Exemple 1.4.1 Soit $X = L^p(\mathbb{R})$, alors l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}), \\ Au = u' \end{cases}$$

est le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe

$$[S(t)f](x) = f(t+x), t \geq 0 \text{ et } f \in X.$$

Proposition 1.4.1 Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, alors il existe $M \geq 1$, et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Ici $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ s'appelle C_0 -semi-groupe de type (M, ω) , si $(M, \omega) = (1, 0)$ le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ s'appelle C_0 -semi-groupe de contraction.

Définition 1.4.2 On appelle **générateur infinitésimal** du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ l'opérateur linéaire A défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \neq \emptyset, \\ Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

Théorème 1.4.1 Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe de générateur infinitésimal A , alors

1. pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x,$$

2. pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$: $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$ et

$$A \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x,$$

3. pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$: $S(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax,$$

4. pour tout $x \in D(A)$ et $t_1, t_2 \geq 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} AS(s)x ds = S(t_2)x - S(t_1)x.$$

Théorème 1.4.2 (Hille-Yoshida) Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X . Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur X si et seulement si

$$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A) \text{ et } \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Théorème 1.4.3 (Feller-Miyadera-Phillips) Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X . Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de type (M, ω) sur X , si et seulement si

$$]\omega, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \forall \lambda > \omega, \forall n \in \mathbb{N}^*; \|(A - \lambda I)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Définition 1.4.3 On appelle **groupe** d'opérateurs linéaires toute famille $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant :

1. $G(0) = I$,
2. $G(t + s) = G(t)G(s)$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$.

De plus, si pour tout $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t)x - x\| = 0$$

on dit que le groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continu.

1.4.2 Semi-groupes différentiables

Définition 1.4.4 Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, on dit que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est différentiable si pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto S(t)x$ est différentiable de $]0, +\infty[$ dans X .

Proposition 1.4.2 Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe différentiable, et A son générateur infinitésimal. Alors pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a

1. $\forall t \in]0, +\infty[, S(t)x \in D(A^k)$.
2. $\forall t \in]0, +\infty[, S(t)x \in D(A^k)$ et la fonction $t \mapsto S(t)x$ est k fois différentiable de $]0, +\infty[$ dans X et vérifie

$$\forall t \in]0, +\infty[, S^{(k)}(t)x = A^k S(t)x.$$

3. $\forall t \in]0, +\infty[, S^{(k)}(t) \in \mathcal{L}(X)$.
4. $t \mapsto S^{(k)}(t)$ est différentiable de $]0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}(X)$.

1.4.3 Semi-groupes analytiques

Définition 1.4.5 Soit Δ un ensemble de \mathbb{C} défini par

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$$

On appelle **semi-groupe analytique** toute famille $\{S(z)\}_{z \in \Delta}$ dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant :

1. $S(0) = I$,
2. $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \Delta$,
3. $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta} G(z)x = x$ pour tout $x \in X$,
4. l'application $z \in \Delta \setminus \{0\} \mapsto S(z)x \in X$ est holomorphe pour tout $x \in X$.

Exemple 1.4.2 Soit $X = L^p(0, 1)$, $1 \leq p \leq +\infty$, on pose

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in W^{2,p}(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}, \\ Au = u'', \end{cases}$$

alors l'opérateur A est générateur d'un semi-groupe analytique. On a

$$\sigma(A) = \{-k^2\pi^2 : k = 1, 2, \dots\}$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\lambda| \cos \frac{\theta}{2}}, \theta = \arg \lambda.$$

Théorème 1.4.4 (Kato) Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé non borné de domaine dense et vérifie

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \text{ et } \exists L > 0, \forall \lambda \in \rho(A) : \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{L}{|\lambda|}.$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe tel que :

- $\exists M > 0, \forall t > 0 : \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$.
- $\forall t > 0 : S(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et

$$\|AS(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{t}.$$

Remarque 1.4.1 Le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ obtenu dans le Théorème de Kato se prolonge analytiquement en un semi-groupe holomorphe.

Maintenant on va donner la notion des semi-groupes analytiques généralisés, voir [38], ici le semi-groupe n'est pas supposé fortement continu et l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ n'est pas nécessairement de domaine dense dans X .

Définition 1.4.6 Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \theta < \pi$, $r > 0$ et A un opérateur linéaire fermé sur X tel que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\theta, \omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \omega : \arg(\lambda - \omega) < \theta\}, \\ \sup_{\lambda \in S_{\theta, \omega}} \|(\lambda - \omega)R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{cases}$$

Alors on définit le semi-groupe analytique généralisé $(e^{tA})_{t \geq 0}$ par

$$e^{tA} = \begin{cases} I, & \text{si } t = 0, \\ \int_{\gamma_{\alpha, \omega, r}} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda, & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

avec $\gamma_{\alpha, \omega, r}$ est le bord négativement orienté de $S_{\alpha, \omega} \setminus B(\omega, r)$.

Proposition 1.4.3 *Le générateur infinitésimal de $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un opérateur linéaire $B \subset A$, tel que*

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in D(A) : Bu \in \overline{D(A)}\} \\ Bu = Au, u \in D(B). \end{cases}$$

Si $\overline{D(A)} = X$, alors $D(B) = D(A)$ et $B = A$.

Proposition 1.4.4 *Le semi-groupe analytique $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est fortement continu si et seulement si $D(A)$ est dense dans X .*

1.5 Les espaces d'interpolation

Définition 1.5.1 *Soient X un espace de Banach et $p \in [1, +\infty]$, on définit l'espace de Banach $L_*^p(\mathbb{R}^+; X)$ par*

$$L_*^p(\mathbb{R}^+; X) = \{f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X \text{ fortement mesurable, } \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X)} < +\infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} & \text{si } p \in [1, +\infty[, \\ \sup_{0 \leq t < +\infty} \text{ess } \|f(t)\|_X < +\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Définition 1.5.2 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ et $(X_0, \|\cdot\|_0), (X_1, \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach, tout deux contenus dans un espace topologique séparé X .*

Alors l'espace d'interpolation $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ est un espace intermédiaire entre $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$, défini par :

$x \in (X_0, X_1)_{\theta, p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall t > 0, \exists \varphi_0(t) \in X_0, \exists \varphi_1(t) \in X_1 : x = \varphi_0(t) + \varphi_1(t), \\ t^{-\theta} \varphi_0 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0), t^{1-\theta} \varphi_1 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.5.1 *L'espace $((X_0, X_1)_{\theta, p}, \|\cdot\|_{\theta, p})$ est un espace de Banach, avec*

$$\|x\|_{\theta, p} = \inf_{\substack{\varphi_0, \varphi_1 \\ x = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)}} \|t^{-\theta} \varphi_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0)} + \|t^{1-\theta} \varphi_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1)}.$$

De plus, on a

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta, p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Notons que $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ sont deux espaces de Banach avec la norme

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}$$

et

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{x_i \in X_i, x_0 + x_1 = x} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1})$$

respectivement.

Proposition 1.5.2 Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$. Alors

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_1, X_0)_{1-\theta, p}.$$

Dans notre travail on s'intéresse à l'espace d'interpolation $(D(A), X)_{\theta, p}$, où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ dans X , et vérifie certaines hypothèses. On va donner quelques caractérisations de cet espace dans la proposition suivante :

Proposition 1.5.3 Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$. Alors

1. Si l'opérateur A vérifie

$$\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A) \text{ et } \exists C > 0 : \forall t > 0, \|t(A - tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C,$$

donc on a

$$(D(A), X)_{\theta, p} = \{x \in X : t^{1-\theta} A(A - tI)^{-1}x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\}.$$

Voir Grisvard [24].

2. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X , alors

$$(D(A), X)_{\theta, p} = \{x \in X : t^{\theta-1}(e^{tA} - I)x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\}.$$

Voir Lions [33].

3. Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X , alors

$$(D(A), X)_{\theta, p} = \{x \in X : t^\theta A e^{tA} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\}.$$

Voir Butzer et Berens [7].

Proposition 1.5.4 (Rétération) Soient $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\theta \notin \mathbb{N}$. Alors on a :

$$(X, D(A^k))_{\theta, p} = (X, D(A))_{k\theta, p}.$$

Afin d'obtenir des résultats concernant la régularité de la solution on a besoin du lemme suivant, qui est prouvé dans Triebel [41].

Lemme 1.5.1 (Triebel) Soient $\varphi \in X$ et Q le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné sur X . Alors pour $p \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(x \mapsto Q^n e^{xQ} \varphi) \in L^p(0, 1; X) \iff \varphi \in (D(Q^n), X)_{\frac{1}{np}, p}.$$

1.6 La théorie des sommes d'opérateurs

Soit X un espace de Banach, dans cette section on va résoudre l'équation $Au + Bu = g$ en utilisant l'approche de Dore et Venni, avec A et B deux opérateurs linéaires fermés, de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans X et $g \in L^p(\mathbb{R}; X)$, $p \in]1, +\infty[$.

D'abord on donne la notion des espaces UMD et des opérateurs BIP puis on va donner le théorème de Dore et Venni.

1.6.1 Espaces UMD

Afin d'utiliser le résultat de Dore et Venni il faut que l'espace de Banach X soit UMD (Unconditional Martingale Differences).

Définition 1.6.1 Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$, on définit l'opérateur $\mathcal{H}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X))$, par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}; X), (\mathcal{H}_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |s| < 1/\varepsilon} \frac{f(x-s)}{s} ds, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R},$$

si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R}; X)$ cette limite est notée $\mathcal{H}f$ et s'appelle la transformée de Hilbert de f sur $L^p(\mathbb{R}; X)$.

Définition 1.6.2 On dit que X est un espace UMD s'il existe $p \in]1, +\infty[$ tel que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}; X) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}; X)$$

et l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : L^p(\mathbb{R}; X) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}; X), \\ f &\longmapsto \mathcal{H}f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire borné sur $L^p(\mathbb{R}; X)$ et s'appelle la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R}; X)$.

Proposition 1.6.1 Soit Ω un espace mesuré σ -fini, et $p \in]1, +\infty[$

1. Tout espace UMD est réflexif.
2. Si X est un espace UMD , alors $L^p(\Omega; X)$ est un espace UMD .
3. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors $L^p(\Omega)$ est un espace UMD .

Remarque 1.6.1 Comme les espaces L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs, donc ils ne sont pas UMD .

1.6.2 Résultat de Dore et Venni

Définition 1.6.3 Soit $\theta \in [0, \pi[$. On dit que $A \in BIP(X, \theta)$, si

1. A est injectif,
2. $\exists \omega \in [0, \pi[, A \in \text{Sect}(\omega)$,
3. $\overline{D(A)} = \overline{\text{Im}(A)} = X$,
4. $\forall s \in \mathbb{R}, A^{is} \in \mathcal{L}(X)$ et $\exists C > 0, \forall s \in \mathbb{R}, \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{|s|\theta}$.

Notons que BIP veut dire que la puissance imaginaire de l'opérateur est borné (Bounded Imaginary Powers).

Théorème 1.6.1 (Dore-Venni) Soient X un espace UMD , $\theta_A, \theta_B \in [0, \pi[, \theta_A + \theta_B < \pi$ et $A \in BIP(X, \theta_A), B \in BIP(X, \theta_B)$. Si on suppose que A et B commutent au sens des résolvantes, alors l'opérateur $L = A + B$ est fermé et inversible et $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

De plus L^{-1} est défini par l'intégrale

$$L^{-1} = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma} \frac{A^{-z} B^{1-z}}{\sin \pi z} dz$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } z < 1\}$ et orientée de $\infty e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vers $\infty e^{i\frac{\pi}{2}}$.

1.6.3 Application du théorème de Dore et Venni au problème de Cauchy

Soit X un espace de Banach UMD . On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} v'(t) - Qv(t) = f(t), & t \in [0, 1] \\ v(0) = 0, \end{cases} \quad (1.6.1)$$

où $f \in L^p(0, 1; X)$ et Q est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(Q)$ dense dans X . On suppose que

$$\exists C > 0, \forall \lambda \geq 0 : \|(Q - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda},$$

et

$$\forall s \in \mathbb{R}, (-Q)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists C > 0, \theta_Q \in [0, \frac{\pi}{2}[: \|(-Q)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_Q |s|},$$

c'est à dire $-Q \in BIP(X, \theta_Q)$.

On écrit l'équation de notre problème (1.6.1) sous forme de somme de deux opérateurs, pour cela on définit un opérateur P par

$$\begin{cases} D(P) = \{v \in W^{1,p}(0, 1; X) : v(0) = 0\}, \\ Pv = v', v \in D(P) \end{cases}$$

d'après le Théorème 3.1, p. 195 dans Dore et Venni [16], l'opérateur P vérifie

$$]-\infty, 0] \subset \rho(P) \text{ et } \forall \lambda \geq 0 : \|(P + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1 + \lambda},$$

et

$$\forall s \in \mathbb{R}, P^{is} \in \mathcal{L}(L^p(0, 1; X)) \text{ et } \|P^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C(1 + s^2)e^{\frac{\pi}{2}|s|}.$$

On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée

$$\forall \lambda \in \rho(P), \mu \in \rho(Q) : (P - \lambda I)^{-1}(Q - \mu I)^{-1} = (Q - \mu I)^{-1}(P - \lambda I)^{-1},$$

maintenant on peut appliquer le Théorème 1.6.1 pour trouver le résultat suivant :

Théorème 1.6.2 *Soient X un espace UMD , $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$ et $-Q \in BIP(X, \theta_Q)$ avec $\theta_Q \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Alors le problème de Cauchy (1.6.1) a une unique solution $v \in W^{1,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(Q))$, donnée par*

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds.$$

De plus, v, v' et Qv dépendent continûment de f dans L^p .

Corollaire 1.6.1 *Soit $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$. On pose $F(x, f) = Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds$, alors*

$$F(\cdot, f) = x \mapsto Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds = Qv \in L^p(0, 1; X),$$

on peut aussi déduire que

$$x \mapsto Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds = F(1 - \cdot, f(1 - \cdot)) \in L^p(0, 1; X),$$

et

$$x \mapsto Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds = F(\cdot, e^{2Q} f) + e^{2(\cdot)Q} F(1 - \cdot, f(1 - \cdot)) \in L^p(0, 1; X).$$

Proposition 1.6.2 Soit $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, on pose

$$J_0 = -\frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \text{ et } I_1 = -\frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds.$$

Alors $J_0, I_1 \in (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.

Preuve. D'après le Corollaire 1.6.1, on a

$$x \mapsto Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds = Qe^Q \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \in L^p(0, 1; X),$$

d'après le Lemme 1.5.1, on déduit que

$$\int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \quad (1.6.2)$$

De (1.6.2), on a

$$\begin{aligned} QJ_0 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p} = (X, D(Q))_{1 - \frac{1}{p}, p} \\ &= (X, D(Q^2))_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p} \end{aligned}$$

donc $J_0 \in (X, D(Q^2))_{1 - \frac{1}{2p}, p} = (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.

Pour I_1 , on a $I_1 = \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^1 e^{tQ} f(1-t) dt$, et comme $f(1-\cdot) \in L^p(0, 1; X)$, donc

$I_1 \in (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$. □

Théorème 1.6.3 Soient X un espace UMD, $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$ et $-Q \in BIP(X, \theta_Q)$, $\theta_Q \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) - Qv(t) = f(t), & t \in [0, 1] \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

a une unique solution $v \in W^{1,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(Q))$, donnée par

$$v(x) = e^{xQ} v_0 + \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds,$$

si et seulement si, $v_0 \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p}$.

Problème à conditions aux limites non locales généralisées de type Bitsadze-Samarskii dans le cadre des espaces L^p

2.1 Position du problème

Soit $x_0 \in [0, 1[$ fixé. On considère les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

et

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

avec X est un espace de Banach complexe, $f \in L^p(0, 1; X)$ où $1 < p < +\infty$, $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et A, H sont des opérateurs linéaires fermés sur X .

2.2 Hypothèses

- Hypothèse UMD

$$X \text{ est un espace } UMD. \quad (2.2.1)$$

- Hypothèse d'ellipticité

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X :]-\infty, 0] \subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists c > 0, \forall \lambda \geq 0 : \|(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

De l'hypothèse (2.2.2) on déduit que l'opérateur $Q := -(A)^{\frac{1}{2}}$ existe et génère un semi-groupe analytique borné, noté $(e^{xQ})_{x \geq 0}$, voir Balakrishnan [5].

- Hypothèse BIP

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists c > 1, \exists \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R}, \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{\theta_A |s|}. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

- Hypothèse d'inclusion

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : D(Q^{k_0}) \subset D(H). \quad (2.2.4)$$

- Hypothèse de commutativité

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \geq 0 : \\ (A + \lambda I)^{-1} \zeta \in D(H) \text{ et } (A + \lambda I)^{-1} H \zeta = H(A + \lambda I)^{-1} \zeta. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

- Hypothèse sur les déterminants Λ_1, Λ_2

Pour le problème (2.1.1), on va supposer que

$$0 \in \rho(\Lambda_1). \quad (2.2.6)$$

où $\Lambda_1 := I - e^{2Q} + H(e^{(1+x_0)Q} - e^{(1-x_0)Q})$

Pour le problème (2.1.2), on suppose que

$$0 \in \rho(\Lambda_2). \quad (2.2.7)$$

où $\Lambda_2 := I - e^{2Q} + HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})$.

Remarque 2.2.1

1. Sous l'hypothèse (2.2.2), on a pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$

$$e^{xQ}(X) \subset D(Q^k) \text{ et } Q^k e^{xQ} \in \mathcal{L}(X).$$

car Q génère un semi-groupe analytique borné.

2. Pour $j = 0, 1$, on a $Q^j(e^{(1+x_0)Q} - (-1)^j e^{(1-x_0)Q}) \in \mathcal{L}(X)$ avec

$$Q^j(e^{(1+x_0)Q} - (-1)^j e^{(1-x_0)Q})(X) \subset D(Q^{k_0}).$$

Alors de l'hypothèse (2.2.4) on a $Q^j(e^{(1+x_0)Q} - (-1)^j e^{(1-x_0)Q})(X) \subset D(H)$, donc

$$\begin{cases} \Lambda_1 = I - e^{2Q} + H(e^{(1+x_0)Q} - e^{(1-x_0)Q}) \in \mathcal{L}(X), \\ \Lambda_2 = I - e^{2Q} + HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}) \in \mathcal{L}(X). \end{cases}$$

3. De l'hypothèse (2.2.4), on a

$$D(A^{k_0}) = D(Q^{2k_0}) \subset D(Q^{k_0}) \subset D(H).$$

4. Sous les hypothèses (2.2.2), (2.2.4) et (2.2.5) on donne deux cas, pour chaque cas l'hypothèse (2.2.5) peut être simplifiée.

Premier cas : $k_0 \in \{1, 2\}$. Puisque on a $D(A) \subset D(H)$, il est facile de voir que (2.2.5) et les assertions suivantes sont équivalentes

- $\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta,$
- $D(AH) \subset D(HA)$ et $\forall \xi \in D(AH), AH\xi = HA\xi,$
- $\forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \in \rho(-A) : (A + \lambda I)^{-1}H\zeta = H(A + \lambda I)^{-1}\zeta.$

Deuxième cas : $\rho(H) \neq \emptyset$. Il existe $\mu_0 \in \rho(H)$, alors l'hypothèse (2.2.5) et les assertions suivantes sont équivalentes

- $A^{-1}(H - \mu_0 I)^{-1} = (H - \mu_0 I)^{-1}A^{-1},$
- $\forall \lambda \in \rho(-A), \forall \mu \in \rho(H) :$

$$(A + \lambda I)^{-1}(H - \mu I)^{-1} = (H - \mu I)^{-1}(A + \lambda I)^{-1},$$

- $\forall \lambda \in \rho(-A), \forall \zeta \in D(H) : (A + \lambda I)^{-1}H\zeta = H(A + \lambda I)^{-1}\zeta.$

En particulier, dans les deux cas l'hypothèse (2.2.5) est équivalente à

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta,$$

qui est exactement l'hypothèse (2.6) donnée dans Hammou et al [28].

5. Sous les hypothèses (2.2.2), (2.2.4) et (2.2.5), on a pour $\mu \in \rho(Q), \zeta \in D(H)$ et $x \geq 0$,

$$\begin{cases} (i) (Q - \mu I)^{-1}H\zeta = H(Q - \mu I)^{-1}\zeta, \\ (ii) He^{xQ}\zeta = e^{xQ}H\zeta. \end{cases}$$

Pour (i), d'abord on écrit

$$(Q - \mu I)^{-1} = \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2}}{t + \mu^2} (A + tI)^{-1} dt,$$

(voir Fattorini [18], Sect. 6.4 p. 371). Maintenant l'intégrale

$$\frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} H \frac{t^{1/2}}{t + \mu^2} (A + tI)^{-1} dt,$$

est convergente puisque

$$\left\| H \frac{t^{1/2}}{t + \mu^2} (A + tI)^{-1} \zeta \right\|_X \leq \frac{t^{1/2}}{|t + \mu^2| (t + 1)} \|H\zeta\|_X, t \geq 0$$

ainsi $(Q - \mu I)^{-1}\zeta \in D(H)$ et

$$\begin{aligned} H(Q - \mu I)^{-1}\zeta &= \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} H \frac{t^{1/2}}{t + \mu^2} (A + tI)^{-1} \zeta dt, \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2}}{t + \mu^2} (A + tI)^{-1} H \zeta dt, \\ &= (Q - \mu I)^{-1} H \zeta. \end{aligned}$$

Pour (ii), on utilisera

$$\forall x \geq 0, e^{xQ} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I - \frac{x}{n} Q \right)^{-n}$$

(voir Kato [30], p. 481) alors pour $x > 0$ et $\zeta \in D(H)$, on trouve

$$\begin{aligned} H e^{xQ} \zeta &= \lim_{n \rightarrow +\infty} H \left(I - \frac{x}{n} Q \right)^{-n} \zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{x} \right)^n H \left(\frac{n}{x} I - Q \right)^{-n} \zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{x} \right)^n \left(\frac{n}{x} I - Q \right)^{-n} H \zeta \\ &= e^{xQ} H \zeta. \end{aligned}$$

6. Sous les hypothèses (2.2.2) et (2.2.3) on a $A \in BIP(X, \theta_A)$ et $0 \in \rho(A)$, de plus on a

$$-Q = A^{\frac{1}{2}} \in BIP(X, \theta_A/2),$$

voir [34], [25].

2.3 Lemmes techniques

Dans la suite on va utiliser $r_0 = \frac{1 - x_0}{2} \in]0, 1/2]$.

Lemme 2.3.1 Sous les hypothèses (2.2.2) – (2.2.6), si on pose

$$W_1 := \Lambda_1^{-1} [H(e^{(r_0+2x_0)Q} - e^{r_0Q}) - e^{(2-r_0)Q}],$$

alors $W_1 \in \mathcal{L}(X)$, $W_1 Q^{-1} = Q^{-1} W_1$ et

$$\Lambda_1^{-1} = I - e^{r_0Q} W_1.$$

Preuve. H est un opérateur linéaire fermé sur X , $e^{(r_0+2x_0)Q} - e^{r_0Q} \in \mathcal{L}(X)$ avec $(e^{(r_0+2x_0)Q} - e^{r_0Q})(X) \subset D(Q^{k_0}) \subset D(H)$, donc $W_1 \in \mathcal{L}(X)$. De l'hypothèse (2.2.5) on déduit que $W_1 Q^{-1} = Q^{-1} W_1$. De plus

$$\begin{aligned} \Lambda_1(I - e^{r_0Q} W_1) &= \Lambda_1 - e^{r_0Q} [H(e^{(r_0+2x_0)Q} - e^{r_0Q}) - e^{(2-r_0)Q}] \\ &= \Lambda_1 - H(e^{(1+x_0)Q} - e^{(1-x_0)Q}) + e^{2Q} \\ &= I, \end{aligned}$$

et de façon similaire $(I - e^{r_0Q} W_1) \Lambda_1 = I$. □

En utilisant la même méthode on trouve :

Lemme 2.3.2 *Sous les hypothèses (2.2.2) – (2.2.5) et (2.2.7), si on pose*

$$W_2 := \Lambda_1^{-1} [HQ(e^{(r_0+2x_0)Q} + e^{r_0Q}) - e^{(2-r_0)Q}],$$

alors $W_2 \in \mathcal{L}(X)$, $W_2Q^{-1} = Q^{-1}W_2$ et

$$\Lambda_2^{-1} = I - e^{r_0Q}W_2.$$

Définition 2.3.1 *On définit deux types de solutions (la solution stricte, et semi-stricte) du problème (2.1.1) (où (2.1.2)) :*

1. *La solution stricte est une fonction u vérifiant le problème, et*

$$u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A)).$$

2. *La solution semi-stricte est une fonction u vérifiant le problème, et $\forall \varepsilon \in]0, 1[$*

$$u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A)) \text{ et } u' \in L^p(0, 1; X).$$

2.4 Représentation de la solution

2.4.1 Premier problème

Sous les hypothèses (2.2.2) \sim (2.2.6). Si u est une solution semi-stricte du problème (2.1.1) alors pour $x \in [0, 1]$

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I_x + J_x,$$

avec

$$I_x = -\frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds \text{ et } J_x = -\frac{1}{2}Q^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds.$$

Il reste à trouver l'expression de ξ_0 et ξ_1 . En tenant compte des conditions aux limites de notre problème :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^Q\xi_1 + J_0 = u_0, \\ u(1) = e^Q\xi_0 + \xi_1 + I_1, \\ u(x_0) = e^{x_0Q}\xi_0 + e^{(1-x_0)Q}\xi_1 + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H). \end{cases}$$

Donc si on pose $v_0 = u_0 - J_0$, on a $\xi_0 = v_0 - e^Q\xi_1$,

$$u(1) = e^Q(v_0 - e^Q\xi_1) + \xi_1 + I_1 = e^Qv_0 + I_1 + (I - e^{2Q})\xi_1,$$

et

$$\begin{aligned} u(x_0) &= e^{x_0Q}\xi_0 + e^{(1-x_0)Q}\xi_1 + I_{x_0} + J_{x_0} \\ &= e^{x_0Q}(v_0 - e^Q\xi_1) + e^{(1-x_0)Q}\xi_1 + I_{x_0} + J_{x_0} \\ &= e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0} + T_0\xi_1, \end{aligned}$$

où $T_0 = e^{(1-x_0)Q} - e^{(1+x_0)Q}$. Comme $T_0\xi_1 \in D(Q^{k_0}) \subset D(H)$, alors de $u(x_0) \in D(H)$ on trouve

$$e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H),$$

donc

$$\begin{aligned} u_{1,x_0} &= u(1) - Hu(x_0) \\ &= e^{x_0Q}v_0 + I_1 + (I - e^{2Q})\xi_1 - H[e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0} + T_0\xi_1] \\ &= (I - e^{2Q} - HT_0)\xi_1 + e^Qv_0 + I_1 - H(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}) \\ &= \Lambda_1\xi_1 + e^Qv_0 + I_1 - H(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}), \end{aligned}$$

alors, si on prend $v_1 = u_{1,x_0} - I_1 + H(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0})$, on trouve

$$\Lambda_1\xi_1 = v_1 - e^Qv_0,$$

et

$$\xi_1 = \Lambda_1^{-1}v_1 - e^Q\Lambda_1^{-1}v_0 = v_1 - e^{r_0Q}W_1v_1 - e^Q\Lambda_1^{-1}v_0 = v_1 + e^{r_0Q}w_1,$$

où $w_1 = -W_1v_1 - e^{(1-r_0)Q}\Lambda_1^{-1}v_0$. De plus

$$\xi_0 = v_0 - e^Q(v_1 + e^{r_0Q}w_1) = v_0 + e^Q\overline{w_1},$$

où $\overline{w_1} = -v_1 - e^{r_0Q}w_1$. Finalement pour $x \in [0, 1]$, $u(x)$ s'écrit

$$u(x) = e^{xQ}v_0 + e^{(1-x)Q}v_1 + I_x + J_x + e^{xQ}e^Q\overline{w_1} + e^{(1-x)Q}e^{r_0Q}w_1.$$

Maintenant, on pose pour $x \in [0, 1]$ et $\varphi \in X$

$$S(x, \varphi, f) = e^{xQ}\varphi - \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds,$$

donc $S(x, v_0, f) = e^{xQ}v_0 + I_x$ et $S(1-x, v_1, f(1-\cdot)) = e^{(1-x)Q}v_1 + J_x$.

En résumant l'étude précédente on obtient le résultat :

Proposition 2.4.1 *Sous les hypothèses (2.2.2) – (2.2.6). Si u est une solution semi-strictes du problème (2.1.1) alors*

$$e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H), \quad (2.4.1)$$

et u est uniquement déterminée par la représentation suivante

$$u(x) = S(x, v_0, f) + S(1-x, v_1, f(1-\cdot)) + R_1(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.4.2)$$

où

$$v_0 = u_0 - J_0, \quad v_1 = u_{1,x_0} - I_1 + H(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}),$$

et R_1 est la partie régulière de u , caractérisée par

$$\begin{cases} R_1(x) = e^{xQ}e^Q\overline{w_1} + e^{(1-x)Q}e^{r_0Q}w_1 \text{ avec} \\ w_1 = -W_1v_1 - e^{(1-r_0)Q}\Lambda_1^{-1}v_0, \\ \overline{w_1} = -v_1 - e^{r_0Q}w_1, \\ W_1 = \Lambda_1^{-1} [H(e^{(r_0+2x_0)Q} - e^{r_0Q}) - e^{(2-r_0)Q}], \\ \Lambda_1 = I - e^{2Q} + H(e^{(1+x_0)Q} - e^{(1-x_0)Q}). \end{cases}$$

2.4.2 Deuxième problème

On procède comme pour le premier problème. Sous les hypohèses (2.2.2) \sim (2.2.5) et (2.2.7).

Si u est une solution semi-strictes du problème (2.1.2) alors

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I_x + J_x,$$

avec

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0, 1[$; on a

$$u'(x) = Qe^{xQ}\xi_0 - Qe^{(1-x)Q}\xi_1 + QI_x - QJ_x$$

alors

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^Q\xi_1 + J_0 = u_0, \\ u(1) = e^Q\xi_0 + \xi_1 + I_1, \\ u'(x_0) = Qe^{x_0Q}\xi_0 - Qe^{(1-x_0)Q}\xi_1 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \in D(H). \end{cases}$$

Encore, si on pose $v_0 = u_0 - J_0$, on a $\xi_0 = v_0 - e^Q\xi_1$, et

$$u(1) = e^Qv_0 + I_1 + (I - e^{2Q})\xi_1,$$

et

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= Qe^{x_0Q}(v_0 - e^Q\xi_1) - Qe^{(1-x_0)Q}\xi_1 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \\ &= -Q(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})\xi_1 + Qe^{x_0Q}v_0 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \\ &= Qe^{x_0Q}v_0 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} + U_0\xi_1, \end{aligned}$$

où $U_0 = -Q(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q})$. Comme $U_0\xi_1 \in D(Q^{k_0}) \subset D(H)$, alors de $u'(x_0) \in D(H)$ on trouve

$$Qe^{x_0Q}v_0 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \in D(H),$$

donc

$$\begin{aligned} u_{1,x_0} &= u(1) - Hu'(x_0) \\ &= e^Qv_0 + I_1 + (I - e^{2Q})\xi_1 \\ &\quad - H[Qe^{x_0Q}v_0 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} + U_0\xi_1] \\ &= [HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}) + (I - e^{2Q})]\xi_1 \\ &\quad + e^Qv_0 + I_1 - HQ(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \\ &= \Lambda_2\xi_1 + e^Qv_0 + I_1 - HQ(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} - J_{x_0}), \end{aligned}$$

alors, si on prend $v_2 = u_{1,x_0} - I_1 + HQ(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} - J_{x_0})$ on trouve

$$\Lambda_2\xi_1 = v_2 - e^Qv_0,$$

alors de (2.2.7) et le Lemme 2.3.2

$$\xi_1 = \Lambda_2^{-1}v_2 - e^Q \Lambda_2^{-1}v_0 = v_2 - e^{r_0Q}W_2v_2 - e^Q \Lambda_2^{-1}v_0 = v_2 + e^{r_0Q}w_2,$$

où $w_2 = -W_2v_2 - e^{(1-r_0)Q}\Lambda_2^{-1}v_0$. De plus

$$\xi_0 = v_0 - e^Q(v_2 + e^{r_0Q}w_2) = v_0 + e^Q\overline{w_2},$$

avec $\overline{w_2} = -v_2 - e^{r_0Q}w_2$. Finalement u s'écrit

$$u(x) = e^{xQ}v_0 + e^{(1-x)Q}v_2 + I_x + J_x + e^{xQ}e^Q\overline{w_2} + e^{(1-x)Q}e^{r_0Q}w_2.$$

En résumant l'étude précédente on obtient :

Proposition 2.4.2 *Sous les hypothèses (2.2.2) – (2.2.5) et (2.2.7). Si u est une solution semi-strictes du problème (2.1.2) alors*

$$Qe^{x_0Q}v_0 + QI_{x_0} - QJ_{x_0} \in D(H), \quad (2.4.3)$$

et u est uniquement déterminée par la formule suivante :

$$u(x) = S(x, v_0, f) + S(1-x, v_2, f(1-\cdot)) + R_2(x), \quad (2.4.4)$$

où

$$v_0 = u_0 - J_0, \quad v_2 = u_{1,x_0} - I_1 + HQ(e^{x_0Q}v_0 + I_{x_0} - J_{x_0})$$

et R_2 est la partie régulière de u , caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2(x) = e^{xQ}e^Q\overline{w_2} + e^{(1-x)Q}e^{r_0Q}w_2 \text{ avec} \\ w_2 = -W_2v_2 - e^{(1-r_0)Q}\Lambda_2^{-1}v_0, \\ \overline{w_2} = -v_2 - e^{r_0Q}w_2, \\ W_2 = \Lambda_1^{-1} [HQ(e^{(r_0+2x_0)Q} + e^{r_0Q}) - e^{(2-r_0)Q}], \\ \Lambda_2 = I - e^{2Q} + HQ(e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}). \end{array} \right.$$

2.5 Résultats principaux

2.5.1 Premier problème

Dans la suite, il est important de noter que

$$(D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p},$$

cela est due à la propriété de réitération :

$$\begin{aligned} - (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} &= (X, D(A))_{1-\frac{1}{2p}, p} = (X, D(Q^2))_{1-\frac{1}{2p}, p} \\ &= (X, D(Q))_{2-\frac{1}{p}, p} = \left\{ \phi \in D(Q) : Q\phi \in (X, D(Q))_{1-\frac{1}{p}, p} \right\}. \\ - (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} &= (X, D(A))_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p} = (X, D(Q^2))_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, p} \\ &= (X, D(Q))_{1-\frac{1}{p}, p} = (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p}. \end{aligned}$$

Voir Proposition 1.5.4 et Proposition 1.5.2.

Théorème 2.5.1 *Sous les hypothèses (2.2.1) \sim (2.2.6). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$, alors le problème (2.1.1) admet une unique solution semi-strictes u si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H (e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

De plus, dans ce cas u est donnée par (2.4.2).

Notons que :

– si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalente à

$$I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

comme

$$He^{x_0 Q}(u_0 - J_0) = e^{(x_0/2)Q} He^{(x_0/2)Q}(u_0 - J_0) \in D(Q) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

– si $x_0 = 0$ alors (ii) sera $u_0 \in D(H)$ et $u_{1,0} + Hu_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ car $I_0 = 0$.

Preuve. Si (2.1.1) admet une solution semi-strictes u , alors, de la Proposition 2.4.1, on a

$$e^{x_0 Q} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H),$$

u est donnée par (2.4.2). Mais, grâce aux termes régularisants e^Q et $e^{r_0 Q}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$R_1(\cdot) \in L^p(0, 1; D(Q^k)) \cap W^{k,p}(0, 1; X). \quad (2.5.2)$$

alors u et w ont la même régularité, avec

$$w(x) = S(x, v_0, f) + S(1 - x, v_1, f(1 - \cdot)). \quad (2.5.3)$$

Comme u est une solution semi-strictes, on a $Q^2 u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, ainsi $Q^2 w \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$ et de 6. de la Proposition 3.4 dans [28] p. 1675,

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - J_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ v_1 = u_{1,x_0} - I_1 + H(e^{x_0 Q} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

mais, $I_1, J_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, voir Proposition 1.6.2, donc

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \\ e^{x_0 Q} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Inversement, sous l'hypothèse (2.5.1), on utilise encore (2.5.2), on obtient que u donnée par (2.4.2) a la régularité de w définie par (2.5.3). Mais (2.5.1) implique que $v_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ et $v_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$ et de 2. et 6. de la Proposition 3.4 dans [28] p. 1675, on a

$$\begin{cases} w'(\cdot) = QS(\cdot, v_0, f) - QS(1 - \cdot, v_1, f(1 - \cdot)) \in L^p(0, 1; X) \\ \text{et donc } u'(\cdot) \in L^p(0, 1; X), \end{cases}$$

et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$\begin{cases} w \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A)) \cap W^{1,p}(0, 1; X) \\ \text{et donc } u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A)) \cap W^{1,p}(0, 1; X). \end{cases}$$

et de plus, de (2.4.2)

$$\begin{aligned} u(0) &= S(0, v_0, f) + S(1, v_1, f(1 - \cdot)) + R_1(0) \\ &= v_0 + e^Q v_1 + J_0 + e^Q \overline{w_1} + e^Q e^{r_0 Q} w_1 \\ &= u_0 + e^Q [v_1 + \overline{w_1} + e^{r_0 Q} w_1] \\ &= u_0, \end{aligned}$$

Pour $u(x_0)$ on utilise encore (2.4.2) :

$$\begin{aligned} u(x_0) &= S(x_0, v_0, f) + S(1 - x_0, v_1, f(1 - \cdot)) + e^{x_0 Q} e^Q \overline{w_1} + e^{(1-x_0)Q} e^{r_0 Q} w_1 \\ &= e^{x_0 Q} v_0 - \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^{x_0} e^{(x_0-s)Q} f(s) ds + e^{(1-x_0)Q} v_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} Q^{-1} \int_{x_0}^1 e^{(s-x_0)Q} f(s) ds + e^{x_0 Q} e^Q \overline{w_1} + e^{(1-x_0)Q} e^{r_0 Q} w_1 \\ &= e^{x_0 Q} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0} + e^{(1-x_0)Q} v_1 + e^{x_0 Q} e^Q \overline{w_1} + e^{(1-x_0)Q} e^{r_0 Q} w_1, \end{aligned}$$

alors de (ii), on déduit que $u(x_0) \in D(H)$ et

$$\begin{aligned} u(1) - Hu(x_0) &= S(1, v_0, f) + S(0, v_1, f(1 - \cdot)) + R_1(1) \\ &\quad - H [S(x_0, v_0, f) + S(1 - x_0, v_1, f(1 - \cdot)) + R(x_0)] \\ &= e^Q v_0 + I_1 + v_1 + e^{2Q} (-v_1 - e^{r_0 Q} w_1) + e^{r_0 Q} w_1 \\ &\quad - H (e^{x_0 Q} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}) - H (e^{(1-x_0)Q} v_1) \\ &\quad - H [e^{(1+x_0)Q} (-v_1 - e^{r_0 Q} w_1) + e^{(1-x_0)Q} e^{r_0 Q} w_1], \end{aligned}$$

mais $v_1 + I_1 - H (e^{x_0 Q} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}) = u_{1,x_0}$ alors

$$\begin{aligned} u(1) - Hu(x_0) &= e^Q v_0 + u_{1,x_0} + e^{2Q} (-v_1) \\ &\quad - H e^{(1-x_0)Q} v_1 + H e^{(1+x_0)Q} v_1 \\ &\quad + [I - e^{2Q} + H e^{(1+x_0)Q} - H e^{(1-x_0)Q}] e^{r_0 Q} w_1 \\ &= e^Q v_0 + u_{1,x_0} + (\Lambda_1 - I) v_1 \\ &\quad - \Lambda_1 e^{r_0 Q} (W_1 v_1 + e^{(1-r_0)Q} \Lambda_1^{-1} v_0) \\ &= u_{1,x_0} + [\Lambda_1 (I - e^{r_0 Q} W_1) - I] v_1 \\ &= u_{1,x_0}. \end{aligned}$$

Finalement u donnée par (2.4.2) est la solution semi-strictes de (2.1.1). \square

Théorème 2.5.2 *Sous les hypothèses (2.2.1) ~ (2.2.6). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$, alors le problème (2.1.1) admet une unique solution stricte si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Notons que :

– si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalente à

$$I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

– si $x_0 = 0$ alors (ii) sera

$$u_0 \in D(H) \text{ et } u_{1,0} + H u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Preuve. On procède comme dans la preuve précédente, on utilise 3. de la Proposition 3.4 dans [28], p. 1675 au lieu de 6. \square

Remarque 2.5.1 *Si $x_0 = 0$ alors le problème (2.1.1) s'écrit sous forme d'un problème à conditions aux limites de Dirichlet :*

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_{1,x_0} + H u_0, \end{cases}$$

où u_0 dans $D(H)$. Dans ce cas, on n'a pas besoin de (2.2.5) et (2.2.6), de plus il est clair que $\Lambda_1 := I - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X)$ a un inverse borné donc on peut supprimer (2.2.6), et le problème (2.1.1) admet une solution stricte si et seulement si

$$u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \cap D(H) \text{ et } u_{1,0} + H u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Ce resultat est connu, voir [20].

Remarque 2.5.2 *On considère le cas particulier $k_0 = 1$. L'hypothèse (2.2.4) sera $D(Q) \subset D(H)$ et (2.5.1) s'écrit*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

Comme $u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q) \subset D(H)$ et $J_0, I_{x_0}, J_{x_0} \in D(Q) \subset D(H)$.

De façon similaire (2.5.5) s'écrit

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

2.5.2 Deuxième problème

Théorème 2.5.3 *Sous les hypothèses (2.2.1) ~ (2.2.5) et (2.2.7). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0,1; X)$ avec $1 < p < +\infty$. Le problème (2.1.2) admet une unique solution semi-strictes si et seulement si :*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} \end{cases} \quad (2.5.6)$$

De plus, dans ce cas, u est donnée par (2.4.4).

Notons que :

– si $x_0 \neq 0$ alors (2.5.6) est équivalente à

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + HQ(I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

– si $x_0 = 0$ alors (2.5.6) sera

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(u_0 - 2J_0) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,0} + HQ(u_0 - 2J_0) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

Preuve. On considère le cas $x_0 \neq 0$ ($HQ(e^{x_0 Q}v_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k)$). On utilise la même méthode de la preuve du Théorème 2.5.1. Si (2.1.2) admet une solution semi-strictes u , alors, de la Proposition 2.4.2, on a

$$Q(e^{x_0 Q}v_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H),$$

et u est donnée par (2.4.4). la régularité de u est la même avec ω où

$$\omega(x) = S(x, v_0, f) + S(1-x, v_2, f(1-\cdot)).$$

Comme u est une solution semi-strictes, on a $Q^2u \in L^p(0, 1-\varepsilon; X)$, ainsi $Q^2\omega \in L^p(0, 1-\varepsilon; X)$, et de 6. de la Proposition 3.4 dans [28] p. 1675,

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - J_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ v_2 = u_{1,x_0} - I_1 + HQ(e^{x_0 Q}v_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

mais $I_1, J_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, voir Proposition 1.6.2, de plus, de la Remarque 2.2.1, assertion 1. et (2.2.4)

$$\begin{cases} Q(e^{x_0 Q}v_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k) \subset D(H), \\ HQ(e^{x_0 Q}v_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

donc $Q(I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H)$ et

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ u_{1, x_0} + HQ(I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

Inversement, de (2.5.6), comme dans la preuve du Théorème 2.5.1, il est facile de voir que u donnée par (2.4.4) est une solution semi-strictes du (2.1.2). \square

Théorème 2.5.4 *Sous les hypothèses (2.2.1) ~ (2.2.5) et (2.2.7). Soient $u_0 \in X, u_{1, x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < \infty$. Le problème (2.1.2) admet une unique solution stricte si et seulement si :*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1, x_0} + HQ(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Notons que :

– si $x_0 \neq 0$ alors (2.5.7) est équivalente à

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q), \\ Q(I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1, x_0} + HQ(I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

– si $x_0 = 0$ alors (2.5.7) sera

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ Q(u_0 - 2J_0) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1, 0} + HQ(u_0 - 2J_0) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Preuve. On peut adapter la preuve du Théorème précédent. \square

Remarque 2.5.3 *Si on suppose que $x_0 = 0$, on obtient les mêmes résultats obtenus par Hammou et al [28], voir Theorem 3.6 et 3.7, p. 1677.*

2.6 Inversibilité de déterminant

On décrit des situations classiques variées dans lesquelles l'inversibilité de Λ_1 et Λ_2 est démontré.

2.6.1 Premier problème

Cas particulier

Le cas $H = I$. Notre Problème sera :

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - u(x_0) = u_{1, x_0}. \end{cases} \quad (2.6.1)$$

De plus

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= e^{(1+x_0)Q} - e^{(1-x_0)Q} - e^{2Q} + I \\ &= e^{(1+x_0)Q}(I - e^{(1-x_0)Q}) + I - e^{(1-x_0)Q} \\ &= (I + e^{(1+x_0)Q})(I - e^{(1-x_0)Q}),\end{aligned}$$

et il est connu que $I + e^{(1+x_0)Q}$, $I - e^{(1-x_0)Q}$ sont inversibles (voir par exemple (5.9) dans [32]) donc $0 \in \rho(\Lambda_1)$.

Théorème 2.6.1 *Sous les hypothèses (2.2.1) \sim (2.2.3). Soient $u_0 \in X$, $u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$, alors le problème (2.6.1) admet :*

1. *une unique solution semi-stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) u_{1,x_0} \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

2. *une unique solution stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) u_{1,x_0} \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

En utilisant la Proposition 3.5 dans Hammou [28] on trouve

$$J_0, I_{x_0}, J_{x_0} \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q),$$

cela nous permet de simplifier (ii) dans 1. et 2.

Remarque 2.6.1 1. *Ashyralyev [3] a étudié le problème (2.6.1) dans le cadre des espaces de Hölder, et il a démontré que ce problème est bien posé en utilisant l'inégalité de coercivité.*

2. *On traite de la même manière*

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) + u(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases}$$

avec

$$\Lambda_1 = -e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q} - e^{2Q} + I = (I - e^{(1+x_0)Q})(I + e^{(1-x_0)Q}).$$

Le cas $H = -\alpha(-Q)^k$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\text{Re } \alpha \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$

On étudie le problème

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) = f(x) \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) + \alpha(-Q)^k u(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

On a besoin d'une nouvelle hypothèse

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X, \sigma(A) \subset]0, +\infty[\text{ et} \\ \text{pour tout } \theta \in]0, \pi[: \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \quad (2.6.3)$$

où $S_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \theta\}$.

On va utiliser le calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels pour inverser l'opérateur

$$\Lambda_1 = I - e^{2Q} - \alpha (-Q)^k (e^{(1+x_0)Q} - e^{(1-x_0)Q}).$$

Pour cela on étudie les fonctions F, G définies sur \mathbb{C} par

$$\begin{cases} F(z) = 1 + G(z) \\ G(z) = -\alpha z^k (e^{-(1+x_0)z} - e^{-(1-x_0)z}) - e^{-2z} \\ \quad = \alpha z^k (e^{-(1-x_0)z} - e^{-(1+x_0)z}) - e^{-2z}, \end{cases}$$

alors $\Lambda_1 = F(-Q)$.

On fixe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(0, 4\varepsilon_0^2) \subset \rho(A)$ et on peut adapter le Lemme 15, p. 21 dans [27] pour obtenir :

Lemme 2.6.1 *On pose $S = S_{\pi/4}$ alors*

1. F, G sont des fonctions holomorphes au voisinage de \bar{S} .
2. $x > 0$ implique que $|F(x)| > 0$.
3. $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty, z \in \bar{S}} -\alpha z^k (e^{-(1+x_0)z} - e^{-(1-x_0)z}) - e^{-2z} = 0$ et alors

a. *il existe $x' > 0$ tel que $z \in \bar{S}$ et $\operatorname{Re} z \geq x'$ implique que*

$$2 \geq |F(z)| \geq 1/2.$$

b. *F est bornée sur \bar{S} .*

4. *Il existe $\theta_0 \in]0, \pi/4[$ tel que $F(z) \neq 0$ sur*

$$\Pi_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon_0 \text{ et } |\arg(z)| \leq \theta_0\},$$

et $\min_{z \in \Pi_0} |F(z)| = r > 0$.

Preuve. Voir la preuve du Lemme 15, dans [27], on indique les petits changements dans la preuve de l'assertion 2. et 3.

Pour l'assertion 2., on a pour $x > 0$

$$e^{-(1-x_0)x} - e^{-(1+x_0)x} \geq 0,$$

alors, comme $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, on trouve

$$\operatorname{Re} F(x) = (1 - e^{-2x}) + (\operatorname{Re} \alpha) x^k (e^{-(1-x_0)x} - e^{-(1+x_0)x}) > 0.$$

Pour l'assertion 3, on a pour $z \in \bar{S}$

$$\begin{aligned} & |\alpha z^k (e^{-(1-x_0)z} - e^{-(1+x_0)z}) - e^{-2z}| \\ & \leq |\alpha| |z|^k (|e^{-(1+x_0)z}| + |e^{-(1-x_0)z}|) + |e^{-2z}| \\ & \leq |\alpha| \left(\sqrt{2} \operatorname{Re} z \right)^k (e^{-(1+x_0)\operatorname{Re} z} + e^{-(1-x_0)\operatorname{Re} z}) + e^{-2\operatorname{Re} z} \text{ (puisque } |\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{Re} z \text{ sur } \bar{S}). \end{aligned}$$

Comme dans [27], Lemme 16, p. 22, on déduit : \square

Lemme 2.6.2 *Sous l'hypothèse (2.6.3), l'opérateur Λ_1 a un inverse borné, et*

$$\Lambda_1^{-1} = I - \Psi(-Q) \text{ avec } \Psi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}.$$

Théorème 2.6.2 *Sous les hypothèses (2.2.1) \sim (2.2.3) et (2.6.3). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors le problème (2.6.2) admet :*

1. *une unique solution semi-stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(Q^k) \text{ et} \\ u_{1,x_0} - \alpha (-Q)^k (e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

Notons que, si $k = 0$, alors (i) et (ii) seront

$$u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \text{ et } u_{1,x_0} \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

2. *une unique solution stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(Q^k) \text{ et} \\ u_{1,x_0} - \alpha (-Q)^k (e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

On note ici que (2.2.4) est vérifiée pour $k_0 = k$.

Problème avec un paramètre spectral

On considère pour $\omega \geq \omega_0$ ($\omega_0 \geq 0$ fixé), le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0} \end{cases} \quad (2.6.4)$$

On pose $A_\omega = A + \omega I$ et on suppose que :

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X \text{ : }]-\infty, 0] \subset \rho(A_{\omega_0}) \text{ et} \\ \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_{\omega_0} + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq +\infty, \end{cases} \quad (2.6.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall s \in \mathbb{R} : (A_{\omega_0})^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists c \geq 1, \theta_{A_{\omega_0}} \in]0, \pi[: \|(A_{\omega_0})^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|}, \end{array} \right. \quad (2.6.6)$$

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X, \quad (2.6.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \geq \omega_0 : \\ (A + \lambda I)^{-1}\zeta \in D(H) \text{ et } (A + \lambda I)^{-1}H\zeta = H(A + \lambda I)^{-1}\zeta, \end{array} \right. \quad (2.6.8)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : D(Q_{\omega_0}^{k_0}) \subset D(H), \quad (2.6.9)$$

où $Q_{\omega_0} = -(A_{\omega_0})^{\frac{1}{2}}$.

Remarque 2.6.2 *Pour tout $\omega \geq \omega_0$*

1. A_ω est un opérateur linéaire fermé sur X

$$]-\infty, 0] \subset]-\infty, \omega - \omega_0] \subset]-\infty, \omega] \subset \rho(A_\omega),$$

et

$$\sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_\omega + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_0 < +\infty,$$

où $c_0 := \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_{\omega_0} + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$, ne dépend pas de ω .

2. $Q_\omega = -(A_\omega)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique sur X .

3. $D(Q_\omega) = D(Q_{\omega_0})$ et $(D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} = (D(A_\omega), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, $p \in]1, +\infty[$.

4. Grâce à Prüss et Sohr [34], Théorème 3 p. 437, l'hypothèse (2.6.6) implique que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $(A_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X)$ et

$$\exists c \geq 1 : \forall s \in \mathbb{R}, \|(A_\omega)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|},$$

où $\theta_{A_{\omega_0}}$ (défini dans (2.6.6)) et c ne dépend pas de ω . De plus $(A_\omega)^{\frac{1}{2}} \in BIP(X, \theta_{A_{\omega_0}}/2)$.

Maintenant, on montre que $\Lambda_{1,\omega} = I - e^{2Q_\omega} + H(e^{(1+x_0)Q_\omega} - e^{(1-x_0)Q_\omega})$, admet un inverse borné pour ω assez grand.

Lemme 2.6.3 *On suppose (2.6.5) – (2.6.9), alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$ l'opérateur $\Lambda_{1,\omega}$ admet un inverse borné.*

Preuve. On peut adapter la preuve du lemme 4.3, p. 1680 dans [28]. On peut écrire $\Lambda_{1,\omega} = I - T_{1,\omega}$ avec $T_{1,\omega} = e^{2Q_\omega} - H(e^{(1+x_0)Q_\omega} - e^{(1-x_0)Q_\omega})$.

On a pour $\omega \geq \omega_0$, $\|Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_{\omega}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 + c_0$, alors

$$\begin{aligned}
& \|T_{1,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|H(e^{(1+x_0)Q_{\omega}} + e^{(1-x_0)Q_{\omega}}) - e^{2Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0} Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_{\omega}^{-2k_0} Q_{\omega}^{2k_0} (e^{(1+x_0)Q_{\omega}} + e^{(1-x_0)Q_{\omega}}) - e^{2Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0} Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_{\omega}^{-2k_0} Q_{\omega}^{2k_0} e^{(1+x_0)Q_{\omega}} + HQ_{\omega_0}^{-2k_0} Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_{\omega}^{-2k_0} Q_{\omega}^{2k_0} e^{(1-x_0)Q_{\omega}} - e^{2Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_{\omega}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_{\omega}^{2k_0} e^{(1+x_0)Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad + \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_{\omega_0}^{2k_0} Q_{\omega}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_{\omega}^{2k_0} e^{(1-x_0)Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0) \|Q_{\omega}^{2k_0} e^{(1+x_0)Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad + \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0) \|Q_{\omega}^{2k_0} e^{(1-x_0)Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)},
\end{aligned}$$

mais il existe $c > 0$ et $l > 0$, tel que pour tout $\omega \geq \omega_0$, $m \in \{0, 2k_0\}$, et $t \in \{1 + x_0, 1 - x_0, 2\}$, on a

$$\|Q_{\omega}^m e^{tQ_{\omega}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{-l\sqrt{\omega}},$$

(voir le Lemme 2.6, p. 103 dans [17]), alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$:

$$\|T_{1,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

et $\Lambda_{1,\omega} = I - T_{1,\omega}$ admet un inverse borné. \square

Théorème 2.6.3 *On suppose (2.2.1) et (2.6.5) \sim (2.6.9). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, le problème (2.6.4) admet :*

1. *une unique solution semi-stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases}
(i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\
(ii) e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\
u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p},
\end{cases}$$

2. *une unique solution stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases}
(i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\
(ii) e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\
u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.
\end{cases}$$

2.6.2 Deuxième problème

Cas particulier

On étudie le cas particulier $H = -\alpha(-Q)^k$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases}
-u''(x) + Au(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\
u(0) = u_0 \\
u(1) + \alpha(-Q)^k u'(x_0) = u_{1,x_0}.
\end{cases} \tag{2.6.10}$$

On suppose (2.2.1), (2.6.3) et (2.2.3) et on procède comme pour le premier problème en utilisant le calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels pour inverser l'opérateur

$$\Lambda_2 = I - e^{2Q} + \alpha (-Q)^{k+1} (e^{(1+x_0)Q} + e^{(1-x_0)Q}),$$

on pose

$$F_2(z) = 1 + G_2(z) \text{ avec } G_2(z) = \alpha z^{k+1} (e^{-(1+x_0)z} + e^{-(1-x_0)z}) - e^{-2z},$$

et encore pour $x > 0$:

$$\operatorname{Re} F(x) = (1 - e^{-2x}) + (\operatorname{Re} \alpha) x^{k+1} (e^{-(1+x_0)x} + e^{-(1-x_0)x}) > 0.$$

Finalement on trouve :

Théorème 2.6.4 *On suppose (2.2.1) \sim (2.2.3) et (2.6.3). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$. Alors le problème (2.6.10) admet :*

1. *une unique solution semi-stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q} u_0 - e^{x_0 Q} J_0 + I_{x_0} - J_{x_0} \in D(Q^{k+1}) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + \alpha (-Q)^{k+1} (e^{x_0 Q} u_0 - e^{x_0 Q} J_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} \end{cases}$$

2. *une unique solution stricte u si et seulement si*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q} u_0 - e^{x_0 Q} J_0 + I_{x_0} - J_{x_0} \in D(Q^{k+1}) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + \alpha (-Q)^{k+1} (e^{x_0 Q} u_0 - e^{x_0 Q} J_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \end{cases}$$

Problème avec un paramètre spectral

On considère pour $\omega \geq \omega_0$ ($\omega_0 \geq 0$ fixé), le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}. \end{cases} \quad (2.6.11)$$

Maintenant, on montre que $\Lambda_{2,\omega} = HQ_\omega (e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) - e^{2Q_\omega} + I$, admet un inverse borné pour ω assez grand.

Lemme 2.6.4 *On suppose (2.6.5) – (2.6.9), alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$ l'opérateur $\Lambda_{2,\omega}$ admet un inverse borné.*

Preuve. On pose $T_{2,\omega} = -HQ_\omega(e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) + e^{2Q_\omega}$ et on procède comme dans le Lemme 2.6.3. On a

$$\begin{aligned}
& \|T_{2,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|HQ_\omega(e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) - e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}Q_{\omega_0}^{2k_0}Q_\omega^{-2k_0}Q_\omega^{2k_0+1}(e^{(1+x_0)Q_\omega} + e^{(1-x_0)Q_\omega}) - e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|Q_{\omega_0}^{2k_0}Q_\omega^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|Q_\omega^{2k_0+1}e^{(1+x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad + \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|Q_{\omega_0}^{2k_0}Q_\omega^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|Q_\omega^{2k_0+1}e^{(1-x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot (1 + c_0) \|Q_\omega^{2k_0+1}e^{(1+x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad + \|HQ_{\omega_0}^{-2k_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot (1 + c_0) \cdot \|Q_\omega^{2k_0+1}e^{(1-x_0)Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}
\end{aligned}$$

alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$, $\|T_{2,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ ce qui montre que $\Lambda_{2,\omega} = I - T_{2,\omega}$ admet un inverse borné. \square

Théorème 2.6.5 *Sous les hypothèses (2.2.1) et (2.6.5) \sim (2.6.9). Soient $u_0 \in X, u_{1,x_0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ avec $1 < p < +\infty$. Alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$, le problème (2.6.11) admet :*

1. *une unique solution semi-stricte u si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Q_\omega(e^{x_0Q_\omega}u_0 - e^{x_0Q_\omega}J_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + HQ_\omega(e^{x_0Q_\omega}u_0 - e^{x_0Q_\omega}J_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{array} \right.$$

2. *une unique solution stricte u si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Q_\omega(e^{x_0Q_\omega}u_0 - e^{x_0Q_\omega}J_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + HQ_\omega(e^{x_0Q_\omega}u_0 - e^{x_0Q_\omega}J_0 + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{array} \right.$$

2.7 Applications

2.7.1 Exemple :

On considère l'espace UMD $X = L^q(\mathbb{R}), 1 < q < +\infty$ et on définit les deux opérateurs linéaires fermés A et H comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = W^{2,q}(\mathbb{R}), \\ Au = -\alpha u'', u \in D(A), \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} D(H) = W^{1,q}(\mathbb{R}), \\ Hu = \beta u', u \in D(H). \end{array} \right.$$

avec $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}$.

On fixe $\omega_0 \geq 0$ alors $A_{\omega_0} = A + \omega_0 I$ vérifie les deux hypothèses (2.6.5) et (2.6.6) (voir le Théorème C, p. 167, dans Prüss et Sohr [35]).

De plus l'hypothèse (2.6.9) est vérifiée pour $k_0 = 2$, et aussi (2.6.8).

Alors on peut appliquer le Théorème 2.6.3, pour trouver :

Théorème 2.7.1 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in L^q(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(0, 1; L^q(\mathbb{R}))$ avec $1 < p, q < +\infty$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ le problème

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \omega u(x, y) = f(x, y), \text{ p.p. } x \in]0, 1[, y \in \mathbb{R} \\ u(0, y) = u_0(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) - \beta \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) = u_{1,x_0}(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.7.1)$$

admet :

1. une unique solution semi-stricte si et seulement si

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

2. une unique solution stricte si et seulement si

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 Q}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

De façon similaire on peut appliquer le Théorème 2.6.5, on trouve

Théorème 2.7.2 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in L^q(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(0, 1; L^q(\mathbb{R}))$ avec $1 < p, q < +\infty$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ le problème

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \omega u(x, y) = f(x, y), \text{ p.p. } x \in]0, 1[, y \in \mathbb{R} \\ u(0, y) = u_0(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_0, y) = u_{1,x_0}(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.7.2)$$

admet :

1. une unique solution semi-stricte si et seulement si

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Q_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + HQ_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

2. une unique solution stricte si et seulement si

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Q_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + HQ_\omega(e^{x_0 Q_\omega}(u_0 - J_0) + I_{x_0} - J_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

On note ici que l'espace d'interpolation $(W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}$ coïncide avec l'espace de Besov $\mathcal{B}_{q,p}^{2-1/p}(\mathbb{R})$, voir Grisvard [24], Teorema 7, p. 681 et aussi $(W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} = \mathcal{B}_{q,p}^{1-1/p}(\mathbb{R})$.

Problème aux limites (cas B génère un groupe)

3.1 Position du problème

Soit $x_0 \in [0, 1[$, on considère les deux problèmes suivants dans un espace de Banach complexe X :

$$\begin{cases} -u''(x) - 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{cases} -u''(x) - 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

avec $f \in L^p(0, 1; X)$, $u_0, u_{1,x_0} \in X$, A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur X .

3.2 Hypothèses

- Hypothèse UMD

$$X \text{ est un espace } UMD. \quad (3.2.1)$$

- Hypothèse d'ellipticité

$$\begin{cases} A + B^2 \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \\]-\infty, 0] \subset \rho(A + B^2) \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \in \rho(-(A + B^2)), \|\lambda(\lambda I + A + B^2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

- Hypothèse BIP

$$\begin{cases} \text{Pour tout } s \in \mathbb{R} : (A + B^2)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists c > 1, \exists \theta \in]0, \pi[: \|(A + B^2)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{\theta|s|}. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

- Hypothèses de commutativité

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \in \rho(-(A + B^2)) : (A + B^2 + \lambda I)^{-1} \zeta \in D(H) \text{ et} \\ (A + B^2 + \lambda I)^{-1} H \zeta = H(A + B^2 + \lambda I)^{-1} \zeta, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\forall \lambda \in \rho(B), (A + B^2)^{-1} (B - \lambda I)^{-1} = (B - \lambda I)^{-1} (A + B^2)^{-1}, \quad (3.2.5)$$

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \in \rho(B) : (B - \lambda I)^{-1} \zeta \in D(H) \text{ et} \\ (B - \lambda I)^{-1} H \zeta = H(B - \lambda I)^{-1} \zeta. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

- Hypothèse sur B

$$B \text{ génère un groupe fortement continu } (G(x))_{x \in \mathbb{R}} \text{ dans } X. \quad (3.2.7)$$

- Hypothèses d'inclusion

$$D((A + B^2)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B). \quad (3.2.8)$$

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} : D((A + B^2)^{k_1}) \subset D(H). \quad (3.2.9)$$

- Hypothèse sur l'opérateur Π_1 et Π_2

On définit les opérateurs Π_1 et Π_2 par

$$\begin{cases} \Pi_1 = HG(1 - x_0)(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}} - e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}) - e^{2\mathcal{Q}} + I, \\ \Pi_2 = HG(1 - x_0)\mathcal{Q}(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}) - e^{2\mathcal{Q}} + I, \end{cases}$$

avec $\mathcal{Q} = -(A + B^2)^{\frac{1}{2}}$, et on suppose que

$$0 \in \rho(\Pi_1), \quad (3.2.10)$$

et

$$0 \in \rho(\Pi_2). \quad (3.2.11)$$

Remarque 3.2.1

1. Si $\rho(H) \neq \emptyset$ ou $D(A + B^2) \subset D(H)$ alors on peut remplacer (3.2.4) par l'une des deux assertions suivantes :

- $\forall \zeta \in D(H), \exists \lambda_0 \in \rho(-(A + B^2)) : (A + B^2 + \lambda_0 I)^{-1} \zeta \in D(H)$ et

$$(A + B^2 + \lambda_0 I)^{-1} H \zeta = H(A + B^2 + \lambda_0 I)^{-1} \zeta.$$

- $\forall \zeta \in D(H) : (A + B^2)^{-1} \zeta \in D(H)$ et $(A + B^2)^{-1} H \zeta = H(A + B^2)^{-1} \zeta.$

2. On peut remplacer l'hypothèse (3.2.5) par l'une des deux assertions suivantes :

- $\forall \lambda \in \rho(B), \forall \mu \in \rho(-(A + B^2)) :$

$$(A + B^2 + \mu I)^{-1} (B - \lambda I)^{-1} = (B - \lambda I)^{-1} (A + B^2 + \mu I)^{-1}.$$

- $\exists \lambda_0 \in \rho(B) : (A + B^2)^{-1} (B - \lambda_0 I)^{-1} = (B - \lambda_0 I)^{-1} (A + B^2)^{-1}$.

3. Soient $\zeta \in D(A + B^2)$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $G(y)\zeta \in D(A + B^2)$ et

$$(A + B^2)G(y)\zeta = G(y)(A + B^2)\zeta.$$

4. Sous les hypothèses (3.2.2), (3.2.4), (3.2.6) et (3.2.7) on a pour $\zeta \in D(H)$, $x \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (i) H e^{x\mathcal{Q}}\zeta = e^{x\mathcal{Q}}H\zeta, \\ (ii) H G(y)\zeta = G(y)H\zeta. \end{cases}$$

Pour (i), on utilisera

$$\forall x \geq 0, e^{x\mathcal{Q}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I - \frac{x}{n} \mathcal{Q} \right)^{-n}$$

(voir Kato [30], p. 481) alors pour $x > 0$ et $\zeta \in D(H)$, on trouve

$$\begin{aligned} e^{x\mathcal{Q}}H\zeta &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I - \frac{x}{n} \mathcal{Q} \right)^{-n} H\zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{x} \right)^n \left(\frac{n}{x} I - \mathcal{Q} \right)^{-n} H\zeta \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} H \left(\frac{n}{x} \right)^n \left(\frac{n}{x} I - \mathcal{Q} \right)^{-n} \zeta, \end{aligned}$$

on pose $y_n = \left(\frac{n}{x} \right)^n \left(\frac{n}{x} I - \mathcal{Q} \right)^{-n} \zeta$ donc on a

$$\begin{cases} y_n \longrightarrow e^{x\mathcal{Q}}\zeta, \\ H y_n \longrightarrow e^{x\mathcal{Q}}H\zeta, \end{cases}$$

et comme l'opérateur H est fermé donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} H y_n = H e^{x\mathcal{Q}}\zeta = e^{x\mathcal{Q}}H\zeta$.

Pour (ii) on a $(G(y))_{y \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal B , donc

$$\begin{aligned} G(y)H\zeta &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I - \frac{y}{n} B \right)^{-n} H\zeta, y > 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{y} \right)^n \left(\frac{n}{y} I - B \right)^{-n} H\zeta, y > 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} H \left(\frac{n}{y} \right)^n \left(\frac{n}{y} I - B \right)^{-n} \zeta, y > 0 \\ &= H G(y)\zeta, y > 0, \end{aligned}$$

puisque H est un opérateur fermé.

Et on a $(G(-y))_{y \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal $-B$, on utilise les même étapes on trouve

$$G(-y)H\zeta = H G(-y)\zeta, y \geq 0.$$

Finalement, on obtient

$$G(y)H\zeta = H G(y)\zeta, y \in \mathbb{R}.$$

5. Sous les hypothèses (3.2.2) et (3.2.3) on a $A + B^2 \in BIP(X, \theta)$ et $0 \in \rho(A + B^2)$, de plus on a

$$-\mathcal{Q} = (A + B^2)^{\frac{1}{2}} \in BIP(X, \theta/2).$$

Lemme 3.2.1 Soient $\xi \in D(H)$ et $\lambda \in \rho(-(A + B^2))$, alors

$$(\lambda I + A + B^2)^{-1}HG(1 - x_0)\xi = HG(1 - x_0)(\lambda I + A + B^2)^{-1}\xi.$$

Preuve. Soit $\xi \in D(H)$, alors on a $G(1 - x_0)\xi \in D(H)$ et

$$\begin{aligned} & (\lambda I + A + B^2)^{-1}HG(1 - x_0)\xi \\ &= H(\lambda I + A + B^2)^{-1}G(1 - x_0)\xi \quad \text{d'après l'hypothèse (3.2.4)} \\ &= HG(1 - x_0)(\lambda I + A + B^2)^{-1}\xi \quad \text{d'après l'hypothèse (3.2.5)}. \end{aligned}$$

□

Pour les deux lemmes suivants, on pose $r_0 = \frac{1-x_0}{2}$.

Lemme 3.2.2 Sous les hypothèses (3.2.2) – (3.2.10), on pose

$$W_1 = \Pi_1^{-1}[HG(1 - x_0)(e^{(r_0+2x_0)\mathcal{Q}} - e^{r_0\mathcal{Q}}) - e^{(2-r_0)\mathcal{Q}}],$$

alors $W_1 \in \mathcal{L}(X)$, $W_1\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}^{-1}W_1$ et $\Pi_1^{-1} = I - e^{r_0\mathcal{Q}}W_1$.

Lemme 3.2.3 Sous les hypothèses (3.2.2) – (3.2.9) et (3.2.11), on pose

$$W_2 = \Pi_2^{-1}[HG(1 - x_0)\mathcal{Q}(e^{(r_0+2x_0)\mathcal{Q}} + e^{r_0\mathcal{Q}}) - e^{(2-r_0)\mathcal{Q}}],$$

alors $W_2 \in \mathcal{L}(X)$, $W_2\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}^{-1}W_2$ et $\Pi_2^{-1} = I - e^{r_0\mathcal{Q}}W_2$.

Définition 3.2.1 On dit que la solution u de notre problème (le problème (3.1.1) où (3.1.2)) est :

1. *Stricte si* : u vérifie notre problème, et

$$u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A)) \text{ et } u' \in L^p(0, 1; D(B)).$$

2. *Semi-strict* si : u vérifie notre problème, et $\forall \varepsilon \in]0, 1[$:

$$u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A)) \text{ et } u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(B)) \cap L^p(0, 1; X).$$

3.3 Représentation de la solution

3.3.1 Premier problème

Remarque 3.3.1 Soit $h \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$. On pose

$$h_1(x) = G(x)h(x) \text{ et } h_2(x) = G(-x)h(x), \text{ p.p. } x \in]0, 1[,$$

alors $h_1, h_2 \in L^p(0, 1; X)$, en effet, vu l'hypothèse (3.2.7) on a

$$\exists C > 0, \exists \alpha \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} : \|G(x)\| \leq Ce^{\alpha|x|}.$$

d'où

$$\begin{cases} \|h_1(x)\| = \|G(x)h(x)\| \leq Ce^{\alpha x} \|f(x)\|, \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ \|h_2(x)\| = \|G(-x)h(x)\| \leq Ce^{\alpha x} \|f(x)\|, \text{ p.p. } x \in]0, 1[. \end{cases}$$

Lemme 3.3.1

1. Si v est une solution semi-strictes (resp. stricte) du problème

$$\begin{cases} -v''(x) + \mathcal{A}v(x) = g(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ v(0) = u_0 \\ v(x_0) \in D(\mathcal{H}) \text{ et } v(1) - \mathcal{H}v(x_0) = v_{1,x_0}, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où

$$\begin{cases} g(x) = G(x)f(x), \\ \mathcal{A} = A + B^2, \\ \mathcal{H} = HG(1 - x_0), \\ v_{1,x_0} = G(1)u_{1,x_0}. \end{cases}$$

alors u définie par $u(x) = G(-x)v(x)$ une solution semi-strictes (resp. stricte) du problème (3.1.1) satisfaisant de plus

$$\begin{cases} \forall \varepsilon \in]0, 1[: u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2)) \text{ et } Bu \in L^p(0, 1; X) \\ \text{(resp. } u \in L^p(0, 1; D(A + B^2)) \text{)} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

(noter que si $u \in L^p(0, 1; D(A + B^2))$ alors $Bu = B(A + B^2)^{-1}(A + B^2)u \in L^p(0, 1; X)$).

2. Réciproquement, si u une solution semi-strictes (resp. stricte) du problème (3.1.1) satisfaisant de plus (3.3.2) alors v définie par $v(x) = G(x)u(x)$ est une solution semi-strictes (resp. stricte) du problème (3.3.1).

Preuve

1. Si v est une solution semi-strictes du problème (3.3.1) alors pour u définie par

$$u(x) = G(-x)v(x),$$

on a

$$\begin{cases} u'(x) = -BG(-x)v(x) + G(-x)v'(x) \\ u''(x) = B^2G(-x)v(x) - 2BG(-x)v'(x) + G(-x)v''(x), \end{cases} \quad (3.3.3)$$

d'où

$$\begin{aligned} -u''(x) - 2Bu'(x) + Au(x) &= -G(-x)[(B^2v(x) - 2Bv'(x) + v''(x)) \\ &\quad + 2B(-Bv(x) + v'(x)) - Av(x)] \\ &= -G(-x)[v''(x) - (B^2 + A)v(x)] \\ &= -G(-x)[v''(x) - \mathcal{A}v(x)] \\ &= f(x). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

De plus $u(0) = G(0)v(0) = u_0$, et comme $v(x_0) \in D(H)$ on déduit que $u(x_0) \in D(H)$, donc

$$\begin{aligned} u(1) - Hu(x_0) &= G(-1)v(1) - H(G(-x_0)v(x_0)) \\ &= G(-1)(G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)v(x_0)) - HG(-x_0)v(x_0) \\ &= G(-1)(G(1)u_{1,x_0} + \mathcal{H}v(x_0)) - G(-1)\mathcal{H}v(x_0) \\ &= u_{1,x_0}. \end{aligned}$$

Donc formellement u est bien solution du Problème (3.1.1). Il reste à vérifier que u à la bonne régularité.

Notons que comme dans le chapitre précédent, la solution du problème (3.3.1) s'écrit sous la forme

$$v(x) = e^{x\mathcal{Q}}v_0 + e^{(1-x)\mathcal{Q}}v_1 + \mathcal{I}_x + \mathcal{J}_x + e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}\overline{w}_1} + e^{(1-x)\mathcal{Q}}e^{r_0\mathcal{Q}}w_1, \quad (3.3.5)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{Q} = -(\mathcal{A})^{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{I}_x = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1} \int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}g(s)ds \text{ et } \mathcal{J}_x = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}g(s)ds, \\ v_0 = u_0 - \mathcal{J}_0, \\ v_1 = v_{1,x_0} - \mathcal{I}_1 + \mathcal{H}(e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}), \\ w_1 = -W_1v_1 - e^{(1-r_0)\mathcal{Q}}\Pi_1^{-1}v_0, \\ \overline{w}_1 = -v_1 - e^{r_0\mathcal{Q}}w_1, \\ W_1 = \Pi_1^{-1}[\mathcal{H}(e^{(r_0+2x_0)\mathcal{Q}} - e^{r_0\mathcal{Q}}) - e^{(2-r_0)\mathcal{Q}}]. \end{cases}$$

Puisque v est une solution semi-strict de (3.3.1), on a pour $\varepsilon \in]0, 1[$

$$v \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2)) \cap W^{1,p}(0, 1; X).$$

De plus, en étudiant (3.3.5) on voit que $\mathcal{Q}v'$ et v'' sont composés (au signe près) des mêmes termes et ont donc la même régularité d'où

$$\mathcal{Q}v' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X),$$

De même $\mathcal{Q}v$ et v' ont la même régularité donc

$$\mathcal{Q}v \in L^p(0, 1; X).$$

Enfin, d'après (3.2.8) on a $B\mathcal{Q}^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on a aussi $B^2(A + B^2)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ donc

$$\begin{cases} Bv' = B\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}v' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \\ Bv = B\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}v \in L^p(0, 1; X) \\ B^2v = B^2(A + B^2)^{-1}(A + B^2)v \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X). \end{cases}$$

En utilisant (3.3.3) et la Remarque 3.3.1, on déduit des régularités précédentes que :

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2)) \cap W^{1,p}(0, 1; X) \\ Bu \in L^p(0, 1; X), Bu' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \end{cases}$$

Finalement u est une solution semi-strict du problème (3.1.1) satisfaisant de plus (3.3.2).

Si v est une solution stricte de (3.3.1), on a

$$v \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A + B^2)).$$

De plus, on peut déduire que

$$\mathcal{Q}v' \in L^p(0, 1; X).$$

Et comme $BQ^{-1}, B^2(A+B^2)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on a

$$\begin{cases} Bv' = BQ^{-1}Qv' \in L^p(0, 1; X), \\ B^2v = B^2(A+B^2)^{-1}(A+B^2)v \in L^p(0, 1; X). \end{cases}$$

Donc d'après (3.3.3) et la Remarque 3.3.1, on trouve :

$$u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A+B^2)), Bu' \in L^p(0, 1; X))$$

Finalement, on obtient u est une solution stricte du problème (3.1.1) satisfaisant de plus (3.3.2).

2. Si u une solution semi-strictes du problème (3.1.1) satisfaisant de plus (3.3.2) alors on montre comme au 1. que v définie par

$$v(x) = G(x)u(x),$$

est solution formelle de (3.3.1) car on a

$$\begin{cases} v'(x) = BG(x)u(x) + G(x)u'(x) \\ v''(x) = B^2G(x)u(x) + 2BG(x)u'(x) + G(x)u''(x). \end{cases}$$

De $u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X)$ on déduit

$$v \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X).$$

De $u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A+B^2))$ on déduit, en utilisant le point 3 de la Remarque 3.2.1, que

$$v \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A+B^2)).$$

Enfin $u', Bu \in L^p(0, 1; X)$ donc $v \in W^{1,p}(0, 1; X)$.

Finalement v est une solution semi-strictes du problème (3.3.1).

On montre de même que si u une solution stricte du problème (3.1.1) satisfaisant de plus (3.3.2) alors v est une solution stricte du problème (3.3.1).

3.3.2 Deuxième problème

Pour le problème (3.1.2), on fait les mêmes étapes pour éliminer le terme $-Bu'$ de l'équation. Dans ce cas on ne peut pas ramener son étude à celle du problème (2.1.2), mais on peut le ramener à un autre problème (un peut plus compliqué que (2.1.2)). On pose

$$\begin{cases} v(x) = G(x)u(x), \\ g(x) = G(x)f(x), \\ \mathcal{A} = A + B^2. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

D'après (3.3.4) et (3.3.6), on a : u est une solution de l'équation $-u'' - 2Bu' + Au = f$, si et seulement si, v est une solution de l'équation $-v'' + \mathcal{A}v = g$.

Pour les conditions aux limites, on a $v(0) = u(0) = u_0$, et on pose

$$\begin{cases} \mathcal{H} = HG(1 - x_0), \\ v_{1,x_0} = G(1)u_{1,x_0}, \end{cases}$$

donc u vérifie la condition aux limite $u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}$, si et seulement si, v vérifie la condition $v(1) - \mathcal{H}[v'(x_0) - Bv(x_0)] = v_{1,x_0}$, car sous l'hypothèse (3.2.6) et (3.2.7), on a

$$\begin{aligned} u(1) - Hu'(x_0) &= G(-1)v(1) - H[-BG(-x_0)v(x_0) + G(-x_0)v'(x_0)] \\ &= G(-1)(v(1) - \mathcal{H}[v'(x_0) - Bv(x_0)]) \end{aligned}$$

On trouve finalement le problème suivant :

$$\begin{cases} -v''(x) + \mathcal{A}v(x) = g(x) \text{ p.p. } x \in]0, 1[\\ v(0) = u_0 \\ v(1) - \mathcal{H}[v'(x_0) - Bv(x_0)] = v_{1,x_0} \quad x_0 \in [0, 1[. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Sous les hypohèses (3.2.1) – (3.2.9) et (3.2.11), si v est une solution semi-stricte du problème (3.3.7), alors

$$v(x) = e^{x\mathcal{Q}}\xi_0 + e^{(1-x)\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{I}_x + \mathcal{J}_x,$$

avec

$$\mathcal{I}_x = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1} \int_0^x e^{(x-s)\mathcal{Q}}g(s)ds \text{ et } \mathcal{J}_x = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)\mathcal{Q}}g(s)ds.$$

Et on a

$$\begin{cases} v(0) = u_0 \\ v'(x_0) - Bv(x_0) \in D(\mathcal{H}) \text{ et } v(1) - \mathcal{H}[v'(x_0) - Bv(x_0)] = v_{1,x_0}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, on a

$$v'(x) = \mathcal{Q}e^{x\mathcal{Q}}\xi_0 - \mathcal{Q}e^{(1-x)\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{Q}\mathcal{I}_x - \mathcal{Q}\mathcal{J}_x,$$

alors

$$\begin{cases} v(0) = \xi_0 + e^{\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{J}_0 = u_0, \\ v(1) = e^{\mathcal{Q}}\xi_0 + \xi_1 + \mathcal{I}_1, \\ v(x_0) = e^{x_0\mathcal{Q}}\xi_0 + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}, \\ v'(x_0) = \mathcal{Q}e^{x_0\mathcal{Q}}\xi_0 - \mathcal{Q}e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{Q}\mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{Q}\mathcal{J}_{x_0}. \end{cases}$$

Si on pose $v_0 = u_0 - \mathcal{J}_0$, on a $\xi_0 = v_0 - e^{\mathcal{Q}}\xi_1$, et

$$v(1) = e^{\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{I}_1 + (I - e^{2\mathcal{Q}})\xi_1,$$

et

$$\begin{aligned} v(x_0) &= e^{x_0\mathcal{Q}}\xi_0 + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \\ &= e^{x_0\mathcal{Q}}(v_0 - e^{\mathcal{Q}}\xi_1) + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \\ &= e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} + T_0\xi_1, \end{aligned}$$

où $T_0 = e^{(1-x_0)\mathcal{Q}} - e^{(1+x_0)\mathcal{Q}}$. Et on a

$$\begin{aligned} v'(x_0) &= \mathcal{Q}e^{x_0\mathcal{Q}}(v_0 - e^{\mathcal{Q}}\xi_1) - \mathcal{Q}e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}\xi_1 + \mathcal{Q}\mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{Q}\mathcal{J}_{x_0} \\ &= -\mathcal{Q}(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}})\xi_1 + \mathcal{Q}e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{Q}\mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{Q}\mathcal{J}_{x_0} \\ &= \mathcal{Q}e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{Q}\mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{Q}\mathcal{J}_{x_0} + U_0\xi_1, \end{aligned}$$

où $U_0 = -\mathcal{Q}(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}})$. Alors

$$v'(x_0) - Bv(x_0) = (\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} + (U_0 - BT_0)\xi_1 \in D(\mathcal{H}).$$

Comme on a $(U_0 - BT_0)\xi_1 \in D(\mathcal{H})$, donc

$$\begin{aligned} v_{1,x_0} &= v(1) - \mathcal{H}[v'(x_0) - Bv(x_0)] \\ &= e^{\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{I}_1 + (I - e^{2\mathcal{Q}})\xi_1 \\ &\quad - \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} + (U_0 - BT_0)\xi_1] \\ &= [-\mathcal{H}(U_0 - BT_0) + (I - e^{2\mathcal{Q}})]\xi_1 \\ &\quad + e^{\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{I}_1 - \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}] \\ &= \Pi_2\xi_1 + e^{\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{I}_1 - \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= [-\mathcal{H}(U_0 - BT_0) + (I - e^{2\mathcal{Q}})] \\ &= HG(1 - x_0)\mathcal{Q}(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}) - e^{2\mathcal{Q}} + I, \end{aligned}$$

si on prend

$$v_2 = v_{1,x_0} - \mathcal{I}_1 + \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}],$$

on trouve

$$\Pi_2\xi_1 = v_2 - e^{\mathcal{Q}}v_0,$$

alors de l'hypothèse (3.2.11) et le Lemme 3.2.3 , on a

$$\xi_1 = \Pi_2^{-1}v_2 - e^{\mathcal{Q}}\Pi_2^{-1}v_0 = v_2 - e^{r_0\mathcal{Q}}W_2v_2 - e^{\mathcal{Q}}\Pi_2^{-1}v_0 = v_2 + e^{r_0\mathcal{Q}}w_2,$$

où $w_2 = -W_2v_2 - e^{(1-r_0)\mathcal{Q}}\Pi_2^{-1}v_0$. De plus

$$\xi_0 = v_0 - e^{\mathcal{Q}}(v_2 + e^{r_0\mathcal{Q}}w_2) = v_0 + e^{\mathcal{Q}}\overline{w_2},$$

avec $\overline{w_2} = -v_2 - e^{r_0\mathcal{Q}}w_2$. Alors v s'écrit

$$v(x) = e^{x\mathcal{Q}}v_0 + e^{(1-x)\mathcal{Q}}v_2 + \mathcal{I}_x + \mathcal{J}_x + e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}}\overline{w_2} + e^{(1-x)\mathcal{Q}}e^{r_0\mathcal{Q}}w_2.$$

Finalement on trouve le résultat :

Proposition 3.3.1 *Sous les hypothèses (3.2.2) \sim (3.2.9) et (3.2.11). Si v est une solution semi-strictes du problème (3.3.7) alors*

$$(\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H), \quad (3.3.8)$$

et v est uniquement déterminée par la formule suivante :

$$v(x) = S(x, v_0, g) + S(1 - x, v_2, g(1 - \cdot)) + R_2(x), \quad (3.3.9)$$

où

$$v_0 = u_0 - J_0, \quad v_2 = v_{1,x_0} - \mathcal{I}_1 + \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}]$$

et R_2 est la partie régulière de u , caractérisée par

$$\begin{cases} R_2(x) = e^{x\mathcal{Q}}e^{\mathcal{Q}\overline{w}_2} + e^{(1-x)\mathcal{Q}}e^{r_0\mathcal{Q}}w_2 \text{ avec} \\ w_2 = -W_2v_2 - e^{(1-r_0)\mathcal{Q}}\Pi_2^{-1}v_0, \\ \overline{w}_2 = -v_2 - e^{r_0\mathcal{Q}}w_2, \\ W_2 = \Pi_2^{-1} [HG(1 - x_0)\mathcal{Q}(e^{(r_0+2x_0)\mathcal{Q}} + e^{r_0\mathcal{Q}}) - e^{(2-r_0)\mathcal{Q}}], \\ \Pi_2 = I - e^{2\mathcal{Q}} + HG(1 - x_0)\mathcal{Q}(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}}). \end{cases}$$

3.4 Résultats principaux

3.4.1 Premier problème

Théorème 3.4.1 *Sous les hypothèses (3.2.1) \sim (3.2.10), le problème (3.1.1) admet une unique solution semi-strictes avec $u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2)), \forall \varepsilon \in]0, 1[$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0\mathcal{Q}}u_0 - e^{x_0\mathcal{Q}}\mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)(e^{x_0\mathcal{Q}}u_0 - e^{x_0\mathcal{Q}}\mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

De plus

– si $x_0 \neq 0$, alors (ii) devient $\mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et $G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)(\mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$.

– si $x_0 = 0$, alors (ii) devient $u_0 \in D(H)$ et $G(1)u_{1,0} + HG(1)u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$.

Preuve. D'après le Théorème (2.5.1) du chapitre 2, le problème (3.3.1) admet une solution semi-strictes v (c-à-d $v \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2))$ et $v \in W^{1,p}(0, 1; X)$) si et seulement si, la condition (3.4.1) est vérifiée.

D'après le lemme 3.3.1, on a u définie par $u(x) = G(-x)v(x)$ est une solution semi-strictes du problème (3.1.1) satisfaisant de plus, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2)) \text{ et } Bu \in L^p(0, 1; X).$$

□

Remarque 3.4.1 *Si on a le Théorème 3.4.1, alors l'unique solution semi-stricte vérifie de plus*

$$\mathcal{Q}u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

Théorème 3.4.2 *Sous les hypothèses (3.2.1) \sim (3.2.10), le problème (3.1.1) admet une unique solution stricte avec $u \in L^p(0, 1; D(A + B^2))$ si et seulement si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \ u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) \ e^{x_0 \mathcal{Q}} u_0 - e^{x_0 \mathcal{Q}} \mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ G(1)u_{1, x_0} + HG(1 - x_0) [e^{x_0 \mathcal{Q}} u_0 - e^{x_0 \mathcal{Q}} \mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}] \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

De plus

- si $x_0 \neq 0$, alors (ii) devient $\mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et $G(1)u_{1, x_0} + HG(1 - x_0) (\mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.
- si $x_0 = 0$, alors (ii) devient $u_0 \in D(H)$ et $G(1)u_{1, 0} + HG(1)u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.

Preuve. D'après le Théorème (2.5.2) du chapitre 2, le problème (3.3.1) admet une solution stricte (c-à-d $v \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A + B^2))$) si et seulement si, la condition (3.4.2) est vérifiée.

D'après le Lemme 3.3.1, on a u définie par $u(x) = G(-x)v(x)$ est une solution stricte du problème (3.1.1) satisfaisant de plus

$$u \in L^p(0, 1; D(A + B^2)).$$

□

Remarque 3.4.2 *Si on a le Théorème 3.4.2, alors l'unique solution stricte vérifie de plus*

$$\mathcal{Q}u' \in L^p(0, 1; X).$$

3.4.2 Deuxième problème

Théorème 3.4.3 *Sous les hypothèses (3.2.1) \sim (3.2.9) et (3.2.11), soient $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$ et $u_0 \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, alors le problème (3.3.7) admet une unique solution :*

- *Semi-stricte si et seulement si :* $(\mathcal{Q} - B)e^{x_0 \mathcal{Q}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$
et

$$v_{1, x_0} + \mathcal{H} [(\mathcal{Q} - B)e^{x_0 \mathcal{Q}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \quad (3.4.3)$$

- *Stricte si et seulement si :* $(\mathcal{Q} - B)e^{x_0 \mathcal{Q}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et

$$v_{1, x_0} + \mathcal{H} [(\mathcal{Q} - B)e^{x_0 \mathcal{Q}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (3.4.4)$$

De plus,

– si $x_0 \neq 0$, alors $(\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et (3.4.3) devient

$$v_{1,x_0} + \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

– si $x_0 = 0$, alors $(\mathcal{Q} - B)u_0 - 2\mathcal{Q}\mathcal{J}_0 \in D(H)$ et (3.4.3) devient

$$v_{1,0} + HG(1)[(\mathcal{Q} - B)u_0 - 2\mathcal{Q}\mathcal{J}_0] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

La même chose pour (3.4.4).

Preuve. On considère le cas $x_0 \neq 0$ ($\mathcal{H}\mathcal{Q}(e^{x_0\mathcal{Q}}v_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k)$). La même méthode comme dans la preuve du Théorème 2.5.1. Si (3.3.7) admet une solution semi-strictes v , alors, de la Proposition 3.3.1, on a

$$(\mathcal{Q} - B)e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H),$$

et v est donnée par (3.3.9). la régularité de v est la même avec ω , où

$$\omega(x) = S(x, v_0, g) + S(1 - x, v_2, g(1 - \cdot)).$$

Comme u est une solution semi-strictes, on a $\mathcal{Q}^2v \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, ainsi $\mathcal{Q}^2\omega \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, et de 6. de la Proposition 3.4 dans [28] p. 1675,

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - \mathcal{J}_0 \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ v_2 = v_{1,x_0} - \mathcal{I}_1 + \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)(e^{x_0\mathcal{Q}}v_0 + \mathcal{I}_{x_0}) - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

mais $\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_0 \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, voir Proposition 3.5 dans Hammou [28] p. 1676, de plus, de (3.2.9), (3.2.8), (3.2.4) et (3.2.5), on a

$$\begin{cases} (\mathcal{Q} - B)(e^{x_0\mathcal{Q}}v_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k) \subset D(\mathcal{H}), \\ \mathcal{H}(\mathcal{Q} - B)(e^{x_0\mathcal{Q}}v_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{Q}^k) \subset (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

donc $[(\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in D(H)$ et

$$\begin{cases} u_0 \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ v_{1,x_0} + \mathcal{H}[(\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

Inversement, de (3.4.3), comme dans la preuve du Théorème 2.5.1, il est facile de voir que u donnée par (3.3.9) est une solution semi-strictes du (3.3.7).

Pour la solution stricte, de la même manière, ici on utilise 3. de la Proposition 3.4, p. 1675 dans Hammou [28]. \square

Lemme 3.4.1 *Soit v une solution semi-strictes (resp. stricte) du problème (3.3.7), alors :*

$$\mathcal{Q}v' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \text{ et } \mathcal{Q}v \in L^p(0, 1; X) \quad (\text{resp. } \mathcal{Q}v' \in L^p(0, 1; X)).$$

Preuve. On peut utiliser la Proposition 3.4 dans [28]. \square

Théorème 3.4.4 *Sous les hypothèses (3.2.1) \sim (3.2.9) et (3.2.11), soient $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ et*

$$(\mathcal{Q} - B)e^{x_0 \mathcal{Q}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H),$$

alors le problème (3.1.2) admet une unique solution semi-strictes avec $u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2))$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ si et seulement si la condition (3.4.3) est vérifiée.

Preuve. D'après le Théorème 3.4.3, le problème (3.3.7) admet une solution semi-strictes (c-à-d $v \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2))$ et $v \in W^{1,p}(0, 1; X)$) si et seulement si, la condition (3.4.3) est vérifiée.

Pour montrer que la solution du problème (3.1.2) est semi-strictes il suffit de montrer que $Au \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, $u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(B))$ et $u' \in L^p(0, 1; X)$. Et on a

$$(A + B^2)u(\cdot) = G(\cdot)(A + B^2)v(\cdot) \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

D'autre part

$$B^2v(x) = B^2\mathcal{Q}^{-2}(A + B^2)v(x) \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X),$$

puisque $B^2\mathcal{Q}^{-2} \in \mathcal{L}(X)$, et $v \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2))$, donc

$$Au \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

Et on a

$$u' = G(\cdot)(-Bv + v'),$$

et

$$Bv'(x) = B\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}v'(x),$$

comme $B\mathcal{Q}^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et d'après le Lemme 3.4.1, on a $\mathcal{Q}v' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, on trouve donc $Bv' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, donc

$$Bu' = G(\cdot)(-B^2v + Bv') \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

Maintenant on montre que $u' \in L^p(0, 1; X)$, on a

$$u' = G(\cdot)(-Bv + v'),$$

d'autre part on a $v' \in L^p(0, 1; X)$, donc il suffit de montrer que $Bv \in L^p(0, 1; X)$

$$Bv = B\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}v \in L^p(0, 1; X),$$

puisque $B\mathcal{Q}^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et $\mathcal{Q}v \in L^p(0, 1; X)$ (voir le Lemme 3.4.1), donc

$$u' \in L^p(0, 1; X).$$

Alors $u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A))$, $u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(B))$ et $u' \in L^p(0, 1; X)$, donc u est une solution semi-strictes du problème (3.1.2). \square

Remarque 3.4.3 Si on a le Théorème 3.4.4, alors l'unique solution semi-stricte vérifie de plus

$$\mathcal{Q}u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

Théorème 3.4.5 Sous les hypothèses (3.2.1) \sim (3.2.9) et (3.2.11), soient $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ et

$$(\mathcal{Q} - B)e^{x_0 \mathcal{Q}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + (\mathcal{Q} - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q} + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H),$$

alors le problème (3.1.2) admet une unique solution stricte avec $u \in L^p(0, 1; D(A + B^2))$ si et seulement si la condition (3.4.4) est vérifiée.

Preuve. D'après le Théorème 3.4.3, le problème (3.3.7) admet une solution stricte (c-à-d $v \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A + B^2))$) si et seulement si, la condition (3.4.4) est vérifiée. Pour montrer que la solution du problème (3.1.2) est stricte il suffit de montrer que $Au \in L^p(0, 1; X)$ et $u' \in L^p(0, 1; D(B))$. Et on a $(A + B^2)u(\cdot) = G(\cdot)(A + B^2)v(\cdot) \in L^p(0, 1; X)$. D'autre part

$$B^2v(x) = B^2\mathcal{Q}^{-2}(A + B^2)v(x) \in L^p(0, 1; X)$$

et de l'hypothèse (3.2.8) on a $B^2\mathcal{Q}^{-2} \in \mathcal{L}(X)$, et $\mathcal{Q}^2v \in L^p(0, 1; X)$, on trouve $B^2v \in L^p(0, 1; X)$, donc

$$Au \in L^p(0, 1; X).$$

Et on a

$$u' = G(\cdot)(-Bv + v'),$$

et

$$Bv'(x) = B\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}v'(x),$$

comme $B\mathcal{Q}^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et d'après le Lemme 3.4.1, on a $\mathcal{Q}v' \in L^p(0, 1; X)$, on trouve donc $Bv' \in L^p(0, 1; X)$, donc

$$Bu' = G(\cdot)(-B^2v + Bv') \in L^p(0, 1; X),$$

alors $u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A))$ et $u' \in L^p(0, 1; D(B))$, donc u est une solution stricte du problème (3.1.2). \square

Remarque 3.4.4 Si on a le Théorème 3.4.5, alors l'unique solution stricte vérifie de plus

$$\mathcal{Q}u' \in L^p(0, 1; X).$$

3.5 Problème avec un paramètre spectral

3.5.1 Premier problème

On considère (pour $\omega \geq 0$) le problème suivant dans un espace de Banach complexe X :

$$\begin{cases} -u''(x) - 2Bu'(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

avec $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur X .

On pose $A_\omega = A + \omega I$ et $\mathcal{Q}_\omega = -(A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}}$ et on suppose qu'il existe $\omega_0 \geq 0$ tel que l'opérateur $A_{\omega_0} + B^2$ vérifie les hypothèses

- Hypothèse d'ellipticité

$$\begin{cases} A_{\omega_0} + B^2 \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \\]-\infty, 0] \subset \rho(A_{\omega_0} + B^2) \text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \\ \|\lambda(\lambda I + A_{\omega_0} + B^2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C. \end{cases} \quad (3.5.2)$$

- Hypothèse BIP

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (A_{\omega_0} + B^2)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists \theta \in]0, \pi[, \\ \exists c > 0 : \|(A_{\omega_0} + B^2)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} < ce^{\theta|s|}. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

- Hypothèses de commutativité

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \in \rho(-(A_{\omega_0} + B^2)) : (A_{\omega_0} + B^2 + \lambda I)^{-1}\zeta \in D(H) \text{ et} \\ (A_{\omega_0} + B^2 + \lambda I)^{-1}H\zeta = H(A_{\omega_0} + B^2 + \lambda I)^{-1}\zeta, \end{cases} \quad (3.5.4)$$

$$\forall \lambda \in \rho(B), (A_{\omega_0} + B^2)^{-1}(B - \lambda I)^{-1} = (B - \lambda I)^{-1}(A_{\omega_0} + B^2)^{-1}, \quad (3.5.5)$$

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \in \rho(B) : (B - \lambda I)^{-1}\zeta \in D(H) \text{ et} \\ (B - \lambda I)^{-1}H\zeta = H(B - \lambda I)^{-1}\zeta. \end{cases} \quad (3.5.6)$$

- Hypothèses d'inclusion

$$D((A_{\omega_0} + B^2)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B). \quad (3.5.7)$$

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} : D((A_{\omega_0} + B^2)^{k_1}) \subset D(H). \quad (3.5.8)$$

Le déterminant de ce problème devient (on remplace \mathcal{Q} par \mathcal{Q}_ω dans Π_1 et on le note $\Pi_{1,\omega}$) :

$$\begin{cases} \Pi_{1,\omega} = HG(1 - x_0)(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} - e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}) - e^{2\mathcal{Q}_\omega} + I \\ \text{avec } \mathcal{Q}_\omega = -(A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Lemme 3.5.1 *Sous les hypothèses (3.5.2) ~ (3.5.8), il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, l'opérateur $\Pi_{1,\omega}$ est inversible.*

Preuve. On peut adapter la preuve du Lemme 4.3, p. 1680 dans [28]. On peut écrire $\Pi_{1,\omega} = I - T_{1,\omega}$ avec $T_{1,\omega} = e^{2\mathcal{Q}_\omega} - HG(1 - x_0)(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} - e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega})$.

On a pour $\omega \geq \omega_0$, $\|\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1} \mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 + c_0$, et $\exists K > 0; \|G(1 - x_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < K$ alors

$$\begin{aligned} & \|T_{1,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|HG(1 - x_0)(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}) - e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}G(1 - x_0)\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{2k_1}(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}) - e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|G(1 - x_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1}e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\quad + \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|G(1 - x_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1}e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} K(1 + c_0) \|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1}e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\quad + \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} K(1 + c_0) \cdot \|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1}e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}, \end{aligned}$$

mais il existe $c > 0$ et $k > 0$, tel que pour tout $\omega \geq \omega_0$, $m \in \{0, 2k_1\}$, et $t \in \{1 + x_0, 1 + x_0, 2\}$, on a

$$\|\mathcal{Q}_\omega^m e^{t\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{-k\sqrt{\omega}},$$

(voir Lemma 2.6, p. 103 dans [17]) alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$:

$$\|T_{1,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

et $\Pi_{1,\omega} = I - T_{1,\omega}$ admet un inverse borné. \square

Théorème 3.5.1 *On suppose que les hypothèses (3.2.1), (3.2.7) et (3.5.2) \sim (3.5.8), sont vérifiées. Alors le problème (3.5.1) admet une unique solution :*

– *Semi-stricte avec $u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2))$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ si et seulement si :*

(i) $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,

(ii) $e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}u_0 - e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}\mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et

$$G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)(e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}u_0 - e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}\mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

– *Stricte avec $u \in L^p(0, 1; D(A + B^2))$ si et seulement si :*

(i) $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,

(ii) $e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}u_0 - e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}\mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et

$$G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)(e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}u_0 - e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}\mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

$$\text{avec } \mathcal{I}_{x_0} = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\omega^{-1} \int_0^{x_0} e^{(x_0-s)\mathcal{Q}_\omega} g(s) ds \text{ et } \mathcal{J}_{x_0} = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\omega^{-1} \int_{x_0}^1 e^{(s-x_0)\mathcal{Q}_\omega} g(s) ds.$$

3.5.2 Deuxième problème

On considère (pour $\omega \geq 0$) le problème suivant dans un espace de Banach complexe X :

$$\begin{cases} -u''(x) - 2Bu'(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases} \quad (3.5.9)$$

avec $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur X .

On pose $A_\omega = A + \omega I$ et $\mathcal{Q}_\omega = -(A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}}$.

Le déterminant de ce problème devient (on remplace \mathcal{Q} par \mathcal{Q}_ω dans Π_2 et on le note $\Pi_{2,\omega}$) :

$$\begin{cases} \Pi_{2,\omega} = HG(1 - x_0)\mathcal{Q}_\omega(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}) - e^{2\mathcal{Q}_\omega} + I \\ \text{avec } \mathcal{Q}_\omega = -(A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Lemme 3.5.2 *Sous les hypothèses (3.5.2) \sim (3.5.8), il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, l'opérateur $\Pi_{2,\omega}$ est inversible.*

Preuve. On peut adapter la preuve du Lemme 4.3, p. 1680 dans [28]. On peut écrire $\Pi_{2,\omega} = I - T_{2,\omega}$ avec $T_{2,\omega} = e^{2\mathcal{Q}_\omega} - HG(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega})$.

On a pour $\omega \geq \omega_0$, $\|\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 + c_0$, et $\exists K > 0, \|G(1-x_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < K$ alors

$$\begin{aligned} & \|T_{2,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|HG(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}) - e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}G(1-x_0)\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{2k_1+1}(e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega} + e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}) - e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|G(1-x_0)\|_{\mathcal{L}(X)}\|\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1+1}e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\quad + \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|G(1-x_0)\|_{\mathcal{L}(X)}\|\mathcal{Q}_{\omega_0}^{2k_1}\mathcal{Q}_\omega^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1+1}e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)}K(1+c_0)\|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1+1}e^{(1+x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\quad + \|H\mathcal{Q}_{\omega_0}^{-2k_1}\|_{\mathcal{L}(X)}K(1+c_0)\|\mathcal{Q}_\omega^{2k_1+1}e^{(1-x_0)\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}, \end{aligned}$$

mais il existe $c > 0$ et $k > 0$, tel que pour tout $\omega \geq \omega_0, m \in \{0, 2k_1, 2k_1 + 1\}$, et $t \in \{1-x_0, 1+x_0, 2\}$, on a

$$\|\mathcal{Q}_\omega^m e^{t\mathcal{Q}_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{-k\sqrt{\omega}},$$

(voir Lemma 2.6, p. 103 dans [17]) alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$:

$$\|T_{2,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

et $\Pi_{2,\omega} = I - T_{2,\omega}$ admet un inverse borné. \square

Théorème 3.5.2 *On suppose que les hypothèses (3.2.1), (3.2.7) et (3.5.2) \sim (3.5.8), sont vérifiées. Alors le problème (3.5.9) admet une unique solution :*

– *Semi-stricte avec $u \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A + B^2)), \forall \varepsilon \in]0, 1[$ si et seulement si :*

(i) $u_0 \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p},$

(ii) $(\mathcal{Q}_\omega - B)e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}v_0 + (\mathcal{Q}_\omega - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q}_\omega + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et

$$G(1)u_{1,x_0} + HG(1-x_0)[(\mathcal{Q}_\omega - B)e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}v_0 + (\mathcal{Q}_\omega - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q}_\omega + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

– *Stricte avec $u \in L^p(0, 1; D(A + B^2))$ si et seulement si :*

(i) $u_0 \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p},$

(ii) $(\mathcal{Q}_\omega - B)e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}v_0 + (\mathcal{Q}_\omega - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q}_\omega + B)\mathcal{J}_{x_0} \in D(H)$ et

$$G(1)u_{1,x_0} + HG(1-x_0)[(\mathcal{Q}_\omega - B)e^{x_0\mathcal{Q}_\omega}v_0 + (\mathcal{Q}_\omega - B)\mathcal{I}_{x_0} - (\mathcal{Q}_\omega + B)\mathcal{J}_{x_0}] \in (D(\mathcal{A}), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

où

$$\mathcal{A} = A + B^2, \mathcal{Q}_\omega = -(\mathcal{A}_\omega)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } \mathcal{A}_\omega = A_\omega + B^2,$$

et

$$\mathcal{I}_{x_0} = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\omega^{-1} \int_0^{x_0} e^{(x_0-s)\mathcal{Q}_\omega} g(s) ds, \mathcal{J}_{x_0} = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\omega^{-1} \int_{x_0}^1 e^{(s-x_0)\mathcal{Q}_\omega} g(s) ds.$$

3.6 Application

3.6.1 Exemple :

On considère l'espace UMD $X = L^q(\mathbb{R})$, $1 < q < +\infty$ et on définit les opérateurs linéaires fermés A, B et H par :

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,q}(\mathbb{R}), Au = -\alpha u'' + cu, u \in D(A), \\ D(B) = W^{1,q}(\mathbb{R}), Bu = -\beta u', u \in D(B), \\ D(H) = W^{1,q}(\mathbb{R}), Hu = \gamma u', u \in D(H). \end{cases}$$

où $\alpha > \beta^2 > 0$, $c > 0$ et $\gamma \in \mathbb{C}$.

L'opérateur B génère un groupe fortement continu noté $(G(x))_{x \in \mathbb{R}}$, voir Fattorini [18], p. 74-75.

on fixe $\omega_0 > 0$ et on pose $A_{\omega_0} = A + \omega_0 I$, $\mathcal{A}_{\omega_0} = A_{\omega_0} + B^2$ et $\mathcal{Q}_{\omega} = (A_{\omega_0} + B^2)^{\frac{1}{2}}$, donc

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}_{\omega_0}) = W^{2,q}(\mathbb{R}), \\ \mathcal{A}_{\omega_0} u = (-\alpha + \beta^2)u'' + (c + \omega_0)u. \end{cases}$$

Grâce à Prüss et Sohr [35], le Théorème C, p. 166-167, l'opérateur \mathcal{A}_{ω_0} vérifie l'hypothèse (3.5.2) et (3.5.3).

De plus l'hypothèse (3.5.8) est vérifiée pour $k_1 = 1$, et on a $D(\mathcal{Q}_{\omega_0}) = W^{1,q}(\mathbb{R}) \subset D(B)$.

Finalement on a les hypothèses de commutativité (3.5.4) – (3.5.6) sont vérifiées.

Alors, on peut appliquer le Théorème 3.5.1, pour obtenir :

Théorème 3.6.1 *Soit $u_0, u_{1,x_0} \in L^q(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(0, 1; L^q(\mathbb{R}))$ avec $1 < p, q < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, le problème*

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + (c + \omega)u(x, y) \\ = f(x, y), \text{ p.p. } x \in]0, 1[, y \in \mathbb{R} \\ u(0, y) = u_0(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) - \gamma \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) = u_{1,x_0}(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.6.1)$$

admet :

1. une unique solution semi-stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(A + B^2), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p} = (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \\ (ii) e^{x_0 \mathcal{Q}_{\omega}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)(e^{x_0 \mathcal{Q}_{\omega}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

2. une unique solution stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \\ (ii) e^{x_0 \mathcal{Q}_{\omega}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0} \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)(e^{x_0 \mathcal{Q}_{\omega}}(u_0 - \mathcal{J}_0) + \mathcal{I}_{x_0} + \mathcal{J}_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

Similairement, on peut appliquer le Théorème 3.5.2 pour trouver :

Théorème 3.6.2 *Soit $u_0, u_{1,x_0} \in L^q(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(0, 1; L^q(\mathbb{R}))$ avec $1 < p, q < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + (c + \omega)u(x, y) \\ = f(x, y), \text{ p.p. } x \in]0, 1[, y \in \mathbb{R} \\ u(0, y) = u_0(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_0, y) = u_{1,x_0}(y), \text{ p.p. } y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

admet :

1. une unique solution semi-stricte u si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \\ (ii) \mathcal{Q}_\omega (e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} u_0 - e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} \mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{J}_{x_0}) \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)\mathcal{Q}_\omega (e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} u_0 - e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} \mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{J}_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{array} \right.$$

2. une unique solution stricte u si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \\ (ii) \mathcal{Q}_\omega (e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} u_0 - e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} \mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{J}_{x_0}) \in W^{1,q}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ G(1)u_{1,x_0} + HG(1 - x_0)\mathcal{Q}_\omega (e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} u_0 - e^{x_0 \mathcal{Q}_\omega} \mathcal{J}_0 + \mathcal{I}_{x_0} - \mathcal{J}_{x_0}) \in (W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \end{array} \right.$$

On note ici que l'espace d'interpolation $(W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}$ coïncide avec l'espace de Besov $\mathcal{B}_{q,p}^{2-1/p}(\mathbb{R})$, voir Grisvard [24], Teorema 7, p. 681 et aussi $(W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} = \mathcal{B}_{q,p}^{1-1/p}(\mathbb{R})$.

Problème aux limites pour une équation complète (approche L et M)

Notre but dans ce chapitre est d'étudier les deux problèmes précédents (3.1.1) et (3.1.2) sous des hypothèses n'imposant pas que B est un groupe. Pour cela on traite d'abord les deux problèmes annexes suivants :

$$\begin{cases} -u''(x) + (L - M)u'(x) + LMu(x) = f(x), & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}, & x_0 \in [0, 1[\end{cases} \quad (4.0.1)$$

$$\begin{cases} -u''(x) + (L - M)u'(x) + LMu(x) = f(x), & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u'(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}, & x_0 \in [0, 1[\end{cases} \quad (4.0.2)$$

avec $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < +\infty$, $u_0, u_{1,x_0} \in X$, L et M sont des opérateurs linéaires fermés de domaine $D(L)$ et $D(M)$ dans X , et H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$ dans X .

L'étude de ces problèmes annexes permettra de résoudre sous des bonnes hypothèses les problèmes (3.1.1) et (3.1.2) en considérant

$$\begin{cases} L = -B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}, \\ M = B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

4.1 Etude des Problèmes annexes (4.0.1) et (4.0.2)

4.1.1 Hypothèses

On suppose que :

- Hypothèse UMD

$$X \text{ est un espace } UMD. \quad (4.1.1)$$

- Hypothèses sur la relation entre L et M

$$\begin{cases} D(L) = D(M), \\ D(ML) = D(LM), \end{cases} \quad (4.1.2)$$

$$ML = LM. \quad (4.1.3)$$

- Hypothèse BIP

$$\exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[: -L \in BIP(\theta_L, X), -M \in BIP(\theta_M, X). \quad (4.1.4)$$

- Hypothèse d'inversibilité de $L + M$

$$(L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \quad (4.1.5)$$

donc l'opérateur $L + M$ est fermé.

- Hypothèse sur M en lien avec H

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(-M), \forall \xi \in D(H) : \\ (M + \lambda I)^{-1} \xi \in D(H) \text{ et } H(M + \lambda I)^{-1} \xi = (M + \lambda I)^{-1} H \xi. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

- Hypothèse sur L en lien avec H

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \rho(-L), \forall \xi \in D(H) : \\ (L + \lambda I)^{-1} \xi \in D(H) \text{ et } H(L + \lambda I)^{-1} \xi = (L + \lambda I)^{-1} H \xi. \end{cases} \quad (4.1.7)$$

- Hypothèse d'inclusion

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}^* : D(L^{k_0}) \subset D(H). \quad (4.1.8)$$

- Hypothèse sur le déterminant Υ_1

On pose $\Upsilon_1 = -H(-e^{x_0 L} e^M + e^{(1-x_0)M}) + (-e^L e^M + I)$, et on suppose que

$$0 \in \rho(\Upsilon_1). \quad (4.1.9)$$

- Hypothèse sur le déterminant Υ_2

On pose $\Upsilon_2 = H(L e^{x_0 L} e^M + M e^{(1-x_0)M}) + (-e^L e^M + I)$, alors on suppose que

$$0 \in \rho(\Upsilon_2). \quad (4.1.10)$$

Remarque 4.1.1 1. Sous l'hypothèse (4.1.4), L et M génèrent des semi-groupes analytiques, noté

$$\{e^{xL}\}_{x \geq 0} \text{ et } \{e^{xM}\}_{x \geq 0}.$$

(Voir Prüss et Sohr [34]).

2. Sous l'hypothèse (4.1.4) et d'après (voir Prüss et Sohr [34], Théorème 5., p. 443), on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$-(L + M) \in BIP(X, \theta), \text{ avec } \theta = \max(\theta_M, \theta_L) + \varepsilon.$$

Donc l'opérateur $L + M$ génère un semi groupe analytique sur X .

Notons que si $\theta_M \neq \theta_L$ on peut prendre $\varepsilon = 0$.

3. Comme on a $D(L) = D(M)$ (de l'hypothèse (4.1.2)), et $\rho(L) \neq \emptyset, \rho(M) \neq \emptyset$ (de l'hypothèse (4.1.4)), alors on a les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $LM = ML,$

(ii) $\forall \lambda \in \rho(L), \forall \mu \in \rho(M) : (L - \lambda I)^{-1}(M - \mu I)^{-1} = (M - \mu I)^{-1}(L - \lambda I)^{-1}.$

4. De 2. et l'hypothèse (4.1.3), on déduit que

$$\forall x \geq 0, e^{xL}e^{xM} = e^{x(L+M)}.$$

5. Grâce aux hypothèses (4.1.2), (4.1.4) et Corollaire 2., p. 443 dans [34], on trouve

$$L(L + M)^{-1} \text{ et } M(L + M)^{-1} \text{ admettent des extensions bornées à tout } X.$$

De plus, si l'hypothèse (4.1.5) est vérifiée, alors

$$L(L + M)^{-1}, M(L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

6. L'hypothèse (4.1.2) est équivalente à

$$\begin{cases} D(L) = D(M), \\ D(L^2) = D(M^2). \end{cases}$$

7. Sous les hypothèses (4.1.2) – (4.1.3), pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$D(L^p M^q) = D(L^{p+q}) = D(M^{p+q}) = D(M^p L^q).$$

Rappelons que $r_0 = \frac{1 - x_0}{2} \in]0, 1/2]$.

Lemme 4.1.1 *Sous les hypothèses (4.1.2) – (4.1.9), si on pose*

$$W_1 = \Upsilon_1^{-1}[-H(-e^{x_0 L} e^{(1-r_0)M} + e^{r_0 M}) - e^L e^{(1-r_0)M}],$$

alors $W_1 \in \mathcal{L}(X), W_1(L + M)^{-1} = (L + M)^{-1}W_1$ et

$$\Upsilon_1^{-1} = I - e^{r_0 M}W_1.$$

Preuve. On a $-e^{x_0 L} e^{(1-r_0)M} + e^{r_0 M} \in \mathcal{L}(X)$ et l'opérateur H est fermé, donc de l'hypothèse (4.1.8) on déduit que $W_1 \in \mathcal{L}(X)$. Et de l'hypothèse (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.3) on a $W_1(L + M)^{-1} = (L + M)^{-1}W_1$. De plus

$$\Upsilon_1(I - e^{r_0 M}W_1) = (I - e^{r_0 M}W_1)\Upsilon_1 = I.$$

On obtient le lemme suivant de la même manière.

Lemme 4.1.2 *Sous les hypothèses (4.1.2) – (4.1.8) et (4.1.10), si on pose*

$$W_2 = \Upsilon_2^{-1}[H(L e^{x_0 L} e^{(1-r_0)M} + M e^{r_0 M}) - e^L e^{(1-r_0)M}],$$

alors $W_2 \in \mathcal{L}(X), W_2(L + M)^{-1} = (L + M)^{-1}W_2$ et

$$\Upsilon_2^{-1} = I - e^{r_0 M}W_2.$$

Lemme 4.1.3 *Sous les hypothèses (4.1.1) – (4.1.8), pour $x \geq 0$ on a l'égalité*

$$\forall \xi \in D(H) : He^{x(M+L)}\xi = e^{x(M+L)}H\xi.$$

Preuve. On procède comme au chapitre précédent, voir 4. de la Remarque 3.2.1. □

Définition 4.1.1 *On dit que la solution u du problème (4.0.1) (resp. (4.0.2)) est :*

1. *stricte si : u vérifie le problème (4.0.1)(resp. (4.0.2)) et*

$$u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(LM)) \quad \text{et} \quad u' \in L^p(0, 1; D(L - M)),$$

2. *semi-stricte si : u vérifie le problème (4.0.1)(resp. (4.0.2)) et*

$$u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(LM)) \quad \text{et} \quad u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon; D(L - M)) \cap L^p(0, 1; X).$$

Remarque 4.1.2 *Pour montrer que la solution u du problème (4.0.1) (ou bien du problème (4.0.2)) est stricte il suffit de montrer que*

$$(L - M)u', LMu \in L^p(0, 1; X),$$

et pour que la solution soit semi-stricte il suffit de montrer que

$$(L - M)u', LMu \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \quad \text{et} \quad u' \in L^p(0, 1; X).$$

Lemme 4.1.4 *On pose que $h(x) = I_x + J_x$, avec*

$$I_x = -(L + M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)L} f(s) ds \quad \text{et} \quad J_x = -(L + M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)M} f(s) ds.$$

Alors on a :

$$LMh \in L^p(0, 1; X),$$

de plus on a $h'(x) = LI_x - MJ_x$ et

$$h', Lh', Mh', (L - M)h' \in L^p(0, 1; X).$$

Preuve. On a $h(\cdot) \in L^p(0, 1; X)$ et

$$h'(\cdot) = -(L + M)^{-1} \underbrace{L \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-s)L} f(s) ds}_{\in L^p(0,1;X)} + (L + M)^{-1} \underbrace{M \int_{\cdot}^1 e^{(s-\cdot)M} f(s) ds}_{\in L^p(0,1;X)}$$

donc $h'(\cdot) \in L^p(0, 1; X)$.

Et aussi $Lh', Mh' \in L^p(0, 1; X)$ car $L(L + M)^{-1}, M(L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Enfin

$$LMh(\cdot) = -M(L + M)^{-1} \underbrace{L \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-s)L} f(s) ds}_{\in L^p(0,1;X)} - L(L + M)^{-1} \underbrace{M \int_{\cdot}^1 e^{(s-\cdot)M} f(s) ds}_{\in L^p(0,1;X)}$$

donc $LMh(\cdot) \in L^p(0, 1; X)$. □

De même qu'au chapitre 2, en utilisant l'effet régularisant de e^L, e^M et $W_i, i = 1, 2$, on obtient :

Lemme 4.1.5 On pose pour $i = 1, 2$

$$R_i(x) = e^{xL}e^M\varphi + e^{(1-x)M}e^L\psi - e^{(1-x)M}e^{r_0M}W_i,$$

alors on a

$$(L - M)R'_i, LMR_i \in L^p(0, 1; X) \text{ et } R_i \in L^p(0, 1; X).$$

avec $R'_i(x) = Le^{xL}e^M\varphi - Me^{(1-x)M}e^L\psi + Me^{(1-x)M}e^{r_0M}W_i$.

Lemme 4.1.6 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$ et $\varepsilon \in [0, 1[$, alors on a :

1. $v_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p} \Leftrightarrow (L - M)Le^Lv_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$.
2. $v_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p} \Leftrightarrow LMe^Lv_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$.
3. $v_i + I_1 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, i = 1, 2 \Leftrightarrow (L - M)Me^{(1-x)M}v_i \in L^p(0, 1; X)$.
4. $v_i + I_1 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, i = 1, 2 \Leftrightarrow LMe^{(1-x)M}v_i \in L^p(0, 1; X)$.
5. $v_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} \Leftrightarrow Le^{xL}v_0 \in L^p(0, 1; X)$.
6. $v_i + I_1 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, i = 1, 2 \Leftrightarrow Me^{(1-x)M}v_i \in L^p(0, 1; X)$.
7. $(C - I)Ce^{x_0C}\phi \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \Leftrightarrow \phi \in (D(C^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ avec $C = L$ ou M . voir Lemme 3. page 171 dans [21].

avec

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - J_0, \\ v_1 = -I_1 + u_{1,x_0} + H(e^{x_0L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}), \\ v_2 = -I_1 + u_{1,x_0} + H(Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}). \end{cases}$$

Lemme 4.1.7 Soit $\varphi \in X$, alors $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a :

1. $(L - M)Me^{(1-x)M}\varphi \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$.
2. $LMe^{(1-x)M}\varphi \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$.

4.1.2 Représentation de la solution

Premier problème

La solution de l'équation $-u''(x) + (L - M)u'(x) + LMu(x) = f(x)$ s'écrit :

$$u(x) = e^{xL}\xi_0 + e^{(1-x)M}\xi_1 + I_x + J_x,$$

avec

$$I_x = -(L + M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)L} f(s) ds,$$

et

$$J_x = -(L + M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)M} f(s) ds.$$

D'après les conditions aux limites de notre problème on a

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^M \xi_1 + J_0, \\ u(1) = e^L \xi_0 + \xi_1 + I_1, \\ u(x_0) = e^{x_0 L} \xi_0 + e^{(1-x_0)M} \xi_1 + I_{x_0} + J_{x_0}, \end{cases}$$

et comme $\xi_0 = u_0 - e^M \xi_1 - J_0$, on a

$$\begin{aligned} u(1) &= e^L \xi_0 + \xi_1 + I_1 \\ &= e^L (u_0 - e^M \xi_1 - J_0) + \xi_1 + I_1 \\ &= (-e^L e^M + I) \xi_1 + e^L (u_0 - J_0) + I_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u(x_0) &= e^{x_0 L} \xi_0 + e^{(1-x_0)M} \xi_1 + I_{x_0} + J_{x_0} \\ &= e^{x_0 L} (u_0 - e^M \xi_1 - J_0) + e^{(1-x_0)M} \xi_1 + I_{x_0} + J_{x_0} \\ &= (-e^{x_0 L} e^M + e^{(1-x_0)M}) \xi_1 + e^{x_0 L} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}. \end{aligned}$$

Vu les hypothèses (4.1.2) et (4.1.8), on a pour $x_0 \in [0, 1[$ on a $(-e^{x_0 L} e^M + e^{(1-x_0)M}) \xi_1 \in D(L^{k_0}) \subset D(H)$, et comme on a $u(x_0) \in D(H)$ on conclut que

$$e^{x_0 L} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H).$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{1,x_0} &= u(1) - Hu(x_0) \\ &= -H(-e^{x_0 L} e^M + e^{(1-x_0)M}) \xi_1 - H[e^{x_0 L} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}] \\ &\quad + (-e^L e^M + I) \xi_1 + e^L (u_0 - J_0) + I_1 \\ &= [-H(-e^{x_0 L} e^M + e^{(1-x_0)M}) + (-e^L e^M + I)] \xi_1 - H[e^{x_0 L} (u_0 - J_0) \\ &\quad + I_{x_0} + J_{x_0}] + e^L (u_0 - J_0) + I_1, \end{aligned}$$

on rappelle que $\Upsilon_1 = -H(-e^{x_0 L} e^M + e^{(1-x_0)M}) + (-e^L e^M + I)$, et on pose

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - J_0, \\ v_1 = -I_1 + u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}), \end{cases}$$

on trouve donc

$$u_{1,x_0} = \Upsilon_1 \xi_1 - H[e^{x_0 L} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}] + e^L v_0 + I_1,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \Upsilon_1^{-1} (u_{1,x_0} + H[e^{x_0 L} v_0 + I_{x_0} + J_{x_0}] - I_1) - \Upsilon_1^{-1} e^L v_0 \\ &= \Upsilon_1^{-1} v_1 + e^L \psi_1, \end{aligned}$$

avec $\psi_1 = -\Upsilon_1^{-1} v_0$. On a aussi

$$\xi_0 = v_0 - e^M \xi_1 = v_0 - e^M (\Upsilon_1^{-1} v_1 + e^L \psi_1) = v_0 + e^M \varphi_1,$$

avec $\varphi_1 = -\Upsilon_1^{-1}v_1 - e^L\psi_1$. Donc d'après le Lemme 4.1.1, on obtient

$$\begin{cases} \xi_1 = \Upsilon_1^{-1}v_1 + e^L\psi_1 = v_1 - e^{r_0M}W_1v_1 + e^L\psi_1, \\ \xi_0 = v_0 + e^M\varphi_1. \end{cases}$$

Donc la solution u du problème (4.0.1) s'écrit :

$$u(x) = e^{xL}v_0 + e^{(1-x)M}v_1 + I_x + J_x + e^{xL}e^M\varphi_1 + e^{(1-x)M}e^L\psi_1 - e^{(1-x)M}e^{r_0M}W_1v_1,$$

avec

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - J_0, \\ v_1 = -I_1 + u_{1,x_0} + H(e^{x_0L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}), \\ W_1 = \Upsilon_1^{-1}[-H(-e^{x_0L}e^{(1-r_0)M} + e^{r_0M}) - e^Le^{(1-r_0)M}]. \end{cases}$$

Deuxième problème

La solution de l'équation $-u''(x) + (L - M)u'(x) + LMu(x) = f(x)$ s'écrit :

$$u(x) = e^{xL}\xi_0 + e^{(1-x)M}\xi_1 + I_x + J_x,$$

avec

$$I_x = -(L + M)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)L} f(s) ds,$$

et

$$J_x = -(L + M)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)M} f(s) ds.$$

D'après les conditions aux limites de notre problème on a

$$\begin{cases} u(0) = \xi_0 + e^M\xi_1 + J_0, \\ u(1) = e^L\xi_0 + \xi_1 + I_1, \\ u'(x_0) = Le^{x_0L}\xi_0 - Me^{(1-x_0)M}\xi_1 + LI_{x_0} - MJ_{x_0}. \end{cases}$$

On a donc $\xi_0 = u_0 - e^M\xi_1 - J_0$, et

$$\begin{aligned} u(1) &= e^L\xi_0 + \xi_1 + I_1 \\ &= e^L(u_0 - e^M\xi_1 - J_0) + \xi_1 + I_1 \\ &= (-e^Le^M + I)\xi_1 + e^L(u_0 - J_0) + I_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= Le^{x_0L}\xi_0 - Me^{(1-x_0)M}\xi_1 + LI_{x_0} - MJ_{x_0} \\ &= Le^{x_0L}(u_0 - e^M\xi_1 - J_0) - Me^{(1-x_0)M}\xi_1 + LI_{x_0} - MJ_{x_0} \\ &= (-Le^{x_0L}e^M - Me^{(1-x_0)M})\xi_1 + Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}. \end{aligned}$$

Des hypothèses (4.1.2) et (4.1.8) on a, pour $x_0 \in [0, 1[$

$$(-Le^{x_0L}e^M - Me^{(1-x_0)M})\xi_1 \in D(L^{k_0}) \subset D(H),$$

et comme on a $u'(x_0) \in D(H)$ on conclut que

$$Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H).$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{1,x_0} &= u(1) - Hu'(x_0) \\ &= -H(-Le^{x_0L}e^M - Me^{(1-x_0)M})\xi_1 - H[Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}] \\ &\quad + (-e^Le^M + I)\xi_1 + e^L(u_0 - J_0) + I_1 \\ &= [H(Le^{x_0L}e^M + Me^{(1-x_0)M}) + (-e^Le^M + I)]\xi_1 - H[Le^{x_0L}(u_0 - J_0) \\ &\quad + LI_{x_0} - MJ_{x_0}] + e^L(u_0 - J_0) + I_1, \end{aligned}$$

on a posé $\Upsilon_2 = H(Le^{x_0L}e^M + Me^{(1-x_0)M}) + (-e^Le^M + I)$, maintenant on pose

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - J_0, \\ v_2 = -I_1 + u_{1,x_0} + H(Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}), \end{cases}$$

donc

$$u_{1,x_0} = \Upsilon_2\xi_1 - H[Le^{x_0L}v_0 + LI_{x_0} - MJ_{x_0}] + e^Lv_0 + I_1.$$

Et par suite

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \Upsilon_2^{-1}(u_{1,x_0} + H[Le^{x_0L}v_0 + LI_{x_0} - MJ_{x_0}] - I_1) - \Upsilon_2^{-1}e^Lv_0 \\ &= \Upsilon_2^{-1}v_2 + e^L\psi_2, \end{aligned}$$

avec $\psi_2 = -\Upsilon_2^{-1}v_0$.

Et

$$\xi_0 = v_0 - e^M\xi_1 = v_0 - e^M(\Upsilon_2^{-1}v_2 + e^L\psi_2) = v_0 + e^M\varphi_2,$$

avec $\varphi_2 = -\Upsilon_2^{-1}v_2 - e^L\psi_2$. Donc d'après le Lemme 4.1.2, on a

$$\begin{cases} \xi_1 = \Upsilon_2^{-1}v_2 + e^L\psi_2 = v_2 - e^{r_0M}W_2v_2 + e^L\psi_2, \\ \xi_0 = v_0 + e^M\varphi_2. \end{cases}$$

Donc la solution u du problème (4.0.2) s'écrit :

$$u(x) = e^{xL}v_0 + e^{(1-x)M}v_2 + I_x + J_x + e^{xL}e^M\varphi_2 + e^{(1-x)M}e^L\psi_2 - e^{(1-x)M}e^{r_0M}W_2v_2,$$

avec

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - J_0, \\ v_2 = -I_1 + u_{1,x_0} + H(Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}), \\ W_2 = \Upsilon_2^{-1}[H(Le^{x_0L}e^{(1-r_0)M} + Me^{r_0M}) - e^Le^{(1-r_0)M}]. \end{cases}$$

4.1.3 Résultats principaux

Premier problème

Théorème 4.1.1 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1) \sim (4.1.9), le problème (4.0.1) admet une unique solution semi-stricte si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases} \quad (4.1.11)$$

de plus

– si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalent à

$$I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p},$$

car

$$e^{x_0 L} H u_0, e^{x_0 L} H J_0 \in D(L) \subset (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

– si $x_0 = 0$ alors (ii) devient

$$u_0 \in D(H) \text{ et } u_{1,0} + H u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p},$$

car $I_0 = 0$.

Preuve. Si la condition (4.1.11) est vérifiée, alors d'après le Lemme 4.1.4, 4.1.5 et 4.1.6 il existe une solution semi-stricte.

Réciproquement s'il existe une solution semi-stricte alors

$$u(x) = e^{xL} v_0 + e^{(1-x)M} v_1 + h(x) + R_1(x),$$

et d'après le Lemme 4.1.4 et 4.1.5, u a la même régularité avec

$$w(x) = e^{xL} v_0 + e^{(1-x)M} v_1.$$

On a, d'après 4.1.6

$$a) (L - M)u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon, X) \implies (L - M)L e^L v_0, (L - M)M e^{(1-\cdot)M} v_1 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

$$b) LM u \in L^p(0, 1 - \varepsilon, X) \implies LM e^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

De a) et b) on déduit que $L^2 e^L v_0, LM e^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, et on a

$$L^2 e^L v_0, LM e^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \iff v_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

De plus, $LM e^L v_0 = M(L - I)^{-1}(L - I)L e^L v_0$, et comme l'opérateur $M(L - I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et

$$(L - I)L e^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \iff v_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

D'où $u_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, puisque on a $v_0 = u_0 - J_0$ et $J_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.

Enfin u est une solution semi-stricte implique (i).

Pour (ii), on a si u est une solution semi-strictes, alors

$$\begin{aligned} u' \in L^p(0, 1, X) &\implies Me^{(1-\cdot)}v_1 \in L^p(0, 1; X) \\ &\implies v_1 + I_1 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} \\ &\implies u_{1, x_0} + H(e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{aligned}$$

Donc u est une solution semi-strictes implique (ii). \square

Théorème 4.1.2 Soient $u_0, u_{1, x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1) \sim (4.1.9), le problème (4.0.1) admet une unique solution stricte si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1, x_0} + H(e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \end{array} \right. \quad (4.1.12)$$

de plus

– si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalent à

$$I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1, x_0} + H(I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

– si $x_0 = 0$ alors (ii) devient

$$u_0 \in D(H) \text{ et } u_{1, 0} + Hu_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Preuve. D'après le Lemme 4.1.4, 4.1.5 et 4.1.6, si la condition (4.1.12) est vérifiée, alors il existe une solution stricte.

Réciproquement s'il existe une solution stricte alors

$$u(x) = e^{xL}v_0 + e^{(1-x)M}v_1 + h(x) + R_1(x),$$

d'après le Lemme 4.1.4 et 4.1.5, u a la même régularité avec

$$w(x) = e^{xL}v_0 + e^{(1-x)M}v_1.$$

Et on a

$$a) (L - M)u' \in L^p(0, 1, X) \implies (L - M)L e^{xL}v_0, (L - M)M e^{(1-x)M}v_1 \in L^p(0, 1; X).$$

$$b) LM u \in L^p(0, 1, X) \implies LM e^{xL}v_0, LM e^{(1-x)M}v_1 \in L^p(0, 1; X).$$

De a) et b) on déduit que $L^2 e^{xL}v_0, LM e^{xL}v_0, M^2 e^{(1-x)M}v_1, LM e^{(1-x)M}v_1 \in L^p(0, 1; X)$, et on a

$$\begin{aligned} L^2 e^{xL}v_0, LM e^{xL}v_0 \in L^p(0, 1; X) &\iff v_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p} \\ &\iff u_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} M^2 e^{(1-x)M}v_1, LM e^{(1-x)M}v_1 \in L^p(0, 1; X) \\ \iff v_1 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p} \\ \iff u_{1, x_0} + H(e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{aligned}$$

Donc u est une solution stricte, alors (i) et (ii) sont vérifiées. \square

Deuxième problème

Théorème 4.1.3 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1) \sim (4.1.8) et (4.1.10), le problème (4.0.2) admet une unique solution semi-stricte si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases} \quad (4.1.13)$$

De plus

– si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalent à

$$LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$$

car

$$e^{x_0L}HLu_0, e^{x_0L}HLJ_0 \in D(L) \subset (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}.$$

– si $x_0 = 0$ alors (ii) devient $L(u_0 - J_0) - MJ_0 \in D(H)$ et

$$u_{1,0} + H[L(u_0 - J_0) - MJ_0] \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p},$$

car $I_0 = 0$.

Preuve. D'après (4.1.13) et le Lemme 4.1.4, 4.1.5 et 4.1.6 on déduit qu'il existe une solution semi-stricte.

Réciproquement s'il existe une solution semi-stricte alors

$$u(x) = e^{xL}v_0 + e^{(1-x)M}v_2 + h(x) + R_2(x),$$

grâce aux Lemmes 4.1.4 et 4.1.5, u et ω ont la même régularité, avec

$$\omega(x) = e^{xL}v_0 + e^{(1-x)M}v_2.$$

Et on a

$$a) (L - M)u' \in L^p(0, 1 - \varepsilon, X) \implies (L - M)Le^L v_0, (L - M)Me^{(1-\cdot)}v_2 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

$$b) LMu \in L^p(0, 1 - \varepsilon, X) \implies LMe^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X).$$

De a) et b) on déduit que $L^2e^L v_0, LMe^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X)$, et on a

$$L^2e^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \iff v_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Et $LMe^L v_0 = M(L - I)^{-1}(L - I)Le^L v_0$, et comme l'opérateur $M(L - I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et

$$(L - I)Le^L v_0 \in L^p(0, 1 - \varepsilon; X) \iff v_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

D'où $u_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, puisque on a $v_0 = u_0 - J_0$ et $J_0 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$.

Enfin u est une solution semi-stricte implique (i).

Pour (ii), on a si u est une solution semi-stricte, alors

$$\begin{aligned} u' \in L^p(0, 1, X) &\implies Me^{(1-\cdot)}v_2 \in L^p(0, 1; X) \\ &\implies v_2 + I_1 \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p} \\ &\implies u_{1,x_0} + H(Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(L^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{aligned}$$

Donc u est une solution semi-stricte implique (ii). \square

Théorème 4.1.4 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1) \sim (4.1.8) et (4.1.10), le problème (4.0.2) admet une unique solution stricte si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) Le^{x_0 L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(Le^{x_0 L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases} \quad (4.1.14)$$

De plus

– Si $x_0 \neq 0$ alors (ii) est équivalent à

$$LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H) \text{ et } u_{1,x_0} + H(LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

– Si $x_0 = 0$ alors (ii) devient

$$L(u_0 - J_0) - MJ_0 \in D(H) \text{ et } u_{1,0} + H[L(u_0 - J_0) - MJ_0] \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Preuve. De la même manière, on utilise ici les assertions 1., 2., 3., 4. et 7. du Lemme 4.1.6, on trouve que u est une solution stricte si et seulement si la condition (4.1.14) est vérifiée. \square

4.2 Retour aux problèmes (3.1.1) et (3.1.2)

Sous les hypothèses

$$\begin{cases} A + B^2 \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X : \\ \mathbb{R}_- \subset \rho(A + B^2) \text{ et } \exists C > 0 : \\ \forall \lambda \geq 0, \|(\lambda I + A + B^2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

$$D((A + B^2)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B), \quad (4.2.2)$$

$$\forall y \in D(B) : B(A + B^2)^{-1}y = (A + B^2)^{-1}By \quad (4.2.3)$$

On pose $L = -B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$, $M = B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$, et on suppose que

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}; (-M)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C > 1, \exists \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[: \|(-M)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{\theta_M |s|}, \end{cases} \quad (4.2.4)$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}; (-L)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C > 1, \exists \theta_L \in]0, \frac{\pi}{2}[: \|(-L)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{\theta_L |s|}, \end{cases} \quad (4.2.5)$$

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé,} \quad (4.2.6)$$

Soit $T \in \{L, M\}$, donc on suppose que

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \in \rho(T) : (T - \lambda I)^{-1}\zeta \in D(H) \text{ et} \\ H(T - \lambda I)^{-1}\zeta = (T - \lambda I)^{-1}H\zeta, \end{cases} \quad (4.2.7)$$

$$\exists k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : D[(A + B^2)^{k_2}] \subset D(H). \quad (4.2.8)$$

Remarque 4.2.1 *Sous les hypothèses (4.2.1) \sim (4.2.3), on a*

1. $D(L) = D(M) = D\left((A + B^2)^{\frac{1}{2}}\right)$.
2. $D(L^2) = D(M^2) = D(ML) = D(LM) = D(A + B^2)$.
3. *D'après 7. de la remarque 4.1.1, et l'hypothèse (4.2.8), on a*

$$D(L^{2k_2}) = D(M^{2k_2}) = D[(A + B^2)^{k_2}] \subset D(H).$$

4. $ML = LM \subset A$.
5. $L - M \subset 2B$.

En utilisant les résultats précédents (le Théorème 4.1.1 et 4.1.2), on obtient :

4.2.1 Premier problème

Théorème 4.2.1 *Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1), (4.1.9) et (4.2.1) \sim (4.2.8), le problème (3.1.1) admet une unique solution semi-strictes si et seulement si :*

- (i) $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,
- (ii) $e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H)$ et
 $u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$,

avec $L = -B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$, $M = B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 4.2.2 *Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1), (4.1.9) et (4.2.1) \sim (4.2.8), le problème (3.1.1) admet une unique solution stricte si et seulement si :*

- (i) $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,
- (ii) $e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H)$ et
 $u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L}(u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,

avec $L = -B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$, $M = B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$.

Et en utilisant le Théorème 4.1.3 et 4.1.4, on obtient :

4.2.2 Deuxième problème

Théorème 4.2.3 *Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X$, $f \in L^p(0, 1; X)$, $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1), (4.1.10) et (4.2.1) \sim (4.2.8), le problème (3.1.2) admet une unique solution semi-strictes si et seulement si :*

- (i) $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,
- (ii) $Le^{x_0 L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H)$ et
 $u_{1,x_0} + H(Le^{x_0 L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$,

avec $L = -B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}, M = B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 4.2.4 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X, f \in L^p(0, 1; X), 1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1), (4.1.10) et (4.2.1) \sim (4.2.8), le problème (3.1.2) admet une unique solution stricte si et seulement si :

(i) $u_0 \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,

(ii) $Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0} \in D(H)$ et

$u_{1,x_0} + H(Le^{x_0L}(u_0 - J_0) + LI_{x_0} - MJ_{x_0}) \in (D(A + B^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}$,

avec $L = -B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}, M = B - (B^2 + A)^{\frac{1}{2}}$.

4.3 Problème avec un paramètre spectral

4.3.1 Premier problème

On considère pour $\omega \geq 0$ le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) - 2Bu'(x) + Au(x) + \omega u(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}, \end{cases}$$

avec $u_0, u_{1,x_0} \in X, f \in L^p(0, 1; X), 1 < p < +\infty$, et A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur X .

Qui peut s'écrire

$$\begin{cases} -u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) + L_\omega M_\omega u(x) = f(x), & \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - Hu(x_0) = u_{1,x_0}, & x_0 \in [0, 1[\end{cases} \quad (4.3.1)$$

en posant

$$\begin{cases} L_\omega = -B - (B^2 + A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega = B - (B^2 + A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{avec } A_\omega = A - \omega I. \end{cases}$$

On suppose que $\exists \omega_0 \geq 0$ tel que A_{ω_0} vérifie les hypothèses :

$$\begin{cases} A_{\omega_0} + B^2 \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X : \\ \mathbb{R}_- \subset \rho(A_{\omega_0} + B^2) \text{ et } \exists C > 0 : \\ \forall \lambda \geq 0, \|(\lambda I + A_{\omega_0} + B^2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

$$D((A_{\omega_0} + B^2)^{\frac{1}{2}}) \subset D(B), \quad (4.3.3)$$

$$\forall y \in D(B) : B(A_{\omega_0} + B^2)^{-1}y = (A_{\omega_0} + B^2)^{-1}By \quad (4.3.4)$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \forall \omega \geq \omega_0 : (-M_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C > 1, \exists \theta_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[: \|(-M_\omega)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{\theta_1 |s|}, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \forall \omega \geq \omega_0 : (-L_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists C > 1, \exists \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[: \|(-L_\omega)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{\theta_L |s|}. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Soit $\omega \geq \omega_0, T \in \{L, M\}$, donc on suppose que

$$\begin{cases} \forall \zeta \in D(H), \forall \lambda \in \rho(T_\omega) : (T_\omega - \lambda I)^{-1} \zeta \in D(H) \text{ et} \\ H(T_\omega - \lambda I)^{-1} \zeta = (T_\omega - \lambda I)^{-1} H \zeta, \end{cases} \quad (4.3.7)$$

$$\exists k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : D((A_{\omega_0} + B^2)^{k_2}) \subset D(H). \quad (4.3.8)$$

Remarque 4.3.1 1. Pour $\omega \geq \omega_0$ et d'après l'hypothèse (4.3.2), on déduit que l'opérateur $-(A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique noté $\{e^{-x(A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}}}\}_{x \geq 0}$, et

$$(L_\omega + M_\omega)^{-1} = -2(A_\omega + B^2)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(X).$$

2. Sous les hypothèses (4.3.5), (4.3.6) et grâce à Prüss et Sohr [34], Théorème 5., p. 443, pour $\omega \geq \omega_0$ et $\varepsilon > 0$

$$-(L_\omega + M_\omega) = 2(A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}} \in BIP(\theta, X), \text{ avec } \theta = \max(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon.$$

Remarque 4.3.2 Sous les hypothèses (4.3.2) \sim (4.3.4), et pour $\omega \geq \omega_0$, on a :

$$\begin{cases} D\left((A_\omega + B^2)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(B), \\ \forall \xi \in D(B), B(A_\omega + B^2)^{-\frac{1}{2}} \xi = (A_\omega + B^2)^{-\frac{1}{2}} B \xi. \end{cases}$$

Remarque 4.3.3 Sous les hypothèses (4.3.2) \sim (4.3.4), pour tout $\omega \geq \omega_0$, on a

$$1. D(L_\omega) = D(M_\omega) = D\left((A + B^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

2. $D(L_\omega^2) = D(M_\omega^2) = D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega M_\omega) = D(A + B^2)$. De plus, de l'hypothèse (4.3.8), on a

$$D(L_\omega^{2k_2}) = D(M_\omega^{2k_2}) = D[(A_\omega + B^2)^{k_2}] \subset D(H).$$

$$3. M_\omega L_\omega = L_\omega M_\omega \subset A.$$

$$4. L_\omega - M_\omega \subset 2B.$$

Lemme 4.3.1 Sous les hypothèses (4.3.2) \sim (4.3.8), il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, l'opérateur

$$\Upsilon_{1,\omega} = -H(-e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} + e^{(1-x_0) M_\omega}) + (-e^{L_\omega + M_\omega} + I)$$

admet un inverse borné.

Preuve. On a

$$\Upsilon_{1,\omega} = [-H(-e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} + e^{(1-x_0)M_\omega})(-e^{L_\omega+M_\omega} + I)^{-1} + I](-e^{L_\omega+M_\omega} + I)$$

pour montrer que $\Upsilon_{1,\omega}$ est inversible il suffit de montrer que $\|T_{1,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ pour ω assez grand, avec $T_{1,\omega} = -H(-e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} + e^{(1-x_0)M_\omega})(-e^{L_\omega+M_\omega} + I)^{-1}$.

on peut écrire $T_{1,\omega}$ sous la forme

$$T_{1,\omega} = (HL_{\omega_0}^{-2k_2} L_{\omega_0}^{2k_2} L_\omega^{-2k_2} L_\omega^{2k_2} e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} - HM_{\omega_0}^{-2k_2} M_{\omega_0}^{2k_2} M_\omega^{-2k_2} M_\omega^{2k_2} e^{(1-x_0)M_\omega})(-e^{L_\omega+M_\omega} + I)^{-1}$$

On a d'après le Théorème du graphe fermé $HL_{\omega_0}^{-2k_2}, HM_{\omega_0}^{-2k_2} \in \mathcal{L}(X)$, et on peut montrer que $\|L_{\omega_0}^{2k_2} L_\omega^{-2k_2}\|_{\mathcal{L}(X)} < c_1, \|M_{\omega_0}^{2k_2} M_\omega^{-2k_2}\|_{\mathcal{L}(X)} < c_2$.

Pour les opérateurs $L_\omega^{2k_2} e^{x_0 L_\omega}, e^{M_\omega}, M_\omega^{2k_2} e^{(1-x_0)M_\omega}$ on utilise le Lemme 2.6, p. 103 dans [17].

On peut montrer que l'opérateur $-e^{L_\omega+M_\omega} + I$ est inversible.

Donc

$$\exists C, k > 0; \|T_{1,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{-k\sqrt{\omega}}.$$

Donc

$$\exists \omega^* > \omega_0; \forall \omega \geq \omega^*; \|T_{1,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

□

Théorème 4.3.1 Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X, f \in L^p(0, 1; X), 1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1) et (4.3.2) \sim (4.3.8), le problème (4.3.1) admet une unique solution

– semi-stricte si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{array} \right.$$

– stricte si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + I_{x_0} + J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \end{array} \right.$$

$$\text{ici } I_x = -(L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)L_\omega} f(s) ds \text{ et } J_x = -(L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)M_\omega} f(s) ds.$$

4.3.2 Deuxième problème

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) + L_\omega M_\omega u(x) = f(x), \quad \text{p.p. } x \in]0, 1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) - Hu'(x_0) = u_{1,x_0}, \quad x_0 \in [0, 1[\end{array} \right. \quad (4.3.9)$$

avec $u_0, u_{1,0} \in X, f \in L^p(0, 1; X), 1 < p < +\infty, H$ est un opérateur linéaire fermé, et

$$\begin{cases} L_\omega = -B - (B^2 + A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega = B - (B^2 + A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{avec } A_\omega = A - \omega I. \end{cases}$$

avec A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur X .

Lemme 4.3.2 *Sous les hypothèses (4.3.2) \sim (4.3.8), il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$, l'opérateur*

$$\Upsilon_{2,\omega} = H(L_\omega e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} + M_\omega e^{(1-x_0)M_\omega}) + (-e^{L_\omega + M_\omega} + I)$$

admet un inverse borné.

Preuve. On a

$$\Upsilon_{2,\omega} = [H(L_\omega e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} + M_\omega e^{(1-x_0)M_\omega})(-e^{L_\omega + M_\omega} + I)^{-1} + I](-e^{L_\omega + M_\omega} + I)$$

pour montrer que $\Upsilon_{2,\omega}$ est inversible il suffit de montrer que $\|T_{2,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ pour ω assez grand, avec $T_{2,\omega} = H(L_\omega e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} + M_\omega e^{(1-x_0)M_\omega})(-e^{L_\omega + M_\omega} + I)^{-1}$.

On peut écrire $T_{2,\omega}$ sous la forme

$$T_{2,\omega} = (H L_\omega^{-2k_2} L_{\omega_0}^{2k_2} L_\omega^{-2k_2} L_\omega^{2k_2+1} e^{x_0 L_\omega} e^{M_\omega} + H M_\omega^{-2k_2} M_{\omega_0}^{2k_2} M_\omega^{-2k_2} M_\omega^{2k_2+1} e^{(1-x_0)M_\omega})(-e^{L_\omega + M_\omega} + I)^{-1}$$

Comme dans le Lemme 4.3.1, et d'après le Théorème du graphe fermé et le Lemme 2.6, p. 103 dans [17], on trouve

$$\exists C, k > 0 : \|T_{2,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C e^{-k\sqrt{\omega}}.$$

Donc

$$\exists \omega^* \geq \omega_0 : \forall \omega \geq \omega^* : \|T_{2,\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

□

Théorème 4.3.2 *Soient $u_0, u_{1,x_0} \in X, f \in L^p(0, 1; X), 1 < p < \infty$, sous les hypothèses (4.1.1) et (4.3.2) – (4.3.8), le problème (4.3.9) admet une unique solution*

– *semi-stricte si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}, \end{cases}$$

– *stricte si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) u_0 \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (ii) L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0} \in D(H) \text{ et} \\ u_{1,x_0} + H(L_\omega e^{x_0 L_\omega} (u_0 - J_0) + L_\omega I_{x_0} - M_\omega J_{x_0}) \in (D(LM), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \end{cases}$$

$$\text{avec } I_x = -(L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_0^x e^{(x-s)L_\omega} f(s) ds \text{ et } J_x = -(L_\omega + M_\omega)^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)M_\omega} f(s) ds.$$

4.4 Application

L'exemple suivant est inspiré de l'Exemple 2, p. 180, dans Favini et al [20].

4.4.1 Exemple :

Soit A un opérateur auto-adjoint défini positif dans un espace de Hilbert X , et $B = \alpha A^{1/2}$, α un nombre réel. Alors les deux opérateurs L et M définis par

$$L = (-\alpha - (\alpha^2 + 1)^{1/2})A^{1/2}, M = (\alpha - (\alpha^2 + 1)^{1/2})A^{1/2}$$

vérifient les hypothèses (4.1.2) – (4.1.5).

On suppose que l'opérateur A vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X, \sigma(A) \subset]0, +\infty[\text{ et} \\ \text{pour tout } \theta \in]0, \pi[: \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(A + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{array} \right.$$

où $S_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \theta\}$.

On pose $H = -\beta (A^{1/2})^k$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} \beta \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, il est clair que les hypothèses (4.1.6) – (4.1.7) sont vérifiées, de plus l'hypothèse (4.1.8) est vérifiée pour $k_0 = k$. Alors le déterminant Γ_1 sera

$$\Gamma_1 = \beta (A^{1/2})^k \left(e^{-\alpha_1 A^{1/2}} - e^{-\alpha_2 A^{1/2}} \right) - e^{-2(\alpha^2+1)^{1/2} A^{1/2}} + I.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = (x_0 - 1)\alpha + (1 - x_0)(\alpha^2 + 1)^{1/2}, \\ \alpha_2 = (x_0 - 1)\alpha + (x_0 + 1)(\alpha^2 + 1)^{1/2}, \end{array} \right.$$

il est clair que $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$.

On va utiliser le calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels pour inverser l'opérateur Γ_1 , pour cela on étudie les fonctions F, G définis sur \mathbb{C} par

$$\left\{ \begin{array}{l} F(z) = 1 + G(z), \\ G(z) = \beta z^k (e^{-\alpha_1 z} - e^{-\alpha_2 z}) - e^{-2(\alpha^2+1)^{1/2} z}, \end{array} \right.$$

alors $\Gamma_1 = F(A^{1/2})$.

On peut adapter le Lemme 15, p. 21 dans [27].

Il est clair que F et G sont des fonctions holomorphe au voisinage de \overline{S} .

Et on a pour l'assertion 2., si $x > 0$

$$e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x} \geq 0,$$

comme $\operatorname{Re} \beta \geq 0$, on trouve

$$\operatorname{Re} F(x) = (\operatorname{Re} \beta) x^k (e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x}) + \left(1 - e^{-2(\alpha^2+1)^{1/2} x}\right) > 0,$$

donc $|F(x)| > 0$.

Pour l'assertion 3., on a pour $z \in \bar{S}$

$$|G(z)| \leq |\beta| \left| \sqrt{2} \operatorname{Re} z \right|^k \left(e^{-\alpha_1 \operatorname{Re} z} + e^{-\alpha_2 \operatorname{Re} z} \right) + e^{-2(\alpha^2+1)^{1/2} \operatorname{Re} z}.$$

Donc les assertions 1., 2., 3., et ainsi 4. du Lemme 15, p. 21 dans [27], sont vérifiées pour les fonctions F et G , on déduit que l'opérateur Γ_1 est inversible, donc on peut appliquer le théorème 4.1.1 et 4.1.2.

La même chose pour l'opérateur Γ_2 qui sera

$$\Gamma_2 = \beta (A^{1/2})^{k+1} \left[((\alpha^2 + 1)^{1/2} - \alpha) e^{-\alpha_1 A^{1/2}} + ((\alpha^2 + 1)^{1/2} + \alpha) e^{-\alpha_2 A^{1/2}} \right] - e^{-2(\alpha^2+1)^{1/2} A^{1/2}} + I.$$

On peut donc appliquer le Théorème 4.1.3 et 4.1.4.

Bibliographie

- [1] Aibeche A., Amroune N. et Maingot S. : *On Elliptic Equations with General Non-Local Boundary Conditions in UMD Spaces*, Mediterr. J. Math., pp. 1051–1063 (2015).
- [2] Aibeche A., Amroune N. et Maingot S. : *General Non Local Boundary Value Problem for Second Order Elliptic Equation*, Mathematische Nachrichten, vol. 291, issue 10, pp. 1470–1485 (2018).
- [3] Ashyralyev, A. : *A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space*, Journal of the mathematical analysis and applications, 344, pp. 557–573 (2008).
- [4] Ashyralyev A. et Ozturk E. : *On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations : Well-posedness*, Applied Mathematics and Computation, 219, pp. 1093–1107 (2012).
- [5] Balakrishnan, A. V. : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by them*, Pacif. J. Math., 10, pp. 419–437 (1960).
- [6] Bitsadze, A. V. et Samarskii A. A. : *On Some Simple Generalizations of linear Elliptic Boundary value Problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., 185, pp. 739–740 (1969) ; English transl., Soviet Math. Dokl., 10, (1969).
- [7] Butzer P. L. et Berens H. : *Semi-groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, (1967).
- [8] Carleman T. : *Sur la Théorie des Equations Intégrales et ses Applications*, Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich, 1, pp. 132–151 (1932).
- [9] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. et Medeghri A. : *Sturm-Liouville Problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces*, Differential and Integral Equations, 21, pp. 981–1000 (2008).
- [10] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. et Medeghri A. : *Complet Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in UMD Spaces*, 4, pp. 523–538 (2011).
- [11] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. et Medeghri A. : *Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in Hölder Spaces*, Applicable Analysis, 91, pp. 1453–1475 (2012).

- [12] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. et Medeghri A. : *Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in General L_p Sobolev Spaces and Applications*, Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS), 8, pp. 56–77 (2015).
- [13] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. et Ould Melha Kh. : *New Results on Complete Elliptic Equations with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in non Commutative Case*, Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 10, pp. 70–96 (2017).
- [14] Cheggag M., Labbas R., Maingot S. et Kaid M. : *New Results on Elliptic Equations with Nonlocal Boundary Coefficient-Operator Conditions in UMD spaces : Noncommutative Cases*, Mediterr. J. Math. 17, 64 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00009-020-1484-x>
- [15] Da Prato G. et Grisvard P. : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, J. Math. Pures Appl., IX Ser., 54, pp. 305–387 (1975).
- [16] Dore G. et Venni A. : *On the Closedness of the Sum of two Closed Operators*, Mathematische Zeitschriftk, 196, pp. 124–136 (1987).
- [17] Dore G. et Yakubov A. : *Semigroup Estimates And Noncoercive Boundary Value Problems*, Semigroup Forum, 60, pp. 93–121 (2000).
- [18] Fattorini H. O. : *The Cauchy Problem*, Addison-Weseley. Reading. Mass., (1983).
- [19] Favini A., Labbas R., Tanabe H. et Yagi A. : *On the Solvability of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkc. Ekv., 47, pp. 205–224 (2004).
- [20] Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H. et Yagi A. : *Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD spaces*, Funkc. Ekv., 49, pp. 193–214 (2006).
- [21] Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H. et Yagi A. : *A simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications*, Funkc. Ekv., 51, pp. 165–187 (2008).
- [22] Favini A., Labbas R., Maingot S. et Meisner M. : *Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equation in non Commutative Cases*, Appl. Anal., 91, pp. 1495–1510 (2012).
- [23] Favini A., Labbas R., Maingot S. et Meisner M. : *Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations in Non-commutative Cases*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 33, pp. 4967–4990 (2013).
- [24] Grisvard P. : *Spazi di tracce e applicazioni*, Rend. Mat., (4), 5(VI), pp. 657–729 (1972).
- [25] Haase, M. : *The Functional Calculus for Sectorial Operators. Operator Theory : Advances and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 169, (2006).
- [26] Hamdi B., Maingot S., and Medeghri A. : *On general Bitsadze-Samarskii problems of elliptic type in L^p Cases*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, II. Ser (2021). <https://doi.org/10.1007/s12215-020-00579-2>.
- [27] Hammou H., Labbas R., Maingot S. et Medeghri A. : *On some elliptic problems with nonlocal boundary coefficient-operator conditions in the framework of Hölderian spaces*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 36, pp. 1–32 (2013).
- [28] Hammou H., Labbas R., Maingot S. et Medeghri A. : *Nonlocal General Boundary Value Problems of Elliptic Type in L_p Cases*, Mediterranean Journal of Mathematics Mediterr. J. of Math., 13, pp. 1669–1683 (2016).

- [29] Krein S. G. : *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, (1967).
- [30] Kato T. : *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, (1980).
- [31] Labbas R. : *Problème aux limites pour une équation différentielle opérationnelle du Second Ordre*, thèse de doctorat d'état, université de Nice, juin (1987).
- [32] Labbas R., Maingot S., Manceau D. et Thorel A. : *On the Regularity of a Generalized Diffusion Problem Arising in Population Dynamics Set in a Cylindrical Domain*, J. Math. Anal., 450, pp. 351–376 (2017).
- [33] Lions J. L. : *Théorème de trace et d'interpolation I et II*, Annali S. N. S. di Pisa, 13, pp. 389–403 (1959). Et 14, 317–331 (1960).
- [34] Prüss J. et Sohr H. : *On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces*, Math. Z., 203, pp. 429–452 (1990).
- [35] Prüss J. et Sohr H. : *Boundedness of imaginary powers of second-order elliptic differential operators in L^p* , Hiroshima Math. J., 23, pp. 161–192 (1993).
- [36] Ruzhansky M., Tokmagambetov N. et Torebek B. T. : *Bitsadze-Samarskii type problem for the integro-differential diffusion-wave equation on the Heisenberg groupe*, Integral Transforms and special Functions, 31 (1), pp. 1–9 (2020).
- [37] Ruzhansky M., Tokmagambetov N. et Torebek B. T. : *On a non-local problem for a multi-term fractional diffusion-wave equation*, Fract. Calc. Appl. Anal., 23 (2), 324–355 (2020).
- [38] Sinestrari E. : *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions*, J. of math. anal. and appl., 107, pp. 16–66 (1985).
- [39] Skubachevskii A. L. : *Nonclassical boundary-value problems, I*, J. Math. Sci., 155 (2), pp. 199–334 (2008).
- [40] Tamarkin J. D. : *Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions*, Petrograd, (1917); Abridged English transl., Math. Z., 27, pp. 1–54 (1928).
- [41] Triebel H. : *Interpolation theory, Function spaces, differential operators*, North Holland, Amsterdam, (1978).
- [42] Wang Y. : *Solutions to Nonlinear Elliptic Equations with a Nonlocal Boundary Condition*, E. J. D. E. , 05, pp. 1–16 (2002).