

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abdel Hamid Ibn Badis de Mostaganem  
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie  
Département de Physique

**Mémoire de Magister en Physique**

**Option :** Propriétés optiques linéaires et non linéaires  
des matériaux organiques et leur applications

Présentée par :

**M<sup>elle</sup> BENAYED Khadidja**

Sous le thème :

**Distorsion des champs scalaires discrets de dimension 4 : application à la  
physique.**

Composition du jury de soutenance :

<b>Nom et prénom</b>	<b>Grade</b>	<b>Qualité</b>	<b>Appartenance administrative</b>
Ahmadouche Ahmed	M.C.A	Président	Université de Mostaganem
Terki Hassaine Mounir	M.C.A	Encadreur	Université de Mostaganem
Benotsmane Ahmed	M.C.A	Examineur	Université de Mostaganem
Aibout Abdellah	M.C.A	Examineur	Université de Mostaganem

*Année universitaire : 2011/2012*

# *Remerciement*

*Au terme de ce précieux travail*

*Je tiens en premier lieu à rendre ma profonde*

*Gratitude à «**DIEU**» qui m'a donné la force et la*

*Volonté pour effectuer le présent travail.*

*Je remercie mes très chers parents pour leurs soutiens et leurs  
patiences.*

*Je tiens à remercier vivement mon encadreur Mr. TERKI Mounir , pour  
les orientations et les conseils qu'il a su nous prodiguer durant  
l'évolution de ma thèse.*

*A tous les enseignants et les travailleurs de l'institut de physique  
de MOSTAGANEM, notamment : le Groupe du Bibliothèque*

*Je tiens également à remercier les membres des jurys pour  
l'effort qu'ils feront dans le but d'examiner ce modeste travail.*

*A tous mes amis pour leur aide, leur patience, leur compréhension et  
leur encouragement.*

# Table des matières

<b>Introduction</b> .....	4
<b>Chapitre 1</b> .....	7
<b>Notions fondamentales sur la courbure</b> .....	8
1.1 Courbure d'une courbe .....	8
1.1.1 Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$ .....	8
1.1.2 Vecteur tangent.....	9
1.1.3 Notion de courbure.....	10
1.1.4 Vecteur normal.....	12
1.2 Courbure de Gauss .....	14
1.2.1 Formes fondamentales.....	14
1.2.2 Explicites de $K$ en fonction de $dS^2$ et $II$ .....	15
1.2.3 Courbure d'une surface.....	16
1.2.4 Torsion.....	17
1.3 Courbure des surfaces triangulées.....	18
1.3.1 Surfaces triangulées.....	18
1.3.2 Courbure d'une surface.....	19
1.4 Géodésique.....	20
1.5 Courbure géodésique.....	21
1.6 Théorème de Gauss-Bonnet.....	22
<b>Chapitre 2</b> .....	23
<b>Géométrie sphérique</b> .....	24
2.1 Notions de base.....	24
2.2 Métrique et isométrie de $S^2$ .....	24
2.3 Triangles sphériques.....	25
2.4 Relations trigonométriques .....	25
2.5 Aire d'un triangle sphérique .....	26
2.6 Angle dièdre et angle trièdre .....	27
2.6.1 Angle dièdre .....	27
2.6.2 Angle trièdre.....	28

<b>Chapitre 3</b> .....	30
<b>Courbure concentrée des surfaces euclidiennes à singularités coniques</b> .....	31
3.1 Métriques euclidiennes à singularités coniques en dimensions 2 .....	31
3.2 Courbure concentrée.....	33
3.3 Résultats expérimentaux et comparaisons.....	36
3.3.1 Résultats expérimentaux.....	36
3.3.2 Comparaisons.....	37
<b>Chapitre 4</b> .....	40
<b>Variétés combinatoires à 3 dimensions</b> .....	41
4.1 Complexes simpliciaux.....	41
4.2 Triangulation.....	44
4.2.1 Triangulation de Delaunay.....	44
4.2.2 Diagramme de Voronoï.....	45
4.3 Variété combinatoire.....	46
4.3.1 Star d'un point.....	46
4.3.2 Lien d'un point.....	47
<b>Chapitre 5</b> .....	48
<b>Distorsion discrète des champs scalaires</b> .....	49
5.1 Métriques plates à singularités conique en dimension 3.....	49
5.2 Distorsion.....	59
5.2.1 Distorsion en un sommet.....	59
5.2.2 Distorsion autour d'une arête.....	65
<b>Chapitre 6</b> .....	71
<b>Expérimentation informatique</b> .....	72
6.1 Calcul de distorsion avec langage C.....	72
6.2 Expériences.....	79
6.3 Résultats obtenus en application.....	82
6.4 Application possibles.....	84
<b>Conclusion</b> .....	89
<b>Bibliographie</b> .....	90

# Introduction

Dans plusieurs applications, y compris l'infographie, vision par ordinateur, traitement des données géographiques, nous traitons avec des données discrètes qui sont numérisées à partir des quantités continues. L'objectif est d'essayer d'adapter des techniques venant du continuum où les notions mathématiques sont précises et bien définies. Par exemple, une image numérique peut être considérée comme une surface discrète  $S$ , qui est la représentation graphique d'un champ scalaire défini sur un ensemble discret de points régulièrement répartis dans un domaine à deux dimensions  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Un terrain est également interprété de la même manière, comme le graphe d'une fonction à deux variables, mais un terrain est discrétisé en général à travers un maillage triangulaire, étant souvent défini à travers l'élévation des valeurs à un ensemble de points de données irrégulièrement distribués. Ainsi, le champ scalaire est naturellement considéré comme une fonction élevée définie sur les triangles du maillage dans le domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  où les points sont distribués, le terrain est dans ce cas décrit comme un morceau de surface triangulée linéaire embarqué dans l'espace  $3D$ . En général, les mailles du triangle sont la moyenne la plus commune de discrétiser les surfaces intégrées dans l'espace  $3D$  qui ne sont pas nécessairement le graphe d'un champ scalaire (souvent, elles sont des surfaces étanches délimitant un objet solide).

La métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  apporte une surface triangulée  $S$  avec une métrique naturelle qui est plate sur  $S$  en plus de ses sommets. Lorsque l'angle total  $\theta$  autour d'un sommet est différent de  $2\pi$ , le sommet est appelé un point singulier dans les métriques plates de  $S$ . La quantité  $K = \theta - 2\pi$ , est appelée la courbure concentrée de  $S$  au sommet (voir [34]). La courbure concentrée représente, par conséquent, le déficit d'angle ( $K > 0$ ), ou l'angle de l'excès ( $K < 0$ ) aux sommets de  $S$ . Par exemple, un cube a une structure singulière plate. Les singularités correspondent aux sommets du cube. L'angle total à chaque sommet du cube est de  $3\pi/2$ . Tous les autres points (points internes sur les arêtes et les triangles) sont réguliers et ont un voisinage qui est isométrique à un disque euclidien. Ainsi, leur courbure concentrée est nulle. La courbure concentrée a un sens naturel, elle est précise et simple à calculer, et elle remplit aussi également une propriété similaire au théorème de Gauss-Bonnet pour le cas lisse. Mr. M. M. Mesmoudi en collaboration avec l'équipe de modélisation géométrique de

l'université de gènes, ont appliqué la courbure concentrée pour un segment de la grande taille des surfaces triangulées en étendant un algorithme efficace pour les terrains basés sur une approche de région linéaire à croissance (*voir [18]*). Nous allons montrer dans ce travail une comparaison avec l'approximation la plus largement utilisée pour la courbure gaussienne, soit disant l'estimateur d'angle du déficit (*voir [33]*).

Dans cette thèse, nous généralisons les propriétés de courbure concentrée pour des formes tétraédriques dans l'espace  $4D$ . Un exemple est donné par des champs scalaires discrets à  $3D$  définis sur un domaine tétraédrique de trois dimensions  $D$  de  $R^3$ . Dans ce cas, la représentation graphique du champ est une hypersurface tétraédrique dans  $R^4$ . Un autre exemple est fourni par les iso-surfaces tétraédriques extraites de champs scalaires à quatre dimensions, c'est à dire, variables dans le temps des champs scalaires  $3D$  (*voir [37,38,39]*). Dans ce cas, le domaine du champ  $4D$  est discrétisé par un maillage de pentaèdres, et les iso-surfaces sont des maillages tétraédriques embarqués dans l'espace  $4D$ . Un cas particulier intéressant est celui de la dynamique des formes implicites, c'est à dire, les formes implicites définies à travers les champs de distance volumétrique qui varient avec le temps. Cette dynamique des surfaces implicites est définie par une discrétisation du champ de la distance sur une grille  $4D$ , dont les sommets à la distance signée au cours du temps de la surface est maintenue. Dans ce cas, la surface implicite, à savoir, l'iso-surface au niveau 0, qui est extraite par une généralisation de l'algorithme de cube en marche, est un maillage tétraédrique intégré dans  $R^4$ .

Les points singuliers créent localement une distorsion dans une hypersurface tétraédrique dans l'espace  $4D$ . Ainsi, nous introduisons une nouvelle notion que nous appelons la distorsion discrète. Cette notion généralise celle de courbure concentrée dans le cas d'un champ scalaire  $3D$ , la notion de distorsion caractérise la dépendance de la géométrie hypersurface sur le choix de la triangulation du domaine  $D$  en trois dimensions. Un choix commun du domaine de discrétisation est la triangulation de Delaunay [*voir 8*], l'analyse des champs scalaires définis à un ensemble de points dans l'espace  $3D$  et dans l'analyse des éléments finis pour la discrétisation du volume d'une forme  $3D$ . Dans de telles applications, l'accent est sur certaines mesures de la qualité de la forme des tétraèdres, tels que le cercle circonscrit court-point-ratio (*voir [31]*), mais des mesures de qualité ne sont pas toujours satisfaites par le critère de Delaunay. Dans ce cas, une triangulation qui minimise la distorsion

devrait être plus pertinente pour les applications de la physique par exemple la dilatation thermique, ferroélectricité de certains alliages, les réactions chimiques, et la diffraction. Ainsi, la distorsion peut être utilisée tel un critère à optimiser, suivant les exigences du domaine d'application, le choix d'une tétraédrisation d'une forme  $3D$ .

Cette thèse est organisée comme suit : Au premier chapitre, nous rappelons les résultats fondamentaux relatifs à la courbure dans le cas différentiable. Au deuxième chapitre, nous rappelons quelques notions de la géométrie sphérique nécessaire et qui nous sont nécessaires pour la suite. Au troisième chapitre, nous exposons la notion de courbure concentrée des surfaces euclidiennes à singularités coniques, avec les exemples en physique. Cette notion est essentielle pour introduire et comprendre la notion de distorsion discrète. Au quatrième chapitre, nous présentons quelques notions sur les complexes simpliciaux et la triangulation de Delaunay. Au cinquième chapitre, nous introduisons la notion de distorsion discrète. Nous l'illustrons par quelques exemples et nous démontrons quelques propriétés qui lui sont associées. Au sixième chapitre, nous présentons un programme que nous avons élaboré en langage C et qui calcule les distorsions discrètes en un sommet et autour d'une arête pour de petites structures. Les variétés combinatoires sont formées d'un petit nombre de tétraèdres. Nous exposons également l'algorithme réalisé en collaboration avec l'équipe italienne pour de grandes structures (des milliers voire de millions de tétraèdres). Nous présentons l'expérimentation informatique faite sur des objets réels. Finalement nous discutons quelques applications envisageables de la distorsion discrète dans d'autres domaines scientifiques.

# Chapitre 1

# Notions Fondamentales sur la Courbure

Nous rappelons les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de courbure dans le cas différentiable.

## 1.1 Courbure d'une Courbe

### 1.1.1 Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$

#### Heuristique :

En cinématique on décrit la plupart du temps la position d'une particule en mouvement à l'aide de trois équations

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où le paramètre  $t$  varie dans un certain intervalle du temps. Le système (1.1) est appelé système des équations paramétriques de la trajectoire.

#### Définition 1.1

On appelle courbe de classe  $C^{(k)}$  dans  $\mathbb{R}^n$  une fonction

$$\begin{aligned} \vec{f}: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \in [a, b] &\rightarrow (f_1(t), \dots, f_n(t)), \end{aligned}$$

Dont les  $n$  composantes  $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^{(k)}[a, b]$ .

L'image  $\vec{f}([a, b])$  est appelée **trajectoire** de la courbe. On dira que  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  est sur la courbe s'il appartient à la trajectoire, c'est-à-dire s'il existe  $t \in [a, b]$  tel que  $\vec{f}(t) = \vec{x}$ .

### Exemple 1.1 :

$$\vec{r}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

1)  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

2)  $\theta \in [0, 2\pi]$

Pour

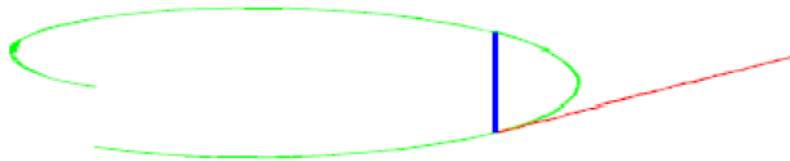
1) La trajectoire est un quart de cercle

Alors que, pour

2) La trajectoire est un cercle tout entier.

### 1.1.2 Vecteur tangent

Soit  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$  une courbe



**Fig. 1.1: Vecteur tangent**

Si  $(x_0, y_0, z_0) = \vec{r}(t_0)$  est un point de la courbe et si on étudie le comportement de  $\vec{r}(t)$  lorsque  $t$  varie autour de  $t_0$ , on obtient que

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) \quad (1.2)$$

est le vecteur joignant  $\vec{r}(t_0)$  à  $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ . Le vecteur  $\frac{\vec{r}}{\Delta t}$  est porté par la même sécante. Si  $\Delta t \rightarrow 0$  et si la trajectoire possède une tangente au point  $\vec{r}(t_0)$  le rapport  $\frac{\vec{r}}{\Delta t}$  tend vers un vecteur porté par cette tangente. Cette motivation géométrique suggère la définition suivante :

### Définition 1.2 :

Soit  $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on dit que la courbe possède un vecteur tangent en  $\vec{f}(t_0)$  si la limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\vec{f}(t_0 + \Delta t) - \vec{f}(t_0)),$$

existe. Dans ce cas, cette limite est notée  $\vec{f}'(t_0)$  et est appelée vecteur tangent à la courbe au point  $\vec{f}(t_0)$ .

**Lemme 1.1 :** Soit  $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe continue. Cette courbe admet un vecteur tangent en  $\vec{f}(t_0)$  si et seulement si chacune des composantes de  $\vec{f}$  est dérivable en  $t_0$  et si

$$\vec{f}'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0)).$$

**Exemple 1.2 :**

Si  $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$ , alors

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} \\ \vec{r}''(t) &= -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} \end{aligned}$$

On voit que  $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$  ce qui montre bien que  $\vec{r}'(t)$  est dans la direction de la tangente. Par ailleurs,  $\vec{r}''(t) = -\vec{r}(t)$ , ce qui justifie le terme centripète.

La connaissance du vecteur tangent nous permet de déterminer l'équation de la tangente à une courbe. En effet c'est une droite qui passe par  $\vec{f}(t_0)$  et qui est parallèle au vecteur  $\vec{f}'(t_0)$ , donc on peut la représenter paramétriquement par :

$$\vec{t}(s) = \vec{f}(t_0) + (s - t_0)\vec{f}'(t_0). \quad (1.3)$$

### 1.1.3 Notion de Courbure

Dans cette section, nous nous limitons aux cas  $n = 2$  et  $n = 3$ . Soit  $C$  une courbe de classe  $C^2$  de paramétrisation naturelle

$$s \quad g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x(s), y(s), z(s)). \quad (1.4)$$

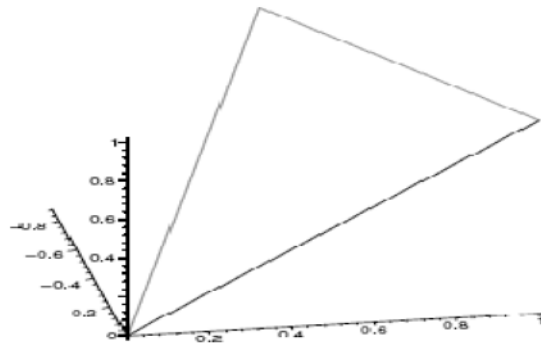
Nous voulons étudier la variation de la tangente à la courbe par rapport à la distance parcourue.

Soit  $\theta$  l'angle formé par les vecteurs tangents  $\vec{g}'(s)$  et  $\vec{g}'(s + \Delta s)$ , si pour un  $s$  fixe,  $\Delta s$  est petit la courbe est peu incurvée et si  $\theta$  est grand la courbe est très incurvée. Ceci nous amène à étudier la limite suivante

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|. \quad (1.5)$$

Puisque  $\|\vec{g}'(s)\| = 1$ , le triangle formé par les vecteurs

$$\vec{g}'(s + \Delta s), \vec{g}'(s) \text{ et } (\vec{g}'(s + \Delta s) - \vec{g}'(s))$$



Les deux tangentes et la secante.

est isocèle de côté 1, donc

$$\|\vec{g}'(s + \Delta s) - \vec{g}'(s)\| = 2 \sin \frac{\theta}{2} = \Delta s + o(\Delta s) \quad (1.6)$$

Où

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{o(\Delta s)}{\Delta s} = 0. \quad (1.7)$$

Ainsi,

$$\frac{\|\vec{g}'(s + \Delta s) - \vec{g}'(s)\|}{\Delta s} = \frac{\Delta s}{\Delta s} \left( 1 + \frac{o(\Delta s)}{\Delta s} \right). \quad (1.8)$$

La limite de  $\left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$  existe car  $\vec{g}$  est de classe  $C^2$  et donc

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\vec{g}'(s + \Delta s) - \vec{g}'(s)\|}{|\Delta s|} = \|\vec{g}''(s)\|. \quad (1.9)$$

La quantité

$$K(s) = \|\vec{g}''(s)\| \quad (1.10)$$

Est appelée **courbure** de  $C$  au point  $\vec{g}(s)$ .

**Exemple 1.3 :**

a) Soit la droite

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + tu \\ y(t) = y_0 + tv \end{cases} \quad \text{où } \vec{d} = (u, v) \text{ est le vecteur directeur.}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = t \|\vec{d}\|$$

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + \frac{su}{\|\vec{d}\|} \\ y(s) = y_0 + \frac{sv}{\|\vec{d}\|} \end{cases}$$

$$\frac{x'(s)}{u} = \frac{y'(s)}{v} = \frac{1}{\|\vec{d}\|}$$

Et  $x''(s) = y''(s) = 0$  ce qui traduit le fait qu'une droite n'a aucune courbure.

b) Considérons le cercle de rayon  $a$

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta \\ y(\theta) = a \sin \theta \end{cases}$$

$$s(\theta) = \int_0^\theta a dt = \theta a$$

$$\begin{cases} x(s) = a \cos \frac{s}{a} \\ y(s) = a \sin \frac{s}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} x'(s) = -\sin \frac{s}{a} \\ y'(s) = \cos \frac{s}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} x''(s) = -\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a} \\ y''(s) = -\frac{1}{a} \sin \frac{s}{a} \end{cases}$$

$K = \frac{1}{a}$ . Donc plus le rayon du cercle est petit, plus la courbure est grande.

### 1.1.4 Vecteur normal

Soit  $\vec{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^3$  une surface de classe  $C^{(1)}$ . Dénotons par  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  les composantes de  $\vec{\Sigma}$ . Si le point  $\vec{r}_0 = \vec{\Sigma}(u_0, v_0)$  se trouve sur la surface, on obtient en fixant  $u = u_0$  et en faisant varier  $v$  dans un intervalle  $(v_0 - \delta, v_0 + \delta)$  une courbe

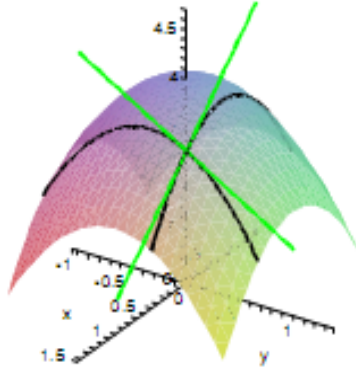
$$\vec{S}(v) = \vec{\Sigma}(u_0, v) \tag{1.11}$$

passant par  $\vec{r}_0$  et dont la trace est toute entière sur la surface. Le vecteur tangente à cette courbe en  $\vec{r}_0$  est donné par

$$\vec{S}'(v_0) = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = \vec{T}_v \tag{1.12}$$

De même, si on considère la courbe obtenue en fixant  $v = v_0$ , on obtient un second vecteur tangent

$$\vec{T}_v = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \quad (1.13)$$



*Fig1.2 : Les lignes de coordonnées et les tangentes*

Désignons par  $\vec{N}$  le vecteur  $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ .

Nous nous intéressons au cas où  $\vec{T}_u$  et  $\vec{T}_v$  sont linéairement indépendants. Dans ce cas  $\vec{N} \neq \vec{0}$ , et  $\vec{N}$  est orthogonal au plan engendré par  $\vec{T}_u$  et  $\vec{T}_v$ . Ce plan est tangent à la surface  $\vec{\Sigma}$  en  $\vec{r}_0 = \vec{\Sigma}(u_0, v_0)$ .

Dans le cas où  $\vec{N} = \vec{0}$  la surface est dite lisse en  $\vec{r}_0 = \vec{\Sigma}(u_0, v_0)$ . Le vecteur  $\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$  est appelé produit **vectoriel fondamental**, tandis que le vecteur

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|} \quad (1.14)$$

est appelé vecteur **normal principal**.

En calculant, nous obtenons

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \quad (1.15)$$

Et

$$\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| = \sqrt{\left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2}. \quad (1.16)$$

## 1.2 Courbure de Gauss

### 1.2.1 Formes fondamentales

La courbure est une notion locale, donnons-nous donc un plongement  $C^\infty$  d'une surface  $\Sigma$ :

$$\begin{array}{ccc} U & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & & M = M(u, v) \end{array}$$

Où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On utilisera la notation  $\delta M / \delta u = M_u$ . Aussi, on suppose  $\Sigma$  orientée par la normale  $M_u \wedge M_v$ . La métrique induite par celle de  $\mathbb{R}^3$  euclidien, est représentée dans la carte  $(u, v)$  par la forme quadratique

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (1.17)$$

appelée **première forme quadratique fondamentale** de la surface riemannienne  $\Sigma$ , où, par définition,

$$E = |M_u|^2; F = \langle M_u, M_v \rangle; G = |M_v|^2 \quad (1.18)$$

Quand une surface est plongée, il y a une application naturelle  $C^\infty$  qui à tout point de  $\Sigma$  associe la normale unitaire sortante

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & & S^2 \\ M & \mapsto & N(M) \end{array} \quad (1.19)$$

Puisque le plan tangent à  $\Sigma$  en  $M$  est naturellement identifié au plan tangent à la sphère en  $N(M)$ , l'application tangente  $dN: T\Sigma \rightarrow TS^2$  peut être vue comme une application linéaire dans chaque plan tangent.

#### Définition 1.3 :

L'application

$$II = -dN \quad (1.20)$$

est la **seconde forme fondamentale**. Ses valeurs propres en  $M_0$ ,  $K_1, K_2$  sont les courbures principales, les directions isotropes sont les directions asymptotiques.

Le produit  $K = K_1 K_2 = \det dN(M_0)$  est la courbure de Gauss en  $M_0$ , enfin, la demi-somme :

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr} dN(M_0) \quad (1.21)$$

est une courbure moyenne en  $M_0$ .

### Exemples 1.4 :

Dans le cas d'un plan affín, l'application de Gauss est constante donc

$$K_1 = K_2 = K = H = 0.$$

Dans le cas de la sphère  $S^2$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$  comme on pense et orientée vers l'extérieur, l'application de Gauss  $N$  est cette fois l'identité, donc  $dN$  aussi et donc

$$-K_1 = -K_2 = -H = K = 1.$$

Pour ces deux exemples, les directions principales ne sont pas biendéfinies.

### 1.2.2 Explicites de $K$ en fonction de $ds^2$ et $II$

Notons  $e, f, g$  les coefficients de la seconde forme toujours dans la base  $(M_u, M_v)$  Nous avons déjà remarqué les égalités suivantes bien commodes pour le calcul :

$$\begin{aligned} e &= -dN \cdot M_u, M_u = N, M_{uu} \\ f &= -dN \cdot M_u, M_v = N, M_{uv} \\ g &= -dN \cdot M_v, M_v = N, M_{vv} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Notons  $(a_{ij})$  la matrice de  $-dN$  dans la base  $(M_u, M_v)$  (qui n'est pas nécessairement orthonormée), c'est à dire :

$$\begin{aligned} -dN \cdot M_u &= a_{11}M_u + a_{21}M_v \\ -dN \cdot M_v &= a_{12}M_u + a_{22}M_v \end{aligned} \quad (1.23)$$

En faisant le produit scalaire de ces deux égalités par  $M_u$  puis  $M_v$ , on obtient quatre égalité qui peuvent s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Il ne reste plus qu'à inverser une matrice d'ordre 2, pour obtenir la trace et le déterminant de la matrice  $(a_{ij})$ . Ici, on obtient en fait sa transposée, mais ce n'est pas gênant. On trouve :

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{eG + Eg - 2fF}{EG - F^2} \quad (1.25)$$

### 1.2.3 Courbure d'une surface

Nous allons donner divers moyens pour calculer la courbure d'une surface et surtout pour voir son signe d'un premier coup d'œil.

#### Lien avec la courbure des courbes gauches tracées sur $\Sigma$

Considérons une courbe  $\gamma(s)$  tracée sur  $\Sigma$  paramétrée par longueur d'arc. Notons  $U = \dot{\gamma}(s)$  et  $V = N(\gamma(s)) \wedge U$ ; de sorte que  $(U, V, N)$  soit un repère orthonormé direct. Notons  $k$  et  $t$  la courbure et la torsion de la courbe gauche  $\gamma$ . De la même façon, on va définir d'autres fonctions scalaires qui sont les coefficients de la matrice antisymétrique qui exprime  $(\dot{U}, \dot{V}, \dot{N})$  en fonction de  $(U, V, N)$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_g & -k_N \\ K_g & 0 & -t_g \\ k_N & t_g & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Si on écrit  $n = \cos \alpha N + \sin \alpha V$  la normale à la courbe gauche  $\gamma$ , on trouve facilement les relations :

$$\begin{cases} k \cos \alpha = k_N \\ k \sin \alpha = k_g \\ t = t_g - \dot{\alpha} \end{cases} \quad (1.27)$$

Avec les définitions suivantes :

1.  $k_g$  est la courbure géodésique de  $\gamma$ ,
2.  $k_N$  est la courbure normale de  $\gamma$ ,
3.  $t_g$  est la torsion géodésique de  $\gamma$ .
4. on appelle *géodésique* (resp. ligne asymptotique, ligne de courbure), une courbe qui vérifie  $k_g = 0$  (resp.  $k_N = 0$  et  $t_g = 0$ ).

#### Courbure des sections normales, théorème de Meusnier

On a, que

$$II(U) = k_N, \quad (1.28)$$

composante normale de l'accélération. Supposons maintenant que  $\gamma$  soit une section normale en  $M_0$  (i.e. l'intersection au voisinage de  $M_0$  du plan normal à  $\Sigma$  en  $M_0$  et de  $\Sigma$ ). Il est alors clair que  $k_g(M_0) = 0$  pour de telles courbes. Si bien qu'on peut interpréter  $II(U)$  comme la courbure en  $M_0$  de la section normale tangente à  $U$ .

**Proposition :** Les courbures principales  $K_1$  et  $K_2$  en  $M_0$  sont les valeurs extrémales des courbures des sections normales en  $M_0$  prises dans la direction de la normale en  $M_0$ .

**Démonstration :**

Il est bien connu que sur le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1\}$  la fonction  $K_1x^2 + K_2y^2$  est extrémales pour les directions propres  $\{x = 0\}$  et  $\{y = 0\}$  (si  $K_1 \neq K_2$ ).

### 1.2.4 Torsion :

Soit  $C$  une courbe régulière, tel que  $C = \gamma(s)$

Le vecteur tangent unitaire devient :

$$t(s) = \dot{\gamma}(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds} \quad (1.29)$$

Le vecteur unitaire de la normale principale devient :

$$n(s) = \frac{\dot{t}(s)}{|\dot{t}(s)|} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}(s)|} \quad (1.30)$$

De même, on définit un vecteur binormal  $b$  par :

$$b(s) = t(s) \times n(s) \quad (1.31)$$

En dérivant cette relation par rapport au paramètre  $s$ , on obtient :

$$\dot{b}(s) = \frac{d(t(s) \times n(s))}{ds} = \dot{t}(s) \times n(s) + t(s) \times \dot{n}(s) \quad (1.32)$$

Alors, on définit la torsion  $\tau$  d'une courbe par la relation suivante :

$$\tau(s) = -\dot{b}(s) \cdot n(s) \quad (1.33)$$

## 1.3 Courbure des surfaces Triangulées

### 1.3.1 Surfaces Triangulées

On appelle surface triangulée un espace  $\Sigma$ , non vide, qui vérifie les propriétés suivantes :

- i)  $\Sigma$  est une réunion finie de triangles (on appelle triangle un espace isométrique à l'enveloppe convexe de trois points non alignés dans  $\mathbf{R}^2$ ) :

T

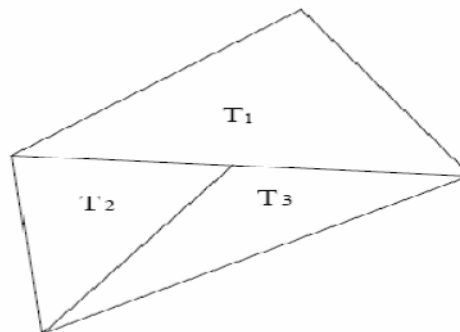


*Fig.1.3 :Triangle*

$$\Sigma = \bigcup_{i \in I} T_i$$

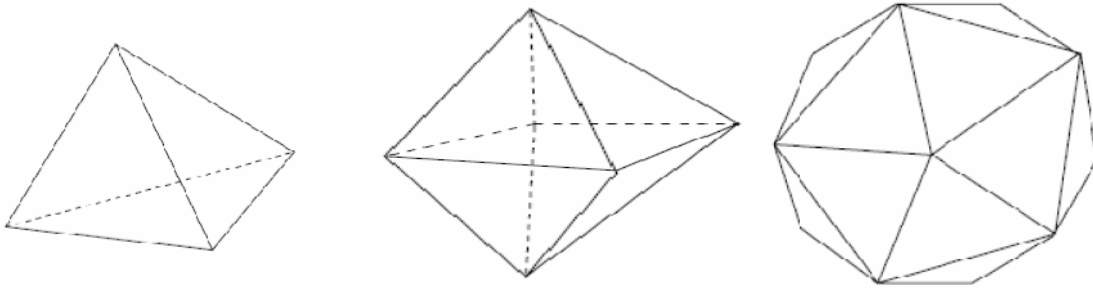
Où  $I$  est un ensemble fini

- ii) Deux triangles  $T_i$  et  $T_j$ ,  $i \neq j$ , ont leur intersection soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit réduite à une arête commune. En particulier, la situation de la figure 1.4 ne peut pas se présenter, car  $T_1 \cap T_2$  et  $T_1 \cap T_3$  ne sont que des morceaux d'arête de  $T_1$ .
- iii) toute arête est contenue dans exactement deux triangles distincts.



*Figure 1.4 Situation interdite*

**Exemple 1.5 :** Le tétraèdre, l'octaèdre, et l'icosaèdre sont des surfaces triangulées, toutes trois homéomorphes à la sphère.



*Le tétraèdre L'octaèdre L'icosaèdre*

### 1.3.2 Courbure d'une surface

Lorsqu'on se donne un cercle  $C$  de périmètre  $P$  et de rayon  $R$  dans un plan,  $P$  et  $R$  sont reliés par l'équation:

$$P = 2\pi R \quad (1.34)$$

Lorsqu'on considère le même dessin sur une sphère de rayon 1 (munie de la distance sphérique), l'équation devient :

$$P = 2\pi \sin(R) \quad (1.35)$$

Le fait que le périmètre d'un cercle de rayon donné sur une sphère soit plus petit que dans un plan vient du fait que la sphère "se recourbe sur elle-même", donc à un défaut de platitude de la sphère.

C'est cette remarque qui va nous permettre de définir la courbure d'une surface triangulée.

On se donne une surface triangulée  $\Sigma$ , et on se donne  $M$  un point de  $\Sigma$ . On se donne  $r$ , un réel strictement positif assez petit pour que le cercle tracé sur  $\Sigma$ , de centre  $M$  et de rayon  $r$  ne rencontre pas les triangles auxquels  $M$  n'appartient pas. Notons  $P$  le périmètre de ce cercle et définissons la courbure en  $M$  par :

$$K(M) = 2\pi - \frac{P}{r} \quad (1.36)$$

On vérifie facilement que  $K(M)$  ne dépend pas du choix (car deux cercles de rayons différents sont homothétiques). On a la proposition fondamentale suivante:

**Théorème :**

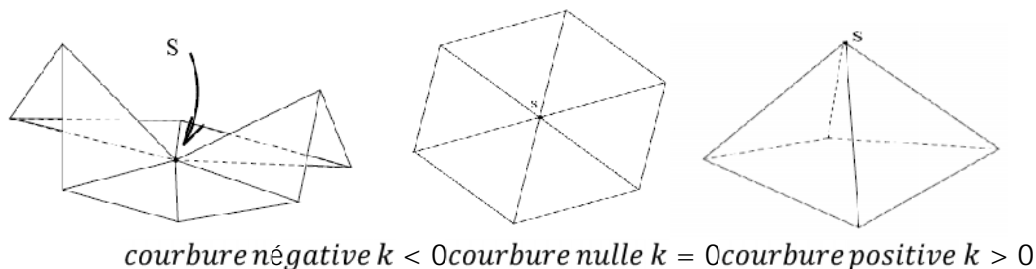
*Si  $M$  n'est pas un sommet de  $\Sigma$ , on a  $K(M) = 0$ .*

*Si  $S$  est un sommet de  $\Sigma$ , la courbure en  $S$  vaut :*

$$K(S) = 2\pi - \sum_{S \in T} \widehat{S_T} \quad (1.37)$$

Où  $\widehat{S}_T$  est l'angle du triangle  $T$  en  $S$  (la somme est prise sur les triangles de  $\Sigma$  ayant  $S$  pour sommet).

Regardons l'allure de la surface en un sommet en fonction de sa courbure :



**Figure 1.5**

On peut aussi parler de la courbure globale d'une surface triangulée :  
On appelle courbure globale de  $\Sigma$  :

$$K(\Sigma) = \sum_{S \in \text{Sommet}(\Sigma)} K(S) \quad (1.38)$$

## 1.4 Géodésique

Dans un espace il existe toujours des courbes intrinsèques jouissant d'une particularité qui les distinguent des autres courbes. Elles sont appelées géodésiques. Ce sont des courbes qui réalisent la plus petite distance entre deux points donnés moyennant une métrique donnée. Elles représentent l'extension des droites dans l'espace euclidien.

### Définition 1.4 :

Soit  $\gamma: t \rightarrow \gamma(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ , une courbe tracée sur la surface ( $S$ ). La courbe  $\gamma$  est dite géodésique si le vecteur tangent  $\dot{\gamma}(t)$  se transporte parallèlement à lui-même le long de  $\gamma$ . Autrement dit et de point de vue analytique ceci se traduit par :

$$\dot{\gamma}(t)\dot{\gamma}(t) = 0, \quad (1.39)$$

Où  $'_X Y$  est la dérivation covariante d'un champ  $Y = b_j \frac{\delta}{\delta x_j}$  suivant un champ  $X = a_i \frac{\delta}{\delta x_i}$  qui est donnée par la relation

$$'_X Y = db_k + \Gamma_{ij}^k a_i b_j \frac{\delta}{\delta x_k}. \quad (1.40)$$

Géométriquement, une courbe géodésique est une courbe qui minimise localement des distances entre deux points.

### Exemple 1.6 :

Les droites d'un plan sont des géodésiques de ce plan.

La courbe  $\gamma(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d)$  telle que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  est une géodésique du cylindre  $x^2 + y^2 = 1$

Pour obtenir les équations paramétriques des géodésiques, on utilise souvent la méthode d'Euler-Lagrange. Cette méthode nous permet aussi d'avoir directement les symboles de Christoffel de deuxième espèce qui sont exprimés par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 g^{\alpha} (g_{j\alpha,i} + g_{\alpha i,j} - g_{ij,\alpha}); 1 \leq i, j, k \leq 3; \text{ ou } g_{ij,\alpha} = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^{\alpha}},$$

Où  $g_{ij}$  et  $g^{\alpha k}$  sont les éléments de la matrice  $A = (g_{ij})$  et de la matrice inverse  $A^{-1} = (g^{\alpha k})$ .

### Définition 1.5 :

Soit  $(S)$  une surface dans  $\mathbb{R}^3$ . Les équations d'Euler-Lagrange des géodésiques sont données par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta x_i} = 0, \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}; 1 \leq i \leq 3.$$

Où  $L$  désigne le Lagrangien  $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$  associé à la métrique  $g$  définie sur  $(S)$ .

**Remarque 1.1 :** L'expression  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta x_i} = 0$  est équivalente aux équations analytiques des géodésiques et s'écrivent :

$$\ddot{x}_i + \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

## 1.5 Courbure Géodésique

Pour une courbe  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ , la courbure géodésique  $K_g$  est donnée par :

$$K_g = \sqrt{EG - F^2} \left[ -\Gamma_{11}^2 u'^3 + \Gamma_{12}^1 v' - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) u'^2 v' + (2\Gamma_{12}^1) u' v'^2 + u'' v - u' v'' \right], (1.41)$$

tel que  $E, F$  et  $G$  sont les coefficients de la première forme fondamentale et  $\Gamma_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel du deuxième espèce.

## 1.6 Théorème de Gauss – Bonnet

Soit  $S$  une surface et  $\delta S$  sa frontière, on a

$$\int_S K ds + \int_{\delta S} K_g dl = 2\pi\chi(S), \quad (1.42)$$

telle que  $\chi = 2(1 - g) = s - a + f$  où  $g$  est le genre de  $S$  et  $s, a, f$  est respectivement, le nombre de sommets, arêtes et faces d'une surface triangulée et  $K_g$  la courbure géodésique de  $\delta S$ ,  $K$  courbure de Gauss.

# Chapitre 2

# Géométrie sphérique

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions liées à la géométrie sphérique, comme le triangle sphérique, l'aire d'un triangle sphérique, les angles dièdres et les angles trièdres.

## 2.1 Notions de base

La sphère unité d'un espace vectoriel euclidien est l'ensemble des vecteurs de norme 1. On note  $S^2$  (sphère de dimension 2) la sphère unité d'un espace euclidien de dimension 3.

Un grand cercle de  $S^2$  est l'intersection d'un grand cercle et d'un plan (vectoriel). Les points  $x$  et  $-x$  de  $S^2$  sont dits antipodes. Un arc de cercle de longueur inférieur ou égale à  $\pi$  s'appelle un segment. Si  $x$  et  $y$  ne sont pas antipodes, ils sont les extrémités d'un unique segment.

## 2.2 Métrique et isométrie de $S^2$

Si  $x, y \in S^2$ , on pose

$$\text{dist}(x, y) = \text{Arc} \cos \langle x, y \rangle$$

**Rappel :** Si  $t \in [-1, 1]$ ,  $\text{Arccost}$  désigne l'unique  $\theta \in [0, \pi]$  tel que  $\cos \theta = t$ .

On a  $0 \leq \text{dist}(x, y) \leq \pi$ ,  $\text{dist}(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  et  $\text{dist}(x, y) = \pi$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont antipodes. On verra que  $\text{dist}$  est une distance.

Par exemple, si  $f \in O(E)$ , la restriction de  $f$  à  $S^2$  est une isométrie à  $S^2$ . Si  $f = \bar{r}p$  est la réflexion orthogonale par rapport à un plan  $P$ , on désignera par  $\bar{r}c$ , où  $C = P \cap S^2$ , sa restriction à  $S^2$ .

## 2.3 Triangles sphériques

On considère une sphère  $S^2$  de  $R^3$  de centre  $O$  et de rayon unité ( $r = 1$ ). Sur sa surface on prend trois points  $A, B$  et  $C$  non tous situés sur un même grand cercle de la sphère, comme représentés par la figure suivante :

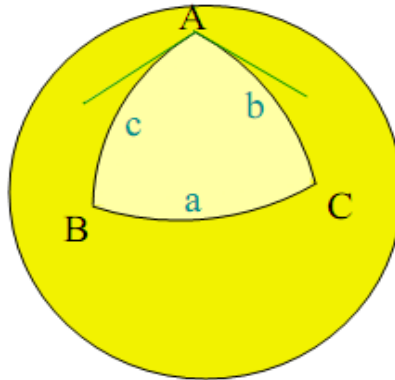


Figure 2.1

Le triangle sphérique de sommets  $A, B, C$  est la réunion des segments d'extrémités  $(A,B)$ ,  $(B,C)$ ,  $(C,A)$ . Ces segments sont les côtés (les arcs) du triangle notons respectivement  $a, b, c$ . Ces arcs sont opposés aux segments  $A, B$ , et  $C$ . Les longueurs des arcs  $a, b, c$  sont respectivement égales aux mesures des angles  $\widehat{BOC}, \widehat{AOC}, \widehat{AOB}$ .

## 2.4 Relations Trigonométriques

Du point  $A$ , considérons les tangentes aux arcs  $AB$  et  $AC$ . Soit  $B', C'$  être respectivement l'intersection de  $[OB)$  et  $[OC)$  avec ces tangentes. Triangles  $OAB'$  et  $OAC'$  sont rectangles en  $A$ .

Nous avons :

$$\tan c = \frac{AB'}{OA} \quad , \quad \tan b = \frac{AC'}{OA} \quad (2.1)$$

Et

$$OB' = \frac{OA}{\cos c} \quad , \quad OC' = \frac{OA}{\cos b} \quad (2.2)$$

Le produit intérieur

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB' \cdot OC' \cos \alpha \quad (2.3)$$

D'autre part nous avons

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad (2.4)$$

Et

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad (2.5)$$

Avec calcul simple et simplification du produit précédent intérieur donne

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (2.6)$$

Où  $\hat{A}$  est l'angle dièdre (angle entre les plans générés par  $OAB$  et  $OAC$ ).

## 2.5 Aire d'un Triangle Sphérique

Soit ( ) un triangle sphérique et  $\hat{\alpha}_i, i = 1,2,3$  les angles extérieurs aux sommets A, B et C.

D'après la formule de Gauss- Bonnet, on a

$$\iint_{\partial} K_m ds + \int_{\partial} K_g(m) dl = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \hat{\alpha}_i \quad (2.7)$$

La courbure géodésique de chaque arc du triangle ( ) est nulle ( $K_g = 0$ ).

Alors la formule devienne

$$\iint K_m ds + 0 = -2\pi - (\pi - \hat{A} + \pi - \hat{B} + \pi - \hat{C}) \quad (2.8)$$

Puisque le triangle se trouve sur une sphère du rayon  $\rho$  alors

$$\iint K_m ds = \frac{1}{\rho^2} \text{Aire}( ) \quad (2.9)$$

Donc on obtient

$$\text{Aire}( ) = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)\rho^2 \quad (2.10)$$

Ce résultat est connu comme le théorème de Girard.

## 2.6 Angle Dièdre et angle Trièdre (solide)

### 2.6.1 Angle Dièdre

#### Définition 2.1 :

*On appelle angle dièdre la portion d'espace comprise entre deux plans qui se coupent et qui limités dans un sens par leur intersection, sont indéfinis dans l'autre sens.*

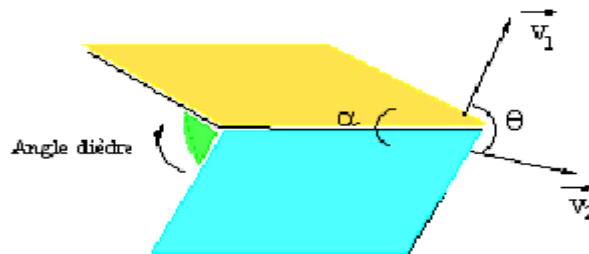
*L'arête d'un dièdre est l'intersection des plans qui lui servent de limites, ces plans eux-mêmes sont ses faces.*

*L'angle dièdre se calcule à partir de l'angle entre les vecteurs normaux au plan.*

*On a :  $\theta = \pi - \alpha$*

$$\cos \theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|}$$

*Tel que  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  est le produit scalaire de  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .*



**Figure 2.2**

## 2.6.2 Angle Trièdre

### Définition 2.2 :

On appelle *angle solide* la portion de l'espace comprise entre plus de deux plans passant par un même point et limités par leurs intersections successives. Ces intersections sont ce que l'on appelle les *arêtes* de l'angle solide. Le point commun à tous ces plans, qui est aussi un point par lequel passent les arêtes, est le *sommet* de l'angle polyèdre ; les portions de plans qui forment l'angle polyèdre limités aux arêtes sont ce que l'on appelle les *faces* de ce polyèdre. Les dièdres formés par les faces sont les *dièdres* de l'angle solide.

On peut considérer un angle solide comme une quantité mesurable.

En effet, soit un cône quelconque de sommet  $O$ . Pour caractériser la partie de l'espace délimitée par ce cône, on envisage une calotte sphérique de centre  $O$  et rayon  $R$  et d'aire  $S(R)$  délimitée par le cône.

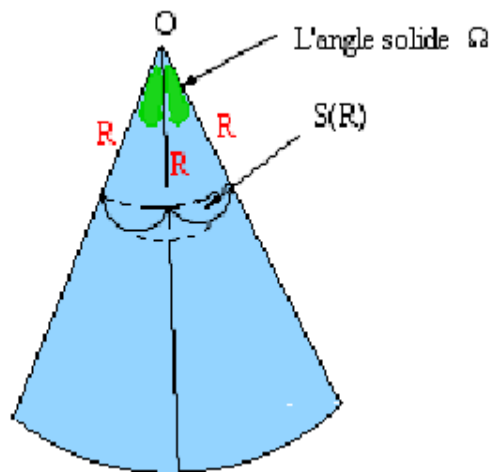


Figure 2.3. Angle solide

La quantité  $\frac{S(R)}{R^2}$  est indépendante de  $R$  et mesure la valeur de l'angle solide défini par le cône. Alors on a

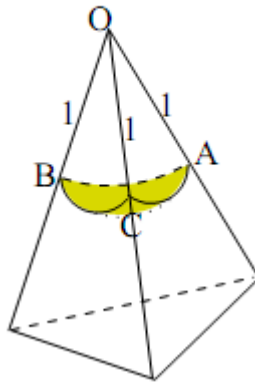
$$= \frac{S(R)}{R^2} \quad (2.11)$$

L'unité d'angle solide est le **stéradian** (sr).

On peut aussi dire que est égal à l'aire de la calotte découpée par le cône sur la sphère unité de centre  $O$ .

**Angle trièdre :**

Un angle trièdre est un angle solide à trois faces.



**Figure 2.4. Angle trièdre**

L'angle trièdre est égal à l'aire de triangle sphérique  $ABC$  divisée par  $R^2$  :

$$= \frac{\text{Aire}(ABC)}{R^2} \quad (2.12)$$

# Chapitre 3

# Courbure Concentrée des surfaces Euclidiennes à Singularités Coniques

Dans cette section, nous examinons d'abord la notion de courbure concentrée pour surface à singularité conique.

## 3.1 Métriques Euclidiennes à Singularités Coniques en Dimension 2

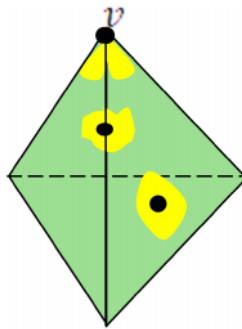
### Définition 3.1 :

*Soient  $S$  une surface,  $x_1, x_2, x_3, \dots$  des points de  $S$  et  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  des nombres positifs. On dit que  $S$  a une structure euclidienne avec singularités coniques  $x_1, x_2, x_3, \dots$  d'angle  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ . Si  $S_0 = S \setminus \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  possède une structure euclidienne pour laquelle  $x_i$  admet un voisinage isométrique à un voisinage du sommet dans le cône  $V_{\theta_i}$ .*

*La donnée de  $S$  et d'une telle structure sur  $S$  s'appelle une surface euclidienne à singularités coniques, on l'abrégera s. e. s. c.*

### Exemple 3.1 :

On considère un tétraèdre régulier (Figure 3.1 (a)), chaque point dans l'intérieur de la face a un voisinage euclidien qui est un disque. Le point qui se trouve sur l'arête du tétraèdre a un voisinage euclidien formé par l'union de deux demi-disques identiques sur chaque face incidente à l'arête. Pour le sommet  $v$  du tétraèdre, l'union de trois secteurs centrés  $v$ , forment un voisinage qui est isométrique à un cône de sommet  $v$  et d'angle  $3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi = 2\pi$ .

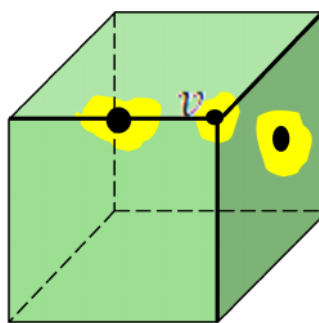


*Fig.3.1.(a). Exemple des e. s. c:tétraèdre*

Le cône est donc une surface singulière.

**Exemple 3.2 :**

On considère un cube (Figure 3.1 (b)), chaque point dans l'intérieur de la face a un voisinage euclidien qui est un disque. Le point qui se trouve sur l'arête du cube a un voisinage euclidien formé par l'union de deux demi-disques identiques sur chaque face incidente. Pour le sommet  $v$  du cube, l'union de trois quarts disques ont centré  $v$ , former un voisinage qui est isométrique à un cône du sommet  $v$  et d'angle  $3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ .



*Fig.3.1.(b). Exemple des e. s. c:cube*

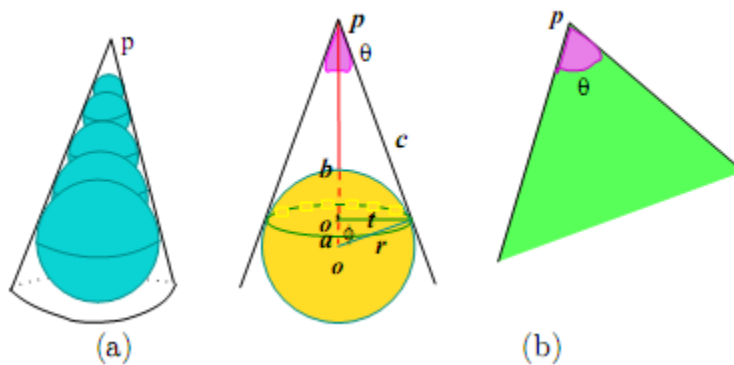
Chaque sommet avec un angle total différent à  $2\pi$  (ou  $\pi$  pour les points qui sont sur la frontière) sont des points singuliers.

## 3.2 Courbure concentrée

Une surface euclidienne à singularités coniques est une surface métrique telle que chaque point de la surface a un quartier qui est soit, isométrique à un disque euclidien ou un cône euclidien de l'angle  $\theta < 2\pi$ .

Les points qui satisfont à cette dernière propriété, sont appelés points à singularité coniques.

On considère un cône du sommet  $P$  et d'angle  $\theta_p < 2\pi$ . On approche l'intérieur du cône avec une sphère ( $S_r^2$ ) de rayon  $r$ , (Figure 3.2 (a))



**Fig.3.2 :**

**a). Sphère tangentes au cône de l'intérieur.**

**b). Paramètre de calcul.**

La calotte sphérique approchant le cône a une courbure totale (d'après le théorème de Gauss-Bonnet) est égale à l'aire du calotte sphérique et elle est donnée par la quantité  $2\pi - \theta_p$ .

En effet, la courbure de Gauss de la sphère  $S_r^2$  en un point, est égale à  $\frac{1}{r^2}$ . Alors la courbure de Gauss totale de la calotte sphérique est donnée par :

$$K = \int \int \frac{1}{r^2} ds. \quad (3.1)$$

Cette quantité est simplement l'aire de la calotte sphérique divisée par le carré du rayon  $r$ ,

$$K = \frac{\text{Aire (calotte)}}{r^2}. \quad (3.2)$$

On considère les coordonnées sphériques du point  $m(x, y, z)$  de la sphère  $(S_r^2)$

$$m(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \quad (3.3)$$

Tel que  $\theta \in [0, 2\pi]$  est l'angle entre l'axe  $(ox)$  et le vecteur  $\vec{O}(x, y, z)$  et  $\phi \in [0, \pi]$  est l'angle entre l'axe  $(Oz)$  et le vecteur  $\vec{O}_m$ . Alors le vecteur normal de la sphère  $(S_r^2)$  est :

$$\vec{n}_m = (-r^2 \sin^2 \theta \cos \phi, -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi, r^2 \sin^2 \theta \cos \theta).$$

L'intersection de la sphère  $(S_r^2)$  avec le cône, est un cercle de centre  $O'$  et de rayon  $t$ .

D'après la figure 3.2(b), on obtient

$$\begin{aligned} 2\pi r &= \theta_p \cdot c \\ b^2 + t^2 &= c^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} a^2 + t^2 &= r^2 \\ (a + b)^2 &= c^2 + r^2. \end{aligned}$$

En résolvant le système précédant, on obtient :

$$t = r \cdot \frac{\sqrt{4\pi^2 - \theta_p^2}}{2\pi}. \quad (3.5)$$

L'aire du calotte sphérique approchant le cône est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire(calotte)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} \vec{n}_m \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} r^2 \cdot \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = -2\pi r^2 [\cos \varphi]_0^{\arcsin \frac{t}{r}} \\
 &= -2\pi r^2 (\sqrt{1-r^2} - 1) = -2\pi r^2 \left( \frac{\theta_p}{2\pi} - 1 \right) \\
 &= (2\pi - \theta_p) r^2. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Alors la courbure de Gauss total  $K_p$  est :

$$K_p = \frac{(2\pi - \theta_p) r^2}{r^2} = 2\pi - \theta_p. \tag{3.7}$$

La quantité précédente de  $K_p$  est indépendante du rayon  $r$  de la sphère ( $S_r^2$ ).

Ainsi nous avons :

**Définition 3.2 :**

*Si  $p$  est un point intérieur d'une surface euclidienne à singularités coniques, la quantité  $K_p = 2\pi - \theta_p$  est appelée courbure concentrée de Gauss au point  $p$ .*

*Si  $p$  appartient à la frontière, alors sa courbure concentrée est définie par  $K_p = \pi - \theta_p$ .*

Le principe de courbure concentrée approche localement la forme conique de la surface par une calotte sphérique. Ce rapprochement ne modifie pas les caractéristiques topologiques de la surface. La courbure de chaque calotte sphérique est constante et nulle sur les autres parties plates. Le théorème de Gauss- Bonnet donne que la courbure Gaussienne analytique totale est égale à  $2\pi$  multipliée par la caractéristique d'Euler de la surface, ainsi on obtient :

$$\int_S K_m \, ds = \sum_{p \text{ sommet } \Sigma} (2\pi - \theta_p) = 2\pi \chi(S) = 2\pi \chi(\Sigma). \tag{3.8}$$

Cette propriété remarquable de la courbure concentrée est un équivalent discret de théorème de Gauss- Bonnet, reprendre cette propriété dans le théorème suivant (*voir*[34]) :

---

**Théorème 3.1 :**

Soit  $\Sigma$  une surface fermée euclidienne à singularités coniques compacte avec singularités en  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  d'angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ , alors

$$\sum_{p \text{ sommet } \Sigma} (2\pi - \theta_p) = 2\pi\chi(\Sigma) \quad (3.9)$$

Telle que  $\chi(\Sigma)$  la caractéristique d'Euler de  $\Sigma$ .

### 3.3 Résultats expérimentaux et comparaisons

Nous présentons ici quelques exemples qui illustrent le comportement de la courbure concentrée sur certaines formes 3D et les résultats des comparaisons avec la méthode du déficit d'angle, qui est la méthode la plus couramment utilisée pour estimer la courbure Gaussienne sur des surfaces triangulées.

#### 3.3.1 Résultats expérimentaux

La méthode déficit d'angle permet d'estimer la courbure Gaussienne au point P comme suit :

$$K_P = \frac{1}{A} \left[ 2\pi - \sum_{j=1}^n \theta_j \right], \quad (3.10)$$

Où  $\theta_j$  est l'angle d'un triangle incident au point P.

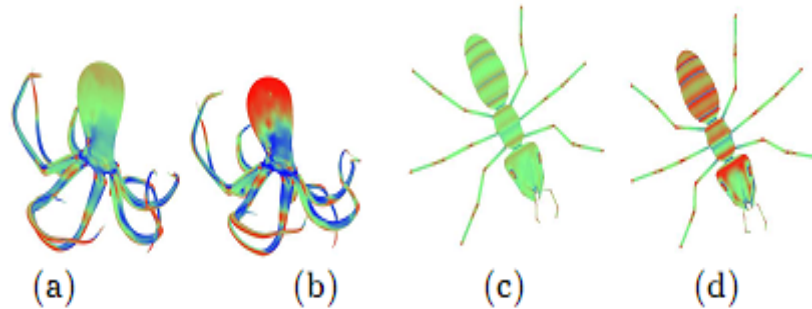
Notons que la valeur de  $K_P$  tend vers  $\infty$  par le raffinement du maillage autour de sommet  $p$ , alors que ce processus de raffinement ne change pas la valeur d'angle  $\theta_p$  et donc de la courbure concentrée.

Dans les exemples de la figure 3.3, on visualise le comportement de la courbure concentrée et de la courbure Gaussienne le déficit d'angle à travers un code couleur. Les images sont colorées de rouge représentant les plus hautes valeurs de courbure, au bleu représentant le plus faible des valeurs de courbure.

---

### Exemple 3.3 :

Notez que la courbure concentrée montre la géométrie des deux meilleures mailles, en mettant en évidence la plupart courbe en rouge, plate en vert et les régions négatives en bleu, voir la figure suivante



**Fig.3.3.1** Visualisation des valeurs de courbure de deux mailles représentant une pieuvre et une fourmi. Le (a et c) courbure calculées avec le déficit d'angle de Gauss sont affichées. Le (b et d) courbure calculées avec courbure concentrée sont affichées.

Les muscles des animaux sont bien contrastés avec une courbure concentrée. En outre, si nous nous concentrons notre attention sur certains détails de ces deux formes, nous pouvons voir comment une courbure concentrée met en évidence mieux la géométrie courbe de la tête de la pieuvre et du tronc de la fourmi (la figure 3 b et d).

Nous pouvons également voir comment la courbure concentrée souligne mieux les régions négatives, qui sont représentées en bleu, et qui ont un fort contraste par rapport aux couleurs des régions voisines, tandis que la courbure Gaussienne le déficit d'angle ne distingue pas clairement entre eux.

### 3.3.2 Comparaisons

Nous avons également examiné comment les différentes courbures traitées avec une forme dont les courbures réelles (calculées analytiquement) sont connues. Dans certains des travaux antérieurs (*voir*[15,33]) une comparaison entre les valeurs de courbure analytiques et les discrets est fait et l'erreur d'approximation est utilisée comme mesure de la qualité d'une courbure. À notre avis, la question importante n'est pas la minimisation d'erreur, mais que d'un estimateur de courbure produit une courbure discrète avec le même comportement que celui analytique.

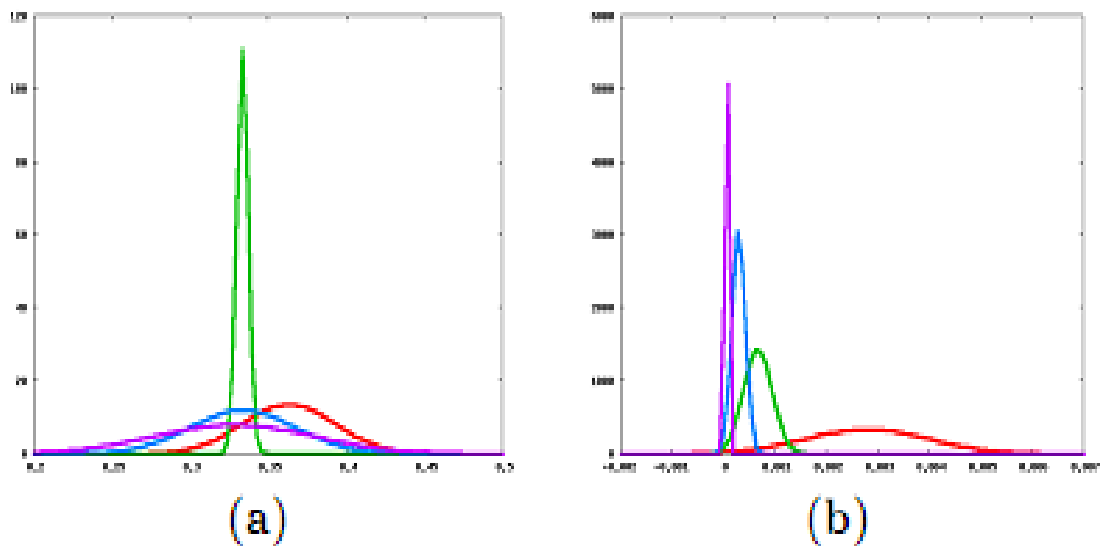
### Exemple 3.4 :

Dans le cas d'une sphère, nous savons que les deux courbures Gaussiennes et moyennes sont toujours constantes sur sa surface. Dans ce cas nous préférons un estimateur de courbure qui produit des valeurs de courbure qui sont à peu près constante à tous les sommets du maillage.

Par le biais de nos chercheurs de l'institut universitaire de formation des maitres de Créteil de Paris, nous avons appris que le calcul des valeurs de la courbure avec le déficit d'angle Gaussien et celles de la courbure concentrée pour une sphère de rayon 1, aussi ils ont répété l'expérience en changeant la résolution du maillage triangulaire se rapprochant de la sphère, (voir [22]).

Les graphiques de la figure suivante montrent la distribution des valeurs de courbure de chaque méthode (le déficit d'angle et la courbure concentrée) à quatre niveaux différents de la résolution.

Les différentes couleurs correspondent aux différents niveaux de la résolution de la maille : 5000 sommets en rouge, 20000 sommets en vert, 45000 sommets en bleu et à 240000 sommets en violet.



**Fig.3.3.2** Graphiques montrant la distribution des valeurs calculées avec la courbure Gaussienne le déficit d'angle (a), et la courbure concentrée (b).

Les graphiques précédents montrent comment chaque méthode fonctionne à différents niveaux de résolution. Prenons le déficit d'angle Gaussien (voir la figure (a)).

Pour une sphère de 5000 sommets (en rouge), il produit des valeurs de courbure avec un grand écart et, si le nombre de sommets croît à 20000 (en vert), le comportement de la

---

courbure semble améliorer (car les valeurs de la courbure plus proches d'une valeur constante).

Si nous augmentons encore la résolution (voir les graphes en bleu et violet), ce comportement n'est pas maintenu. Ainsi, la variance semble augmenter avec le nombre de sommets. Au contraire, si l'on considère la courbure concentrée, on peut observer que la résolution de la sphère augmente, les cloches de distribution sont toujours plus élevées et plus strictes. Cela signifie que la courbure concentrée tend à produire des valeurs de courbure plus en plus proches les uns des autres, c'est-à-dire, qui sont presque constantes.

# Chapitre 4

# Variétés combinatoires à 3 dimensions

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions sur les complexes simpliciaux et la triangulation.

## 4.1 Complexes simpliciaux

Les complexes simpliciaux sont des objets combinatoires permettant de représenter des espaces topologiques.

**Définition 4.1 :** (Combinaison)

Soit  $S = \{p_0, p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}^d$  un ensemble de points de dimension  $d$ . Une combinaison affine est définie par :

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i, \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

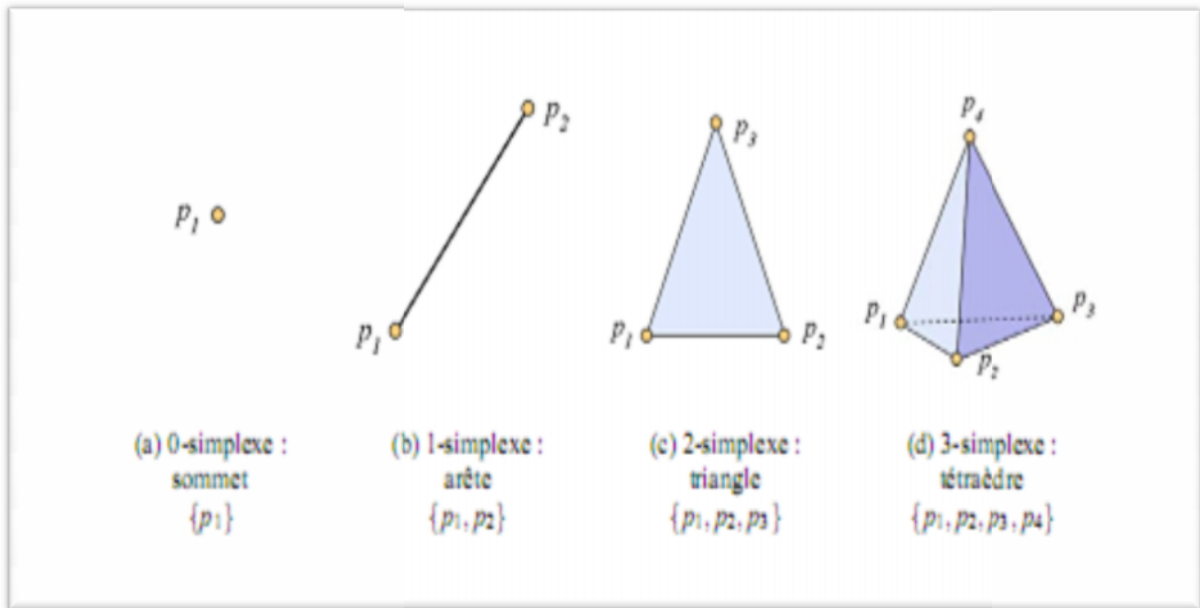
Une combinaison convexe est une combinaison affine telle que tous les  $\lambda_i$  soient des réels positifs ou nuls. L'enveloppe convexe de  $S$  est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de  $S$ .

Elle correspond au plus petit convexe contenant  $S$ .

Les coefficients  $\lambda_i$  sont alors appelés les coordonnées barycentriques de  $x$  par rapport aux points  $p_i$ .

**Définition 4.2 :** (Simplexe)

Un  $k$ -simplexe est un sous-espace de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^d$ . Les simplexes de dimensions inférieures ou égales à 3 sont représentés sur la figure suivante :



**Fig.4.1** *k*-simplexes avec  $0 \leq k \leq 3$

Un sommet est un 0-simplexe défini par un point, il est de dimension 0. Une arête est un 1-simplexe défini par deux points distincts. Elle correspond à l'ensemble des points du segment  $[p_1, p_2]$ . Elle est de dimension 1. Un triangle est un 2-simplexe défini par trois points non alignés. Le triangle est la réunion du polygone fermé  $\{p_1, p_2, p_3\}$  et de son intérieur, il est de dimension 2. Enfin un tétraèdre est un 3-simplexe défini par quatre points non coplanaires. Les faces des quatre triangles sont  $p_i p_j p_k$ , et leurs arêtes sont les six segments  $p_i p_j$ . Le tétraèdre est la réunion de la surface fermée constituée par ses quatre faces et de l'intérieur de celle-ci, il est de dimension 3.

**Définition 4.3 :** (Complexe simplicial)

Soit  $K$  un ensemble fini de simplexes, et  $\eta$  une face d'un simplexe  $\tau$  de  $K$ .  $K$  est un complexe simplicial si les axiomes suivants sont vérifiés :

- (i)  $\tau \in K, \eta \subset \tau \Rightarrow \eta \in K$
- (ii)  $\tau, \tau' \in K \Rightarrow \tau \cap \tau' \in K$

Si  $s$  est la dimension maximale des simplexes d'un complexe simplicial  $K$ , alors  $K$  est de dimension  $s$  et noté  $s$ -complexe simplicial. Des exemples d'arrangements de simplexes sont donnés en figure montrant des configurations autorisées ou non.



## 4.2 Triangulation

### Définition 4.4 :

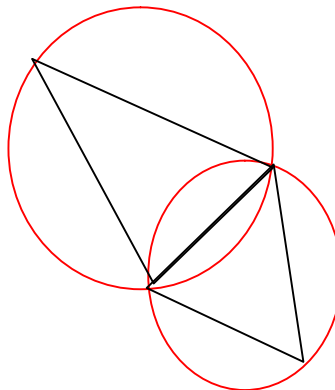
Le terme *triangulation*, en topologie, est relatif à la notion d'une structure combinatoire sur un domaine continu. Plus exactement, un complexe simplicial  $K$  est une triangulation d'un espace topologique  $X$ , si son espace (topologique) sous-jacent est homéomorphe à l'espace :  $|K| \approx X$ . Le terme *tétraédrisation* est parfois utilisé dans le cas d'une triangulation d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.2.1 Triangulation de Delaunay

On appelle triangulation de Delaunay de l'ensemble  $P$ , et on la note par  $Del(P)$  : le dual du diagramme de Voronoï de  $P$ . Les sommets de la triangulation de Delaunay sont les points  $P_i \in P$ , et deux sommets sont reliés par une arête dans la triangulation si les cellules de Voronoï correspondantes sont voisines.

### Exemple 4.4 :

Deux triangles adjacents avec leurs cercles circonscrits. Pour les quatre sites qui sont les sommets des triangles, il s'agit d'une triangulation de Delaunay : aucun des cercles ne contient le quatrième sommet autre que ceux par lesquels passe chacun des cercles.



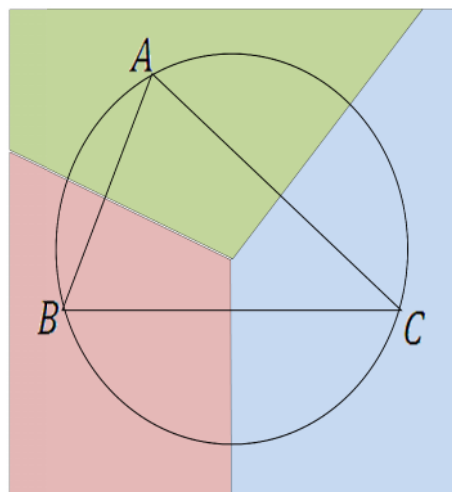
*Fig.4.2 Triangulation de Delaunay.*

## 4.2.2 Diagramme de Voronoï

La cellule de Voronoï d'un site est l'ensemble de points du plan, formant une surface appelée cellule, qui sont plus près de ce site que de tous les autres. Chaque cellule de Voronoï d'un site est un polygone convexe ou plus largement une surface polygonale car la cellule d'un site situé sur l'enveloppe convexe n'est pas bornée. Le pavage du plan par les cellules de Voronoï des  $N$  sites forme ce que l'on appelle le diagramme de Voronoï.

### Exemple 4.5 :

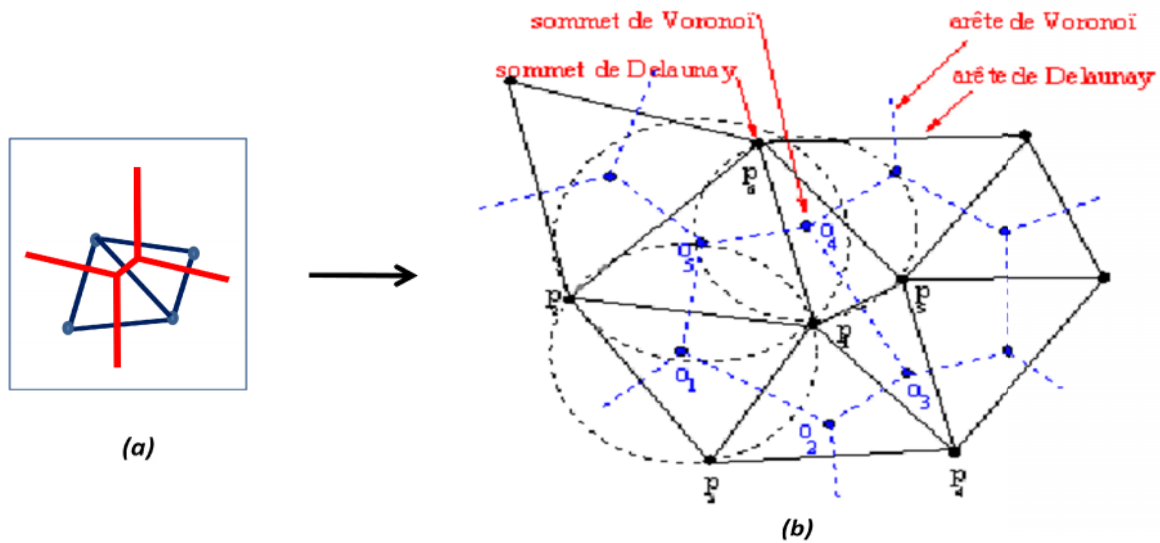
Cellules de Voronoï de trois points non alignés : il s'agit de trois secteurs angulaires délimités par trois demi-droites issues du centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , et qui sont les trois médiatrices de ce triangle.



*Fig.4.3 Cellule de Voronoï.*

### Exemple 4.6 :

Le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay sont donnés dans la figure suivante :



**Fig.4.4 :** a) Triangulation de Delaunay de quatre sites (en bleu) et cellule de Voronoï (en Rouge).

b) Arête, sommet de Voronoï et de Delaunay.

## 4.3 Variété combinatoire

### Définition 4.5 :

Soit  $\Sigma$  un ensemble de points linéairement indépendant dans un espace euclidien  $E^m$ , On dit que  $\Sigma$  est une variété combinatoire si le star de n'importe quel point de  $\Sigma$  est combinatoirement équivalent à une boule de dimension 3 s'il est à l'intérieur ou à une demi boule s'il est sur le bord.

### 4.3.1 Star d'un point

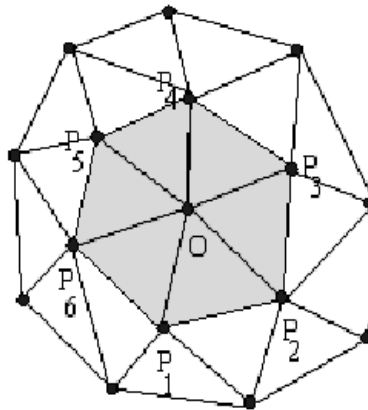
Soit  $\Sigma$  un complexe simplicial, soit  $O$  un sommet de la triangulation appartenant à l'intérieur de  $\Sigma$

### Définition 4.6 :

On définit le star de point  $O$  par l'ensemble des simplexes incidents au point  $O$ , et on le note  $St(O)$ .

**Exemple 4.7 :**

Dans la figure suivante, le star de point  $O$ ,  $St(O)$ , est l'ensemble des triangles,  $OP_1P_2$ ,  $OP_2P_3$ ,  $OP_3P_4$ ,  $OP_4P_5$ ,  $OP_5P_6$ , et  $OP_6P_1$ , et le point  $O$  et tous les segments  $[Op_i], i \in \{1,2, \dots, 6\}$ .



*Fig. 4.5. Star de O.*

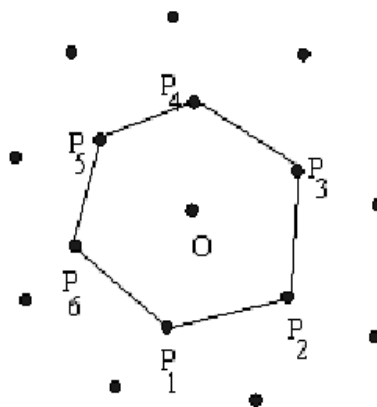
**4.3.2 Lien d'un point**

**Définition 4.7 :**

On définit le lien de  $O$  par le bord du star de  $O$ , et on le note  $L(O)$ .

**Exemple 4.8 :**

Le lien de point  $O$  est l'ensemble de segments  $[P_iP_{i+1}], i \in \{1,2, \dots, 5\}$ , et  $[P_6P_1]$



*Fig. 4.6. Lien de O.*

# Chapitre 5

## Distorsion discrète des champs scalaires

Dans cette section, nous introduisons la notion de distorsion pour un champ scalaire, Nous l'illustrons par quelques exemples et nous démontrons quelques propriétés qui lui sont associées.

### 5.1 Métriques Plates à Singularités Coniques en Dimension 3

#### Définition 5.1 :

Soit  $M$  une variété de dimension  $k$ . On appelle  $k$ -champ scalaire sur  $M$ , une application de  $M$  qui fait correspondre à tout point  $x$  de  $M$  une valeur dans  $\mathbb{R}$ . Le nombre  $k$  est aussi appelé la dimension du champ scalaire.

On appelle les sommets pour lesquels  $S_i = 4\pi$ , des points singuliers coniques.

#### Exemple 5.1 :

Soit le cube  $abcdefgh$  de centre  $O$ , tel que  $Z$

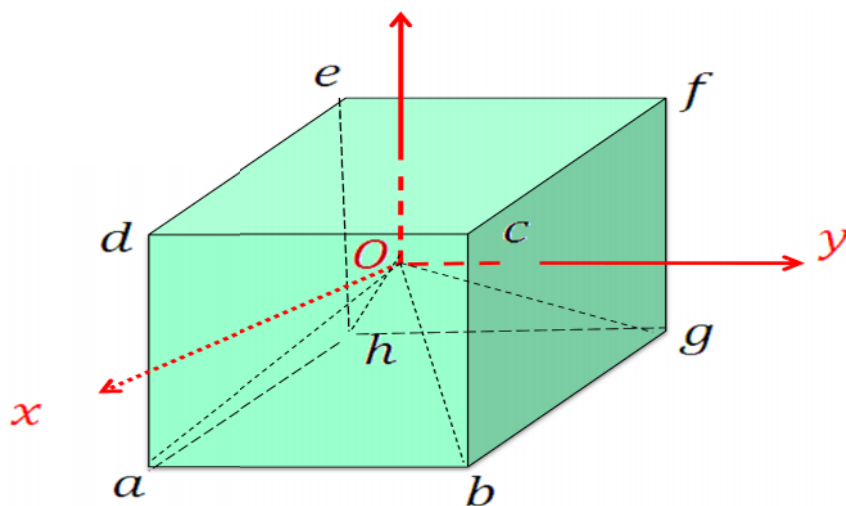


Fig. 5.1 : Cube de centre  $O$

$O(0,0,0), a(1, -1, -1), b(1,1, -1), c(1,1,1), d(1, -1,1), e(-1,1,1), f(-1,1,-1), g(-1,1, -1), h(-1, -1, -1)$

Avec

$$f(0,0,0) = 0.$$

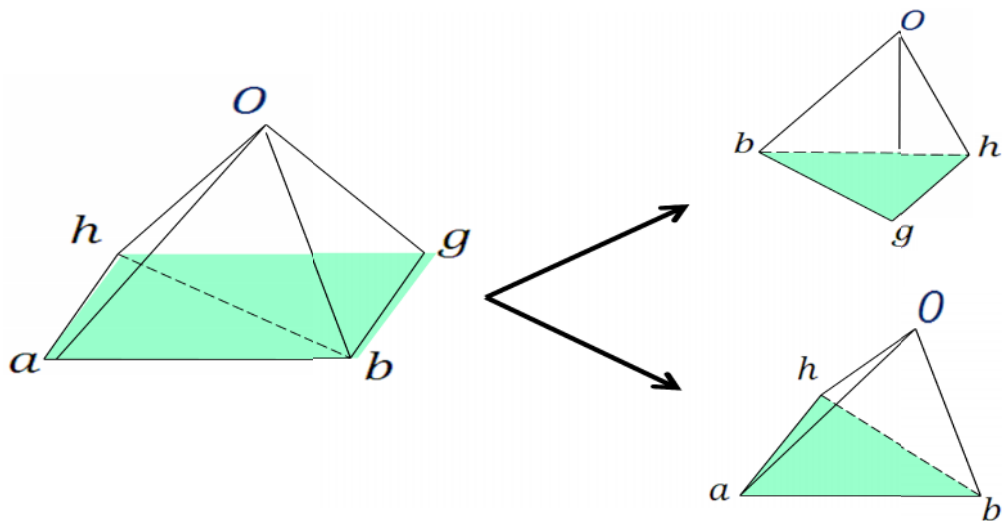
$$f(a) = f(c) = f(e) = f(g) = 2.$$

$$f(b) = f(d) = f(f) = f(h) = -2.$$

A partir de cube (voir la fig.5.1), on a 6 pyramides, lorsqu' on coupe chaque pyramide en deux tétraèdres, alors on aura 12 tétraèdres.

**Exemple 5.2 :**

On coupe le pyramide  $Oabgh$  en deux tétraèdres, alors on obtient les tétraèdres  $Oabh$  et  $Obgh$ , comme le montre la figure suivante :



**Fig.5.2 : Décomposition d'une pyramide en deux tétraèdres**

On sait que l'aire d'un triangle sphérique est donnée par la formule :

$$S = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi) \cdot r^2, \quad \text{avec } r = 1.$$

La somme de toutes les aires des triangles sphériques incidents en un sommet ( $O$ ) qui sont formés par l'intersection d'une sphère de rayon  $r = 1$  et les tétraèdres du cube sont égales à :

$$\sum_{i=1}^{12} S_i = 4\pi.$$

On calcule maintenant  $S_i$  pour le point ( $O$ ) dans  $R^4$ , telle que

$$a_i(x_i, y_i, z_i, t_i), t_i = f(x_i, y_i, z_i).$$

Alors les composantes des sommets deviennent :

$$O(0,0,0,0), a(1, -1, -1, 2), b(1, 1, -1, -2), c(1, 1, 1, 2), d(1, -1, 1, -2), \\ e(-1, -1, 1, 2), f(-1, 1, 1, -2), g(-1, 1, -1, 2), h(-1, -1, -1, -2).$$

On prend le 1<sup>er</sup> tétraèdre :  $Oahb$ ,

D'après les relations trigonométriques (voir le chapitre 2), on a

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos \hat{a} - \cos \hat{b} \cdot \cos \hat{h}}{\sin \hat{b} \cdot \sin \hat{h}} \\ \cos \hat{H} = \frac{\cos \hat{h} - \cos \hat{a} \cdot \cos \hat{b}}{\sin \hat{a} \cdot \sin \hat{b}} \\ \cos \hat{B} = \frac{\cos \hat{b} - \cos \hat{a} \cdot \cos \hat{h}}{\sin \hat{a} \cdot \sin \hat{h}}.$$

En utilisant la définition du produit scalaire pour trouver les angles  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  et  $\hat{h}$

$$\cos \hat{a} = \frac{\overrightarrow{ob} \cdot \overrightarrow{oh}}{\|\overrightarrow{ob}\| \cdot \|\overrightarrow{oh}\|} = \frac{3}{7} \quad \sin \hat{a} = \frac{\sqrt{40}}{7}$$

$$\cos \hat{b} = \frac{\vec{oa} \cdot \vec{oh}}{\|\vec{oa}\| \cdot \|\vec{oh}\|} = -\frac{3}{7} \quad \sin \hat{b} = \frac{\sqrt{40}}{7}$$

$$\cos \hat{h} = \frac{\vec{oa} \cdot \vec{ob}}{\|\vec{oa}\| \cdot \|\vec{ob}\|} = \frac{3}{7} \quad \sin \hat{h} = \frac{\sqrt{40}}{7},$$

alors

$$\cos \hat{A} = \frac{\frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{9}}{\sin \hat{b} \cdot \sin \hat{h}} = \hat{A} = 1.266103673$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}}{\sin \hat{a} \cdot \sin \hat{h}} = \hat{B} = 1.875488981$$

$$\cos \hat{H} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}}{\sin \hat{a} \cdot \sin \hat{b}} = \hat{H} = 1.875488981.$$

Donc

$$S_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{H} - \pi = 1.875488981.$$

Avec le même calcul pour les autres tétraèdres, on obtient :

$$S_2 = S_3 = S_4 = \dots = S_{12} = S_1 = 1.875488981.$$

Finalement, on aura

$$\sum_{i=1}^{12} S_i = 12S_1 = 22.50586777 > 4\pi.$$

Cette propriété est uniquement valable pour les variétés combinatoires de dimension 3 plongée dans  $R^4$ .

### **Théorème 5.1 :**

Soit  $f$  un champ scalaire défini par :  $f: R^3 \rightarrow R$ , tel que  $(x, y, z) \in R^3, f(x, y, z) = \text{const.}$

Alors l'angle solide à n'importe quel point du graphe de  $f$  est égal à  $4\pi$ .

### Démonstration :

Supposons que pour tous points  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = \lambda$ , et on cherche l'angle solide  $S$  du tétraèdre  $Oabc$ , où

$$O(x_1, y_1, z_1, \lambda), a(x_2, y_2, z_2, \lambda)$$

$$b(x_3, y_3, z_3, \lambda), c(x_4, y_4, z_4, \lambda)$$

Alors, on a  $\vec{oa}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, \lambda - \lambda)$ ,  $\vec{ob}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1, \lambda - \lambda)$ ,  
 $\vec{oc}(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1, \lambda - \lambda)$ , donc :

$$\cos \hat{a} = \frac{\vec{ob} \cdot \vec{oc}}{\|\vec{ob}\| \cdot \|\vec{oc}\|}$$

$$\cos \hat{b} = \frac{\vec{oa} \cdot \vec{oc}}{\|\vec{oa}\| \cdot \|\vec{oc}\|}$$

$$\cos \hat{c} = \frac{\vec{oa} \cdot \vec{ob}}{\|\vec{oa}\| \cdot \|\vec{ob}\|}$$

On sait que le produit des vecteurs  $\vec{oa} \cdot \vec{ob}$ ,  $\vec{ob} \cdot \vec{oc}$ ,  $\vec{oa} \cdot \vec{oc}$  est :

$$\vec{oa} \cdot \vec{ob} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{ob} \cdot \vec{oc} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{oa} \cdot \vec{oc} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$\vec{oa} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\|\vec{ob}\| = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$$

$$\vec{oc} = \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2}.$$

Donc l'angle solide au point (O) du cube Oabcdefgh est égale à  $4\pi$ .

### Exemple 5.3:

Soit le cube Oabcdefgh, on prend  $f(x, y, z) = 1$ , où:

$O(0,0,0,1), a(1, -1, -1,1), b(1,1, -1,1), c(1,1,1,1), d(1, -1,1,1), e(-1, -1,1,1),$

$f(-1,1,1, -1), g(-1,1, -1,1), h(-1, -1, -1,1).$

Pour le 1<sup>ier</sup> tétraèdre Oabh, et avec le même calcul précédent on obtient :

$$S_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{H} - \pi = \frac{\pi}{3},$$

Et pour les autres tétraèdres on obtient aussi

$$S_2 = S_3 = S_4 = \dots = S_{12} = S_1 = \frac{\pi}{3}.$$

Donc l'angle solide au point (O) est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{12} S_i = 12 \cdot S_1 = 12 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi.$$

### Théorème 5.2 :

Soient  $f$  une fonction affine définie par :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = ax + by + cz + d.$$

L'angle solide à n'importe quel point du graphe de  $f$  est égal à  $4\pi$ .

**Démonstration :**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $R^3$ , telle que  $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ , avec  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels constants. Supposons que  $d = 0$ , alors  $f$  devient une forme linéaire de  $R^3$  à  $R$ .

L'espace  $R^3$  est un sous- espace vectoriel de  $R^3 \times \{0\} \subset R^4$ .

Soit  $F : R^3 \times \{0\} \rightarrow R^4$  une transformation linéaire définie par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ax + by + cz + t \end{pmatrix}.$$

On a

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Les points de  $R^3 \times \{0\}$  correspondent à  $t = 0$ , l'image de  $R^3 \times \{0\}$  par la transformation  $F$  est un sous- espace vectoriel de  $R^4$  de dimension 3, donc isométrique à  $R^3$ .

Donc l'angle solide en point  $p = F(x, y, z, 0)$  est égale à  $4\pi$ .

**Exemple 5.4 :**

Soit  $f$  une fonction définie par  $f : R^3 \rightarrow R$ , tel que  $f(x, y, z) = 2x - y + 2z - 2$ ,

Et le cube  $(C) : abcdefgh$  est un cube de centre  $O(0,0,0, -2)$ , les composantes des sommets sont :

$$a(1, -1, -1, -1), b(1, 1, -1, -3), c(1, 1, 1, 1), d(1, -1, 1, 3), \\ e(-1, -1, 1, -1), f(-1, 1, 1, -3), g(-1, 1, -1, -7), h(-1, -1, -1, -5).$$

On a,

$$\begin{aligned} &\vec{Oa}(1, -1, -1, 1), \vec{Ob}(1, 1, -1, -1), \vec{Oc}(1, 1, 1, 3), \vec{Od}(1, -1, 1, 5), \\ &\vec{Oe}(-1, -1, 1, 1), \vec{Of}(-1, 1, 1, -1), \vec{Og}(-1, 1, -1, -5), \vec{Oh}(-1, -1, -1, -3). \end{aligned}$$

L'aire de la surface du triangle sphérique n°1 pour le tétraèdre Oabh est donnée par :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{Ob} \cdot \vec{Oh}}{\|\vec{Ob}\| \cdot \|\vec{Oh}\|} = \frac{1}{12}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{Oa} \cdot \vec{Ob}}{\|\vec{Oa}\| \cdot \|\vec{Ob}\|} = 0,$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{Oa} \cdot \vec{Oh}}{\|\vec{Oa}\| \cdot \|\vec{Oh}\|} = \frac{-1}{21}$$

On a alors,

$$\cos \hat{A} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}{\sin \beta \sin \gamma} \Rightarrow A = 1.264518958,$$

$$\cos \hat{H} = \frac{\frac{1}{12}}{\sin \alpha \sin \beta} \Rightarrow H = 1.479761549$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{21}}\right)}{\sin \alpha \sin \gamma} \Rightarrow B = 1.877073696.$$

D'où

$$S_1 = 1.479761549.$$

Tandis que l'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n° 2 Obgh est donnée par :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{Og} \cdot \vec{oh}}{\|\vec{Og}\| \cdot \|\vec{oh}\|} = \frac{16}{12 \times 28}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{Ob} \cdot \vec{Og}}{\|\vec{Ob}\| \cdot \|\vec{Og}\|} = \frac{3}{28}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{Ob} \cdot \vec{oh}}{\|\vec{Ob}\| \cdot \|\vec{oh}\|} = \frac{1}{12}$$

Alors on obtient

$$\cos \hat{B} = \frac{\left(\frac{16}{\sqrt{12 \times 28}} - \frac{3}{12 \times 28}\right)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \Rightarrow \hat{B} = 0.45279284,$$

$$\cos \hat{H} = \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{28}} - \frac{16}{12 \times \sqrt{28}}\right)}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \Rightarrow \hat{H} = 0.830915552,$$

$$\cos \hat{G} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{16 \times 3}{28 \times \sqrt{12}}\right)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \Rightarrow \hat{G} = 2.109459793,$$

Et donc on a,

$$S_2 = .251575531.$$

*On fait le même calcul, on obtient :*

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°3 Obcf est égal à :*

$$S_3 = 2.274385843,$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°4 Obfg est égal à :*

$$S_4 = 0.546125301,$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°5 Ogfh est égal à :*

$$S_5 = S_2 = .251575531.$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°6 Ofeh est égal à :*

$$S_6 = S_1 = 1.479761549.$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°7 Ohed est égal à :*

$$S_7 = 1.410255573,$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°8 Oadh est égal à :*

$$s_8 = S_7 = 1.410255573,$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°9 Oabd est égal à :*

$$S_9 = 1.077326932,$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°10 Obcd est égal à :*

$$S_{10} = 0.654010148,$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°11 Ocfd est égal à :*

$$S_{11} = S_{10} = 0.654010148,$$

*L'aire de la surface du triangle sphérique pour le tétraèdre n°12 Ofde est égal à :*

$$s_{12} = S_9 = 1.077326932,$$

Finalemment, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{12} s_i = 12.56637061 = 4\pi.$$

## 5.2 Distorsion

Dans la partie ce qui suit on définit deux types de distorsions, une distorsion aux sommets et une autre sur les arêtes de la triangulation.

### 5.2.1 Distorsion en un sommet

Soit  $f$  un champ scalaire 3D définie sur un ensemble discret de points répartis dans un domaine  $D$  de  $R^3$ . Une interpolation linéaire par morceaux de  $f$  est calculée à une décomposition de  $D$  en un maillage tétraédrique dont les sommets sont les points de données donné,

Pour un sommet  $p$ , la valeur  $f(p)$  a été ajoutée au coordonnées de  $p(x_p, y_p, z_p)$  qui peut être vu comme une élévation de  $p$  vers un point  $p'((x_p, y_p, z_p, f(p)))$  dans  $R^4$ .

On peut calculer l'angle solide total autour d'un sommet dans le domaine élevés et les comparés avec l'angle  $4\pi$  qui est l'angle solide total autour de n'importe quel point dans l'espace euclidien  $R^3$  en 3 dimensions. On considère le tétraèdre  $T'$  défini par  $(p')$ .

#### Définition 5.2 :

On définit la distorsion en un point  $(p')$  par

$$D(p') = 4\pi - \sum_{T' \in St(p')} \widehat{S}_{T'},$$

Où,  $S_{T'}$  l'angle solide au point  $(p')$  dans  $T'$ .

#### Exemple 5.5:

On considère un cube  $abcdefgh$ , où le point  $O(0,0,0)$ , et le star  $St(O)$  avec

$$a(1, -1, -1), b(1, 1, -1), c(1, 1, 1), d(1, -1, 1) \\ e(-1, -1, 1), f(-1, 1, 1), g(-1, 1, -1), h(-1, -1, -1).$$

Nous définissons un champ scalaire  $F$  sur les sommets de  $St(O)$  comme suit :

$$F(O) = 0; \quad F(a) = F(c) = F(e) = F(g) = 0.01;$$

$$F(b) = F(d) = F(f) = F(h) = 10000.$$

Les valeurs sont choisies différentes pour mettre en évidence les dépendances de distorsion sur le choix de la triangulation. Nous gardons les mêmes noms pour les sommets dans le domaine élevé  $St'(O)$  correspondant à  $St(O)$  dans  $R^4$ .

Alors, nous avons :

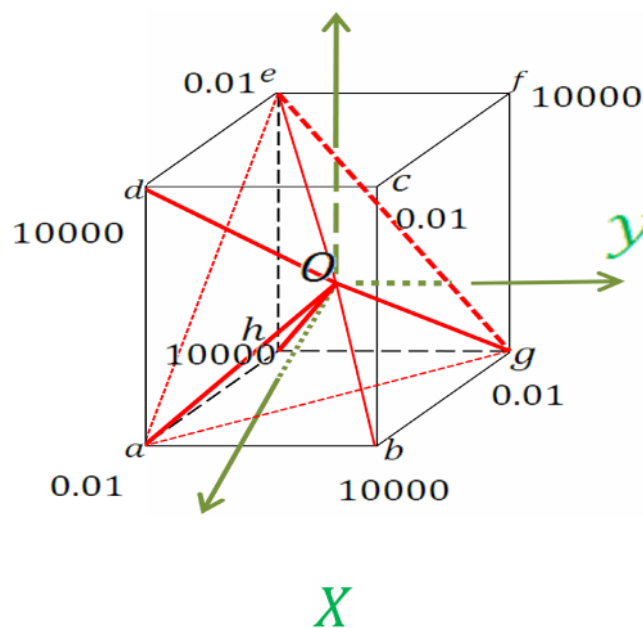
$$O(0,0,0,0), a(1, -1, -1, 0.01), b(1, 1, -1, 10000)$$

$$c(1, 1, 1, 0.01), d(1, -1, 1, 10000), e(-1, -1, 1, 0.01)$$

$$f(-1, 1, 1, 10000), g(-1, 1, -1, 0.01), h(-1, -1, -1, 10000).$$

Nous choisissons les tétraèdres suivants pour former une triangulation de  $St(O)$ :

$Oabg, Oagh, Obcg, Ocfg, Ogfe, Ogeh, Oahe, Oade, Oacd, Oacb, Ocf e, Ocde$ , comme le montre la figure suivante :



**Fig. 5.3: Champ scalaire à 4D sur un cube.**

Pour calculer l'angle trièdre au sommet  $O$  pour chaque tétraèdre, on calcule d'abord les angles en point  $O$  pour chaque face triangulaire d'un tétraèdre.

On prend le tétraèdre n°1  $Oabg$ , nous avons

$$\cos \alpha = \frac{\vec{Ob} \cdot \vec{Og}}{\|\vec{Ob}\| \cdot \|\vec{Og}\|} = \frac{101}{\sqrt{3.0001(3 + 10^8)}}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{Oa} \cdot \vec{Oc}}{\|\vec{Oa}\| \cdot \|\vec{Oc}\|} = \frac{101}{\sqrt{3.0001(3 + 10^8)}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{Oa} \cdot \vec{Ob}}{\|\vec{Oa}\| \cdot \|\vec{Ob}\|} = \frac{0.0001 - 1}{3.0001}.$$

Où,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont respectivement les angles  $\widehat{bOg}$ ,  $\widehat{aOb}$ , et  $\widehat{aOg}$ .

D'après les relations trigonométriques (chapitre 2), et la relation de l'aire, les angles dièdres entre les faces incidents à  $O$  devient :

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta},$$

$$\cos(\hat{G}) = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma},$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

avec le calcul on obtient :

$$\hat{A} = 1.562550028, \hat{G} = 1.562550028, \hat{B} = 1.910634184.$$

Alors, l'angle trièdre à (O) devient :

$$S_1 = \hat{A} + \hat{G} + \hat{B} - \pi = 1.894141587 \text{ Stéradian.}$$

De la même manière, nous montrons que tous les tétraèdres dans le domaine élevé  $St'(O)$  ont la même angle trièdre  $S_1$  à (O)

C'est-à-dire on obtient

$$S_1 = S_2 = S_3 = \dots S_{12}.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{12} S_i = 22.72969904 \text{ Stéradian}$$

Donnent l'angle solide total à (O) différent à  $4\pi$ .

Ensuite, la distorsion dans le centre (O) est

$$\begin{aligned} D(O) &= 4\pi - \sum_{i=1}^{12} S_i = 4\pi - 22.72969904 \\ &= -10.163328428 \text{ Stéradian} \end{aligned}$$

### **Théorème 5.3 :**

Lorsque le champ scalaire  $f$  est la restriction d'une transformation affine sur les sommets de la triangulation, alors l'image élevée est une distorsion libre (i.e. la distorsion en tout point est nulle).

**Preuve :**

Soit  $f$  une transformation affine définie sur  $R^3$  par  $(x, y, z) = ax + by + cz + d$ , où  $a, b, c$ , et  $d$  sont des constantes réelles. Jusqu'à une traduction (qui est une isométrie) on peut supposer que  $d = 0$ , on obtient la transformation linéaire définie par (voir la démonstration précédente)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ax + by + cz + t \end{pmatrix}.$$

Et alors, on a

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Points de  $R^3 \times \{0\}$  correspondent à  $t = 0$ . L'image par  $F$  de  $R^3 \times \{0\}$  est un sous-espace vectoriel euclidien à 3 dimensions de  $R^4$ . Par conséquent,  $F(R^3 \times \{0\})$  est distorsion libre (car il est isométrique à  $R^3$ ). d'un autre côté  $F(R^3 \times \{0\})$  est l'espace élevé par  $f$ , ce qui prouve le théorème.

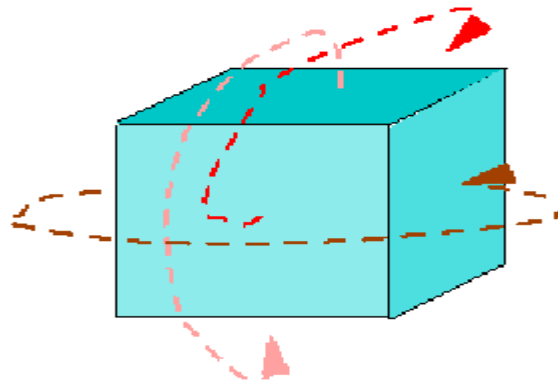
En particulier, un domaine avec un champ scalaire constant est un exemple de distorsion dans  $R^4$  (il suffit de prendre  $a = b = c = 0$ ). Cela signifie que, à n'importe quelle altitude, la situation stable correspond à une distorsion nulle. Pour les autres champs scalaires la distorsion n'est pas, en général, nulle et dépend du comportement du champ scalaire  $f$ , voir les exemples ci-dessous.

### Exemple 5.5 : Variété combinatoire de dimension 3

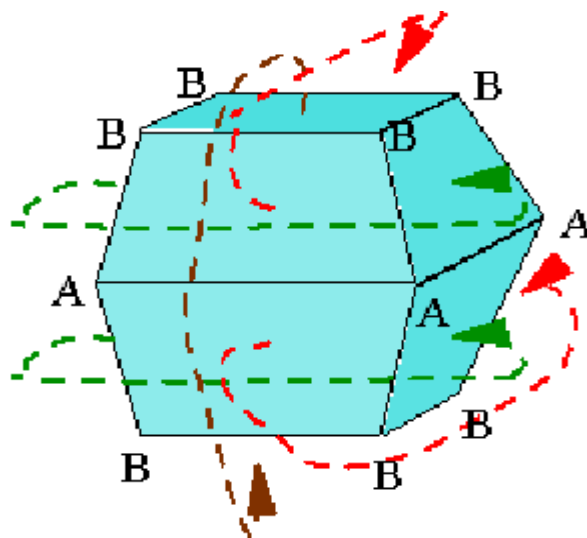
Nous présentons ici un exemple pour les variétés combinatoires de dimension trois. Il s'agit du tore. Il est obtenu à partir d'un cube ou d'un tétraèdre triangulé par identification de faces opposées. Nous présentons ici un tore avec singularités et un autre sans singularités.

Les opérations d'identification sont illustrées par des flèches. Le premier tore en (5.4.(a)) est de distorsion nulle (i.e, n'a aucune singularité), puisque l'angle solide total à un point

quelconque (et en particulier aux points correspondant aux sommets du cube) est égal au  $8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi$  stéradian. Le deuxième tore en (5.4.(b)) a deux points singuliers A et B. Le sommet A, a une distorsion positive et B a une distorsion négative. En outre, le segment [BB] pour les deux exemples sur le schéma 5.4.(a); (b)); est incident à quatre faces (face supérieure, face inférieure et deux faces latérales sur les polyèdres). Par conséquent l'angle dièdre total autour du segment [BB] dans les tores est égal au  $2\pi$  pour le premier (dans (a)) et il est plus grand que  $2\pi$  pour le second (dans (b)). En effet, l'angle dièdre incident au segment [BB] dans le cube est égal au  $\frac{\pi}{2}$ , alors que l'angle dièdre incident au segment [BB] dans le décaèdre est plus grand que  $\frac{\pi}{2}$ . Le segment [AA] dans le tore est incident à deux faces où l'angle dièdre correspondant dans le décaèdre est plus petit que  $\pi$ . Par conséquent l'angle dièdre total autour du segment [AA] est plus petit que  $2\pi$ . En conséquence, la distorsion autour des arêtes [AA] et [BB], n'est pas nulle.



**Fig. 5.4. (a): Un tore à trois dimensions sans singularités**



**Fig. 5.4. (b): Un tore singulier à deux singularités, un de distorsion positive (point A) et l'autre de distorsion négative (point B).**

## 5.2.2 Distorsion autour d'une arête

### Définition 5.3 :

La distorsion autour d'une arête  $e$ , est la quantité  $D_b(e)$  définie par :

$$D_b(e) = 2\pi - \theta_e,$$

Où,  $\theta_e$  est l'angle tétraèdre total autour  $e$ .

Dans ce qui suit, nous montrons comment calculer la distorsion autour des arêtes  $Oa$  et  $Ob$  (voir la figure 5.5(a)).

L'arête  $Oa$  a six tétraèdres incidents sont :

$Oabg, Oagh, Oabc, Oacd, Oahe$  et  $Oaed$ .

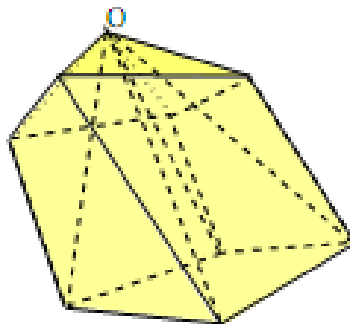


Fig.5.5.(a). Différence d'élévation entre les sommets

Tous les angles dièdres à  $Oa$  sont égales à :

$$A = 1.562550028 \text{ Radian.}$$

Ensuite, l'angle total

$$\theta_{Oa} = \sum_{i=1}^6 A_i = 6A = 6 \times 1.562550028$$

$$\theta_{Oa} = 9.375300168 < 2\pi.$$

L'arête  $Ob$  a trois tétraèdres incidents :  $Obag, Obac$  et  $Obcg$ .

Où, tous les angles dièdres sont égales à:

$$B = 1.910634184.$$

Ensuite, l'angle total

$$\theta_{Ob} = \sum_{i=1}^3 B_i = 3 \times 1.910634184$$

$$\theta_{Ob} = 5.731902552.$$

D'où les distorsions autour  $Oa$  et  $Ob$  sont données par

$$D(Oa) = 2\pi - \sum_{i=1}^6 A_i = -3.09211485 \text{ Radian.}$$

$$D(Ob) = 2\pi - \sum_{i=1}^3 B_i = 0.551282755 \text{ Radian.}$$

Nous pouvons observer que les distorsions de liaison sont alternativement positives et négatives.

#### **Théorème 5.4 :**

Champs scalaires affines sont des distorsions de liaison libre (i.e. la distorsion de liaison à n'importe quel bord est nulle).

**Preuve :**

Cette directe conséquence du fait que l'image de  $R^3 \times \{0\}$  par la transformation  $F$  (défini ci-dessus dans la démonstration du théorème 5.4) est un sous-espace euclidien à 3 dimensions de  $R^4$ , et donc isométrique à l'espace euclidien  $R^3$  qui est exempt de distorsion. La notion de distorsion peut avoir un rôle très important dans les applications de décrire le lien entre les atomes dans une molécule.

La distorsion des liaisons non nulle permet vibrations des atomes où l'amplitude est une fonction de la distorsion.

**Exemple 5.6 :**

Dans cet exemple, nous montrons l'influence de la triangulation sur la distorsion. Nous gardons le même cube que dans le premier exemple avec le même champ scalaire, et nous changeons seulement la triangulation de  $St(O)$ .

Considérons les tétraèdres :  $Oabh, Obgh, Obgf, Obfc, Oghf, Ohfe, Oahd, Ohde, Oabd, Obcd, Ocdf, Odfe$ , où

$$O(0,0,0,0), a(1, -1, -1, 0.01), b(1, 1, -1, 10000), c(1, 1, 1, 0.01), d(1, -1, 1, 10000), \\ e(-1, -1, 1, 0.01), f(-1, 1, 1, 10000), g(-1, 1, -1, 0.01), h(-1, -1, -1, 10000).$$

*Les mêmes calculs que dans l'exemple précédent*

*Donne l'angle trièdre du premier tétraèdre :*

$$S'_1 = 0.000282842.$$

*Tous les autres tétraèdres ont le même angle trièdre à  $O$ , ainsi l'angle total à  $O$ :*

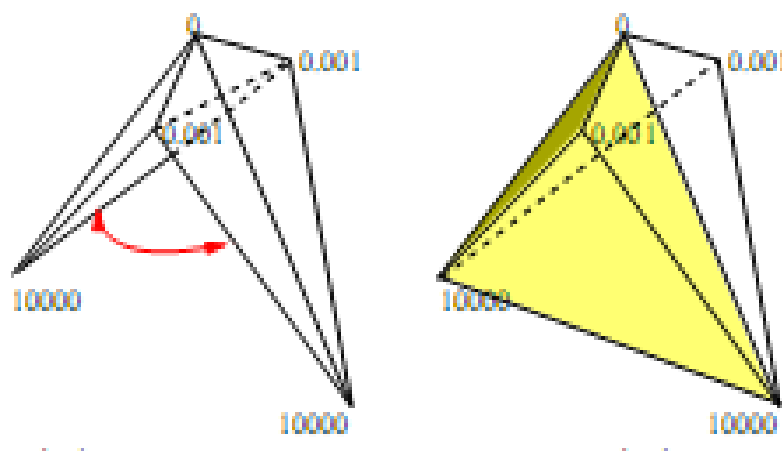
$$S' = 12S'_1 = .003394104 \quad 4\pi.$$

Et la distorsion à  $O$  est égal à

$$D'(O) = 4\pi - \sum_{i=1}^{12} S'_i = 4\pi - 0.003394104$$

$$D'(O) = 12.562976508 \text{ Stéradian.}$$

En comparant cette valeur avec celle obtenue dans le premier exemple, nous voyons que, bien que la triangulation du cube ne change pas sa structure géométrique dans  $R^3$ , son domaine élevé dans  $R^4$  dépend fortement des tétraèdres choisis. La distance entre le centre du cube et au centre de chaque visage change de manière significative pour chaque triangulation, voir la figure 5.5(b).



**Fig. 5.5(b): Dépendance du domaine élevé sur la triangulation du domaine 3D**

De la même façon, nous calculons les distorsions au point ( $O$ ) entre tous les triangulations possibles du cube. Pour simplifier le calcul, observons que nous pouvons avoir deux décompositions pour toute face du cube. Pour la face  $abcd$ , la première décomposition est  $Oabc$   $Oadc$  et la seconde correspond à la décomposition  $Oabd$   $ocbd$ .

Les autres visages peuvent être décomposés de la même manière. Dans la première décomposition, l'angle solide total à  $O$  de la pyramide est

$$A_1 = 2S_1 = 3.788283174.$$

*Pour la seconde décomposition, on a*

$$A_2 = 2S'_1 = 0.000565684.$$

Puis, dans toute triangulation possible du cube, l'angle total solide en ( $O$ ) est une combinaison  $k.A_1 + l.A_2$ , où  $k$  et  $l$  sont des entiers tels que  $l + k = 6$ , ainsi nous obtenons

$$S_{3,total} = 5A_1 + A_2 = 18.941$$

$$S_{4,total} = 4A_1 + 2A_2 = 15.154$$

$$S_{5,total} = 3A_1 + 3A_2 = 11.366$$

$$S_{6,total} = 2A_1 + 4A_2 = 7.578$$

$$S_{7,total} = A_1 + 5A_2 = 3.791$$

*La distorsion correspondant à  $O$  sont :*

$$D_3(O) = -6.375 \text{ Stéradian}$$

$$D_4(O) = -2.587 \text{ Stéradian}$$

$$D_5(O) = 1.199 \text{ Stéradian}$$

$$D_6(O) = 4.987 \text{ Stéradian}$$

$$D_7(O) = 8.775 \text{ Stéradian.}$$

*Finally, we order all possible distortions in a sequence :*

$$-10.163 < -6.375 < -2.587 < 1.199 < 4.987 < 8.775 < 12.562$$

*The value 1.1998663 corresponds to the absolute value of the minimal distortion of the domain. We call it the optimal distortion.*

# Chapitre 6

# Expérimentation Informatique

Dans ce chapitre, on a fait un programme avec langage C pour calculer la distorsion pour des petites structures (comme le cube). Pour les grandes structures où on a besoin de bases de données réelles et de machines puissantes pour les calculs. Nous exposons ici un programme qui suit.

## 6.1 Calcul de distorsion avec langage C

Dans ce qui suit, on calcule avec langage C l'angle solide d'un tétraèdre et la distorsion d'un cube dans un même programme.

## Calcul de l'angle solide et de la distorsion avec langage C

```
#include <stdlib>
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

int main(int argc, char *argv[] )
{

float x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,t1,t2,t3,t4,A,B,C,E,F,G,C1,C2,C3;
float alpha,beta,gamma,S1,S2,S3,Aire,D;

printf ("Donnez les coordonees du premier point separees d'entrer:\n");
scanf ("%f",&x1);
scanf ("%f",&y1);
scanf ("%f",&z1);
scanf ("%f",&t1);
printf ("Donnez les coordonees du deuxieme point separees d'entrer:\n");
scanf ("%f",&x2);
scanf ("%f",&y2);
scanf ("%f",&z2);
scanf ("%f",&t2);
printf ("Donnez les coordonees du troisieme point separees d'entrer:\n");
scanf ("%f",&x3);
scanf ("%f",&y3);
scanf ("%f",&z3);
```

```

scanf ("%f",&t3);
printf ("Donnez les coordonees du quatrieme point separes d'entrer:\n");
scanf ("%f",&x4);
scanf ("%f",&y4);
scanf ("%f",&z4);
scanf ("%f",&t4);

//A represente le produit scalaire ob.oc:
A=((x3-x1)*(x4-x1))+((y3-y1)*(y4-y1))+((z3-z1)*(z4-z1))+((t3-t1)*(t4-t1));

//B represente le produit scalaire oa.oc:
B=((x2-x1)*(x4-x1))+((y2-y1)*(y4-y1))+((z2-z1)*(z4-z1))+((t2-t1)*(t4-t1));

//C represente le produit scalaire oa.ob:
C=((x2-x1)*(x3-x1))+((y2-y1)*(y3-y1))+((z2-z1)*(z3-z1))+((t2-t1)*(t3-t1));

//E represente le module du vecteroa:
E=sqrt(pow((x2-x1),2)+pow((y2-y1),2)+pow((z2-z1),2)+pow((t2-t1),2));

//F represente le module du vecteur ob:
F=sqrt(pow((x3-x1),2)+pow((y3-y1),2)+pow((z3-z1),2)+pow((t3-t1),2));

//G represente le module du vecteur oc:
G=sqrt(pow((x4-x1),2)+pow((y4-y1),2)+pow((z4-z1),2)+pow((t4-t1),2));

C1=A/(F*G);
C2=B/(E*G);
C3=C/(E*F);
alpha=acos(C1);
beta=acos(C2);
gamma=acos(C3);
S1=acos((cos(alpha)-(cos(beta)*cos(gamma)))/(sin(beta)*sin(gamma)));
S2=acos((cos(beta)-(cos(alpha)*cos(gamma)))/(sin(alpha)*sin(gamma)));
S3=acos((cos(gamma)-(cos(alpha)*cos(beta)))/(sin(alpha)*sin(beta)));

```

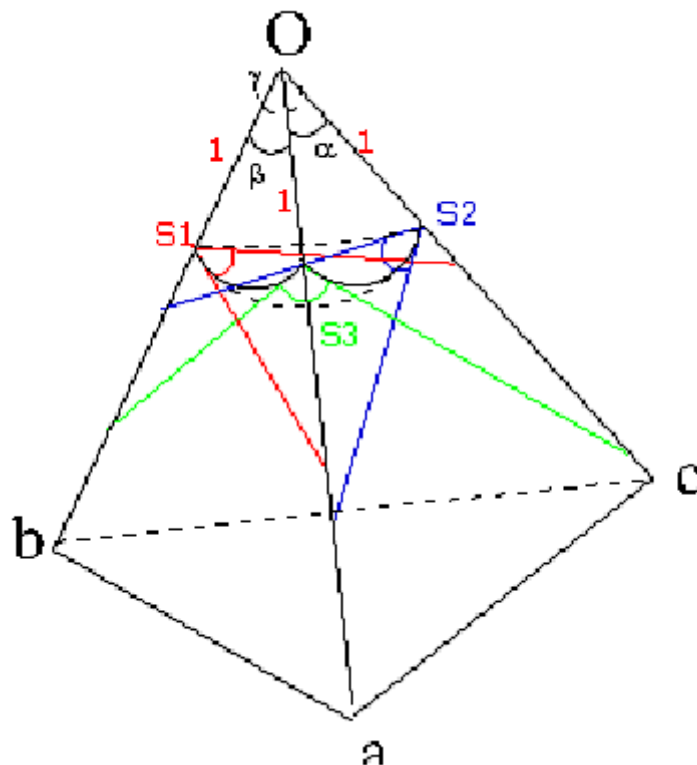
```

Aire=S1+S2+S3-3.14;
printf("L'aireest: %f\n",Aire);
Distorsion=12*Aire;
printf("Distorsionest: %f\n",Distorsion);
system ("PAUSE");
return EXIT_SUCCESS;
}

```

Telle que  $x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2, x_3, y_3, z_3, t_3, x_4, y_4, z_4, t_4$ , sont des coordonnées cartésienne de sommet du tétraèdre  $Oabc$ .

$(O(x_1, y_1, z_1, t_1), a(x_2, y_2, z_2, t_2), b(x_3, y_3, z_3, t_3), c(x_4, y_4, z_4, t_4))$  et  $t_i = f(x_i, y_i, z_i), i = 1,2,3,4$ .



**Fig. 6. 1. Paramètre de calcul**

**Exemple 6.1 :**

Soit le cube ( $C$ ), de centre  $O(0.00,0.00,0.00,1.00)$ , avec

$a(4.013,0.831, -9.083,1.000)$ ,  $b(4.941,0.844, -8.837,1.000)$ ,  $c(3.750, -0.068, -9.293,1.000)$ .

**Donnez les coordonees du premier point separes d'entrer :0.000**

0.000

0.000

1.000

**Donnez les coordonees du deuxieme point separes d'entrer :4.013**

0.831

-9.083

1.000

**Donnez les coordonees du troisieme point separes d'entrer :**

4.941

0.844

-8.837

1.000

**Donnez les coordonees du troisieme point separes d'entrer :3.750**

-0.068

-9.293

1.000

**L'aire est : 0.004227**

**Distorsion est : 0.050724**

### L'algorithme (U.Port) :

```
\begin{verbatim}
  Vertex
  {
float x ;
float y ;
float z ;
floatf ; //field value
  }
Tetra
{
  Vertex u;
Vertex u1 ;
  Vertex u2 ;
  Vertex u3 ;
}
\end{verbatim}
```

Alors nous avons développé deux méthodes, pour calculer les angles dièdres et trièdres.

```
\begin{verbatim}
//computedihedral angle at edge uu1 on tetra t
float GetDihedralAngle(Tetra t, int u, int u1)
{
//getting all tetra vertices
u[] = getTetraVertices(t) ;
//computing all the scalar product uiuj as
      uiuj = (ui.x - u.x) (uj.x - u.x) + (ui.y - u.y) (uj.y - u.y) +
      + (ui.z - u.z) (uj.z - u.z) + (ui.f - u.f) (uj.f - u.f);
//computing all allnorm uiu as
      uiu = sqrt((ui.x - u.x) (ui.x - u.x) + (ui.y - u.y) (ui.y - u.y) +
      + (ui.z - u.z) (ui.z - u.z) + (ui.f - u.f) (ui.f - u.f));
//computing angles at u
cosalpha = prodscal2uu3/(normauu2 normauu3);
cosbeta = prodscal1uu2/(normauu1 normauu2);
      senbeta = sqrt(1 - (cosbeta cosbeta));
cosgamma = prodscal1uu3/(normauu1 normauu3);
      sengamma = sqrt(1 - (cosgamma cosgamma));
//return dihedral angle
return (acos ((cosalpha - (cosbeta cosgamma))/(senbeta sengamma)));
}
\end{verbatim}
\begin{verbatim}
//computing trihedral angle of tetra t at vertex u
```

```

floatGetTrihedralAngle(Tetrat,intu)
{
  //getting all tetravertices
u[]=getTetraVertices(t) ;
  //computing trihedral angle at u as the sum of the three dihedral angles minus pegreco
  return
  (GetDihedralAngle(t, u, u1) + GetDihedralAngle(t, u, u2) +
  +GetDihedralAngle(t, u, u3) - PIGRECO);
}
\end{verbatim}

```

Avec les deux fonctions précédentes, le calcul de la distorsion de sommet et de l'arrête devient très simple

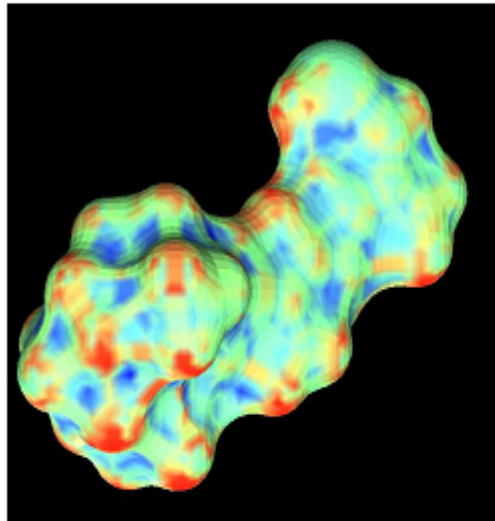
```

\begin{verbatim}
  //compute distorsion at vertex u
floatComputeDistorsion (intu)
{
  //visit all incident tetras
t[]= GetVT(u);
  for each ti in t
  {
    //computing trihedral angle at v on current tetra
    Distorsion += GetTrihedralAngle(ti, u);
  }
  //distorsion at u
  Return (4*PIGRECO - distorsion);
}
\end{verbatim}
\begin{verbatim}
  //compute bond distorsion at edge u1u2
floatComputeBondDistorsion(intu1, int u2)
{
  //visit all incident tetras
t[]= GetET(u1, u2);
  for each ti in t
  {
    //computing dihedral angle at u1u2 on current tetra
    bond_distorsion += GetDihedralAngle(ti, u1, u2);
  }
  //bond distorsion at u1u2
  return (2 PIGRECO - bond_distorsion);
}
\end{verbatim}

```

## 6.2 Expériences :

Nous avons mis en œuvre l'algorithme qui calcule la distorsion discrète pour les surfaces. En conséquence, nous illustrons à la figure 6.1 les propriétés précédentes sur une surface moléculaire. Boutons, des cavités et des lignes de crête sont bien mises en évidence les valeurs maximales et minimales suivantes de la distorsion, qui sont représentées par des couleurs rouge et bleu.

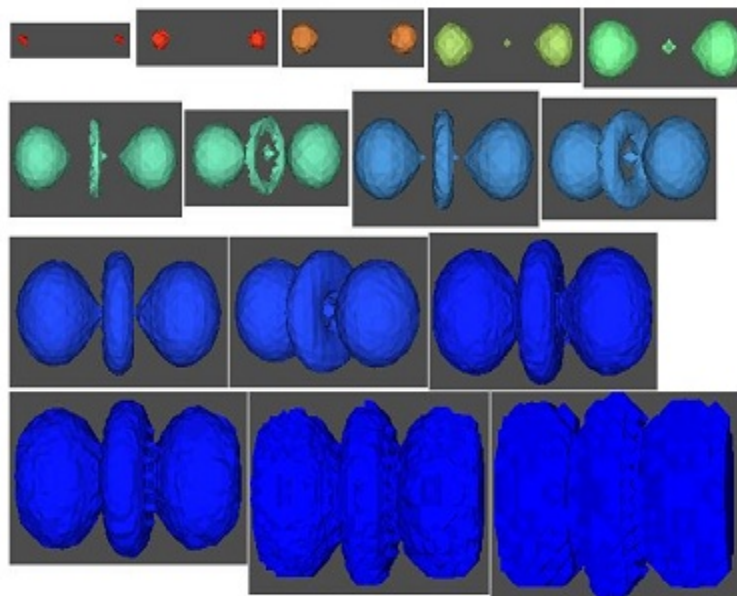


*Figure 6.1. Distorsion pour les surfaces servant à identifier les boutons et les cavités.*

Dans la partie suivante, nous illustrons le comportement de la distorsion autour du sommet pour les hyper-surfaces tétraédriques à 4D représente un champ scalaire 3D. Nous visualisons les iso-surfaces pour le champ scalaire original et le champ de distorsion correspondante. Nous avons également visualisé des tranches planes de l'ensemble des données pour avoir des informations complémentaires sur le comportement des champs scalaires. La gamme de couleurs utilisées pour la visualisation passe du bleu pour les faibles valeurs au rouge pour des valeurs élevées. Le vert est utilisé pour les valeurs moyennes.

Les exemples que nous considérons ici sont liés à la théorie de la fonction de densité (DFT). Nous considérons la fonction de densité d'électrons de la molécule d'hydrogène. Les valeurs de densité d'électrons sont associées à des sommets d'une tétraédrisation d'un espace cubique autour de la molécule. Le comportement de la densité électronique est illustré par la distorsion créée.

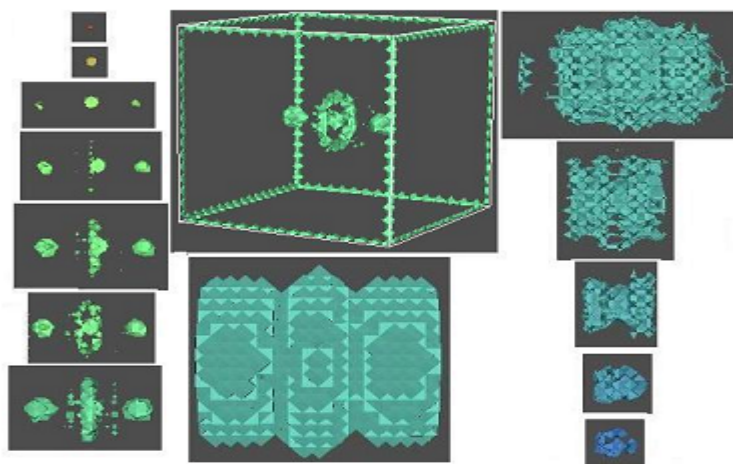
Dans la figure 6.2, nous montrons la densité des électrons dans la molécule d'hydrogène. La densité est large [0; 78]. La représentation que nous montrons est calculée sur une approximation grossière tétraédrique de l'ensemble de données composée de 22065 sommets et 98304 tétraèdres, qui ont été obtenu à partir d'une représentation multi-résolution basée sur une hiérarchie tétraédriquesimbriquée.



*Figure 6.2. Iso-surfaces pour la densité d'électrons de la molécule d'hydrogène pour diminuer les valeurs de champ pour montrer le comportement du champ, la densité, les valeurs sont 75, 70, 60, 50, 40, 30, 30, 20, 20, 10, 10, 5 et 0, de haut en bas, et de gauche à droite*

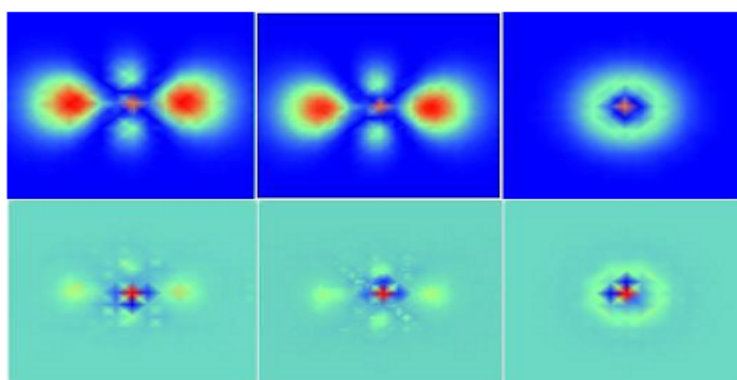
Dans la figure 6.3, nous montrons le comportement de distorsion pour le même ensemble de données grâce à des iso-surfaces de valeurs de distorsion significative.

Notez que les valeurs de distorsion varient de -6,58 à 11,89. Lorsque les valeurs de distorsion sont proches de zéro, une grande partie du domaine cube est remplie avec les iso-surfaces correspondantes.



*Figure 6.3. Iso-surface de distorsion de la densité d'électrons de la molécule d'hydrogène correspondant à la distorsion des valeurs algales à 9,6,4,3,3,1,3,1,0,-0,1,-0,2,-0,4,-2 et -4 à partir de haut en bas et de gauche à droite.*

Dans la figure 6.4, nous montrons trois tranches planes orthogonales des ensembles de données indiquant la densité d'électrons et de la distorsion correspondante. Les tranches planes passent par le centre du cube autour de la molécule. Nous pouvons clairement apprécier de toutes ces images comment la distorsion suit le comportement de densité du champ.



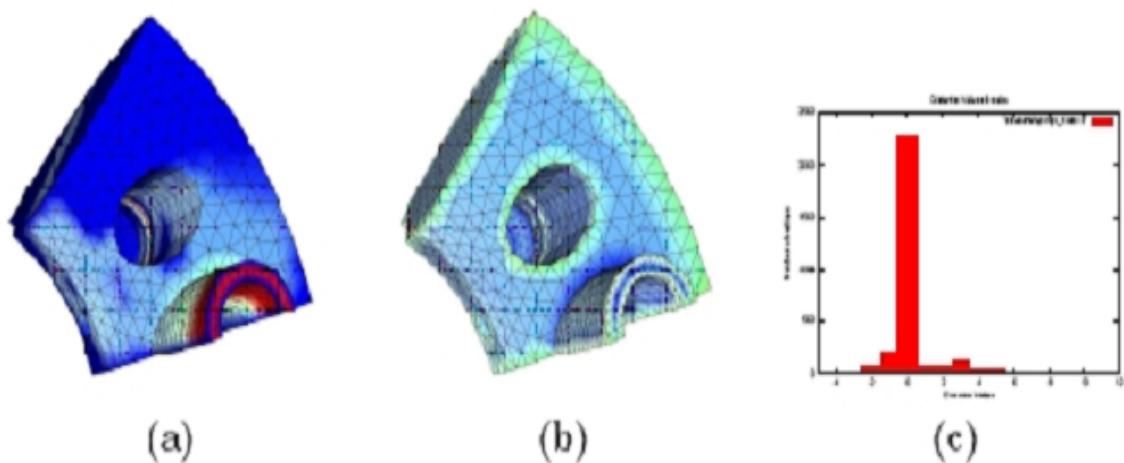
*Figure 6.4. Trois tranches planes orthogonales, passant par le centre du cube entourant la molécule d'hydrogène. De haut en bas: la densité d'électrons et les distorsions correspondantes.*

### 6.3 Résultats obtenus en application

Dans ce paragraphe nous illustrons la notion de distorsion par des exemples réels où les objets contiennent un très grand nombre de sommets. La visualisation de la distorsion s'est faite par un outil de visualisation 3D. Les exemples qui vont suivre sont des objets numérisés et stockés dans une base de données. Pour chaque objet, un champ scalaire est défini sur les sommets d'une triangulation de l'objet.

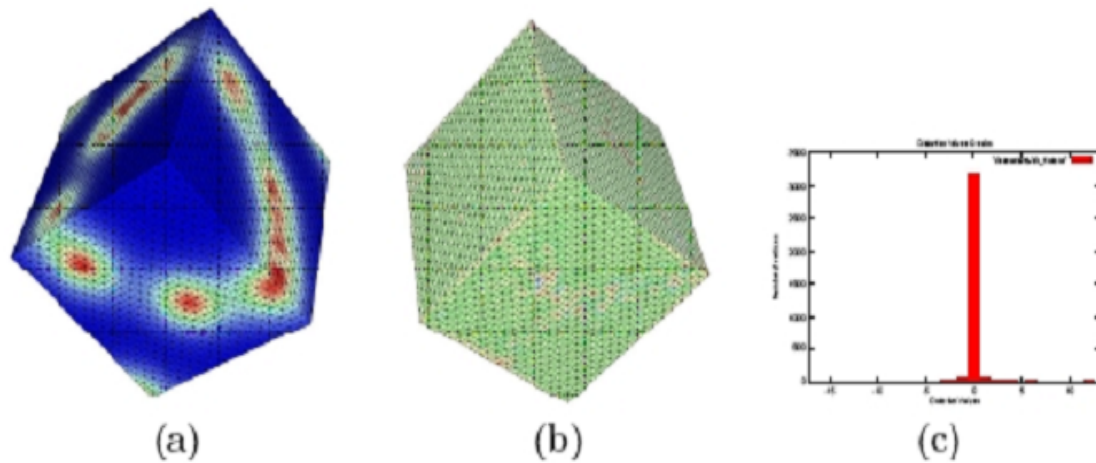
Pour mieux comprendre la visualisation des données, nous représentons par des couleurs les valeurs numériques. Les couleurs varient du jaune pour les valeurs minimales jusqu'au rouge pour les valeurs maximales. Le bleu représente les valeurs moyennes des valeurs.

Dans la figure 6.5, l'objet contient 2896 sommets, et 12936 tétraèdres. Le calcul de la distorsion s'est fait en 130000 cycle de temps machine.



**Figure 6.5** (a) Maille originale (2896 sommets; 12936 tétraèdres);  
(b) Visualisation des valeurs de la distorsion; (c) Distribution des valeurs de la distorsion.

Dans la figure 6.6, l'objet contient 35937 sommets, et 163840 tétraèdres. Le calcul de la distorsion s'est fait en 4140000 cycles de temps machine.



**Figure 6.6: (a) Maille originale (35937 sommets; 163840 tétraèdres); (b) Visualisation des valeurs de la distorsion; (c) Distribution des valeurs de la distorsion.**

## 6.4 Applications Possibles

### Ferromagnétisme et Réactions Chimique

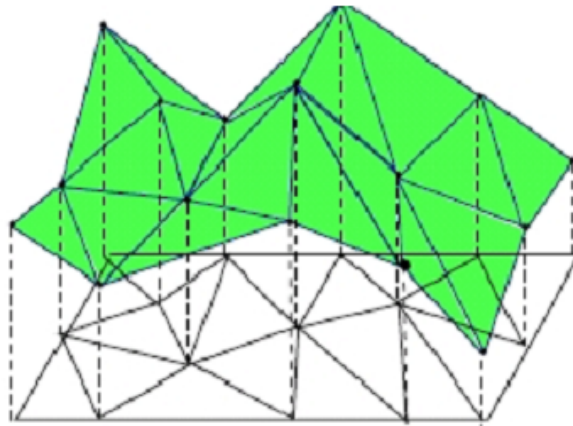
Quand la distorsion n'est pas nulle, un ferromagnétisme peut apparaître. En effet, une distorsion non nulle est une anomalie de l'espace que les atomes recherchent pour optimiser pour avoir une plus petite valeur absolue de distorsion. On croit que la distorsion est positive (c.a.d. l'angle solide total autour d'un point est plus petit que  $4\pi$ ); la molécule essaye de remplir l'espace manquant et réagit avec d'autres matériaux qui peuvent réduire au minimum sa distorsion. Ce phénomène peut apparaître au-dessous de deux aspects différents. Le premier aspect est que le matériau réagit comme un aimant et attire d'autres matériaux qui peuvent réduire au minimum sa distorsion. Dans ce cas-ci on a un ferromagnétisme. On pense que cette propriété explique que quelques alliages de fer et de nickel perdent leur ferromagnétisme si leur structure spatiale est de distorsion nulle. Et d'autres matériaux qui ne sont pas, au commencement, deviennent ferromagnétique une fois groupés dans un alliage sous certaines proportions : comme l'alliage de Heussler (61% de cuivre, 24% de manganèse et 15% d'aluminium). Dans ce cas-ci, la structure spatiale de l'alliage est tordue les matériaux susceptibles d'augmenter la distorsion de la molécule ne sont pas attirés. On pense que les matériaux dont la distorsion est positive sont soit solides ou liquides. En effet, en outre des autres forces dans une molécule, du manque de l'espace dans la substance de la molécule laisse tous ses atomes groupés ensemble et donc forme un solide ou un liquide. Le deuxième aspect est dynamique.

La distorsion change quand un atome est ajouté. Cette opération correspond, en particulier, à une réaction chimique. On conjecture qu'une réaction chimique a lieu pour optimiser la distorsion globale dans les molécules rentrant en réaction. Ce fait est semblable au principe d'énergie minimale. Naturellement l'optimisation résultante dépend fortement de l'environnement et des conditions sous lesquels la réaction se produit (pression, la température, catalyseur, volume, . . .). En outre, le catalyseur provoque une variation de la distorsion. La molécule réagit en augmentant ou en diminuant ses valeurs de distorsion. Les molécules échangent, par conséquent, leurs atomes afin d'optimiser leur distorsion, et les atomes prennent la meilleure position géométrique (ceci correspond au choix d'une triangulation (c.a.d. les liens entre les atomes)). Quand la distorsion est négative, il y a, dans  $R^4$ , un espace supplémentaire encapsulé par la molécule. Dans ce cas-ci, la molécule réagit de telle façon à maximiser sa distorsion pour s'approcher de zéro. Ce fait, peut expliquer le fait que quelques cristaux ont un défaut dans leur structure et certains d'atomes sous certaines conditions. Par exemple, on prend l'exemple du cristal de NiO dioxyde de nickel dont

la structure est un trullis cubique régulier. Ce cristal est formé sous une température de 870%. Quand les réactions sont faites avec apport supplémentaire d'oxygène, le résultat de cristal a un défaut d'atome en nickel, (voir [27]). On interprète, ce manque d'atomes au moyen d'optimisation négative de distorsion dans la structure en cristal.

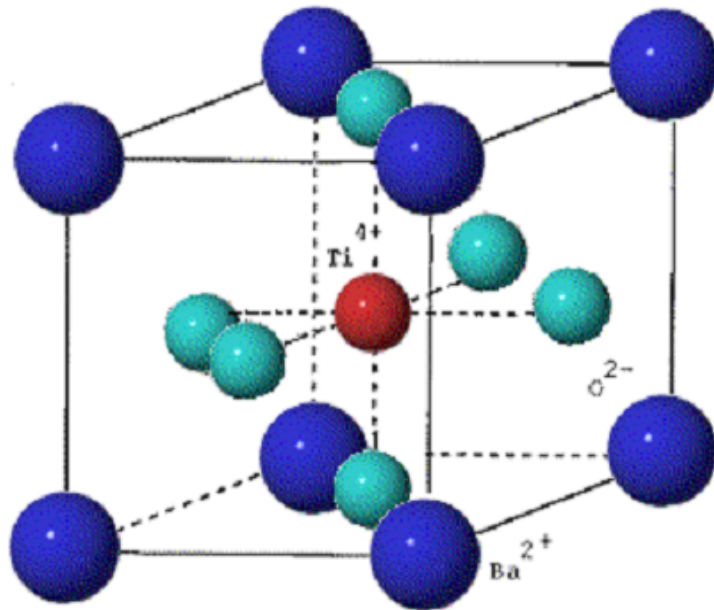
## Ferroélectricité

Si les atomes, dans une molécule, sont de nature différente et ont différentes altitudes dans  $R^4$  (on peut penser à une situation semblable comme sur la Figure 6:7).



*Fig.6.7 Une surface linéaire par morceaux triangulées représentant un champ scalaire 3D discrets sur un domaine de  $R^2$ .*

Le domaine élevé n'est pas un cube dans  $R^4$  et un déséquilibre de charge se tient dans la molécule. En conséquence une polarisation de la molécule peut apparaître. Ceci est connu pour le phénomène de ferroélectricité. Les physiciens expliquent ce phénomène de ferroélectricité par un déplacement du barycentre électrique de la molécule.

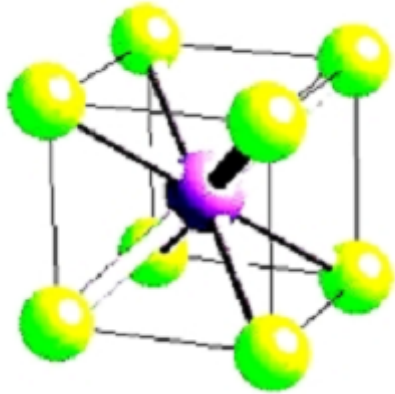


**Fig.6.8 Structure cristalline de titanate de baryum**

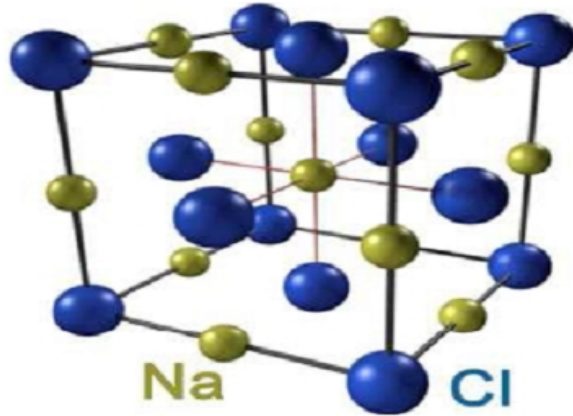
La figure (6.8) représente le cristal de titanate de baryum dont le réseau cubique. Dans cette molécule les atomes de baryum sont situés sur les sommets, les atomes dioxygène sont situés aux centres de faces et les atomes de Titanate sont situés au centre de cube. Sous une température de 120°C, un moment dipolaire apparait bien qu'une absence totale de tout champ extérieur électrique ou magnétique (voir [15]). En outre, l'expansion thermique n'est pas homogène (cas anisotrope).

## Dilatation thermique des matériaux

On considère une molécule d'une forme cubique où les atomes sont distribués sur les sommets et au centre du cube. Une telle distribution existe dans beaucoup de cristaux (par exemple : Le sel *NaCl* et chlorure de césium *CsCl* comme le montre les Figures 6.9 et 6.10), (voir [29]). Le fer et le cuivre ont également une structure cubique. L'augmentation de la température d'atome est homogène si tous les atomes sont identiques, et non-homogène si les atomes sont chimiquement différents. La quantité de la chaleur absorbée par chaque atome est une valeur réelle et correspond à un champ scalaire  $T$ .



*Fig.6.9 Structure de CsCl*



*Fig.6.10 Structure de NaCl*

On suppose que le centre du cube est le centre d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  3-dimensionnel cartésien. Chaque atome a des coordonnées  $(x, y, z)$  dans l'espace. La valeur de la température attachée à chaque atome définit un vecteur  $(x, y, z, t)$  dans  $R^4$ . En conséquence la distance de chaque atome  $A_i$  sur un sommet de l'atome à l'origine  $O$  est :

$$OA_{R^4} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + (t_{A_i} - t_0)^2} \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = OA_{R^3} \quad (6.1)$$

Ceci signifie que la distance de n'importe quel sommet de l'origine augmente. Par conséquent la forme géométrique devient plus grande. Cette propriété correspond à la dilatation thermique bien connue des matériaux. Si tous les atomes sont de la même nature, le théorème implique que la molécule est de distorsion nulle et sa dilatation thermique est homogène (cas isotrope).

Les physiciens, expliquent la dilatation thermique au moyen de vibrations d'atomes dont l'amplitude augmente avec la température. De notre point de vue, en outre de la relation (6.1), on peut donner une explication semblable en utilisant la distorsion. La distorsion est généralement non nulle et dépend des valeurs du champ scalaire. La vibration est provoquée par l'interaction entre les atomes de distorsion positive, avec les atomes dont la distorsion est négative et ceci dans le but de minimiser la valeur absolue de la distorsion totale.

La signe de  $(t_{A_i} - t_0)$  dans l'équation précédente n'a aucune importance car il est élevé au carré. Ceci signifie que si la quantité diminue alors une contraction de la forme globale apparaît (qui est normale) et jusqu'à ce que  $(t_{A_i} - t_0)$  soit nul. Et si cette valeur devient négative, alors une nouvelle expansion va commencer. Ce fait nous ramène à déclarer que

n'importe quel matériel, dont la nature ne change pas avec la variation de la température peut avoir des coefficients d'expansion négatifs, en outre de ses coefficients d'expansion positifs.

On note que les coefficients d'expansion dépendent de la température ambiante et changent de manière significative avec la température. Le coefficient négatif existe déjà pour certains matériaux, comme l'eau dont l'augmentation de volume apparaisse pour un petit intervalle de la température de 0°C à 4°C. Son expansion 0°C le coefficient est  $-50 \cdot 10^{-6}/K$ , (voir [25]). D'autres matériaux ont des coefficients de dilatation négatifs. Par exemple, à la température 100°K, les matériaux suivants ont des coefficients d'expansion négatifs : le magnésium  $-0.2 \cdot 10^{-6}/K$ , le silicium  $-0.4 \cdot 10^{-6}/K$ . A la température précédente d'autres matériaux ont des coefficients d'une expansion très petits (le diamant  $0.05 \cdot 10^{-6}/K$ , l'alumine  $0.6 \cdot 10^{-6}/K$ , carbures de silicium  $0.14 \cdot 10^{-6}/K$ ,...ext). Si on prend plus petites températures ( $< 173^\circ C$ ) ces coefficients deviennent certainement négatifs.

# Conclusion

Nous avons présenté une notion de distorsion pour les variétés tridimensionnelles intégrées dans l'espace euclidien  $4D$ . Cette notion caractérise, comme la courbure d'une surface, la géométrie locale de la variété d'image  $3D$ . Nous avons également montré que la distorsion peut être appliquée pour des surfaces de formes  $3D$  et caractérise les régions concaves et convexes.

Nous pensons que les distorsions peuvent avoir des applications importantes en physique et en chimie pour comprendre certains phénomènes liés à la structure de la matière, et à des réactions chimiques. En effet, le modèle standard de la structure de la matière est un modèle discret  $3D$  suivant les atomes qui sont liés par des liaisons pour former des molécules. De nombreux problèmes existent pour comprendre le mécanisme d'une réaction chimique. La distorsion donne une nouvelle approche éventuellement pour comprendre ces réactions. Nous citons par exemple la dilatation thermique, ferroélectricité de certains alliages, les réactions chimiques, et la diffraction. En effet, la quantité d'énergie absorbée par les différents types d'atomes tout en chauffant une matière est un champ scalaire dont la distorsion peut donner une idée précise sur la question « comment la matière est déformée et dans quelle direction ? ». Ainsi la dilatation thermique, ferroélectricité et ferromagnétisme peut être étudié sous de telles considérations. Nous pensons aussi que les conditions d'expérience suivantes (température, pression, catalyseurs, ...) d'une réaction chimique entre les molécules et les atomes sont disposées à minimiser la distorsion en fonction d'un ou plusieurs champs scalaires liés à l'expérience. Ceci est tout à fait semblable au principe de minimisation de l'énergie. Pour la diffraction, il est bien connu que pour des surfaces planes singulières sont diffractées dans un cône tout en atteignant une singularité de courbure concentrée négative. Le même phénomène peut prendre dans le cas  $3D$  où la déformation est négative.

Dans nos recherches futures, nous allons concentrer sur des applications telles prouvées certaines de nos déclarations précédentes. Des études scientifiques rigoureuses devraient être faites pour valider chaque énoncé. Pour un tel objectif, la collaboration avec différents chercheurs dans différents domaines est nécessaire.

# Bibliografie

- [1]. Akleman, E., Chen, J.: Practical Polygonal Mesh Modeling with Discrete Gaussian-Bonnet Theorem, Proceedings of Geometry, Modeling and Processing 2006, Pittsburg.
- [2]. Alboul, L., Echeverria, G., Rodrigues, M.A.: Discrete Curvatures and Gauss Maps for Polyhedral Surfaces, Workshop on Computational Geometry, the Netherlands, March 9-11, 2005.
- [3]. Borrelli, V., Cazals, F., Morvan, J.-M.: On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures, *Comput. Aided Geom. Des.*, 20(6)2003, 319–341, Elsevier Science Publishers B. V.
- [4]. Berger, M., Gostiaux, B.: *Géométrie Différentielle*, Collection U., 1972.
- [5]. Buchin, M., Giesen, J.: Minimizing the Total Absolute Gaussian Curvature in a Terrain is Hard, *CCCG 2005*: 195-198
- [6]. Chen, X., Schmitt, F.: Intrinsic surface properties from surface triangulation. Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV) (1992) 739–743.
- [7]. Csakany, P., and Wallace, A.M.: Computation of local differential properties on irregular meshes. *IMA Conference on Mathematics of Surfaces (NIPS 2000)*, 19-33.
- [8]. De Berg, M., O. Schwarzkopf, O., van Kreveld, M., Overmars, M.: *Computational Geometry, : algorithms and applications*, Springer-Verag, 1997.
- [9]. Danovaro, E., De Floriani, L., Mesmoudi, M.M.: Topological Analysis and Characterization of Discrete Scalar Fields: "Theoretical Foundation of Computer Vision, Geometry, Morphology and Computational Imaging" Dagstuhl, LNCS 2616 386–402, 2003.
- [10]. De Floriani, L., Mesmoudi, M.M., Port, U., Danovaro, E.: Shape segmentation Algorithms based on curvature. Technical Report DISI, University of Genova, (September 2007).
- [11]. Do Carmo, M.P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey (1976).
- [12]. Edelsbrunner, H., Harer, J., Zomorodian, A.: Hierarchical Morse Complexes for Piecewise Linear 2-Manifolds. *Proceedings 17th ACM Symposium on Computational Geometry (2001)* 70–79.

- [13].Edelsbrunner,H.,Harer, J.,Natarajan, V., Pascucci, V.:Morse-Smale Complexes for PiecewiseLinear 3-Manifolds.Proceedings 19thACMSymposium on Computational Geometry (2003) 361–370.
- [14]. Garimella, R.V., Swartz, B.K.: Curvature Estimation forUnstructuredTriangulations of Surfaces. Los Alamos National Laboratory LA-03-8240 (2003).
- [15].Gatzke, T.D.,Grimm, C.M.: EstimatingCurvature onTriangularMeshes. International Journal on shapeMoedeling, 12(2006), 1–29.
- [16]. Kittel. C, Introduction to solid state physics, Wiley, New York, 1986.
- [17].Lee, M., De Floriani, L., Samet, H.: Constant- time Navigation in Four-Dimensional NestedSimplicialMeshes,ProceedingsShapeModeling International 2004, June 2004, 221–230.
- [18].Magillo, P., Danovaro, E., De Floriani, L., Papaleo, L., Vitali, M.: Extracting Terrain Morphology: A New Algorithm and a Comparative Evaluation, Proceedings of the2nd International Conference on Computer GraphicsTheory and Applications, 8-11 March (2007),Barcelona.
- [19].Mangan, A., Whitaker, R.: Partitioning 3D Surface MeshesUsingWatershed Segmentation. IEEETransaction on Visualization and Computer Graphics,5(4)(1999), 308–321.
- [20].Meek, D.S., Walton, D.J.: On Surface Normal and GaussianCurvature Approximations GivenDatasampledfromasmoothSurface. Computer AidedGeometricDesign 17(2000)521–543.
- [21]. M.M.Mesmoudi.Métriques Plates Singulières et Feuilletages Mesurés surles Surfaces. Tesi di Dottoratodi Ricerca, Prépublication de l’Institut de Recherche Mathématique Avancée, Unité CNRS 01 Strasbourg, 1994/024, 1994.
- [22]. M. M. Mesmoudi, E. Danovaro, L. De Floriani, U. Port. Surface segmentation through concentrated curvature.2007.
- [23]. M. M. Mesmoudi, L. De Floriani, U. Port, A. Anber. DiscreteDistortionof TetrahedralizedShapes in 4D Space. 2008
- [24].Meyer, M.,Desbrun, M., Schroder, P., Barr, A. : Discretedi erential-geometryoperator for triangulated 2-manifolds. In Proceedings of VisMath’02, Berlin, Germany(2002).
- [25]. Morell. R, Tables of physicalchemical constants, National physicallabora-

tory, ([http://www.kayelaby.npl.co.uk/general\\_physics/2\\_3/2\\_3\\_5.html](http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2_3/2_3_5.html)),2007

- [26].Nabih, N. A.: Algebraic error analysis for surface curvatures and segmentation of 3d range images. *Pattern Recognition* 23(1989) 807–817.
- [27]. R. Ouahes, B. Devallez, *Chimie gÈnÈrale*, Publisud, 1988.
- [28].Page, D.L., Koschan, A., Abidi, A.: Perception-based 3D Triangle Mesh Segmentation Using Fast Marching. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Watersheds*,2(2003).
- [29].Polking, J.C.: The area of a spherical triangle, Girard's Theorem. [url:http://math.rice.edu/pcmi/sphere/gos4.html](http://math.rice.edu/pcmi/sphere/gos4.html) (1999).
- [30].Rousseau, J-J., Gibaud, A.: *Cristallographie gomtrique et radiocristallographie*, Dunod edition (2007).
- [31].J. Shewchuk, Tetrahedral Mesh Generation by Delaunay Refinement, *Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry (Minneapolis, Minnesota)*, 86–95, Association for Computing Machinery, June 1998.
- [32].Stokely, E.M., Wu, S.Y.: Surface parametrization and curvature measurement of arbitrary 3-d objects: Five practical methods. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine Intelligence* (1992), 833–839.
- [33].Surazhsky, T., Magid, E., Soldea, O., Elber, G., Rivlin, E.: A comparison of Gaussian and mean curvatures estimation methods on triangular meshes, 1(2003), 739–743.
- [34].Trojanov, M.: *Les Surfaces Euclidiennes a SingularitÈs Coniques*. *L'Enseignement Math'ematique* 32(1986) 79–94.
- [35].Xu, G. : Convergence analysis of a discretization scheme for Gaussian curvature over triangular surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 23(2)(2006)193–207.
- [36].Xu, Z., Xu, G., Sun, J. : Convergence Analysis of Discrete Differential Geometry Operator over Surfaces. *Dept. of Comp. Science, Tsinghua University, Beijing, China*, [www.cc.ac.cn/05researchreport/0505.pdf](http://www.cc.ac.cn/05researchreport/0505.pdf), January 11th(2005).
- [37].Weigle, C., Banks, D.: Complex-valued Contour Meshing, *Proceedings IEEE Visualization 1996*, October (1996)173–180.
- [38].Weigle, C., Banks, D.: Extracting Iso-valued Features in 4-dimensional Scalar Fields, *Proceedings IEEE Visualization 1998*, October (1998) 103–110,

[39].Banks, D.C., Linton, S.A., Stockmeyer, P.K.: CountingCasesin Substitope Algorithms, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1(0)(2003).