

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité :Modélisation Contrôle et Optimisation

Inégalités q -Intégrales Fractionnaires

Présenté par : FERRAOUN Nour El Yakine

Soutenu le 22 juin 2017

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Introduction	1
1 Eléments De Base Du Calcul Fractionnaire	3
1.1 Fonctions Spéciales	3
1.1.1 Fonction Gamma d'Euler	3
1.1.2 Fonction Béta d'Euler	4
1.2 Intégrale Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville	4
1.3 Inégalités Intégrales Fractionnaires	5
1.3.1 Inégalité de Tchebyshev	5
1.3.2 Inégalité de Grüss	5
2 q-Intégrales Fractionnaires	7
2.1 Généralités	7
2.2 Les Fonctions q-Spéciales	11
2.3 q-Intégrale Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville	15
2.3.1 Exemples	20
3 Inégalités q-Intégrales Fractionnaires	22

3.1	q-Inégalité de Tchebyshev	22
3.2	q-Inégalité de type Grüss	27
	Conclusion Générale	31

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la patience, la volonté, l'énergie et la santé pour poursuivre ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire professeur TAF Sabrina, je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je remercie également le professeur BRAHIM Kamel pour l'aide et les conseils qu'il m'a donnés lors des différents suivis.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont attribué en acceptant de juger ce modeste travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance à mes parents et ma famille, pour leur soutien et leur disponibilité durant toutes les années de ma scolarité.

Enfin, je remercie tous mes ami(e)s et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Merci à Vous ...

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des inégalités q -intégrales de type Tchebychev et de type Grüss d'ordre non entier, à l'aide de la q -intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, en utilisant un seul paramètre fractionnaire, deux paramètres fractionnaires et puis deux paramètres de déformation.

Introduction

Le calcul fractionnaire a été introduit le 30 septembre 1695. Ce jour-là, Leibniz a écrit une lettre à l'Hôpital, ce qui a permis de généraliser la notion de la dérivation entière (classique) à la dérivation non-entière. Si cet ordre est négatif, on parle d'une intégration non entière et s'il est positif, il s'agit d'une dérivation non entière. La note de Leibniz a conduit à l'apparition de la théorie des dérivées et des intégrales d'ordre fractionnaire qui est devenue un sujet très attractif pour les mathématiciens, et de nombreuses formes différentes d'opérateurs différentiels fractionnaires ont été introduites par : Grunwald, Letnikow, Riemann, Liouville, Hadamard, Caputo, Riesz, ...

Au cours des années, un intérêt considérable a été porté à l'étude du calcul sans limites appelé calcul quantique ou q-calcul. Le célèbre mathématicien Euler a initié l'étude q-calcul au 18^{ème} siècle en introduisant un paramètre dans le travail de série infinie de Newton. Au début du 20^{ème} siècle, Jackson (1910) a commencé une étude systématique du q-calcul et a introduit la notion de q-dérivée et q-intégrale.

Le sujet du calcul quantique a de nombreuses applications dans divers domaines des mathématiques et de la physique, comme la théorie des nombres, la combinatoire, les polynômes orthogonaux, les fonctions hypergéométriques basiques, la théorie quantique et la mécanique. Ce sujet a reçu une attention remarquable, par conséquent, il est considéré comme un sujet corporatif entre les mathématiques et la physique.

Une autre théorie se développe en parallèle est la théorie des inégalités fractionnaires qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des équations différentielles qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements dans le monde réel... On réfère le lecteur à [6, 7, 9, 10].

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier les inégalités q-intégrales de type Tchebychev et de type Grüss d'ordre fractionnaire, en utilisant un seul paramètre fractionnaire, deux paramètres fractionnaires et puis deux paramètres de déformation .

Ce mémoire se compose essentiellement de trois chapitres, et d'une conclusion.

Le premier chapitre comporte quelques notions de base du calcul fractionnaire, ainsi que les propriétés des intégrales fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre, nous avons énoncé tous les outils de base du q -calcul fractionnaire que nous aurons besoin par la suite ainsi que les démonstrations détaillées tels que les fonctions q -spéciales et la propriété du semi-groupe pour les q -intégrales fractionnaires.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des inégalités q -intégrales fractionnaires telles que l'inégalité de type q -Tchebyshev et de type q -Grüss, en utilisant un paramètre fractionnaire, deux paramètres fractionnaires et deux paramètres de déformation q_1 et q_2 .

Nous terminons notre mémoire par une conclusion générale et une bibliographie sont données à la fin de ce document.

Eléments De Base Du Calcul Fractionnaire

Ce chapitre constitue une partie préliminaire, dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie du calcul fractionnaire, qui représentent un outil indispensable dans notre étude. Dans la première section de ce chapitre, on présente les fonctions spéciales (fonction Gamma d'Euler et fonction Bêta d'Euler) et leurs propriétés (Voir [8, 12]). Dans la deuxième section, on introduit la définition de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ainsi que ses propriétés (Voir [11, 14]).

1.1 Fonctions Spéciales

Les fonctions Gamma d'Euler et Bêta d'Euler sont les joyaux des mathématiques.

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1 [12]. *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt ; \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.1.1)$$

Proposition 1.1.1 [12].

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) ; \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.1.2)$$

En particulier, $\Gamma(1) = 1$

1.1.2 Fonction Béta d'Euler

Définition 1.1.2 [11]. La fonction Béta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt; \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0. \quad (1.1.3)$$

Proposition 1.1.2 [11].

1. Le lien entre la fonction Gamma et la fonction Béta :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0.$$

2. La fonction Béta est symétrique :

$$\beta(x, y) = \beta(y, x); \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0.$$

1.2 Intégrale Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 [11, 14]. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (notée par R-L) de f d'ordre $\alpha \geq 0$ notée $J_a^\alpha f(x)$, par :

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt; \quad \alpha > 0, x \in [a, b]. \quad (1.2.1)$$

Pour $\alpha = 0$, on a

$$J_a^0 f(x) = f(x) \text{ (l'opérateur identité).}$$

Proposition 1.2.1 [11, 14]. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a pour tout $\alpha, \beta > 0$

1. Semi-groupe :

$$(J_a^\alpha J_a^\beta) f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x); \quad x \in [a, b].$$

2. La commutativité :

$$(J_a^\alpha J_a^\beta) f(x) = (J_a^\beta J_a^\alpha) f(x); \quad x \in [a, b].$$

3. L'application de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville sur la fonction

$f(x) = (x - a)^\beta$ est donnée par :

$$J_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha + \beta}; \quad x > a, \quad \alpha, \beta > 0.$$

1.3 Inégalités Intégrales Fractionnaires

Dans [2], Belarbi et Dahmani et Dahmani et al. [5] ont établi les inégalités intégrales fractionnaires suivantes.

1.3.1 Inégalité de Tchebyshev

On considère la quantité :

$$T(f, g) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right) \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b g(x) dx \right).$$

On va supposer que f et g sont synchrones sur $[a, b]$

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0; \quad x, y \in [a, b] \quad (1.3.1)$$

Théorème 1.3.1 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si f et g vérifient la condition (1.3.1), on a

$$\frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} J_a^\alpha (fg)(t) \geq J_a^\alpha f(t) J_a^\alpha g(t); \quad \alpha > 0, \quad t \in [a, b]. \quad (1.3.2)$$

Théorème 1.3.2 Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[a, b]$, alors on a l'inégalité suivante

$$\frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} J_a^\alpha (fg)(t) + \frac{(t - a)^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} J_a^\beta (fg)(t) \geq J_a^\alpha f(t) J_a^\beta g(t) + J_a^\beta f(t) J_a^\alpha g(t); \quad \alpha, \beta > 0, \quad t \in [a, b].$$

Remarque 1.3.1 Dans ce Théorème, si on prend $\alpha = \beta$ on obtient le **Théorème 1.3.1**.

1.3.2 Inégalité de Grüss

Théorème 1.3.3 Soient f et g deux fonctions continues définies de $[a, b]$ vers \mathbb{R} telles que $m \leq f(x) \leq M$, $q \leq g(x) \leq Q$ et $x \in [a, b]$, alors on a

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right) \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b g(x) dx \right) \leq \frac{(M - m)(Q - q)}{4}.$$

Théorème 1.3.4 Soient f et g deux fonctions continues définies de $[a, b]$ vers \mathbb{R} telles que $m \leq f(x) \leq M$, $q \leq g(x) \leq Q$, $\alpha > 0$ et $x \in [a, b]$, alors on a

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha f g(t) - J_a^\alpha f(t) J_a^\alpha g(t) \leq \left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^2 \frac{(M-m)(Q-q)}{4}; \quad t \in [a, b].$$

Remarque 1.3.2 Si on pose $\alpha = 1$ et $t = b$ on obtient l'inégalité classique de Grüss.

q-Intégrales Fractionnaires

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions des concepts fondamentaux nécessaires à l'étude et la manipulation des q-intégrales fractionnaires, ainsi que certaines propriétés liées à ces intégrales.

2.1 Généralités

Gaspar et Rahman [6], Jackson [9] et Kac et Cheung [10] ont donné les définitions de base et les propriétés du calcul quantique.

Soit $0 < q < 1$, on définit le q-analogue de a comme étant ([10])

$$[a]_q = \frac{1 - q^a}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{a-1} \quad ; \quad a \in \mathbb{C}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le q-shift factorielle est défini par ([10])

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad , \quad (a; q)_0 = 1$$

On peut définir le q-analogue de la factorielle connue sous le nom de q-factorielle, par ([10])

$$[n]_q! = \prod_{k=0}^{n-1} [k]_q = \frac{(q; q)_n}{(1 - q)^n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{où} \quad (q; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, le q-analogue de la fonction $(a - b)^{(n)}$ est définie comme suit ([10])

$$(a - b)_q^n = (a - b)^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} (a - bq^k), \quad (a - b)^{(0)} = 1. \quad (2.1.1)$$

Plus général , si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(a - b)^{(\alpha)} = a^\alpha \prod_{n=0}^{\infty} \frac{a - bq^n}{a - bq^{\alpha+n}},$$

Si $b = 0$, alors $a^{(\alpha)} = a^\alpha$.

Pour tout a, b et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $k, n \in \mathbb{N}$

$$(a - bq^k)^{(\alpha)} = a^\alpha (1 - q^k b/a)^{(\alpha)}, \quad (2.1.2)$$

$$(q^n - q^k)^{(\alpha)} = 0, \quad (k \leq n). \quad (2.1.3)$$

Définition 2.1.1 [10]. On définit la q -dérivée d'une fonction f par

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad (2.1.4)$$

Exemple 2.1.1 La q -dérivée de $f(x) = x^n$, où n est un entier positif

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} \\ &= \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} \\ &= [n]_q x^{n-1}. \end{aligned}$$

Définition 2.1.2 [10]. La q -dérivée du produit de la fonction $f(x)$ et la fonction $g(x)$ est comme suit :

$$D_q (f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x). \quad (2.1.5)$$

Proposition 2.1.1 Pour tout entier n ,

1.

$$D_q (x - a)_q^n = [n]_q (x - a)_q^{n-1}. \quad (2.1.6)$$

2.

$$D_q (a - x)_q^n = -[n]_q (a - qx)_q^{n-1}. \quad (2.1.7)$$

Preuve.

1. On raisonne par récurrence :

La propriété est vraie pour $n = 0$, car $[0]_q = 0$, et on suppose qu'elle est vraie pour un certain rang k , (i.e) : $D_q(x-a)_q^k = [k]_q(x-a)_q^{k-1}$.

On vérifie la propriété pour $k+1$, sachant que $(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k(x-q^k a)$. En utilisant la dérivée du produit (2.1.5), on obtient

$$\begin{aligned}
D_q(x-a)_q^{k+1} &= D_q(x-a)_q^k(x-q^k a) \\
&= (x-a)_q^k + (qx-q^k a) D_q(x-a)_q^k \\
&= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1}a) [k]_q(x-a)_q^{k-1} \\
&= \left(1 + q[k]_q\right) (x-a)_q^k \\
&= [k+1]_q(x-a)_q^k.
\end{aligned}$$

2. Selon la définition (2.1.1), pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x) \cdots (a-q^{n-1}x) \\
&= (a-x) \cdot q(q^{-1}a-x) \cdot q^2(q^{-2}a-x) \cdots q^{n-1}(q^{-n+1}a-x) \\
&= (-1)^n q^{n(n-1)/2} (x-q^{-n+1}a) \cdots (x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a).
\end{aligned}$$

D'où ,

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{n(n-1)/2} (x-q^{-n+1}a)_q^n. \quad (2.1.8)$$

En utilisant la formule (2.1.8) et la propriété (2.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
D_q(a-x)_q^n &= (-1)^n q^{n(n-1)/2} D_q(x-q^{-n+1}a)_q^n \\
&= (-1)^n q^{n(n-1)/2} [n]_q (x-q^{-n+1}a)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} q^{(n-1)(n-2)/2} (x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1} \cdot (q^{-1}a-x)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q (a-qx)_q^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Définition 2.1.3 [9]. La q -intégrale d'une fonction f définie sur un intervalle $[0, b]$ (l'intégrale de Jackson), est définie comme :

$$\begin{aligned}
(J_q f)(t) &= \int_0^t f(\tau) d_q \tau \\
&= t(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(tq^n) q^n ; \quad t \in [0, b].
\end{aligned} \quad (2.1.9)$$

La q -intégrale d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$

$$(J_{q,a}f)(t) = \int_a^b f(\tau) d_q \tau = \int_0^b f(\tau) d_q \tau - \int_0^a f(\tau) d_q \tau. \quad (2.1.10)$$

Définition 2.1.4 [9]. Soit $0 < q < 1$, $b > 0$, et $n \in \mathbb{Z}^+$. La q -intégrale restreinte qui dépend uniquement de q, b et n , est définie comme :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\tau) d_q \tau &= \int_{bq^n}^b f(\tau) d_q \tau \\ &= b(1-q) \sum_{k=0}^{n-1} f(bq^k) q^k. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Définition 2.1.5 [10]. Soient f et g sont deux fonctions q -dérivables sur $[a, b]$, la q -intégration par parties est définie par :

$$\int_a^b f(x) D_q g(x) d_q x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) D_q f(x) d_q x. \quad (2.1.12)$$

Définition 2.1.6 [10]. On définit deux q -analogues de la fonctions exponentielle par :

$$\begin{aligned} e_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!} \\ &= \frac{1}{(1 - (1-q)x)_q^{\infty}}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned} E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]_q!} \\ &= (1 + (1-q)x)_q^{\infty}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Les deux fonctions q -exponentielle sont étroitement liées

$$e_q^x E_q^{-x} = 1. \quad (2.1.15)$$

Proposition 2.1.2 [10].

1.

$$D_q e_q^x = e_q^x. \quad (2.1.16)$$

2.

$$D_q E_q^x = E_q^{qx}. \quad (2.1.17)$$

Preuve.

1. Pour démontrer la première propriété, on a besoin d'utiliser la définition (2.1.4)

$$\begin{aligned}
 D_q e_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]_q!} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j]_q x^{j-1}}{[j]_q!} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]_q!} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}.
 \end{aligned}$$

2. Pour démontrer la deuxième propriété, il suffit aussi d'utiliser la définition (2.1.4)

$$\begin{aligned}
 D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{D_q x^j}{[j]_q!} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{[j]_q x^{j-1}}{[j]_q!} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-1)/2} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]_q!} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{q^j x^j}{[j]_q!}.
 \end{aligned}$$

□

2.2 Les Fonctions q-Spéciales

Dans cette section, on étudie le q-analogue des fonctions spéciales ainsi que leurs propriétés.

Définition 2.2.1 [10]. La fonction q-Gamma notée Γ_q , est définie par :

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)^{(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}; \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (2.2.1)$$

Elle admet une représentation q-intégrale $\Gamma_q(t) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$.

Propriétés

1. $\Gamma_q(t+1) = [t]_q \Gamma_q(t); \quad t > 0.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_q(n+1) = [n]_q!$

En particulier, $\Gamma_q(1) = 1.$

Preuve.

1. Pour démontrer la première propriété, on applique la définition (2.2.1), puis on utilise la définition (2.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_q(t+1) &= \frac{(1-q)^{(t)}}{(1-q)^t} \\ &= \frac{(1-q^t)(1-q)^{(t-1)}}{(1-q)(1-q)^{t-1}} \\ &= [t]_q \Gamma_q(t). \end{aligned}$$

2. En effet, dans la propriété précédente on prend $t = n, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \Gamma_q(n+1) &= [n]_q \Gamma_q(n) \\ &= [n]_q [n-1]_q \Gamma_q(n-1) \\ &\quad \vdots \\ &= [n]_q [n-1]_q [n-2]_q \cdots \Gamma_q(1) \\ &= [n]_q!. \end{aligned}$$

□

Définition 2.2.2 [10]. La fonction q -Béta est définie par l'intégrale suivante :

$$\beta_q(t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{s-1} d_q x; \quad t, s > 0$$

Propriétés

1. Si $t > 0$ et n un entier positif, on a

$$\beta_q(t, n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}. \quad (2.2.2)$$

2. Pour tout $t, s > 0$, on a

$$\beta_q(t, s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty}. \quad (2.2.3)$$

3. Pour tout $t, s > 0$,

$$\beta_q(t, s) = \frac{\Gamma_q(t) \Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \quad (2.2.4)$$

Preuve.

1. Tout d'abord, en utilisant la propriété (2.1.7) et une q-intégration par partie pour (??), on a, pour tout $t > 1, s > 0$,

$$\begin{aligned} \beta_q(t, s) &= -\frac{1}{[s]_q} \int_0^1 x^{t-1} D_q(1-x)_q^s d_q x \\ &= \frac{[t-1]_q}{[s]_q} \int_0^1 x^{t-2} (1-qx)_q^s d_q x, \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\beta_q(t, s) = \frac{[t-1]_q}{[s]_q} \beta_q(t-1, s+1). \quad (2.2.5)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \beta_q(t, n+1) &= \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{n-1} (1-q^n x) d_q x \\ &= \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{n-1} d_q x - q^n \int_0^1 x^t (1-qx)_q^{n-1} d_q x, \end{aligned}$$

et donc,

$$\beta_q(t, n+1) = \beta_q(t, n) - q^n \beta_q(t+1, n) \quad (2.2.6)$$

Combinant (2.2.5) et (2.2.6), on obtient

$$\begin{aligned} \beta_q(t, n+1) &= \beta_q(t, n) - q^n \frac{[t]_q}{[n]_q} \beta_q(t, n+1) \\ &= \frac{1-q^n}{1-q^{t+n}} \beta_q(t, n). \end{aligned}$$

Pour tout $t > 0$ et n un entier positif,

$$\begin{aligned} \beta_q(t, 1) &= \int_0^1 x^{t-1} d_q x \\ &= \frac{1}{[t]_q}. \end{aligned}$$

On obtient, alors

$$\begin{aligned}\beta_q(t, n) &= \frac{(1 - q^{n-1}) \cdots (1 - q)}{(1 - q^{t+n-1}) \cdots (1 - q^{t+1}) [t]_q} \\ &= \frac{(1 - q) (1 - q)_q^{n-1}}{(1 - q^t)_q^n}.\end{aligned}$$

2. Pour démontrer la deuxième propriété, on va utiliser les deux définitions suivantes :

$$(1 - q)_q^{n-1} = \frac{(1 - q)_q^\infty}{(1 - q^n)_q^\infty}. \quad (2.2.7)$$

$$\frac{1}{(1 - q^t)_q^n} = \frac{(1 - q^{t+n})_q^\infty}{(1 - q^t)_q^\infty}. \quad (2.2.8)$$

La propriété (2.2.3) est vraie pour $s = 1, 2, 3, \dots$ D'après (??)

$$\int_0^1 x^{t-1} \frac{(1 - qx)_q^\infty}{(1 - q^s)_q^\infty} d_q x,$$

En utilisant la propriété (2.2.2) pour écrire son côté droit,

$$\frac{(1 - q) (1 - q)_q^\infty (1 - q^{t+s})_q^\infty}{(1 - q^t)_q^\infty (1 - q^s)_q^\infty}.$$

Comme désiré.

3. En utilisant (2.2.7) dans la définition (2.2.1), on obtient

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1 - q)_q^\infty}{(1 - q)^{t-1} (1 - q^t)_q^\infty}.$$

donc, il est clair que :

$$\begin{aligned}\Gamma_q(t) \Gamma_q(s) &= \frac{(1 - q)_q^\infty}{(1 - q)^{t-1} (1 - q^t)_q^\infty} \frac{(1 - q)_q^\infty}{(1 - q)^{s-1} (1 - q^s)_q^\infty} \\ &= \frac{(1 - q)_q^\infty (1 - q)_q^\infty}{(1 - q)^{t+s-2} (1 - q^t)_q^\infty (1 - q^s)_q^\infty} \\ &= \frac{(1 - q)_q^\infty (1 - q)_q^\infty (1 - q^{t+s})_q^\infty}{(1 - q)^{t+s-2} (1 - q^t)_q^\infty (1 - q^s)_q^\infty (1 - q^{t+s})_q^\infty} \\ &= \frac{(1 - q)_q^\infty}{(1 - q)^{t+s-1} (1 - q^{t+s})_q^\infty} \frac{(1 - q) (1 - q)_q^\infty (1 - q^{t+s})_q^\infty}{(1 - q^t)_q^\infty (1 - q^s)_q^\infty}.\end{aligned}$$

Et donc

$$\Gamma_q(t) \Gamma_q(s) = \Gamma_q(t + s) \beta_q(t, s).$$

□

2.3 q-Intégrale Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville

Dans [1, 13], Agarwal et Rajković et al. ont introduit la définition de la q-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Définition 2.3.1 [13]. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la q-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha \geq 0$ comme suit :

$$(J_{q,a}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^x (x-qt)^{(\alpha-1)} f(t) d_q t; \quad \alpha > 0, x \in [a, b]. \quad (2.3.1)$$

Où

$$J_{q,a}^0 f(x) = f(x).$$

Lemme 2.3.1 [13]. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} (J_{q,a}^\alpha f)(t) d_q t = 0, \quad (0 < a < x < b). \quad (2.3.2)$$

Preuve.

Utilisant les définitions (2.1.2) et (2.1.3) et la définition (2.1.11), pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} (J_{q,a}^\alpha f)(aq^n) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^{aq^n} (aq^n - qt)^{(\alpha-1)} f(t) d_q t \\ &= -\frac{a}{\Gamma_q(\alpha)} (1-q) \sum_{j=0}^{n-1} (aq^n - aq^{j+1})^{(\alpha-1)} f(aq^j) q^j \\ &= -\frac{a^\alpha}{\Gamma_q(\alpha)} (1-q) \sum_{j=0}^{n-1} (q^n - q^{j+1})^{(\alpha-1)} f(aq^j) q^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors, selon la définition de la q-intégrale, on a

$$\int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} (J_{q,a}^\alpha f)(t) d_q t = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} (x - aq^{n+1})^{(\beta-1)} (J_{q,a}^\alpha f)(aq^n) q^n = 0.$$

□

Lemme 2.3.2 [13]. Pour tout $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}^+$, l'identité suivante est valide :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \mu q^{1-n})^{(\alpha-1)} (1 - q^{1+n})^{(\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha-1)} (1-q)^{(\beta-1)}} q^{\alpha n} = \frac{(1 - \mu q)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}}. \quad (2.3.3)$$

Preuve.

Voir [13]. □

Rajković et al. [13] ont démontré les propriétés suivantes.

Proposition 2.3.1 *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, on a*

1. Semi-groupe et commutativité :

$$(J_{q,a}^\alpha J_{q,a}^\beta)f(x) = J_{q,a}^{\alpha+\beta}f(x) = (J_{q,a}^\beta J_{q,a}^\alpha)f(x); \quad x \in [a, b]. \quad (2.3.4)$$

2. L'application de la q-intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville sur la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$ est donnée par :

$$J_{q,a}^\alpha(x - a)^{(\beta)} = \frac{\Gamma_q(\beta + 1)}{\Gamma_q(\alpha + \beta + 1)}(x - a)^{(\alpha+\beta)}; \quad x > a, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.3.5)$$

Preuve.

1. En utilisant la définition (2.3.1) et la définition (2.1.10), puis on applique le **Lemme 2.3.1**

$$\begin{aligned}
(J_{q,a}^\beta J_{q,a}^\alpha) f(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\beta)} \int_a^x (x-qt)^{(\beta-1)} J_{q,a}^\alpha f(t) d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_a^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_a^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \left[\int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} - \int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} \right] \times \\
&\quad \left[\int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u - \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u \right] d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^a (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^t (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t.
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de [1],

$$(J_{q,0}^\beta J_{q,0}^\alpha) f(x) = J_{q,0}^{\alpha+\beta} f(x)$$

De plus ,

$$J_{q,a}^{\alpha+\beta} f(x) = J_{q,0}^{\alpha+\beta} f(x) - J_{q,0}^{\alpha+\beta} f(a) \quad (2.3.6)$$

On conclut que ,

$$(J_{q,a}^\beta J_{q,a}^\alpha) f(x) = J_{q,0}^{\alpha+\beta} f(x) - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t$$

D'après la formule (2.3.6) , on peut écrire

$$\begin{aligned}
(J_{q,a}^\beta J_{q,a}^\alpha) f(x) &= J_{q,a}^{\alpha+\beta} f(x) + J_{q,0}^{\alpha+\beta} f(a) - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t \\
&= J_{q,a}^{\alpha+\beta} f(x) + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^a (x-qt)^{(\alpha+\beta-1)} f(t) d_q t \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x-qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t-qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t.
\end{aligned}$$

Alors,

$$(J_{q,a}^\beta J_{q,a}^\alpha) f(x) = J_{q,a}^{\alpha+\beta} f(x) + I.$$

Où

$$I = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha + \beta)} \int_0^a (x - qt)^{(\alpha+\beta-1)} f(t) d_q t - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_0^x (x - qt)^{(\beta-1)} \int_0^a (t - qu)^{(\alpha-1)} f(u) d_q u d_q t.$$

En utilisant la définition (2.1.11), on peut écrire

$$\begin{aligned} I &= \frac{a(1-q)}{\Gamma_q(\alpha + \beta)} \sum_{k=0}^{\infty} (x - aq^{k+1})^{(\alpha+\beta-1)} f(aq^k) q^k \\ &\quad - \frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} (x - xq^{j+1})^{(\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} a(1-q) (xq^j - aq^{k+1})^{(\alpha-1)} f(aq^k) q^k q^j \\ &= a(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - aq^{k+1})^{(\alpha+\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha + \beta)} f(aq^k) q^k \\ &\quad - a(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} (x - xq^{j+1})^{(\beta-1)} (xq^j - aq^{k+1})^{(\alpha-1)} q^j f(aq^k) q^k \\ &= a(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(x - aq^{k+1})^{(\alpha+\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha + \beta)} - \frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} (x - xq^{j+1})^{(\beta-1)} (xq^j - aq^{k+1})^{(\alpha-1)} q^j \right] f(aq^k) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I = a(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} c_k f(aq^k) q^k.$$

avec

$$c_k = \frac{(x - aq^{k+1})^{(\alpha+\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha + \beta)} - \frac{x(1-q)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} (x - xq^{j+1})^{(\beta-1)} (xq^j - aq^{k+1})^{(\alpha-1)} q^j.$$

D'après la définition (2.2.1), on a

$$\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta) = \frac{(1-q)^{(\alpha-1)} (1-q)^{(\beta-1)}}{(1-q)^{\alpha-1} (1-q)^{\beta-1}}. \quad (2.3.7)$$

et

$$\Gamma_q(\alpha + \beta) = \frac{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{\alpha+\beta-1}} \quad (2.3.8)$$

En utilisant la formule (2.3.7) et la formule (2.3.8), on obtient donc

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1} (x-aq^{k+1})^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} \\
 &\quad - \frac{x(1-q)(1-q)^{\alpha+\beta-2}}{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta-1)}} \sum_{j=0}^{\infty} x^{\beta-1} (1-q^{j+1})^{(\beta-1)} x^{\alpha-1} \left(q^j - \frac{a}{x}q^{k+1}\right)^{(\alpha-1)} q^j \\
 &= \frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1} x^{\alpha+\beta-1} \left(1 - \frac{a}{x}q^{k+1}\right)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} \\
 &\quad - \frac{x^{\alpha+\beta-1} (1-q)^{\alpha+\beta-1}}{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta-1)}} \sum_{j=0}^{\infty} (1-q^{j+1})^{(\beta-1)} \left(1 - \frac{a}{x}q^{k+1-j}\right)^{(\alpha-1)} q^{\alpha j}.
 \end{aligned}$$

Si on prend $\mu = \frac{a}{x}q^k$, on trouve

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1} x^{\alpha+\beta-1} (1-\mu q)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} \\
 &\quad - \frac{x^{\alpha+\beta-1} (1-q)^{\alpha+\beta-1}}{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta-1)}} \sum_{j=0}^{\infty} (1-q^{j+1})^{(\beta-1)} (1-\mu q^{1-j})^{(\alpha-1)} q^{\alpha j}
 \end{aligned}$$

On applique le **Lemme 2.3.2**, on obtient

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{(1-q)^{\alpha+\beta-1} x^{\alpha+\beta-1} (1-\mu q)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} - \frac{x^{\alpha+\beta-1} (1-q)^{\alpha+\beta-1} (1-\mu q)^{(\alpha+\beta-1)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta-1)}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Selon la définition (2.3.1) et la définition (2.1.10), on a

$$\begin{aligned}
 J_{q,a}^{\alpha}(x-a)^{(\beta)} &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^x (x-qt)^{(\alpha-1)} (t-a)^{(\beta)} d_q t \\
 &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \left[\int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)} (t-a)^{(\beta)} d_q t - \int_0^a (x-qt)^{(\alpha-1)} (t-a)^{(\beta)} d_q t \right].
 \end{aligned}$$

Également, le suivant est valide selon la définition (2.1.11) et la définition (2.1.3) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^a (x-qt)^{(\alpha-1)} (t-a)^{(\beta)} d_q t &= a(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} (x-aq^{k+1})^{(\alpha-1)} (aq^k - a)^{(\beta)} q^k \\
 &= a^{\beta+1}(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} (x-aq^{k+1})^{(\alpha-1)} (q^k - 1)^{(\beta)} q^k \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

par la définition (2.1.11) et le **Lemme** 2.3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)} (t-a)^{(\beta)} d_q t &= x(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} (x-xq^{k+1})^{(\alpha-1)} (xq^k - a)^{(\beta)} q^k \\
 &= x^{\alpha+\beta} (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} (1-q^{k+1})^{(\alpha-1)} \left(q^k - \frac{a}{x}\right)^{(\beta)} q^k \\
 &= x^{\alpha+\beta} (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} (1-q^{k+1})^{(\alpha-1)} \left(1 - \frac{a}{xq} q^{1-k}\right)^{(\beta)} q^{k(1+\beta)} \\
 &= x^{\alpha+\beta} (1-q) \frac{\left(1 - \frac{a}{x}\right)^{(\alpha+\beta)} (1-q)^{(\alpha-1)} (1-q)^{(\beta)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}} \\
 &= (1-q) \frac{(1-q)^{(\alpha-1)} (1-q)^{(\beta)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}} (x-a)^{(\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la définition (2.2.1), on obtient le résultat. \square

2.3.1 Exemples

Exemple 1 :

Si on prend en particulier dans la propriété (2.3.5), $\beta = 0$ et $a = 0$, on a

$$(J_q^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)} d_q t,$$

La propriété (2.1.7) nous assure que :

$$D_q(x-t)^{(\alpha)} = -[\alpha]_q (x-qt)^{(\alpha-1)} \quad (2.3.9)$$

Donc ,

$$\begin{aligned}
 (J_q^\alpha 1)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x -\frac{1}{[\alpha]_q} D_q(x-t)^{(\alpha)} d_q t \\
 &= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)} \int_0^x D_q(x-t)^{(\alpha)} d_q t
 \end{aligned}$$

En utilisant une q-intégration par partie (2.1.12), on obtient alors

$$\begin{aligned}
 (J_q^\alpha 1)(x) &= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)} [(x-t)^{(\alpha)}]_0^x \\
 &= \frac{x^{(\alpha)}}{\Gamma_q(\alpha+1)}.
 \end{aligned}$$

Alors,

$$(J_q^\alpha 1)(x) = \frac{x^{(\alpha)}}{\Gamma_q(\alpha+1)}.$$

Exemple 2 :

Soit $f(x) = x$,

En appliquant une q-intégration par parties et on utilise la formule (2.3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
(J_q^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x - qt)^{(\alpha-1)} t d_q t \\
&= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)} \int_0^x t D_q(x-t)^{(\alpha)} d_q t \\
&= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)} \left([t(x-t)^{(\alpha)}]_0^x - \int_0^x (x-qt)^{(\alpha)} d_q t \right) \\
&= -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)} \left(-\int_0^x -\frac{1}{[\alpha+1]_q} D_q(x-t)^{(\alpha+1)} d_q t \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+2)} [-(x-t)^{(\alpha+1)}]_0^x \\
&= \frac{x^{(\alpha+1)}}{\Gamma_q(\alpha+2)}
\end{aligned}$$

Alors,

$$(J_q^\alpha f)(x) = \frac{x^{(\alpha+1)}}{\Gamma_q(\alpha+2)}.$$

Inégalités q-Intégrales Fractionnaires

Les inégalités q-intégrales d'ordre fractionnaire jouent un rôle important, elles apparaissent comme une description naturelle des phénomènes observées dans divers domaines scientifiques tels que la physique, l'ingénierie, la mécanique,... etc. L'efficacité de ces inégalités de beaucoup de problèmes réels a motivé beaucoup de chercheurs à les étudier.

3.1 q-Inégalité de Tchebyshev

Dans [3, 4], Brahim et Taf ont établi les inégalités q-intégrales fractionnaires de type Tchebyshev comme suit.

Définition 3.1.1 Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]_q$. Les fonctions f et g sont dites synchrones sur $[a, b]_q$ si

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq 0; \quad \tau, \rho \in [a, b]_q. \quad (3.1.1)$$

où

$$[a, b]_q = \{bq^k; \quad 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour $b > 0$ et $a = bq^n$, $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Théorème 3.1.1 Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]_q$ satisfaisantes la condition (3.1.1) et soient v, w deux fonctions positives sur $[a, b]_q$, alors on a

$$J_{q,a}^\alpha w(b) J_{q,a}^\alpha vfg(b) + J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\alpha wfg(b) \geq J_{q,a}^\alpha vf(b) J_{q,a}^\alpha wg(b) + J_{q,a}^\alpha wf(b) J_{q,a}^\alpha vg(b); \quad \alpha > 0. \quad (3.1.2)$$

Preuve.

On développe (3.1.1), on a alors

$$H(\tau, \rho) = f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) - f(\tau)g(\rho) - f(\rho)g(\tau) \geq 0; \quad \tau, \rho \in [a, b]_q. \quad (3.1.3)$$

Et on multiplie (3.1.3) par $\frac{(b-q\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}v(\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{(b-q\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}v(\tau)f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho)\frac{(b-q\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}v(\tau) - g(\rho)\frac{(b-q\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}v(\tau)f(\tau) \\ & - f(\rho)\frac{(b-q\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}v(\tau)g(\tau) \geq 0, \quad \tau, \rho \in [a, b]_q. \end{aligned}$$

On intègre cette dernière inégalité par rapport à τ sur $[a, b]_q$, on aura donc

$$J_{q,a}^\alpha vfg(b) + f(\rho)g(\rho)J_{q,a}^\alpha v(b) - g(\rho)J_{q,a}^\alpha vf(b) - f(\rho)J_{q,a}^\alpha vg(b) \geq 0. \quad (3.1.4)$$

Maintenant, multipliant (3.1.4) par $\frac{(b-q\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}w(\rho)$, on va avoir

$$\begin{aligned} & \frac{(b-q\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}w(\rho)J_{q,a}^\alpha(vfg)(b) + J_{q,a}^\alpha v(b)\frac{(b-q\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}w(\rho)f(\rho)g(\rho) - J_{q,a}^\alpha vf(b)\frac{(b-q\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}w(\rho)g(\rho) - \\ & J_{q,a}^\alpha vg(b)\frac{(b-q\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}w(\rho)f(\rho) \geq 0. \end{aligned}$$

Et on intègre cette dernière inégalité par rapport ρ sur $[a, b]_q$, on obtient

$$J_{q,a}^\alpha w(b)J_{q,a}^\alpha vfg(b) + J_{q,a}^\alpha v(b)J_{q,a}^\alpha wfg(b) - J_{q,a}^\alpha vf(b)J_{q,a}^\alpha wg(b) - J_{q,a}^\alpha wf(b)J_{q,a}^\alpha vg(b) \geq 0.$$

□

Théorème 3.1.2 Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]_q$ satisfaisantes la condition (3.1.1) et soient v, w deux fonctions positives sur $[a, b]_q$, alors on a l'inégalité suivante :

$$J_{q,a}^\beta w(b)J_{q,a}^\alpha vfg(b) + J_{q,a}^\alpha v(b)J_{q,a}^\beta wfg(b) \geq J_{q,a}^\alpha vf(b)J_{q,a}^\beta wg(b) + J_{q,a}^\beta wf(b)J_{q,a}^\alpha vg(b); \quad \alpha, \beta > 0.$$

Preuve.

Il suffit de multiplier l'inégalité (3.1.4) par $\frac{(b-q\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}w(\rho)$, puis l'intégrer par rapport à ρ sur $[a, b]_q$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)} \int_a^b \int_a^b (b-q\tau)^{(\alpha-1)}(b-q\rho)^{(\beta-1)}v(\tau)w(\rho)H(\tau, \rho) d_q\tau d_q\rho \\ & = J_{q,a}^\beta w(b)J_{q,a}^\alpha vfg(b) + J_{q,a}^\alpha v(b)J_{q,a}^\beta wfg(b) - J_{q,a}^\alpha vf(b)J_{q,a}^\beta wg(b) - J_{q,a}^\beta wf(b)J_{q,a}^\alpha vg(b). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.1 Dans ce Théorème, si on prend $\alpha = \beta$, on obtient le **Théorème 3.1.1**.

Théorème 3.1.3 Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, +\infty[$, et soit v une fonction positive sur $[0, +\infty[$. Pour tout $b > 0$ et pour tout $\alpha > 0$, alors on a

$$J_{q_2}^\alpha v(b) J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\alpha v f g(b) \geq J_{q_1}^\alpha v f(b) J_{q_2}^\alpha v g(b) + J_{q_2}^\alpha v f(b) J_{q_1}^\alpha v g(b); \quad q_1, q_2 \in]0, 1[. \quad (3.1.5)$$

Preuve.

Soient f et g sont deux fonctions synchrones sur $[0, +\infty[$, on a

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq 0; \quad \tau, \rho \in [0, +\infty[, \quad (3.1.6)$$

ce qui implique que

$$f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho) + f(\rho)g(\tau). \quad (3.1.7)$$

Multipliant les deux membres de (3.1.7) par $\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau) \\ & \geq g(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)f(\tau) + f(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)g(\tau). \end{aligned}$$

On intègre cette dernière inégalité par rapport à τ sur $[0, b]$, on obtient donc

$$J_{q_1}^\alpha v f g(b) + f(\rho)g(\rho)J_{q_1}^\alpha v(b) \geq g(\rho)J_{q_1}^\alpha v f(b) + f(\rho)J_{q_1}^\alpha v g(b). \quad (3.1.8)$$

Maintenant, multipliant les deux membres de (3.1.8) par $\frac{(b-q_2\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_2}(\alpha)}v(\rho)$, on va avoir

$$\begin{aligned} & \frac{(b-q_2\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_2}(\alpha)}v(\rho)J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_2}(\alpha)}v(\rho)f(\rho)g(\rho) \\ & \geq J_{q_1}^\alpha v f(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_2}(\alpha)}v(\rho)g(\rho) + J_{q_1}^\alpha v g(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_2}(\alpha)}v(\rho)f(\rho). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Et on intègre (3.1.9) par rapport à ρ sur $[0, b]$, on obtient

$$J_{q_2}^\alpha v(b)J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b)J_{q_2}^\alpha v f g(b) \geq J_{q_1}^\alpha v f(b)J_{q_2}^\alpha v g(b) + J_{q_2}^\alpha v f(b)J_{q_1}^\alpha v g(b).$$

□

Théorème 3.1.4 Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, +\infty[$, et soient v, w deux fonctions positives sur $[0, +\infty[$. Pour tout $b > 0$ et pour tout $\alpha, \beta > 0$, on a

$$J_{q_2}^\beta w(b) J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\beta w f g(b) \geq J_{q_1}^\alpha v f(b) J_{q_2}^\beta w g(b) + J_{q_2}^\beta w f(b) J_{q_1}^\alpha v g(b).$$

Preuve.

Il suffit de multiplier l'inégalité (3.1.8) par $\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}w(\rho)$, puis l'intégrer par rapport à ρ sur $[0, b]$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}w(\rho)J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) \frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}w(\rho)f(\rho)g(\rho) \\ & \geq J_{q_1}^\alpha v f(b) \frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}w(\rho)g(\rho) + J_{q_1}^\alpha v g(b) \frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}w(\rho)f(\rho). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Et on intègre (3.1.10) par rapport à ρ sur $[0, b]$, on obtient donc

$$J_{q_2}^\beta w(b) J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\beta w f g(b) \geq J_{q_1}^\alpha v f(b) J_{q_2}^\beta w g(b) + J_{q_2}^\beta w f(b) J_{q_1}^\alpha v g(b).$$

□

Dans [12], Sroysang a présenté l'inégalité q-intégrale fractionnaire de trois fonctions est la suivante.

Théorème 3.1.5 Soit v une fonction positive sur $[0, +\infty[$, et soient f, g et h trois fonctions synchrones sur $[0, +\infty[$, vérifient

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))(h(\tau) + h(\rho)) \geq 0; \quad \tau, \rho \in [0, +\infty[. \quad (3.1.11)$$

Pour tout $b > 0$ et pour tout $\alpha, \beta > 0$ et $q_1, q_2 \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} & J_{q_2}^\beta v(b) J_{q_1}^\alpha (v f g h)(b) + J_{q_1}^\alpha (v f g)(b) J_{q_2}^\beta (v h)(b) + J_{q_1}^\alpha (v h)(b) J_{q_2}^\beta (v f g)(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\beta (v f g h)(b) \\ & \geq J_{q_1}^\alpha v f h(b) J_{q_2}^\beta v g(b) + J_{q_1}^\alpha (v g h)(b) J_{q_2}^\beta (v f)(b) + J_{q_1}^\alpha (v g)(b) J_{q_2}^\beta (v f h)(b) + J_{q_1}^\alpha (v f)(b) J_{q_2}^\beta (v g h)(b). \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Preuve. Soient f, g et h sont trois fonctions synchrones sur $[0, +\infty[$, on a

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))(h(\tau) + h(\rho)) \geq 0; \quad \tau, \rho \in [0, +\infty[.$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} & f(\tau)g(\tau)h(\tau) + f(\tau)g(\tau)h(\rho) + f(\rho)g(\rho)h(\tau) + f(\rho)g(\rho)h(\rho) \\ & \geq f(\tau)g(\rho)h(\tau) + f(\rho)g(\tau)h(\tau) + f(\rho)g(\tau)h(\rho) + f(\tau)g(\rho)h(\rho). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Multipliant les deux membres de (3.1.13) par $\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)f(\tau)g(\tau)h(\tau) + h(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)f(\tau)g(\tau) \\ & \quad + f(\rho)g(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)h(\tau) + f(\rho)g(\rho)h(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau) \\ & \geq g(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)f(\tau)h(\tau) + f(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)g(\tau)h(\tau) \\ & \quad + f(\rho)h(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)g(\tau) + g(\rho)h(\rho)\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)f(\tau). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

On intègre (3.1.14) par rapport à τ sur $[0, b]$, on obtient donc

$$\begin{aligned} & J_{q_1}^\alpha(vfgh)(b) + h(\rho)J_{q_1}^\alpha(vfg)(b) + f(\rho)g(\rho)J_{q_1}^\alpha(vh)(b) + f(\rho)g(\rho)h(\rho)J_{q_1}^\alpha v(b) \\ & \geq g(\rho)J_{q_1}^\alpha(vfh)(b) + f(\rho)J_{q_1}^\alpha(vgh)(b) + f(\rho)h(\rho)J_{q_1}^\alpha(vg)(b) + g(\rho)h(\rho)J_{q_1}^\alpha(vf)(b). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Maintenant, multipliant les deux membres de (3.1.15) par $\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)$, on va avoir

$$\begin{aligned} & J_{q_1}^\alpha(vfgh)(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho) + J_{q_1}^\alpha(vfg)(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)h(\rho) \\ & \quad + J_{q_1}^\alpha(vh)(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)f(\rho)g(\rho) + J_{q_1}^\alpha v(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)f(\rho)g(\rho)h(\rho) \\ & \geq J_{q_1}^\alpha(vfh)(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)g(\rho) + J_{q_1}^\alpha(vgh)(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)f(\rho) \\ & \quad + J_{q_1}^\alpha(vg)(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)f(\rho)h(\rho) + J_{q_1}^\alpha(vf)(b)\frac{(b-q_2\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)}v(\rho)g(\rho)h(\rho). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

On intègre (3.1.16) par rapport à ρ sur $[0, b]$, on obtient donc (3.1.12). \square

3.2 q-Inégalité de type Grüss

Brahim et Taf ont donné dans [3, 4], les inégalités q-intégrales fractionnaires de type Grüss comme le suivant.

Théorème 3.2.1 *Soient v, w deux fonctions positives sur $[a, b]_q$, et soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]_q$ satisfaisantes la condition suivante :*

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi, \quad \psi \leq g(x) \leq \Psi; \quad \varphi, \Phi, \psi, \Psi \in \mathbb{R}, \quad x \in [a, b]_q. \quad (3.2.1)$$

Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} & |J_{q,a}^\alpha w(b) J_{q,a}^\alpha v f g(b) + J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\alpha w f g(b) - J_{q,a}^\alpha v f(b) J_{q,a}^\alpha w g(b) \\ & - J_{q,a}^\alpha w f(b) J_{q,a}^\alpha v g(b)| \leq J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\alpha w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned}$$

Preuve.

De la condition (3.2.1), on a

$$|f(\tau) - f(\rho)| \leq \Phi - \varphi, \quad |g(\tau) - g(\rho)| \leq \Psi - \psi, \quad \tau, \rho \in [a, b]_q,$$

Ce qui implique que

$$|(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho))| \leq (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \quad (3.2.2)$$

Multipliant (3.1.3) par $\frac{(b-q\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}v(\tau)$, et on intègre par rapport à τ sur $[a, b]_q$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^b (b-q\tau)^{(\alpha-1)}v(\tau)H(\tau, \rho) d_q\tau \\ & = J_{q,a}^\alpha v f g(b) + f(\rho) g(\rho) J_{q,a}^\alpha v(b) - g(\rho) J_{q,a}^\alpha v f(b) - f(\rho) J_{q,a}^\alpha v g(b). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Maintenant, en multipliant (3.2.3) par $\frac{(b-q\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}w(\rho)$, et on intègre par rapport à ρ sur $[a, b]_q$, on obtient donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Gamma_q(\alpha))^2} \int_a^b \int_a^b (b-q\tau)^{(\alpha-1)}(b-q\rho)^{(\alpha-1)}v(\tau)w(\rho)H(\tau, \rho) d_q\tau d_q\rho \\ & = J_{q,a}^\alpha w(b) J_{q,a}^\alpha v f g(b) + J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\alpha w f g(b) - J_{q,a}^\alpha v f(b) J_{q,a}^\alpha w g(b) - J_{q,a}^\alpha w f(b) J_{q,a}^\alpha v g(b). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

En utilisant (3.2.2), on peut estimer (3.2.4) comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(\Gamma_q(\alpha))^2} \int_a^b \int_a^b (b - q\tau)^{(\alpha-1)} (b - q\rho)^{(\alpha-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_q\tau d_q\rho \right| \\ & \leq \frac{(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi)}{(\Gamma_q(\alpha))^2} \int_a^b \int_a^b (b - q\tau)^{\alpha-1} (b - q\rho)^{\alpha-1} v(\tau) w(\rho) d_q\tau d_q\rho. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(\Gamma_q(\alpha))^2} \int_a^b \int_a^b (b - q\tau)^{(\alpha-1)} (b - q\rho)^{(\alpha-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_q\tau d_q\rho \right| \\ & \leq J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\alpha w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.2 Soient v, w deux fonctions positives sur $[a, b]_q$, soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]_q$ satisfaisantes la condition (3.2.1)

Alors, pour tout $\alpha, \beta > 0$, on a

$$\begin{aligned} & |J_{q,a}^\beta w(b) J_{q,a}^\alpha vfg(b) + J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\beta wfg(b) - J_{q,a}^\alpha vf(b) J_{q,a}^\alpha wg(b) - J_{q,a}^\beta wf(b) J_{q,a}^\alpha vg(b)| \\ & \leq J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\beta w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned}$$

Preuve.

Multipliant (3.2.3) par $\frac{(b-q\rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} w(\rho)$, puis en intégrant par rapport à ρ sur $[a, b]_q$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_a^b \int_a^b (b - q\tau)^{(\alpha-1)} (b - q\rho)^{(\beta-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_q\tau d_q\rho \\ & = J_{q,a}^\beta w(b) J_{q,a}^\alpha vfg(b) + J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\beta wfg(b) - J_{q,a}^\alpha vf(b) J_{q,a}^\beta wg(b) - J_{q,a}^\beta wf(b) J_{q,a}^\alpha vg(b). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\frac{(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi)}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_a^b \int_a^b (b - q\tau)^{\alpha-1} (b - q\rho)^{\beta-1} v(\tau) w(\rho) d_q\tau d_q\rho = J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\beta w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta)} \int_a^b \int_a^b (b - q\tau)^{(\alpha-1)} (b - q\rho)^{(\beta-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_q\tau d_q\rho \right| \\ & \leq J_{q,a}^\alpha v(b) J_{q,a}^\beta w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.1 Dans ce Théorème, si on prend $\alpha = \beta$, on obtient le **Théorème 3.2.1**.

Théorème 3.2.3 Soient v et w deux fonctions positives sur $[0, +\infty[$. Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, +\infty[$ satisfaisantes la condition suivante

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi, \quad \psi \leq g(x) \leq \Psi; \quad \varphi, \Phi, \psi, \Psi \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, +\infty[. \quad (3.2.5)$$

Alors, pour tout $b > 0$, pour tout $\alpha > 0$, et $q_1, q_2 \in (0, 1)$, on a

$$\begin{aligned} & |J_{q_2}^\alpha w(b) J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\alpha w f g(b) - J_{q_1}^\alpha v f(b) J_{q_2}^\alpha w g(b) - J_{q_2}^\alpha w f(b) J_{q_1}^\alpha v g(b)| \\ & \leq J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\alpha w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Preuve. De la condition (3.2.5), on a

$$|f(\tau) - f(\rho)| \leq \Phi - \varphi, \quad |g(\tau) - g(\rho)| \leq \Psi - \psi, \quad \tau, \rho \in [0, +\infty[,$$

Ce qui implique l'inégalité (3.2.2). Définissons

$$H(\tau, \rho) = f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) - f(\tau)g(\rho) - f(\rho)g(\tau) \geq 0; \quad \tau, \rho \in [0, +\infty[. \quad (3.2.7)$$

Multipliant (3.2.7) par $\frac{(b-q_1\tau)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_1}(\alpha)}v(\tau)$, et on intègre par rapport à τ sur $[0, b]$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_{q_1}(\alpha)} \int_0^b (b - q_1\tau)^{(\alpha-1)} v(\tau) H(\tau, \rho) d_{q_1}\tau \\ & = J_{q_1}^\alpha v f g(b) + f(\rho)g(\rho) J_{q_1}^\alpha v(b) - g(\rho) J_{q_1}^\alpha v f(b) - f(\rho) J_{q_1}^\alpha v g(b). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Maintenant, en multipliant (3.2.8) par $\frac{(b-q_2\rho)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_{q_2}(\alpha)}w(\rho)$, et on intègre par rapport à ρ sur $[0, b]$, on obtient donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\alpha)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1\tau)^{(\alpha-1)} (b - q_2\rho)^{(\alpha-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_{q_1}\tau d_{q_2}\rho \\ & = J_{q_2}^\alpha w(b) J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\alpha w f g(b) - J_{q_1}^\alpha v f(b) J_{q_2}^\alpha w g(b) - J_{q_2}^\alpha w f(b) J_{q_1}^\alpha v g(b). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

En utilisant (3.2.2), on peut estimer (3.2.9) comme suit

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\alpha)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1\tau)^{(\alpha-1)} (b - q_2\rho)^{(\alpha-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_{q_1}\tau d_{q_2}\rho \right| \\ & \leq \frac{(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi)}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\alpha)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1\tau)^{\alpha-1} (b - q_2\rho)^{\alpha-1} v(\tau) w(\rho) d_{q_1}\tau d_{q_2}\rho. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\alpha)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1 \tau)^{(\alpha-1)} (b - q_2 \rho)^{(\alpha-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_{q_1} \tau d_{q_2} \rho \right| \\ & \leq J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\alpha w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.4 *soient v et w deux fonctions positives sur $[0, +\infty[$. Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, +\infty[$ satisfaisantes la condition (3.2.5),*

Alors, pour tout $b > 0$, pour tout $\alpha, \beta > 0$, et $q_1, q_2 \in (0, 1)$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| J_{q_2}^\beta w(b) J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\beta w f g(b) - J_{q_1}^\alpha v f(b) J_{q_2}^\beta w g(b) - J_{q_2}^\beta w f(b) J_{q_1}^\alpha v g(b) \right| \\ & \leq J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\beta w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned}$$

Preuve.

Maintenant, en multipliant (3.2.8) par $\frac{(b - q_2 \rho)^{(\beta-1)}}{\Gamma_{q_2}(\beta)} w(\rho)$, et on intègre par rapport à ρ sur $[0, b]$, on obtient donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\beta)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1 \tau)^{(\alpha-1)} (b - q_2 \rho)^{(\beta-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_{q_1} \tau d_{q_2} \rho \\ & = J_{q_2}^\beta w(b) J_{q_1}^\alpha v f g(b) + J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\beta w f g(b) - J_{q_1}^\alpha v f(b) J_{q_2}^\beta w g(b) - J_{q_2}^\beta w f(b) J_{q_1}^\alpha v g(b). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

En utilisant (3.2.2), on peut estimer (3.2.10) comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\beta)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1 \tau)^{(\alpha-1)} (b - q_2 \rho)^{(\beta-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_{q_1} \tau d_{q_2} \rho \right| \\ & \leq \frac{(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi)}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\beta)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1 \tau)^{\alpha-1} (b - q_2 \rho)^{\beta-1} v(\tau) w(\rho) d_{q_1} \tau d_{q_2} \rho. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Gamma_{q_1}(\alpha) \Gamma_{q_2}(\beta)} \int_0^b \int_0^b (b - q_1 \tau)^{(\alpha-1)} (b - q_2 \rho)^{(\beta-1)} v(\tau) w(\rho) H(\tau, \rho) d_{q_1} \tau d_{q_2} \rho \right| \\ & \leq J_{q_1}^\alpha v(b) J_{q_2}^\beta w(b) (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.2 *Dans ce Théorème, si on prend $\alpha = \beta$, on obtient le **Théorème 3.2.3**.*

Conclusion Générale

Dans le cadre de notre projet de fin d'étude, nous avons eu l'opportunité d'aborder un thème qui porte sur une nouvelle théorie à savoir le q -calcul fractionnaire, en particulier sur les inégalités q -intégrales fractionnaires de Tchebyshev et de type Gruss d'ordre non entier en utilisant un seul paramètre fractionnaire, puis en utilisant deux paramètres fractionnaires et la permutation entre deux paramètres de déformation à l'aide de la q -intégrale au sens de Riemann-Liouville, qui découlent de la modélisation des phénomènes physiques.

Bibliographie

- [1] R.P. Agarwal : *Certain Fractional q -Integrals and q -Derivatives*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 66 (1969) 365–370.
- [2] S. Belarbi, Z. Dahmani : *On Some New Fractional Integral Inequalities*, JIPAM (2009),1443-5756.
- [3] K. Brahim, S. Taf : *On Some Fractional q -Integral Inequalities*, Malaya Journal of Matematik. 3(1)(2013) 21–26.
- [4] K. Brahim, S. Taf : *Some Fractional Integral Inequalities In Quantum Calculus*, Journal of Fractional Calculus and Application. 4(2)(2013), 245-250.
- [5] Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf : *New generalisations of Gruss inequatiy using Riemann-Liouville fractional integrals*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications 2(3)(2010), 93-99.
- [6] G. Gasper, M. Rahman : *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 2004.
- [7] H. Gauchman : *Integral Inequalities in q -Calculus*, Computers and Mathematics with Applications 47 (2004) 281–300.
- [8] R. Gorenflo, F. Mainardi, *Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order*, Springer Verlag, Wien (1997), 223–276.
- [9] F. H. Jackson : *On a q -Definite Integrals*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 41 (1910), 193–203.

-
- [10] V. G. Kac, P. Cheung : *Quantum Calculus*, Universitext, Springer-Verlag, New York, (2002).
- [11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava. J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).
- [12] I. Podlubny : *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego (1999).
- [13] P. M. Rajković, S. D. Marinković, M. S. Stanković : *Fractional integrals and derivatives in q -calculus*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1(2007), 311-323.
- [14] S.G. Samko, A.A. Kilbas. O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach, New York, (1993).
- [15] B. Sroysang : *A Study on a New Fractional Integral Inequality in Quantum Calculus*, *Advanced Studies in Theoretical Physics*, vol.7, no. 14, pp. 689–692, 2013.
- [16] W.T. Sulaiman : *On Some New Fractional q -Integral Inequalities*, *South Asian Journal of Mathematics* 2012 , Vol. 2 (5) : 450-459.