



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
People's Democratic Republic of Algeria  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministry of Higher Education and Scientific Research  
جامعة عبد الحميد ابن باديس - مستغانم  
Abdelhamid Ibn Badis University of Mostaganem  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
Faculty of Sciences and Technology  
قسم الهندسة الميكانيكية  
Department of Mechanical Engineering



N° d'ordre : M...../10/2025

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

## Thème

Analyse de la flexion électro-magnéto-élastiques d'une coque à double courbure, basée sur la théorie raffinée de déformation par cisaillement (HSDT)

Présenté par :

BENIDRIS Kaoutar et BERBER Djenette Ines

*Soutenu le 25/06/2025 devant le jury composé de :*

Président	Dr. F.Z. Zaoui	Université de Mostaganem
Examineur	Dr. A. Belhachemi	Université de Mostaganem
Encadreur	Pr. D. Ouinas	Université de Mostaganem
Co-Encadreur	Dr. A. Rachid	Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2024/2025

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# *Résumé*

---

Dans ce travail, nous étudions le comportement magnéto-électro-élastique en flexion de coques à double courbure constituées de deux couches, en nous appuyant sur la théorie HSDT. Les relations cinématiques sont développées à partir d'une théorie expo-sinusoïdale à cinq variables, qui modélise la déformation par cisaillement transverse ainsi que les variations à travers l'épaisseur. La déflexion transverse est décomposée en composantes de flexion, de cisaillement et de déformation d'épaisseur selon cette théorie.

La coque est soumise à des charges mécaniques, électriques et magnétiques dans son plan, prises en compte comme charges externes dans les relations constitutives pour l'analyse statique. Cela induit un déplacement transverse variable le long de la direction d'épaisseur. Le principe des travaux virtuels est utilisé pour établir les équations gouvernantes de la flexion. Les solutions des équations du mouvement sont obtenues via la méthode de Navier, adaptée aux conditions aux limites simplement appuyées.

Une analyse paramétrique est menée pour étudier l'influence du paramètre de porosité ainsi que des potentiels électrique et magnétique appliqués sur la réponse magnéto-électro-élastique en flexion des coques à double courbure.

**Mots-clés :** Flexion magnéto-électro-élastique, Coques à double courbure, HSDT, Effet de porosité, Potentiel électrique, Potentiel magnétique.

# *Abstract*

---

In this work, we study the magneto-electro-elastic bending behavior of two-layer double-curved shells based on the Higher-Order Shear Deformation Theory (HSDT). The kinematic relations are developed using a five-variable expo-sinusoidal theory to model transverse shear deformation and thickness variations. The transverse deflection is decomposed into bending, shear, and thickness deformation components according to this theory.

The shell is subjected to mechanical, electric, and magnetic in-plane loads, which are considered as external forces in the constitutive relations for the static analysis. This induces a transverse displacement varying along the thickness direction. The principle of virtual work is employed to derive the governing bending equations. Solutions to the equations of motion are obtained using Navier's method for simply supported boundary conditions.

A parametric study is conducted to investigate the influence of the porosity parameter, as well as the applied electric and magnetic potentials, on the magneto-electro-elastic bending responses of double-curved shells.

**Key words:** Magneto-electro-elastic bending, Double-curved shells, HSDT, Porosity effect, Electric potential, Magnetic potential.

# ملخص

---

في هذا العمل، ندرس السلوك الانحنائي الكهرومغناطيسي الكهروإلستيك لأغشية ذات انحناء مزدوج مكونة من تطوير العلاقات الحركية بناءً على نظرية أكسبو-جيبّة مكونة HSDT من طبقتين، اعتمادًا على نظرية من خمس متغيرات، والتي تُنمذج التشوه الناتج عن القص العرضي وكذلك التغيرات عبر السُمك. يتم تتعرض الغشاء. تفكيك الانحناء العرضي إلى مكونات انحناء، وقص، وتشوه في السُمك وفقًا لهذه النظرية لأحمال ميكانيكية وكهربائية ومغناطيسية في مستواها، تُؤخذ في الحسبان كأحمال خارجية في العلاقات الدستورية للتحليل الاستاتيكي. يؤدي ذلك إلى إزاحة عرضية متغيرة على طول اتجاه السُمك. يُستخدم مبدأ الأشغال الافتراضية لوضع المعادلات الحاكمة للانحناء. تُحل معادلات الحركة باستخدام طريقة نافبي، المناسبة لشروط الحدود المدعمة ببساطة.

تم إجراء تحليل بارامتري لدراسة تأثير معامل المسامية بالإضافة إلى الجهود الكهربائية والمغناطيسية المطبقة على الاستجابة الكهرومغناطيسية الكهروإلستكية في انحناء الأغشية ذات الانحناء المزدوج.

الكلمات المفتاحية ، تأثير HSDT، الانحناء الكهرومغناطيسي الكهروإلستيك، الأغشية ذات الانحناء المزدوج، المسامية، الجهد الكهربائي، الجهد المغناطيسي



# *Remerciement*

En premier lieu, nous tenons à remercier notre Dieu, qui nous a donné la force et la volonté pour accomplir ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à notre encadreur monsieur le professeur **Djamel Ouinas**, directeur du mémoire, pour son suivi, ses conseils judicieux et ses discussions qui nous ont beaucoup aidés au cours de nos recherches.

Nous tenons à remercier avec la plus grande gratitude Madame **F. Z. Zaoui**, Docteur à l'université de Mostaganem, de l'honneur qu'elle nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nous tenons également à présenter nos remerciements à Madame **A. Belhachemi**, Docteur à l'Université de Mostaganem, d'avoir accepté d'être examinatrice et membres de ce jury.

Nous tenons à remercier sincèrement Monsieur **A. Rachid**, Docteur à l'Université de Mostaganem, pour l'honneur qu'il nous fait en Co-encadrant ce mémoire.

Nos derniers remerciements et ce ne sont pas les moindres, vont à tous ceux qui ont participé de près ou de loin pour l'aboutissement de ce travail.

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail,

À **ma mère**, pour son soutien, ses encouragements et ses sacrifices,  
qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

À **mon père** pour l'intérêt qu'il a porté à mes études durant tout mon  
parcours.

À mes sœurs qui se sont montrés patients avec moi et qui m'ont aidé de  
mieux qu'ils peuvent « **Batoul, Sarah et Ines** ».

À mes nièces « **Rahaf, Nada, Wissal et Meryem** » qui ont toujours  
su dessiner le sourire sur mon visage

À mes frères « **Kamza et mon jumeau Walid** »

À mes beaux-frères « **Amine et Oussama** »

À **ma grande famille**

À tous ceux qui aiment me voir réussir

Je ne saurai terminer sans citer ma binôme et complice précieuse  
**Djenette**, merci d'avoir supporté mes crises et partagé mes éclats de  
rire... et survécu à mes moments de folie douce.

Je t'aime **My Sheyla !!**

**Kaoutar**

# Dédicace

Je dédie ce mémoire :

À *meilleur des pères* et à *ma très chère maman* qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui. Que dieu les protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.

À mes frères *Abderrahman* et *Mohamed el Amine* que dieu vous donne santé, bonheur et réussite

À ma sœur *Aya*, à qui je souhaite un avenir radieux plein de réussite, je t'aime !

À toute *ma famille*

À ma binôme et ma copine *Kacoutar*, celles avec qui j'ai passé des moments de stress et de folie,

*Je t'aime Ma Farfelue !!*

À tous ceux qui me sont chers, aux personnes qui m'ont encouragé de près ou de loin.

*Djenette*

# *Sommaire*

---

- **Résumé**
- **Abstract**
- **ملخص**
- **Table des Matières**
- **Liste des Tableaux**
- **Liste des Figures**
- **Liste des symboles**
- **Liste des abréviations**
- **Introduction générale**
- **Chapitre I : Généralités sur les matériaux**
- **Chapitre II : Analyse de la flexion électro-magnéto-élastiques d'une coque à double courbure**
- **Conclusion générale**
- **Références bibliographiques**

# Table des matières

---

- Introduction générale.....1

## Chapitre I

---

### Généralités sur les matériaux

I.	Introduction.....	5
I. 1.	Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM.....	5
I. 2.	Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM.....	6
I. 3.	Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d'une structure E-FGM.....	7
I. 4.	Phénomène piézoélectrique.....	8
I. 5.	Mise en équations.....	9
I. 6.	Éléments de contexte sur les capteurs magnétiques.....	11
I. 7.	Hétéro-structures-magnéto-électriques.....	12
I. 8.	Matériaux.....	13
I. 9.	Propriétés.....	13
I. 10.	Limites.....	14
	I.10.1. Limite en température	
	I.10.2. Limite en tension	
	I.10.3. Limite en pression	
I. 11.	Applications.....	14

## Chapitre II

---

### Analyse de la flexion électro-magnéto-élastiques d'une coque à double courbure

II.	Introduction.....	16
II.1	Description des coques à double courbure poreuses FG.....	18
II.2	Formulations.....	18
II.3	Résultats et discussions.....	28
II.4	Validation du modèle mathématique.....	29
II.5	Evolution de la déflexion dans les structures sous l'effet la variation du potentiel électrique $\psi_0$ .....	33
II.6	Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ dans les structures.....	34
II.7	Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_x$ .....	35
II.8	Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_x$ .....	36

II.9	Effet du rapport R/a sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_x$ .....	37
II.10	Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ dans les structures.....	39
II.11	Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_y$ .....	39
II.12	Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_y$ .....	40
II.13	Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ .....	42
II.14	Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte transverse $\bar{\sigma}_z$ dans les structures.....	43
II.15	Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_z$ .....	44
II.16	Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_z$ .....	45
II.17	Effet du rapport géométrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_z$ .....	46
II.18	Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ dans les structures.....	47
II.19	Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ .....	49
II.20	Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$ .....	51
II.21	Effet du rapport géométrique sur la variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xz}$ .....	52
II.22	Effet de la porosité sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$ .....	53
II.23	Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$ .....	54
II.24	Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$ .....	55
II.25	Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$ dans les structures.....	58
II.26	Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$ .....	59
II.27	Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$ .....	61
II.28	Effet du rapport géométrique sur la variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xy}$ .....	62
II.29	Evolution de la déflexion dans les structures sous l'effet la variation du potentiel magnétique $\phi_0$ .....	63
	▪ Conclusion générale.....	66

# *Liste des tableaux*

---

## Chapitre I

---

<b>Tableau I.1.</b> Caractéristiques de certains matériaux utilisés pour piézoélectricité.....	13
<b>Tableau I.2.</b> Variation de longueur d'un barreau de PZT de 1 centimètre soumis à une tension de 100V.....	14

## Chapitre II

---

<b>Tableau.II.a.</b> Comparaison des déflexions et les contraintes non dimensionnels d'une plaque carrée en matériau céramique ( $Al_2O_3$ ) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale ( $a=b=10h$ ) .....	29
<b>Tableau.II.b.</b> Comparaison des déflexions et les contraintes non dimensionnels d'une plaque carrée en matériau métallique (Al) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale ( $a=b=10h$ ) .....	31

# Liste des figures

---

## Chapitre I

---

<b>Figure.I.1.</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	5
<b>Figure.I.2.</b> Variation du module d'élasticité dans une plaque P-FGM.....	6
<b>Figure.I.3.</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	6
<b>Figure.I.4.</b> Variation du module d'élasticité dans une plaque S-FGM.....	7
<b>Figure.I.5.</b> Variation de module de Young dans une plaque E-FGM.....	8
<b>Figure.I.6.</b> Effet piézoélectrique direct.....	8
<b>Figure.I.7.</b> Effet piézoélectrique indirect.....	8
<b>Figure.I.8.</b> Schéma de principe d'un transducteur piézoélectrique.....	9
<b>Figure.I.9.</b> Nomenclature des axes.....	10
<b>Figure.I.10.</b> Technologies des capteurs de champ magnétique : applications, détectabilité, gamme de mesure dynamique.....	12
<b>Figure.I.11.</b> Diagramme de Venn montrant la multifonctionnalité des matériaux utilisés dans les hétérostructures piézo-électro-magnéto-élastiques.....	13

## Chapitre II

---

<b>Figure.II.1.</b> Schéma de la coque poreuse FG avec une seule couche PFRC.....	18
<b>Figure.II.2.</b> Déflexion centrale adimensionnelle de la coque non poreuse en fonction des différents paramètres a) Effet de $\psi_0$ sur la déflexion, b) Effet de $\phi_0$ avec $\psi_0 = 0$ , c) Effet de $\psi_0$ avec $\phi_0 = 0$ .....	34
<b>Figure.II.3.</b> Déflexion centrale adimensionnelle de la coque poreuse en fonction des différents paramètres a) Effet de $\psi_0$ sur la déflexion, b) Effet de $\phi_0$ avec $\psi_0 = 0$ , c) Effet de $\psi_0$ avec $\phi_0 = 0$ .....	34
<b>Figure.II.4.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs du potentiel magnétique $\phi_0 = 0.02$ .....	35
<b>Figure.II.5.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique $\phi_0$ La porosité $\xi = 0.1$ et $p=4$ .....	36
<b>Figure.II.6.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs du potentiel électrique. La porosité $\xi = 0.1$ et $p=4$ .....	37
<b>Figure.II.7.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs du rapport géométrique $R/a$ . La porosité $\xi = 0.1$ et $p=4$ .....	38
<b>Figure.II.8.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de porosité.....	39

<b>Figure.II.9.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique $\phi_0$ La porosité $\xi = 0.1$ et $p=4$ .....	40
<b>Figure.II.10.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique $\psi_0$ .....	41
<b>Figure.II.11.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques $R/a$ .....	42
<b>Figure.II.12.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\xi$ ).....	43
<b>Figure.II.13.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique $\psi_0$ .....	44
<b>Figure.II.14.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique $\phi_0$ .....	46
<b>Figure.II.15.</b> Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques $R/a$ .....	47
<b>Figure.II.16.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\xi$ ).....	48
<b>Figure.II.17.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique $\psi_0$ .....	50
<b>Figure.II.18.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique $\phi_0$ .....	51
<b>Figure.II.19.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques $R/a$ .....	53
<b>Figure.II.20.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\xi$ ).....	54
<b>Figure.II.21.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique $\psi_0$ .....	55
<b>Figure.II.22.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique $\phi_0$ .....	56
<b>Figure.II.23.</b> Variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques $R/a$ .....	57
<b>Figure.II.24.</b> Variation de la contrainte $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\xi$ ).....	59
<b>Figure.II.25.</b> Variation de la contrainte $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique $\psi_0$ .....	60
<b>Figure.II.26.</b> Variation de la contrainte $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique $\phi_0$ .....	61
<b>Figure.II.27.</b> Variation de la contrainte $\bar{\sigma}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une structure en FGM pour différents rapports $R/a$ .....	63
<b>Figure.II.28.</b> Déflexion centrale adimensionnelle de la coque FGM ( $p=1$ ) en fonction des différents paramètres a) Effet de $\phi_0$ sur la déflexion $\xi = 0$ , b) Effet de $\phi_0$ sur la déflexion $\xi = 0.1$ .....	63
<b>Figure.II.29.</b> Déflexion centrale adimensionnelle de la coque FGM ( $p=4$ ) en fonction des différents paramètres a) Effet de $\phi_0$ sur la déflexion $\xi = 0$ , b) Effet de $\phi_0$ sur la déflexion $\xi = 0.1$ .....	64

# *Liste des symboles*

---

$x$	Coordonnées axiales dans le plan horizontal de la plaque
$y$	Coordonnées axiales dans le plan horizontal de la plaque
$z$	Coordonnée axiale dans le plan transversale et verticale de la plaque
$(x, y, \theta)$	Le plan médian de la plaque
$t$	De temps
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$k$	L'indice de puissance (l'indice matérielle), Paramètre du matériau (Exposant de la loi du la fraction volumique)
$E(z)$	Module de Young en fonction de « $z$ »
$V(z)$	Fraction volumique
$V_c$	La fraction volumique du matériau céramique par la loi de puissance
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « $z$ »
$u, v, w$	Les déplacements selon les directions $x, y$ et $z$ , respectivement.
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\partial$	Dérivée partielle
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse), fonction de forme
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$
$f''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Les rotations autour des axes $x, y$ et $z$ ,
$\varphi$	Une composante supplémentaire de déplacement transversal, prend en compte l'effet de contrainte normale (effet d'étirement),
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « $z$ » dans le plan transversale
$\sigma_x, \sigma_y$	Contraintes axiales dans le plan horizontal de la plaque
$\sigma_z$	La contrainte normale transversale
$\tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction $x, y$ et $z$
$\gamma_{xy}$	Déformations dans le plan
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta$	Champ virtuel
$\delta U$	Travail virtuel intérieur = L'énergie de déformation
$A$	La section
$V$	Le volume
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux = les résultantes de contraintes

$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion = les résultantes de contraintes
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse = les résultantes de contraintes
$S_{yz}^s, S_{xz}^s$	Effort de cisaillement = les résultantes de contraintes
$\delta V$	Le travail effectué par des charges externes Travail virtuel extérieur
$q$	Force extérieure (N) charge transversale
$\delta K$	L'énergie cinétique
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \phi$	Champ virtuel de déplacement
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$Q_{mn}$	Un coefficient donné pour deux charges typiques
$T(x, y, z)$	Chargement thermique (K)
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{F\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice

# *Liste des abréviations*

---

<b>FGM</b>	Matériaux Fonctionnellement Graduée
<b>CPT</b>	Théorie Classique des Plaques
<b>FSDT</b>	Théories de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre
<b>TSDT</b>	Théories de la Déformation de Cisaillement de troisième Ordre
<b>HSDT</b>	Théories de la Déformation de Cisaillement D'ordre Élevé
<b>SSDT</b>	Théories de la Déformation de Cisaillement Sinusoïdale
<b>2D</b>	Deux dimensionnelles
<b>Quasi-3D</b>	Quasi Trois dimensionnelles
<b>3D</b>	Trois dimensionnelles
$\xi$	Porosité
$\phi_0$	Potentiel magnétique
$\psi_0$	Potentiel électrique
<b>PFRC</b>	Piézo-ferroic reinforced ceramic-composite

The background of the page is filled with various mechanical gears and parts, rendered in a detailed, engraved style. The gears are scattered across the page, with some showing teeth and others showing internal structures like spokes or hubs. The overall aesthetic is technical and industrial.

# *Introduction Générale*

# *Introduction générale*

---

Des théories de déformation par cisaillement ont été développées par divers chercheurs afin de couvrir une large gamme de plaques et de coques pour une modélisation plus précise des structures. De nombreux chercheurs ont proposé de nouvelles théories de déformation par cisaillement dans le but de mieux prendre en compte les contraintes et les déformations de cisaillement transverse. En outre, certaines théories avancées intègrent également la déformation selon l'épaisseur, permettant ainsi de modéliser la variation du déplacement transversal le long de la direction de l'épaisseur à l'aide de polynômes d'ordre élevé [1-6].

Des théories de déformation par cisaillement et normale d'ordre supérieur ont été développées par divers chercheurs afin d'améliorer la précision des résultats obtenus pour différentes structures. Jha et al. [7] ont étudié l'application d'une théorie de déformation par cisaillement et normale d'ordre supérieur à l'analyse des vibrations libres de plaques rectangulaires à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM), en utilisant le principe de Hamilton. La procédure de résolution a été élaborée à l'aide de la technique de Navier. Les résultats numériques ont été présentés en fonction de divers paramètres significatifs, tels que la variation des propriétés des matériaux, les rapports d'aspect et les rapports d'épaisseur. Zaoui et al. [8,9] ont étudié le flambement et les vibrations libres de plaques FGM à l'aide d'une théorie efficace et simple de déformation par cisaillement et normale d'ordre supérieur. Ils ont décomposé les déplacements transverses en composantes de flexion, de cisaillement et d'étirement en épaisseur. Une variation hyperbolique du déplacement transverse le long de l'épaisseur a été utilisée.

L'analyse du flambement, du flambement localisé et des vibrations libres des plaques composites stratifiées a été étudiée par Adim et al. [10] sur la base d'une théorie de déformation par cisaillement hyperbolique raffinée. Cette théorie a été proposée afin de satisfaire l'annulation des contraintes de cisaillement en surface et de capturer correctement leur variation le long de l'épaisseur. La réponse au flambement d'une plaque carrée en matériau composite stratifié comportant une entaille elliptique a été étudiée par Ouinas et Achour [11] à l'aide de la méthode des éléments finis. Ghumare et Sayyad [12] ont développé une théorie de cinquième ordre de déformation par cisaillement et normale pour l'analyse du flambement et de la flexion de poutres FGM, en utilisant des fonctions de forme polynomiales. Zia et al. [13] ont utilisé une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse statique et dynamique de poutres composites encastées, en étudiant l'influence de diverses théories (exponentielle, trigonométrique, hyperbolique) sur la flèche et la fréquence. Ils ont conclu que la théorie exponentielle fournit des résultats plus précis. Ghugal et Gajbhiye [14] ont utilisé une théorie de cinquième ordre pour l'analyse statique de plaques isotropes simplement appuyées, tenant compte des déformations de cisaillement et normales. Les équations de comportement ont été dérivées à partir du principe des travaux virtuels, et les résultats numériques ont été présentés selon les paramètres géométriques. Belkhdja et al. [15-20] ont présenté des fonctions de forme polynomiales, hyperboliques et exponentielles, ainsi que des fonctions

combinant polynômes et trigonométrie. Carrera et al. [21] ont étudié l'effet de l'étirement en épaisseur sur l'analyse des plaques et coques FGM à l'aide de la formulation unifiée de Carrera. Les résultats ont été comparés à d'autres théories incluant différentes variations du déplacement transverse le long de l'épaisseur. Zaoui et al. [22] ont étudié l'analyse statique de plaques FGM sur la base d'une théorie trigonométrique d'ordre supérieur prenant en compte l'étirement d'épaisseur. Le principe des travaux virtuels a permis d'obtenir les équations de comportement et les conditions aux limites. Les coques à double courbure sont couramment utilisées en génie mécanique, aérospatial et civil, mais restent peu étudiées. Rachid et al. [23] ont développé une nouvelle théorie de coque à double courbure, intégrant les effets de cisaillement transverse sans facteur de correction. La théorie suppose une variation parabolique du déplacement transverse dans l'épaisseur. Sa pertinence a été confirmée par comparaison avec d'autres modèles d'ordre inférieur, supérieur et avec les résultats 3D. La continuité du même modèle a été validé en présence de l'effet thermique pour différentes lois de températures, linéaire et non linéaire [24]. Belhachemi et al. [25] ont proposé une nouvelle théorie basée sur quatre inconnues pour examiner le comportement en flexion de coques à double courbure en matériau à gradient de propriétés (FGM), soumises à des pressions uniformes et sinusoïdales. L'analyse s'appuie sur des théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur bidimensionnelles (2D) et quasi tridimensionnelles (quasi-3D), intégrant un nouveau modèle de champ de déplacement d'ordre élevé. L'efficacité du modèle développé est évaluée par comparaison de ses performances dans la simulation du comportement en flexion de plaques, de cylindres, de sphères et d'ellipses avec les résultats de la littérature [23]. Monge et al. [26] ont effectué une analyse statique de coques composites stratifiées à double courbure, soumises à diverses charges mécaniques, à l'aide de théories cinématiques raffinées. Ils ont montré que l'introduction de termes non-polynomiaux permet une meilleure prédiction de la distribution des contraintes dans l'épaisseur. Tornabene et al. [27] ont proposé une procédure de récupération des contraintes et déformations pour des coques à double courbure avec rayons variables, en s'appuyant sur une formulation d'ordre supérieur et une approche monocouche équivalente. Dash et al. [28] ont étudié l'analyse vibratoire de panneaux sandwich à double courbure via une formulation d'éléments finis d'ordre supérieur et le principe de Hamilton.

Les matériaux piézoélectriques et piézo-magnétiques sont utilisés dans les systèmes électro-magnéto-mécaniques et les systèmes de contrôle pour effectuer un travail défini, mesurer et contrôler des grandeurs physiques ou réduire des amplitudes vibratoires. Une revue de littérature sur l'analyse magnéto-électro-élastique des structures est présentée pour justifier l'utilisation de ces matériaux. Ansari et al. [29] ont étudié l'effet des champs magnéto-électro-thermo-élastiques sur l'analyse vibratoire non linéaire de poutres avec non-linéarités géométriques. Ke et al. [30] ont utilisé la théorie des coques de Love pour l'analyse de coques cylindriques FGM magnéto-électro-élastiques reposant sur une fondation élastique, selon la théorie non locale. Les effets de divers paramètres ont été étudiés sur les fréquences propres.

De manière analogue à l'effet électro-flexion (FE), l'effet magnéto-flexion (FM) désigne le phénomène de couplage entre les gradients de déformation et le champ magnétique induit qui en résulte. Ce phénomène présente un fort potentiel pour des applications dans les nano-capteurs et les actionneurs. Momeni-Khabisi et al. [31] ont analysé le flambement de bandes nano-plaques piézo-magnétiques en tenant compte de l'effet FM, en utilisant la théorie des gradients de déformation non locale (NSGT) et la théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (FSDT). Zhang et al.

[32] ont étudié le comportement en flexion de nano-poutres piézo-magnétiques en présence de l'effet FM à l'aide de la théorie des gradients de déformation (SGT), de la théorie des poutres de Timoshenko et de la solution de Navier. Malikan et al. [33,34] ont examiné les phénomènes non linéaires de flexion et de flambement dans les nano-poutres piézo-magnétiques, en intégrant l'effet FM, à l'aide de la NSGT, de la théorie d'Euler-Bernoulli et de la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQM). Pour les matériaux magnéto-électro-élastiques (MEE), les effets FE et FM (désignés collectivement sous le terme d'effet FME) doivent être pris en compte. Malheureusement, les travaux de recherche existants dans ce domaine demeurent relativement limités. Momeni-Khabisi et al. [35] ont étudié les propriétés de flambement non linéaire de nanoplaques MEE en intégrant l'effet FME via la NSGT et la FSDT. Xu et al. [36] ont analysé la flexion non linéaire de nanoplaques MEE en s'appuyant sur la NSGT, la FSDT et la méthode de Galerkin, tout en considérant l'effet FME. On constate une nette rareté des recherches consacrées à la dynamique non linéaire des structures en matériaux MEE, notamment en ce qui concerne l'influence de l'effet FME.

La revue de littérature, centrée sur les théories de cisaillement et de déformation d'épaisseur d'ordre supérieur, les théories à effets d'échelle, ainsi que les problèmes magnéto-électro-élastiques, montre que peu d'étude traite l'application d'une théorie de cisaillement et d'étirement en épaisseur d'ordre supérieur à l'analyse magnéto-électro-élastique de coques à double courbure. L'objectif principal de ce mémoire est d'introduire la déformation en épaisseur dans les relations cinématiques de la coque et d'examiner son effet sur le déplacement transversal total. Une analyse paramétrique est menée afin d'étudier l'influence du paramètre géométrique, des potentiels électrique et magnétique appliqués, sur les résultats de flexion magnéto-électro-élastiques de coques à double courbure.

The background features a complex, layered design. It includes a network of interconnected nodes and lines, a grid of hexagonal shapes, and several interlocking gears of various sizes and styles, some solid and some outlined. The overall aesthetic is technical and scientific.

# ***Chapitre I***

## ***Généralités sur les matériaux***

### I.1. Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude des différentes théories de modélisation ainsi qu'à la caractérisation des propriétés matérielles des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM). Comme présenté dans le chapitre 1, l'utilisation croissante des matériaux FGM dans divers secteurs de l'ingénierie s'explique par les avantages qu'ils offrent en termes de performance et de fiabilité. Leur structure à gradient de propriétés permet d'apporter des solutions technologiques innovantes, en particulier dans des environnements soumis à des conditions de chargement sévères nécessitant des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées. La modélisation précise de ces structures requiert l'utilisation de théories avancées, notamment des théories d'ordre supérieur capables de prendre en compte les effets de cisaillement transverse. Ainsi, la première partie de ce chapitre sur les différents modèles utilisés pour décrire la distribution spatiale des propriétés des matériaux FGM, en particulier en fonction de la direction de l'épaisseur.

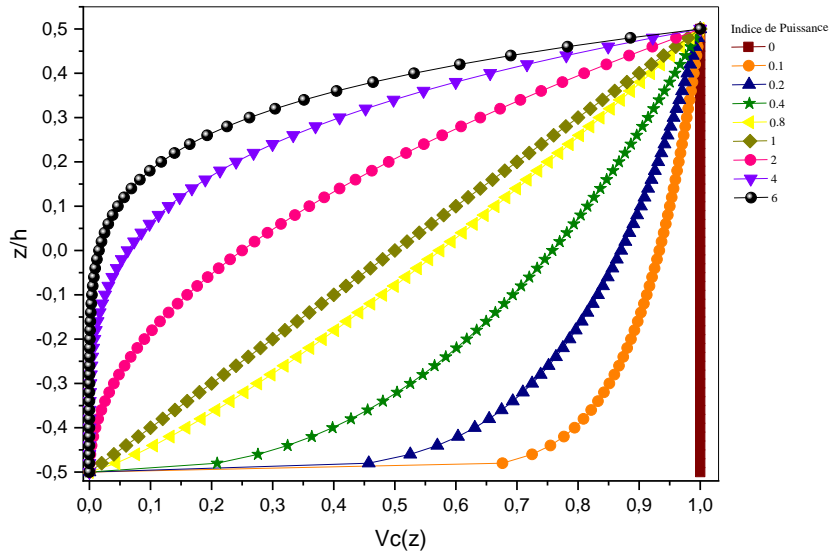
### I.2. Loi de mélange en puissance ou propriété matérielle d'une structure P-FGM

La fraction volumique de la FGM correspond à une fonction de loi de puissance :

$$V(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad \text{I.1}$$

Où  $p$  est le paramètre matériel et  $h$  l'épaisseur de la plaque. Après avoir défini la fraction volumique locale  $V(z)$ , les propriétés matérielles d'une P-FGM peuvent être déterminées par la loi du mélange exprimée par l'équation (I.2) [37, 38] :

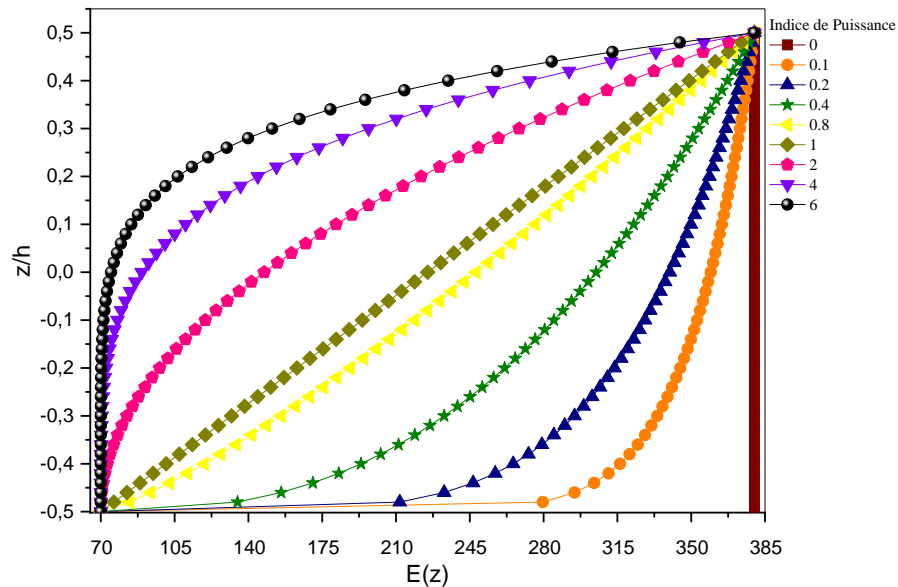
$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - (E_c + E_m) \frac{\xi}{2} \quad \text{I.2}$$



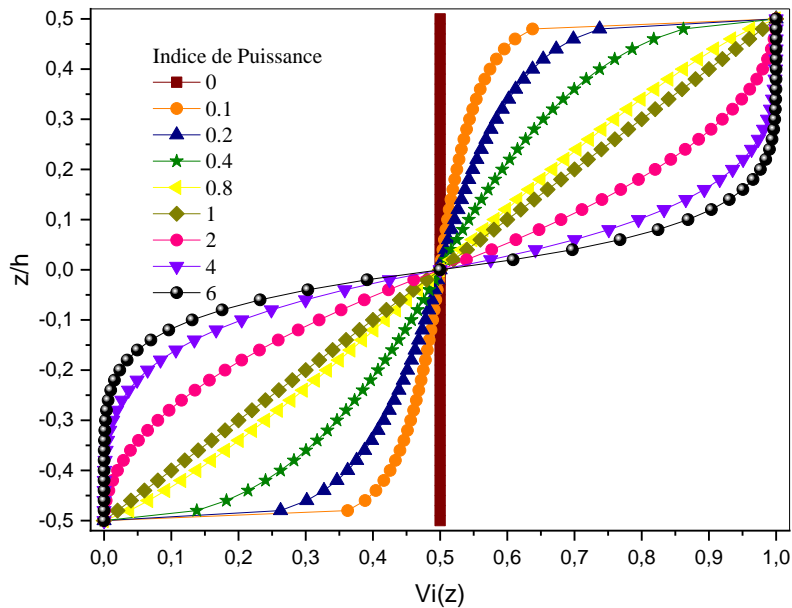
**Fig. I.1.** Variation de la fraction volumique dans une plaque P- FGM.

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = h/2$ ) et supérieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque de FGM. La variation du module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans la Figure I.1, ce qui montre que le module d'Young change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$  et augmente rapidement près de la surface

supérieure pour  $p < 1$  et  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) est la fraction volumique de porosité. Les propriétés mécaniques parfaites de la coque FGM peuvent être obtenues en considérant  $\xi = 0$ . La variation du module de la plaque FGM est montrée sur la Figure I.2.



**Fig. I.2.** Variation du module d'élasticité dans une plaque P-FGM.



**Fig. I.3.** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.3. Loi de mélange sigmoïde ou propriété matérielle d'une structure S-FGM

Les variations des propriétés mécaniques et physiques des matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont couramment modélisées à l'aide de la loi de puissance, donnant naissance à la classe des P-FGM. Toutefois, dans de nombreux cas, cette distribution engendre des concentrations de contraintes marquées à proximité des interfaces, notamment dans les zones où les propriétés changent rapidement, malgré la continuité du matériau. Pour remédier à cette limitation, Chung et Chi [39] ont introduit un nouveau modèle de distribution, dit S-FGM, basé sur une combinaison de deux fonctions de loi de puissance. Cette approche permet de représenter une transition plus progressive des

propriétés à travers l'épaisseur, réduisant ainsi les pics de contraintes localisés. Les expressions mathématiques définissant cette fraction volumique sigmoïde sont données par les relations I.3 et I.4.

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.3}$$

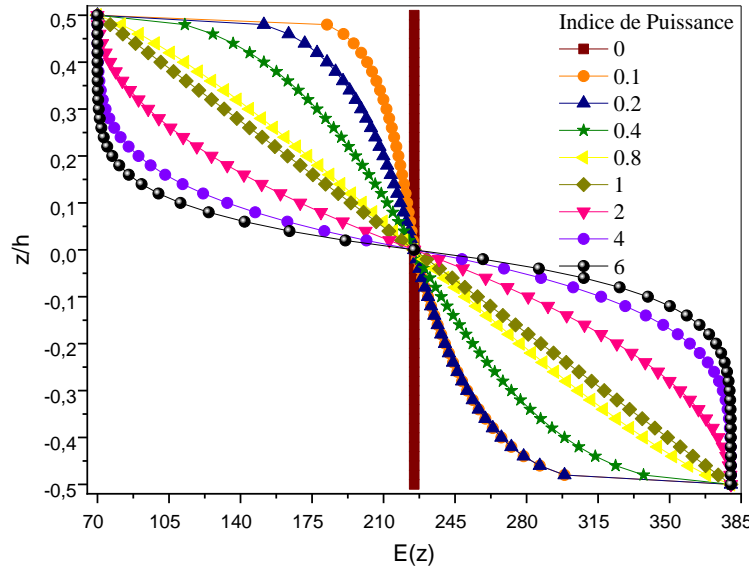
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.4}$$

En appliquant la loi du mélange, le module de Young de la FGM-S peut être calculé par :

$$E_1(z) = E_c V_1(z) + (1 - V_1(z)) E_m \quad \text{I.5}$$

$$E_2(z) = E_c V_2(z) + (1 - V_2(z)) E_m \quad \text{I.6}$$

Les Figures I.3 et I.4 présentent la variation de la fraction volumique et le module d'élasticité des répartitions sigmoïdes définie par les équations (I.5) et (I.6). Ainsi, cette plaque FGM est appelée plaque S-FGM.



**Figure I.4.** Variation du module d'élasticité dans une plaque S-FGM.

#### I.4. Loi de mélange exponentielle ou propriété matérielle d'une structure E-FGM

Cette loi s'emploie en utilisant la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des FGM donnée par la relation I.7.

$$E(z) = E_m \exp \left[ B \left( z + \frac{h}{2} \right) \right] \quad \text{avec} \quad B = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E_c}{E_m} \right) \quad \text{I.7}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur des plaques de E-FGM est représentée sur la figure I.5.

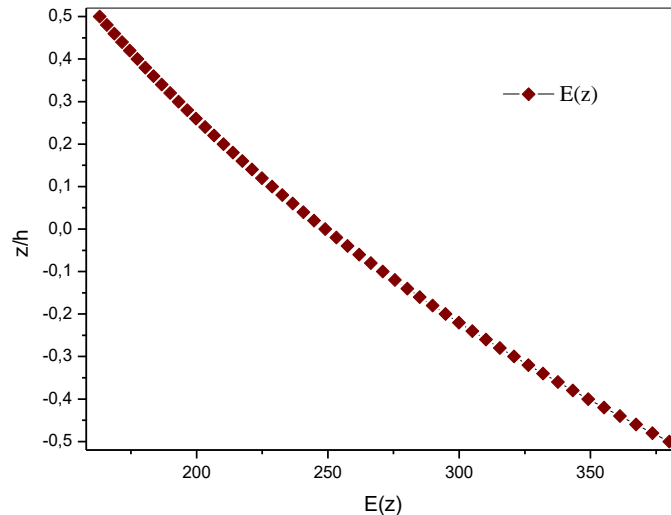


Fig. I.5. Variation de module de Young dans une plaque E- FGM.

### I.5. Phénomène piézoélectrique

Le phénomène de piézoélectricité fut découvert en 1880 à Paris par Pierre Curie et son frère Paul-Jacques Curie, dans certains matériaux cristallins. Le terme "piézo" provient du grec ancien *piezein*, signifiant "presser". Ce phénomène se manifeste sous deux formes principales : l'**effet piézoélectrique direct** (illustré en Figure I.6) et l'**effet piézoélectrique inverse** (Figure I.7). Il apparaît dans des matériaux cristallins **dépourvus de centre de symétrie** [40-42].

L'effet direct correspond à la **génération de charges électriques** à la surface du matériau sous l'effet d'une contrainte mécanique appliquée. Le **signe des charges** dépend de l'orientation de la contrainte appliquée. Inversement, l'effet piézoélectrique inverse se manifeste par une **déformation mécanique** (dilatation ou contraction) du matériau lorsqu'il est soumis à un champ électrique.

La piézoélectricité est présente dans plusieurs matériaux naturels, le plus emblématique étant le **quartz**. Toutefois, les **coefficients piézoélectriques** associés à ces matériaux naturels sont généralement faibles, limitant leur efficacité dans des applications industrielles exigeantes. Pour pallier ces limitations, la majorité des dispositifs modernes intègrent des **matériaux synthétiques**, en particulier des **céramiques polycristallines** à base d'oxydes de **plomb, zirconium et titane**, communément appelées **PZT**. Des oxydes additionnels peuvent être incorporés dans la formulation afin d'ajuster les constantes piézoélectriques et d'optimiser les performances du matériau.

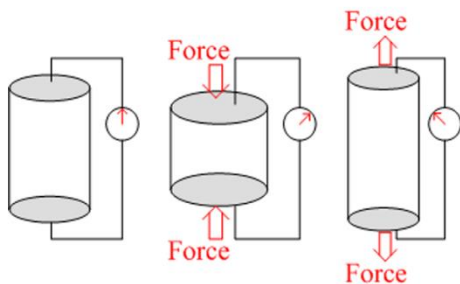


Fig. I.6. Effet piézoélectrique direct.

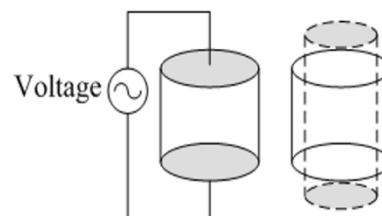
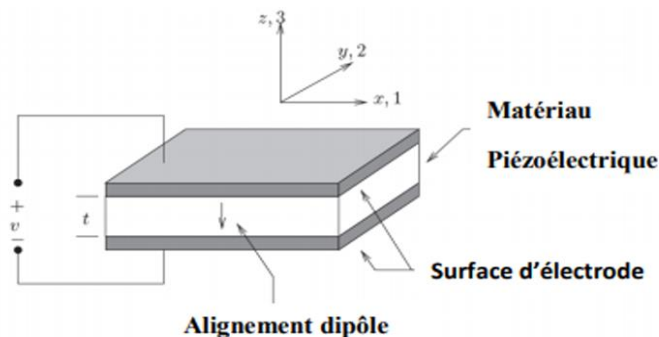


Fig. I.7. Effet piézoélectrique indirect.

Les céramiques PZT présentent une **déformabilité électrique (striction électromécanique)** environ **cent fois supérieure** à celle du quartz, ce qui les rend particulièrement adaptées à la fabrication d'**actionneurs** dans de nombreuses applications industrielles. Par ailleurs, les **polymères piézoélectriques** tels que le **PVDF (polyvinylidène fluoride)** offrent des **constantes piézoélectriques encore plus élevées** que celles des PZT, bien qu'avec une rigidité moindre. En raison de leur flexibilité et de leur facilité d'intégration, ces polymères sont principalement utilisés dans la **conception de capteurs**.

### I.6. Mise en équations

Dans cette section, les équations décrivant le comportement électromécanique des matériaux piézoélectriques sont introduites selon la norme IEEE, couramment utilisée pour représenter leurs propriétés. Cette norme suppose un comportement linéaire des matériaux, une hypothèse valable lorsque les champs électriques et les contraintes mécaniques appliqués restent faibles.



**Fig. I.8.** Schéma de principe d'un transducteur piézoélectrique [43].

Les équations piézoélectriques reposent sur l'hypothèse selon laquelle la déformation totale d'un transducteur résulte de la superposition de deux contributions : la déformation due à la contrainte mécanique appliquée et celle induite par l'actionnement électrique. Dans la Figure I.8, l'axe 1 correspond à la direction x, l'axe 2 à la direction y, et l'axe 3 à la direction z. Ce dernier est défini comme l'axe de polarisation initiale de la céramique piézoélectrique, tandis que les axes 1 et 2 se trouvent dans le plan perpendiculaire. Cette convention de repérage est illustrée de manière plus explicite dans la Figure I.9. Sur cette base, les équations électromécaniques caractérisant un matériau piézoélectrique linéaire peuvent s'écrire sous la forme suivante [43, 44] :

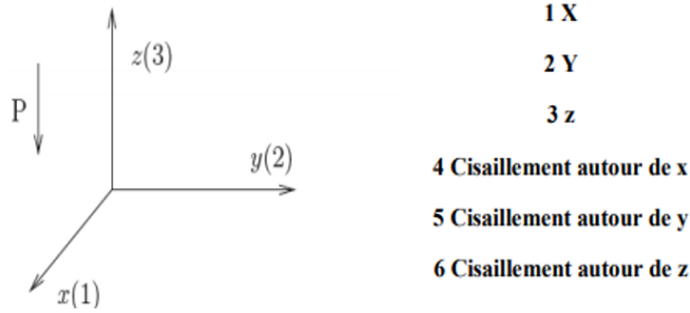
$$\varepsilon_i = S_{ij}^E \sigma_j + d_{mi} E_m \quad \text{I.8}$$

$$D_m = d_{mi} \sigma_i + \xi_{ik}^\sigma E_k \quad \text{I.9}$$

Où les indices  $i, j = 1, 2, \dots, 6$  et  $m, k = 1, 2, 3$  font référence à différentes directions au sein du système de coordonnées du matériau, comme le montre la Figure 4. Les équations ci-dessus peuvent être réécrites sous la forme suivante, qui est souvent utilisée pour les applications impliquant la détection : [43,44]

$$\varepsilon_i = S_{ij}^D \sigma_j + g_{mi} D_m \quad \text{I.10}$$

$$E_i = g_{mi} \sigma_i + \beta_{ik}^\sigma D_k \quad \text{I.11}$$



**Fig. I.9.** Nomenclature des axes [44].

Où :

- $\sigma$ ... Vecteur de contrainte (N / m<sup>2</sup>)
- $\varepsilon$ ... Vecteur de déformation (m/m)
- $E$ ... Vecteur de champ électrique appliqué (V/m)
- $\xi$ ... Permissivité (F/m)
- $d$ ... Matrice de constantes de déformation piézoélectriques (m/V)
- $S$ ... Matrice des coefficients de conformité (m<sup>2</sup>/N)
- $D$ ... Vecteur de déplacement électrique (C/m<sup>2</sup>)
- $g$ ... Matrice de constantes piézoélectriques (m<sup>2</sup>/C)
- $\beta$ ... Composante d'imperméabilité (m/F)  $D$ ,  $E$  et  $\sigma$  représentent des mesures prises à déplacement électrique constant, champ électrique constant et contrainte constante.

Les équations (I.8) et (I.9) expriment l'effet piézoélectrique inverse (lorsque le dispositif est utilisé comme actionneur). Les équations (I.10) et (I.11), expriment l'effet piézoélectrique direct (qui traite le cas où le transducteur est utilisé comme un capteur). L'effet inverse est souvent utilisé pour déterminer les coefficients piézoélectriques.

L'écriture matricielle des équations (I.8) et (I.9) devient :

$$\text{Actionnement : } \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad \text{I.12}$$

$$\text{Détection : } \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} & d_{51} & d_{61} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} & d_{52} & d_{62} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} & d_{53} & d_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}^\sigma & e_{12}^\sigma & e_{13}^\sigma \\ e_{21}^\sigma & e_{22}^\sigma & e_{23}^\sigma \\ e_{31}^\sigma & e_{32}^\sigma & e_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad \text{I.13}$$

En supposant que le dispositif est polarisé le long de l'axe 3 et en considérant le matériau piézoélectrique comme un matériau isotrope transversalement, ce qui est vrai pour la céramique

piézoélectrique, de nombreux paramètres dans les matrices ci-dessus seront soit nuls, soit exprimés en termes d'autres paramètres. En particulier, les coefficients de conformité non nuls sont [44] :

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} \\ S_{13} &= S_{31} = S_{23} = S_{32} \\ S_{12} &= S_{21} \\ S_{44} &= S_{55} \\ S_{66} &= 2(S_{11} - S_{12}) \end{aligned}$$

Les constantes de déformation piézoélectrique non nulles sont :

$$d_{31} = d_{32} \text{ et } d_{15} = d_{24}$$

Enfin, les coefficients diélectriques non nuls sont  $e_{11} \sigma = e_{22} \sigma$  et  $e_{33} \sigma$ . Par la suite, les équations (I.12) et (I.13) sont simplifiées pour devenir :

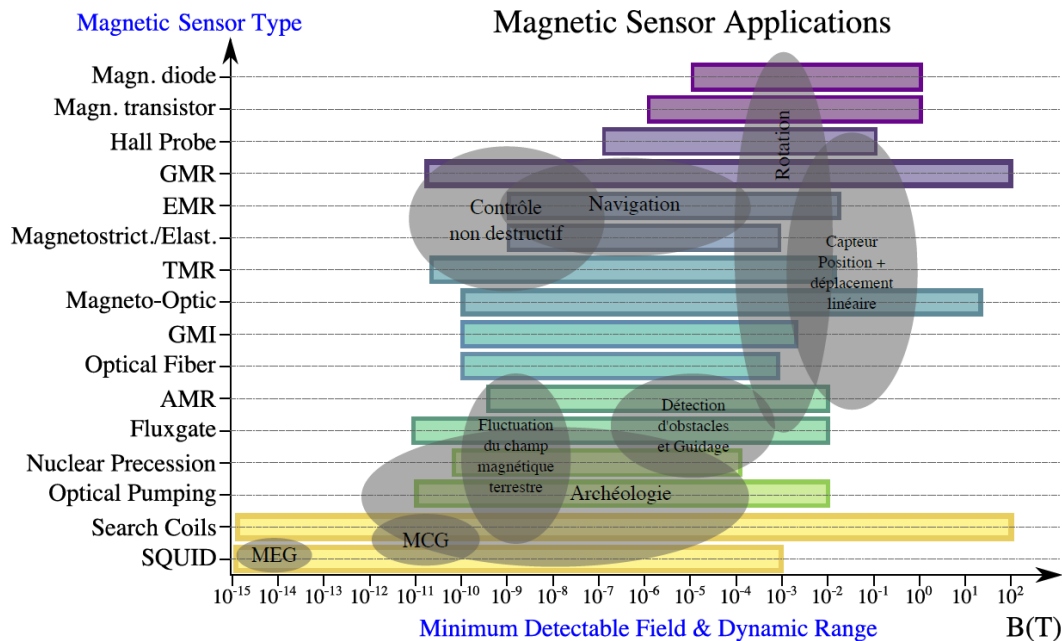
$$\text{Actionnement : } \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad \text{I.14}$$

$$\text{Détection : } \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & e_{11}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & e_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad \text{I.15}$$

La constante de déformation piézoélectrique  $d$  est définie comme le rapport de la déformation libre développée au champ électrique appliqué. L'indice  $d_{ij}$  implique que le champ électrique est appliqué ou que la charge est collectée dans la direction  $i$  pour un déplacement ou une force dans la direction  $j$ .

### I.7. Éléments de contexte sur les capteurs magnétiques

L'évolution rapide des besoins en matière de détection et de mesure des champs magnétiques dans des domaines d'application toujours plus variés a conduit au développement d'une grande diversité de capteurs magnétiques aujourd'hui disponibles sur le marché. Ce dernier connaît une croissance soutenue, stimulée par la demande croissante de secteurs stratégiques tels que l'automobile, l'aéronautique et l'électronique grand public.



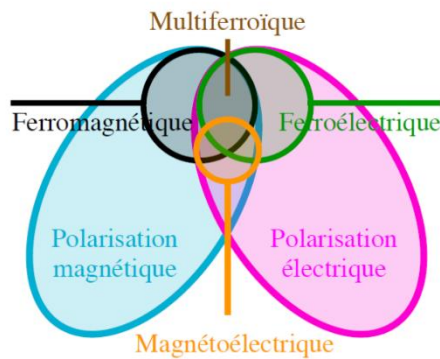
**Fig. I.10.** Technologies des capteurs de champ magnétique : applications, détectabilité, gamme de mesure dynamique (adapté de [45]).

Les capteurs de champ magnétique reposent sur une multitude de technologies, résultant de la variété des principes physiques exploités, des matériaux utilisés, et des exigences spécifiques en termes de performances (sensibilité, miniaturisation, stabilité, coût, etc.). Chaque capteur est ainsi conçu à partir d'un couplage entre un effet physique donné et des matériaux fonctionnels appropriés, ce qui conditionne sa plage de mesure, sa résolution ainsi que ses domaines d'application privilégiés.

Avec l'avancement continu des technologies de micro et nano fabrication, le développement de capteurs de champ magnétique à haute sensibilité et à résolution spatiale élevée est devenu un enjeu majeur. Toutefois, le processus de miniaturisation induit des limitations intrinsèques qui affectent significativement les performances de ces dispositifs. À ce jour, aucun capteur ne parvient à satisfaire l'ensemble des exigences requises pour toutes les applications, en raison de compromis inévitables entre sensibilité, plage dynamique et résolution spatiale. Dans le domaine biomédical, où la détection de champs magnétiques extrêmement faibles est primordiale, diverses technologies de capteurs sont actuellement exploitées. Parmi les plus utilisées figurent les dispositifs à interférence quantique supraconductrice (SQUID, Superconducting Quantum Interference Device) [46], les magnétomètres de type fluxgate [47], les magnétomètres exploitant la magnéto-impédance géante (GMI) [48–50], ainsi que ceux fondés sur la magnétorésistance anisotrope (AMR) [51], géante (GMR) [52–54] ou à effet tunnel (TMR) [55–57]. D'autres approches innovantes incluent les magnétomètres à pompage optique [58, 59], les dispositifs à cavité optomécanique [60], ainsi que les capteurs à effet Hall [61, 62]. Dans le contexte biomédical, les capteurs doivent être en mesure de détecter des signaux magnétiques très faibles, souvent noyés dans un bruit ambiant important. Leur performance est généralement évaluée à travers la **limite de détection (LOD)**, exprimée en termes de **densité spectrale de bruit**. Une classification comparative des différentes technologies de capteurs, selon leurs caractéristiques techniques et domaines d'application, est présentée en **Figure I.10** [63].

### 1.8. Hétéro-structures-magnéto-électriques

Les hétérostructures piézo-électro-magnéto-élastiques constituent une voie particulièrement prometteuse pour la détection de champs magnétiques de très faible intensité, notamment dans des environnements bruyants et à température ambiante. Elles offrent une alternative crédible et potentiellement compétitive aux dispositifs de type SQUID, traditionnellement utilisés pour ces applications. Ces hétérostructures reposent sur l'association fonctionnelle d'un matériau piézoélectrique et d'un matériau magnétique possédant des propriétés couplées. Deux grandes catégories peuvent être distinguées : d'une part, les structures stratifiées de type « bulk » et, d'autre part, les composites à couches minces. Ces derniers présentent des avantages notables en termes d'intégrabilité, de miniaturisation, et de précision, les rendant particulièrement adaptés à la conception de capteurs tridimensionnels. Enfin, deux modes de fonctionnement sont généralement



identifiés pour ces capteurs : le mode direct et le mode indirect, chacun présentant une sensibilité propre, comme illustré en **Figure I.11**.

**Fig. I.11.** Diagramme de Venn montrant la multifonctionnalité des matériaux utilisés dans les hétérostructures piézo-électro-magnéto-élastiques.

## I.9. Matériaux

### I.9.1. Propriétés

Une présentation non exhaustive des principaux matériaux piézoélectriques est présentée dans le Tableau I.1.

**Tableau I.1.** Caractéristiques de certains matériaux utilisés pour piézoélectricité

	SiO <sub>2</sub> (Quartz)	LiNbO <sub>3</sub>	BaTiO <sub>3</sub>	PVDF	PZT
<b>Permittivité relative <math>\epsilon_{33}(\emptyset)</math></b>	4.5	30	1700	5.5	450
<b>Module de Young (GPa)</b>	80	2.45	106	1	71
<b>Coefficient de couplage <math>k_{33}(\%)</math></b>	10	17	52	0.3	60
<b>Masse volumique (kg.m<sup>-3</sup>)</b>	2650	4640	5700	1760	7500
<b>Coefficient piézoélectrique <math>d_{33}</math>(en mV<sup>-1</sup> ou CN<sup>-1</sup>)</b>	2.3 10 <sup>-12</sup>	6 10 <sup>-12</sup>	19 10 <sup>-11</sup>	13.6 10 <sup>-12</sup>	1410 <sup>-11</sup>
<b>Température de Curie (°C)</b>	573	1210	130	180	350

La première remarque est la relative faiblesse des valeurs des coefficients piézoélectriques. L'exemple suivant est considéré : une tension de cent volts est appliquée aux bornes d'un barreau de PZT d'un centimètre de longueur. Un rapide calcul grâce aux équations (I.8 et I.9) permet d'obtenir la variation de longueur (Tableau 2).

**Tableau I.2. Variation de longueur d'un barreau de PZT de 1 centimètre soumis à une tension de 100V.**

Variation de longueur relative	$S=dE=d(V/l)$	$S=1.4 \cdot 10^{-6} (\text{Ø})$
Variation de longueur absolue	$\Delta l=l*S$	$\Delta l=14 \times 10^{-9} \text{ m}=14 \text{ nm}$

Les déplacements occasionnés par des tensions domestiques (centaine de volts) atteignent à peine la dizaine de nanomètre ce qui est assez faible, mais présente l'avantage d'une raideur élevée, propriété intéressante lorsque le matériau est utilisé en tant que capteur. En pratique, l'effet piézoélectrique est couplé à d'autres phénomènes comme l'amplification mécanique (ajout de contremasses) et l'utilisation de dispositifs à la fréquence de résonance mécanique. Différents modes de couplages peuvent être utilisés comme des modes de couplage longitudinaux ou de cisaillement. Les échantillons montrent une grande variation de module d'Young (facteur 100 entre le PVDF et le titane de baryum) ce qui montre la diversité des matériaux piézoélectriques et donc leurs nombreuses applications. Ainsi, les céramiques les plus raides ont un coefficient d'élasticité comparable à celui des métaux utilisés couramment dans l'industrie aéronautique comme l'aluminium (69 GPa). Les matériaux ayant un module d'Young important sont préconisés car ils garantissent une forte raideur du capteur. Les deux candidats les plus aptes à être utilisés sont le Titano-Zirconate de Plomb (PZT) et le titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ).

## I.9.2. Limites

### I.9.2.1. Limite en température

Un autre point important à remarquer est la présence d'une température de Curie qui correspond à la température où le matériau piézoélectrique perd ses qualités piézoélectriques dû à la trop grande agitation des molécules. Cette contrainte est très importante car elle limite fortement la température d'utilisation des céramiques piézoélectriques. Typiquement, les températures maximales d'utilisation se limitent à la moitié de la température de Curie.

Le titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ) a une température de Curie relativement faible par rapport au PZT (Tableau 3, dernière ligne), c'est donc ce dernier qui est privilégié. Les paramètres piézoélectriques sont aussi sensibles à la température et plus particulièrement la permittivité relative qui varie dans un ordre de grandeur de  $5 \cdot 10^{-3}$  par degré pour les PZT.

### I.9.2.2. Limite en tension

La limite en tension d'une céramique est une limite au niveau du champ électrique. Si le champ électrique imposé dans la céramique est trop fort, la céramique se dépolarise, elle perd donc ses propriétés piézoélectriques.

**I.9.2.3. Limite en pression**

Il y a deux types de limites en pression. La première est la pression de dépolarisation où le champ électrique interne à la céramique est supérieur au champ de dépolarisation ce qui entraîne une dépolarisation de la céramique. La deuxième limite est la limite mécanique où une pression ou une force trop importante entraîne une détérioration de la céramique. La limite en compression est beaucoup plus importante que la limite en traction (généralement d'un facteur 10) ce qui explique que les céramiques piézoélectriques travaillent généralement sous précontrainte.

**I.9.3. Applications**

La piézoélectricité est utilisée dans de nombreux domaines comme les sonars, les montres ou encore les briquets.

The background features a complex network of thin grey lines connecting small grey dots, overlaid on a light green grid. Several gears of various sizes and orientations are scattered across the scene, some rendered in a dark grey silhouette style and others as faint outlines. A dashed line with an arrow indicates a clockwise rotation for one of the gears.

# ***Chapitre II***

***Analyse de la flexion électro-  
magnéto-élastiques d'une coque  
à double courbure***

## II.1. Introduction

Les matériaux composites stratifiés sont les matériaux composites les plus largement utilisés dans les applications d'ingénierie en raison de leurs propriétés attrayantes, telles qu'une masse réduite, une résistance accrue et une flexibilité améliorée. Ils offrent une résistance supérieure à l'usure, à la corrosion, ainsi qu'à d'autres sollicitations mécaniques. Toutefois, leur principal inconvénient réside dans le risque de délamination, dû à la variation abrupte des propriétés aux interfaces des couches. Cette limitation peut être surmontée par l'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel (FGM), dans lesquels les propriétés varient de manière continue selon l'épaisseur de la plaque. Les FGM sont composés généralement de deux matériaux, une céramique et un métal, dont les comportements mécaniques sont distincts et complémentaires, permettant d'obtenir les caractéristiques souhaitées.

Les FGM présentent des propriétés d'ingénierie très diversifiées. Il s'agit de matériaux dont les propriétés — notamment le module de Young, le module de cisaillement, le coefficient de Poisson, la densité et le coefficient de dilatation thermique — varient progressivement dans une ou plusieurs directions. L'amélioration de caractéristiques telles que la conductivité thermique, la résistance à la corrosion, la dureté, la rigidité ou encore la soudabilité est rendue possible grâce à cette variation directionnelle des propriétés. Les gradients de propriétés des FGM sont généralement modélisés à l'aide de lois de distribution telles que la loi en puissance (power law), la loi sigmoïde, la loi exponentielle ou encore la méthode de Mori-Tanaka.

Les FGM trouvent de nombreuses applications dans des secteurs tels que l'énergie nucléaire, les centrales électriques, l'aéronautique, les structures offshores, les coques de fusée, entre autres. De ce fait, leur utilisation dans les travaux de recherche connaît une croissance constante.

Les plaques composites sont analysées à l'aide de différentes théories afin de déterminer leur comportement en flexion sous charges mécaniques et/ou thermiques. Ces théories sont classées en deux catégories : les théories classiques et les théories raffinées. La théorie classique des plaques (CPT), développée par Kirchhoff [64] au XIXe siècle pour l'analyse statique des plaques minces, néglige les effets des contraintes de cisaillement transverse, ce qui conduit à des résultats imprécis pour les plaques composites épaisses où ces effets sont significatifs. Pour pallier cette lacune, Mindlin [65] a proposé au XXe siècle la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDT), qui prend en compte les contraintes de cisaillement transverse pour les plaques minces à modérément épaisses. Toutefois, elle ne satisfait pas les conditions de cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et nécessite un facteur de correction dépendant du problème étudié pour tenir compte de l'énergie de déformation due au cisaillement.

Cela a motivé le développement de théories de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), qui intègrent les effets du cisaillement transverse ainsi que des contraintes normales, tout en respectant les conditions aux limites réalistes en cisaillement sur les surfaces de la plaque. Reddy [66] a ainsi proposé une théorie de cisaillement de troisième ordre satisfaisant les conditions de cisaillement nul. Ces différentes théories sont largement documentées dans les travaux de Sayyad et Ghugal [67–68]. Swaminathan et Sangeetha [69] ont proposé une analyse critique des diverses méthodes de modélisation et de résolution utilisées dans l'analyse thermique des plaques FGM, tandis que Swaminathan et al. [70] ont passé en revue les méthodes analytiques et numériques appliquées à l'analyse statique, dynamique et au flambement de ces plaques.

Zenkour [71] a établi des relations exactes entre les solutions en flexion de la théorie classique des plaques minces et celles issues de la théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale pour les plaques homogènes et FGM. Zhong et Shang [72] ont utilisé la solution de Plevako des équations tridimensionnelles générales pour obtenir des solutions fermées des plaques FGM en 3D. Zenkour et Alghamdi [73] ont analysé le comportement en flexion de plaques sandwich soumises à des charges thermomécaniques à l'aide de théories d'ordre supérieur. Cinefra et al. [74] ont effectué une analyse thermomécanique de coques FGM simplement appuyées via des théories raffinées pour les coques. Zidi et al. [75] ont étudié la réponse en flexion des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques et soumises à des chargements hygro-thermo-mécaniques à l'aide d'une théorie de plaque raffinée à quatre variables. Sayyad et al. [76] ont appliqué une théorie de cisaillement de plus haut ordre de type exponentiel à l'analyse en flexion de plaques composites laminées à plis croisés soumises à un gradient thermique linéaire. Reddy et Chin [77] ont étudié la réponse thermoélastique dynamique des cylindres et plaques FGM à l'aide d'une formulation par éléments finis. Garg et al. [78] ont réalisé une analyse de flexion hygro-thermo-mécanique de poutres sandwich FGM symétriques et non symétriques selon les lois de gradation puissance, exponentielle et sigmoïde, en utilisant une théorie en zigzag de plus haut ordre fondée sur la méthode des éléments finis. Ghugal et al. [79] ont appliqué une théorie trigonométrique de déformation par cisaillement et déformation normale pour l'analyse des contraintes thermiques de coques composites stratifiées.

Un modèle d'ordre supérieur a été développé pour l'analyse des vibrations libres des plaques MEE. Xin et Hu [80] ont utilisé une approche semi-analytique basée sur l'espace d'états pour étudier le comportement en vibration libre de poutres MEE multicouches. Bhangale et al. [81] ont adopté une procédure par éléments finis semi-analytique pour examiner les caractéristiques vibratoires des plaques MEE à gradients de propriétés. Vaezi et al. [82] ont étudié la vibration libre de micropoutres élastiques magnétoélectriques et ont déterminé leur fréquence naturelle et leur charge de flambement. Ren et al. [83] ont utilisé une méthode de lissage nodal basée sur l'interpolation radiale par points pour étudier les réponses statiques des structures MEE dans un champ d'humidité. Zhou et al. [84] ont appliqué cette même méthode pour considérer l'effet d'un environnement thermique sur les réponses transitoires des structures MEE.

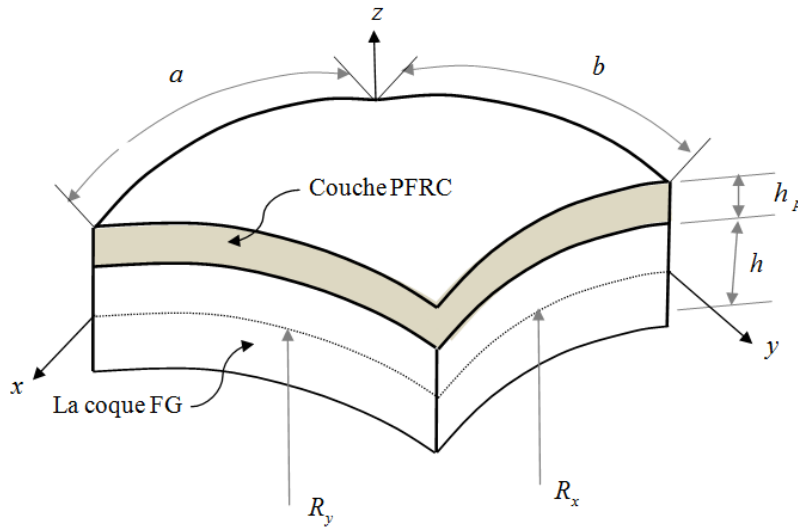
Albarody et al. [85] ont établi un modèle analytique de coques composites thermo-magnéto-électro-élastiques (TMEE) basé sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FOSD). Mahesh et Harursampath [86] ont étudié le problème de déflexion non linéaire de coques MEE renforcées par des nanotubes de carbone soumises à des charges physiques multiples telles que des charges mécaniques, électriques et magnétiques. Wu et Tsai [87] ont étudié le comportement statique 3D d'une coque FG-MEE soumise à une charge mécanique, un déplacement électrique et un flux magnétique au moyen d'une méthode asymptotique. Kondaiah et al. [88] ont examiné le comportement de coques cylindriques MEE multi phases soumises à des charges thermiques en utilisant une méthode par éléments finis semi-analytique. En se basant sur une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, Zhang et Li [89] ont analysé le flambement et la vibration de coques cylindriques circulaires MEE à gradient fonctionnel et soumises à des effets thermo-magnéto-électro-élastiques (FGMETE). En appliquant la théorie de l'élasticité non locale avec gradient de déformation à la théorie classique des coques, Sahmani et al. [90] ont étudié les propriétés de flambement non

linéaire dépendantes de la taille et le post-flambement de coques cylindriques composites MEE à l'échelle nanométrique. Ye et al. [91] ont développé une formulation semi-analytique pour estimer les réponses en flexion magnéto-électro-mécaniques de coques cylindriques composites laminées MEE en utilisant la méthode des éléments finis à frontière réduite (SBFEM). Akbarzadeh et al. [92] ont obtenu des solutions en forme fermée pour les réponses multiphysiques d'un cylindre creux MEE en rotation.

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle mathématique HSDT couplé avec le champ magnéto-électro-élastique pour l'analyse statique des coques à double courbure en FGM. Le modèle multiphysique couplé est établi sur la base de la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé. Le modèle est d'abord validé à l'aide d'exemples issus de la littérature. Par la suite, des études paramétriques sont menées afin d'illustrer l'influence, de la courbure des coques, le déplacement transversal centré, la variation des contraintes normales et transversales et l'indice de puissance.

## II.2. Description des coques à double courbure poreuses FG

Une coque FG en céramique et en métal est considérée dans ce chapitre. La Fig. II. 1 présente les dimensions de la coque, longueur  $a$ , largeur  $b$  et épaisseur  $h$  avec le système de coordonnées adopté  $(x, y, z)$ . La surface de référence est la surface médiane de la coque définie par  $z = 0$  sur l'axe  $z$  au plan  $(xy)$ . La coque FG est reliée à la surface supérieure par un actionneur PFRC d'épaisseur  $h_p$ . Cette coque est soumise à une charge électrique  $\psi_0(x, y)$ , une charge magnétique  $\phi_0(x, y)$  et une charge mécanique  $q(x, y)$ .



**Fig. II. 1.** Schéma de la coque poreuse FG avec une seule couche PFRC.

Dans la coque à double courbure en FGM on suppose la présence des porosités réparties sur tout le volume en raison de défauts de production. La distribution de la porosité est modélisée à l'aide de deux fonctions différentes caractérisant les propriétés mécaniques qui s'écrivent par Zenkour [73] :

$$\begin{cases} E(z) = E_m e^{\left(\frac{z+1}{h}\right)^p - \left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right)}, \\ \nu(z) = \nu_m e^{\left(\frac{z+1}{h}\right)^p - \left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right)}, \end{cases} \quad \text{II.1}$$

$$\begin{cases} E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - (E_c + E_m) \frac{\xi}{2} \\ \nu(z) = (\nu_c - \nu_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \nu_m - (\nu_c + \nu_m) \frac{\xi}{2} \end{cases} \quad \text{II.2}$$

### II.3. Formulations

L'analyse magnéto-électro-élastique d'une coque à double courbure à une couche magnéto-électro-élastique est étudiée dans ce chapitre, basée sur la théorie de déformation normale et de cisaillement d'ordre élevé. La théorie tridimensionnelle de la déformation normale et de cisaillement prenant en compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur est utilisée pour décrire le champ de déplacement de la coque à double courbure. Le noyau est constitué de matériau FGM élastique et une couche piézo-magnétiques sont utilisées comme capteur et actionneur soumis à des charges magnétiques et électriques. Les relations constitutives pour le noyau élastique basées sur l'élasticité tridimensionnelle sont [22] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \sigma_z^e \\ \sigma_{yz}^e \\ \sigma_{xz}^e \\ \sigma_{xy}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^e & Q_{12}^e & Q_{13}^e & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^e & Q_{22}^e & Q_{23}^e & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13}^e & Q_{23}^e & Q_{33}^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.3}$$

$Q_{ij} = Q_{ji}$  sont les coefficients de rigidité,  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  sont les composantes de la contrainte et de la déformation normales,  $\sigma_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  sont les composantes de la contrainte et de la déformation de cisaillement. Les coefficients de rigidité sont calculés en termes du module de Young et du coefficient de Poisson pour les matériaux élastiques [23,25]. La déformation de cisaillement 3D est utilisée,  $\varepsilon_z \neq 0$ . alors  $Q_{ij}$  sont :

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}. \quad \text{II.4}$$

La figure schématique de la coque à double courbure à deux couches est montrée dans la Fig. II.1, où  $x$ ,  $y$  sont les coordonnées le long de deux directions planaires et  $z$  est la coordonnée le long de la direction de l'épaisseur ; deux rayons de courbure sont définis par  $R_1$ ,  $R_2$  ; ils sont supposés constants. Les relations constitutives pour les couches piézo-magnétiques sont développées comme suit [95] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^p \\ \sigma_y^p \\ \sigma_z^p \\ \sigma_{yz}^p \\ \sigma_{xz}^p \\ \sigma_{xy}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^p & Q_{12}^p & Q_{13}^p & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^p & Q_{22}^p & Q_{23}^p & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13}^p & Q_{23}^p & Q_{33}^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31} \\ 0 & 0 & q_{32} \\ 0 & 0 & q_{33} \\ 0 & q_{24} & 0 \\ q_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad \text{II.5}$$

Où  $E_1, E_2$  et  $E_3$  représentent les composantes du champ électrique, et  $H_1, H_2$  et  $H_3$  sont les composantes du champ magnétique. De plus,  $e_{ij}$  sont les coefficients piézoélectriques,  $\eta_{ij}$  sont les coefficients diélectriques et  $d_{ij}$  sont les coefficients magnétoélectriques. Les relations de déplacement électrique sont développées comme suit [96] :

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad \text{II.6}$$

Les relations d'induction magnétique sont exprimées comme suit [96] :

$$\begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{24} & 0 & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad \text{II.7}$$

Où  $q_{ij}$  sont les coefficients piézo-magnétiques et  $\mu_{ij}$  sont les coefficients magnétiques.

Le champ de déplacement basé sur la théorie de la déformation normale et de cisaillement sinusoïdal à deux variables est présenté comme suit [22,27,38,42] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z) \phi_z(x, y, t) \end{aligned} \quad \text{II.8}$$

$U, v, w$  sont les composantes des déplacements le long des directions  $x, y, z$ ,  $u, v$  et  $w_b + w_s$  sont les déplacements de la surface médiane,  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement des déplacements transverses, et  $\chi$  est la fonction d'étirement de l'épaisseur. Dans ce chapitre, la fonction de forme de déformation de cisaillement développée par Zaoui et al., [22], sera utilisée :

$$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} e^{(Hz/\pi)} \left( \pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - \frac{\pi h^3}{\pi^4 + h^4} \text{ et } g(z) = \frac{df}{dz} \quad \text{II.9}$$

Où  $h$  est l'épaisseur de la coque. Les relations contrainte-déplacement pour une coque à double courbure avec courbure constante sont données par :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \\ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \\ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R_2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R_1} \right) \end{pmatrix}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad \text{II.10}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) \quad \text{II.11}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \quad \text{II.12}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right) \left( z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \quad \text{II.13}$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{\partial w_b}{\partial y} - f'(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} + g(z) \frac{\partial \phi_z}{\partial y} - \frac{v_0}{R_2} + z \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{1}{R_2} \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \quad \text{II.14}$$

$$\gamma_{xz} = -\frac{\partial w_b}{\partial x} - f'(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} + g(z) \frac{\partial \phi_z}{\partial x} - \frac{u_0}{R_1} + z \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{1}{R_1} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \quad \text{II.15}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z. \quad \text{II.16}$$

Les relations constitutives peuvent être complétées par le calcul des composantes du champ électrique et magnétique. Les composantes du champ électrique et magnétique sont dérivées en utilisant le gradient des potentiels électriques et magnétiques. Les potentiels électrique et magnétique sont supposés comme une combinaison d'une variation linéaire le long de la direction de l'épaisseur, y compris les potentiels électriques et magnétiques appliqués, et une fonction bidimensionnelle inconnue pour satisfaire les conditions aux limites homogènes. Basé sur les explications précédentes, les potentiels électrique et magnétique sont supposés comme suit :  $\Psi = \frac{2z}{h} \Psi_0 - \Psi(x, y) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$  et

$\Phi = \frac{2z}{h}\Phi_0 - \Phi(x, y)\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$ , respectivement. Sur la base des potentiels électriques et magnétiques supposés, les composantes des champs électrique et magnétique sont dérivées comme suit :

$$E_x = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), E_y = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), E_z = -\frac{2}{h}\Psi_0 - \frac{\pi}{h}\Psi \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{II.17}$$

$$H_x = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), H_y = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), H_z = -\frac{2}{h}\Phi_0 - \frac{\pi}{h}\Phi \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{II.18}$$

La substitution des composantes de contrainte, des champs électrique et magnétique dans les relations constitutives donne les relations constitutives totales comme suit :

$$\sigma_x^e = Q_{11}^e \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) \right) \quad \text{II.19}$$

$$+ Q_{12}^e \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right) + Q_{13}^e \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right).$$

$$\sigma_y^e = Q_{12}^e \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) \right) \quad \text{II.20}$$

$$+ Q_{22}^e \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right) + Q_{23}^e \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right).$$

$$\sigma_z^e = Q_{13}^e \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) \right) \quad \text{II.21}$$

$$+ Q_{23}^e \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right) + Q_{33}^e \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right).$$

$$\sigma_{xy}^e = Q_{66}^e \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right) \left( z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad \text{II.22}$$

$$\sigma_{yz}^e = Q_{44}^e \left[ -\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{v_0}{R_2} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( 1 + \frac{f(z)}{R_2} \right) - f'(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right] \quad \text{II.23}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^p = & Q_{11}^p \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) + Q_{13}^p \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right) \right. \\ & \left. + Q_{12}^p \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right] - e_{31} E_z - q_{31} H_z. \end{aligned} \quad \text{II.24}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^p = & Q_{12}^p \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) + Q_{23}^p \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right) \right. \\ & \left. + Q_{22}^p \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right] - e_{32} E_z - q_{32} H_z. \end{aligned} \quad \text{II.25}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^p = & Q_{13}^p \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) + Q_{33}^p \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right) \right. \\ & \left. + Q_{23}^p \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right] - e_{33} E_z - q_{33} H_z. \end{aligned} \quad \text{II.26}$$

$$\sigma_{yz}^p = Q_{44}^p \left[ -\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{v_0}{R_2} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( 1 + \frac{f(z)}{R_2} \right) - f'(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right] - e_{24} E_y - q_{24} H_y \quad \text{II.27}$$

$$\sigma_{xz}^p = Q_{55}^p \left( -\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{u_0}{R_1} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( 1 + \frac{f(z)}{R_1} \right) - f'(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) - e_{15} E_x - q_{15} H_x, \quad \text{II.28}$$

$$\sigma_{xy}^p = Q_{66}^p \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right) \left( z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad \text{II.29}$$

Les composantes du déplacement électrique et de l'induction magnétique sont exprimées comme suit:

$$D_x = e_{15} \left( -\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{u_0}{R_1} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( 1 + \frac{f(z)}{R_1} \right) - f'(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) + \eta_{11} E_x + d_{11} H_x \quad \text{II.30}$$

$$D_y = e_{24} \left( -\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{v_0}{R_2} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( 1 + \frac{f(z)}{R_2} \right) - f'(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right) + \eta_{22} E_y + d_{22} H_y \quad \text{II.31}$$

$$D_z = e_{31} \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) \right) + e_{33} \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right) \quad \text{II.32}$$

$$+ e_{32} \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right) + \eta_{33} E_z + d_{33} H_z$$

$$B_x = q_{15} \left( -\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{u_0}{R_1} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( 1 + \frac{f(z)}{R_1} \right) - f'(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right) + d_{11} E_x + \mu_{11} H_x \quad \text{II.33}$$

$$B_y = q_{24} \left( -\frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{v_0}{R_2} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( 1 + \frac{f(z)}{R_2} \right) - f'(z) \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right) + d_{22} E_y + \mu_{22} H_y \quad \text{II.34}$$

$$\begin{aligned}
 B_z = q_{31} & \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_1} + g(z) \frac{\phi_z}{R_1} \right) \right) + q_{33} \left( \frac{\partial g(z)}{\partial z} \phi_z \right) \\
 & + q_{32} \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{(w_b + w_s)}{R_2} + g(z) \frac{\phi_z}{R_2} \right) \right) + d_{33} E_z + \mu_{33} H_z
 \end{aligned} \quad \text{II.35}$$

Le principe de HAMILTON :  $\int (\delta U - \delta W) dt = 0$

U : l'énergie de déformation,

V : Les travaux extérieurs,

La variation de l'énergie de déformation est définie comme suit :  $U = \frac{1}{2} \sum \int (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV$ ,

$$\delta U = \iint_A \int \left( \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - B_i \delta H_i \right) dz \, dA = 0 \quad \text{II.36}$$

$$\delta U = \int \left( \begin{aligned} & \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} - D_x \delta E_x - D_y \delta E_y - D_z \delta E_z \\ & - B_x \delta H_x - B_y \delta H_y - B_z \delta H_z \end{aligned} \right) dV$$

En considérant l'élément de volume comme  $dV = dx dy dz$  donne une variation de l'énergie de déformation comme :

$$\delta U = \iint \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} N_1 - \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} M_1 - \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} S_1 + \frac{\delta \phi_z}{R_1} P_1 + \frac{(\delta w_b + \delta w_s)}{R_1} N_1 + \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} N_2 - \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} M_2 \\ & - \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} S_2 + \frac{(\delta w_b + \delta w_s)}{R_2} N_2 + \frac{\delta \phi_z}{R_2} P_2 + \delta \phi_z G_3 - \delta v_0 N_{23} + \frac{\partial w_s}{\partial y} M_{23} \\ & + \frac{\partial \phi_z}{\partial y} S_{23} - \delta u_0 N_{13} + \frac{\partial w_s}{\partial x} M_{13} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} S_{13} + \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} N_{21} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} N_{12} - \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} M_{12} \\ & - \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} S_{12} - \frac{\partial \delta \Psi}{\partial x} D_1 - \frac{\partial \delta \Psi}{\partial y} D_2 + \delta \Psi D_3 - \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} B_1 - \frac{\partial \delta \Phi}{\partial y} B_2 + \delta \Phi B_3 \end{aligned} \right) dx dy \quad \text{II.37}$$

Avec les composants résultants sont définis comme :

$$\begin{aligned}
 \{N_1, M_1, S_1, P_1\} = & \int_{-h/2}^{-he/2} \sigma_x^p \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \{1, z, f(z), g(z)\} dz + \int_{-he/2}^{he/2} \sigma_x^e \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \{1, z, f(z), g(z)\} dz \\
 & + \int_{he/2}^{h/2} \sigma_x^p \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \{1, z, f(z), g(z)\} dz
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

$$\begin{aligned}
 \{N_2, M_2, S_2, P_2\} = & \int_{-h/2}^{-he/2} \sigma_y^p \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \{1, z, f(z), g(z)\} dz + \int_{-he/2}^{he/2} \sigma_y^e \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \{1, z, f(z), g(z)\} dz \\
 & + \int_{he/2}^{h/2} \sigma_y^p \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \{1, z, f(z), g(z)\} dz.
 \end{aligned} \tag{II.39}$$

$$\begin{aligned}
 \{N_{13}, M_{13}, S_{13}\} = & \int_{-h/2}^{-he/2} \tau_{xz}^p \left\{ \frac{1}{R_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left(1 + \frac{f(z)}{R_1}\right) - f'(z), \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right\} dz
 \end{aligned} \tag{II.40}$$

$$+ \int_{-he/2}^{he/2} \tau_{xz}^e \left\{ \frac{1}{R_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left(1 + \frac{f(z)}{R_1}\right) - f'(z), \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right\} dz$$

$$+ \int_{he/2}^{h/2} \tau_{xz}^p \left\{ \frac{1}{R_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left(1 + \frac{f(z)}{R_1}\right) - f'(z), \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right\} dz$$

$$\{N_{23}, M_{23}, S_{23}\} = \int_{-h/2}^{-he/2} \tau_{yz} \left\{ \frac{1}{R_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left(1 + \frac{f(z)}{R_2}\right) - f'(z), \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right\} dz$$

$$+ \int_{-he/2}^{he/2} \tau_{yz} \left\{ \frac{1}{R_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left(1 + \frac{f(z)}{R_2}\right) - f'(z), \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right\} dz$$

$$+ \int_{he/2}^{h/2} \tau_{yz} \left\{ \frac{1}{R_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left(1 + \frac{f(z)}{R_2}\right) - f'(z), \frac{g(z)}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right\} dz$$

II.41

$$\begin{aligned}
 \{N_{12}, N_{21}, M_{12}, S_{12}\} = & \int_{-h/2}^{-he/2} \tau_{xy}^p \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}, (z, f(z)) \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right) \right\} dz \\
 & + \int_{-he/2}^{he/2} \tau_{xy}^p \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}, (z, f(z)) \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right) \right\} dz \quad \text{II.42} \\
 & + \int_{he/2}^{h/2} \tau_{xy}^p \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}, (z, f(z)) \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right) \right\} dz
 \end{aligned}$$

$$\{D_1, D_2, D_3\} = \int \left\{ \left( \frac{D_x}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{D_y}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), D_z \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right\} dz \quad \text{II.43}$$

$$\{B_1, B_2, B_3\} = \int \left\{ \left( \frac{B_x}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}, \frac{B_y}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), B_z \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right\} dz \quad \text{II.44}$$

$$G_3 = \int \sigma_z g'(z) dz$$

Les travaux extérieurs sont définis comme suit :

$$\delta W = \int \left\{ -q \left(1 + \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) (\delta w_b + \delta w_s) \right\} dx dy \quad \text{II.45}$$

Le travail effectué par les forces externes dans le plan est calculé comme :

$$\delta W_{ext} = - \iint \left( \{N_{0x} + N_{E0x} + N_{M0x}\} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + \{N_{0y} + N_{E0y} + N_{M0y}\} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \right) R_1 R_2 (\delta w_b + \delta w_s) dx dy \quad \text{II.46}$$

Dans laquelle ( $N_{0x}$ ,  $N_{0y}$ ) sont respectivement les charges pré mécaniques, électriques et magnétiques.

$$(N_{E0x}, N_{M0x}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{h} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} (e_{31} \Psi_0, q_{31} \Phi_0) dz \quad \text{II.47}$$

$$(N_{E0y}, N_{M0y}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{h} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} (e_{32} \Psi_0, q_{32} \Phi_0) dz \quad \text{II.48}$$

L'intégration par parties de l'équation (15) et la réorganisation des variables conduisent à :

$$\delta U = \iint \left( \begin{aligned} & -\frac{\partial N_1}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \delta w_s + \frac{P_1}{R_1} \delta \phi_z + \frac{N_1}{R_1} (\delta w_b + \delta w_s) - \frac{\partial N_2}{\partial y} \delta v_0 - \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \delta w_b \\ & - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} \delta w_s + \frac{N_2}{R_2} (\delta w_b + \delta w_s) + \frac{P_2}{R_2} \delta \phi_z + G_3 \delta \phi_z - N_{23} \delta v_0 - \frac{\partial M_{23}}{\partial y} \delta w_s \\ & - \frac{\partial S_{23}}{\partial y} \delta \phi_z - N_{13} \delta u_0 - \frac{\partial M_{13}}{\partial x} \delta w_s - \frac{\partial S_{13}}{\partial x} \delta \phi_z - \frac{\partial N_{21}}{\partial y} \delta u_0 - \frac{\partial N_{12}}{\partial x} \delta v_0 - \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} \delta w_b \\ & - \frac{\partial^2 S_{12}}{\partial x \partial y} \delta w_s + \frac{\partial D_1}{\partial x} \delta \Psi + \frac{\partial D_2}{\partial y} \delta \Psi + D_3 \delta \Psi + \frac{\partial B_1}{\partial x} \delta \Phi + \frac{\partial B_2}{\partial y} \delta \Phi + B_3 \delta \Phi \end{aligned} \right) dx dy \quad \text{II.49}$$

Le principe du travail virtuel  $\delta U - \delta W$  conduit aux équations de gouvernance finales comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & -\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_{21}}{\partial y} - N_{13} = 0 \\ \delta v_0 : & -\frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial N_{12}}{\partial x} - N_{23} = 0 \\ \delta w_b : & -\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{N_1}{R_1} - \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \frac{N_2}{R_2} - \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} - \{N_{0x} + N_{E0x} + N_{M0x}\} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \\ & - \{N_{0y} + N_{E0y} + N_{M0y}\} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = -q \left( 1 + \frac{h}{2R_1} \right) \left( 1 + \frac{h}{2R_2} \right) + R_f \left( 1 - \frac{h}{2R_1} \right) \left( 1 - \frac{h}{2R_2} \right) \\ \delta w_s : & -\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{N_1}{R_1} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} + \frac{N_2}{R_2} - \frac{\partial M_{23}}{\partial y} - \frac{\partial M_{13}}{\partial x} - \frac{\partial^2 S_{12}}{\partial x \partial y} - \{N_{0x} + N_{E0x} + N_{M0x}\} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \\ & - \{N_{0y} + N_{E0y} + N_{M0y}\} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = -q \left( 1 + \frac{h}{2R_1} \right) \left( 1 + \frac{h}{2R_2} \right) + R_f \left( 1 - \frac{h}{2R_1} \right) \left( 1 - \frac{h}{2R_2} \right) \\ \delta \phi_z : & \frac{P_1}{R_1} + \frac{P_2}{R_2} + G_3 - \frac{\partial S_{23}}{\partial y} - \frac{\partial S_{13}}{\partial x} = 0 \\ \delta \Psi : & + \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + D_3 = 0 \\ \delta \Phi : & \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + B_3 = 0 \end{aligned} \quad \text{II.50}$$

#### II.4. Résultats et discussions

Les résultats de la réponse en flexion des coques poreuses, dotée d'une seule couche de PFRC sur la surface supérieure, sont présentés. L'épaisseur de la coque FG est de 1 mm, tandis que celle de la couche PFRC est de 50µm. L'actionneur PFRC est fabriqué à partir de PZT5H et d'époxyde. La charge mécanique considérée dans les calculs est de  $q_0 = 100N/m^2$ . Les propriétés élastiques et piézoélectriques de la couche PFRC, obtenues par Mallik et Ray [97], sont utilisées pour effectuer les calculs numériques.

$$Q_{11}^p = 32,6 \text{ GPa}, \quad Q_{12}^p = 4,3 \text{ GPa}, \quad Q_{13}^p = 4,76 \text{ GPa}, \quad Q_{23}^p = 3,85 \text{ GPa}, \quad Q_{22}^p = Q_{33}^p = 7,2 \text{ GPa},$$

$$Q_{55}^p = Q_{66}^p = 1,29 \text{ GPa}, \quad Q_{44}^p = 1,05 \text{ GPa} \text{ et } e_{31} = -6,76 \text{ C/m}^2.$$

Les composantes du matériau FGM sont noté sur la référence [23]. D'après l'analyse micromécanique de Aniket et al.[98], il a été constaté que les valeurs des coefficients piézoélectriques  $e_{32}$ ,  $e_{33}$ ,  $e_{15}$  et  $e_{24}$ , par rapport au système de coordonnées du matériau, sont beaucoup nettement inférieures, voire négligeable par rapport à  $e_{31}$ , et par conséquent ne sont pas prises en compte dans l'évaluation des résultats numériques. Les paramètres adimensionnels qui sont utilisés pour présenter les résultats numériques s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10h^2 E_m}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{aq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{h}{aq_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{h}{aq_0} \sigma_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_{yz} = \frac{h}{aq_0} \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \bar{z}\right), \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}\right), \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{h}{aq_0} \sigma_{xy}(0, 0, \bar{z}), \quad \bar{z} = \frac{z}{h}. \end{aligned} \tag{II.51}$$

## II.5. Validation du modèle mathématique

Avant d'étudier la flexion des coques avec un actionneur PFRC, nous vérifions d'abord l'efficacité du modèle en l'absence de cet actionneur, en ne considérant que les coques en aluminium et en céramique. Une valeur des rapports géométriques, tels que longueur/épaisseur ( $a/h$ ), largeur/longueur ( $b/a$ ), sont prises en considération avec et sans la couche piézoélectrique.

Les Tableaux II.a et II.b présentent les résultats de la déflexion centrale adimensionnelle des structures, à savoir la plaque, le cylindre et la sphère en métal et en céramique respectivement. Les valeurs de la déflexion de la plaque non poreuse sont comparées à la solution de Benyoucef et al. [93], Thai et Choi [94] et Rachid et al.[23,24]. Les résultats obtenus de la flèche et des contraintes pour la plaque en aluminium et en céramique non poreuse ( $\xi = 0$ ) sont en parfaite concordance avec ceux fournis par les autres théories quasi-3D de Rachid et al.[23].

L'influence de l'indice de la couche piézoélectrique sur le comportement en flexion des deux plaques (Al, Céramique) a été analysée pour différentes configurations géométriques, plaque, cylindre et sphère. Les résultats montrent une tendance générale à la diminution de la déflexion maximale et des contraintes avec l'activation de la couche piézoélectrique. L'effet du rayon pour les structures cylindre et sphère est mis en évidence pour différents rapports géométriques  $R/a=2, 3, 5, 10, 20$  et  $100$ . La sphère possède le plus faible déplacement transversal.

**Tableau II.a.** Comparaison des déflexions et les contraintes non dimensionnels d'une plaque carrée en matériau céramique ( $Al_2O_3$ ) simplement supportée soumises à une charge sinusoïdale ( $a=b=10h$ ).

Méthode		$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$		
<b>Parte I</b>							
Plaque	Benyoucef et al.[93]	0.2960	1.9955	1.3121	0.7065		
	Tha iet et Choi, [94]	0.2961	1.9943	1.3124	0.7067		
	Rachid et al. [23]	0.2960	1.9952	1.3120	0.7066		
	Rachid et al. [24] (2D)	0.2960	1.9955	1.3121	0.7065		
	Present(2D)	<b>0.2960</b>	<b>1.9952</b>	<b>1.3119</b>	<b>0.7065</b>		
	Rachid et al. (Quasi 3D) [24]	0.2933	2.1158	1.2882	0.6986		
	Present (Quasi 3D)	<b>0.2933</b>	<b>2.1157</b>	<b>1.2882</b>	<b>0.6985</b>		
<b>Parte II</b>							
$h_p=0$							
Plaque							
	Present(2D)	<b>0.2960</b>	<b>1.9952</b>	<b>1.3119</b>	<b>0.7065</b>		
	Present (Quasi 3D)	<b>0.2933</b>	<b>2.1157</b>	<b>1.2882</b>	<b>0.6985</b>		
Cylindre	$R_1=2a$	Present(2D)	<b>0.2488</b>	<b>1.9137</b>	<b>1.4004</b>	<b>0.9060</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2432</b>	<b>1.9991</b>	<b>1.3863</b>	<b>0.9121</b>	
	$R_1=3a$	Present(2D)	<b>0.2717</b>	<b>2.0116</b>	<b>1.4227</b>	<b>0.8778</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2675</b>	<b>2.1164</b>	<b>1.4093</b>	<b>0.8830</b>	
	$R_1=5a$	Present(2D)	<b>0.2857</b>	<b>2.0433</b>	<b>1.4048</b>	<b>0.8275</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2824</b>	<b>2.1592</b>	<b>1.3894</b>	<b>0.8293</b>	
	$R_1=10a$	Present(2D)	<b>0.2926</b>	<b>2.0342</b>	<b>1.3682</b>	<b>0.7734</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2898</b>	<b>2.1544</b>	<b>1.3494</b>	<b>0.7709</b>	
	$R_1=20a$	Present(2D)	<b>0.2948</b>	<b>2.0184</b>	<b>1.3425</b>	<b>0.7414</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2920</b>	<b>2.1393</b>	<b>1.3214</b>	<b>0.7363</b>	
	$R_1=100a$	Present(2D)	<b>0.2958</b>	<b>2.0004</b>	<b>1.3184</b>	<b>0.7137</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2931</b>	<b>2.1211</b>	<b>1.2952</b>	<b>0.7063</b>	
	Sphère	$R_1=2a$	Present(2D)	<b>0.1648</b>	<b>1.4590</b>	<b>1.1030</b>	<b>0.8174</b>
			Present (Quasi 3D)	<b>0.1575</b>	<b>1.4918</b>	<b>1.0840</b>	<b>0.8164</b>
		$R_1=3a$	Present(2D)	<b>0.2177</b>	<b>1.7823</b>	<b>1.2986</b>	<b>0.8932</b>
			Present (Quasi 3D)	<b>0.2113</b>	<b>1.8489</b>	<b>1.2828</b>	<b>0.8977</b>
		$R_1=5a$	Present(2D)	<b>0.2606</b>	<b>1.9871</b>	<b>1.3976</b>	<b>0.8901</b>

		Present (Quasi 3D)	<b>0.2559</b>	<b>2.0861</b>	<b>1.3843</b>	<b>0.8961</b>
R <sub>1</sub> =10a		Present(2D)	<b>0.2850</b>	<b>2.0488</b>	<b>1.3970</b>	<b>0.8268</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2817</b>	<b>2.165</b>	<b>1.3814</b>	<b>0.8285</b>
R <sub>1</sub> =20a		Present(2D)	<b>0.2924</b>	<b>2.0373</b>	<b>1.3652</b>	<b>0.7732</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2896</b>	<b>2.1582</b>	<b>1.3463</b>	<b>0.7707</b>
R <sub>1</sub> =100a		Present(2D)	<b>0.2956</b>	<b>2.0060</b>	<b>1.3243</b>	<b>0.7208</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2929</b>	<b>2.1270</b>	<b>1.3016</b>	<b>0.7140</b>
Avec une couche de piézo h <sub>p</sub> =0.05						
Plaque						
		Present(2D)	<b>0.2902</b>	<b>1.9304</b>	<b>1.2838</b>	<b>0.6992</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2880</b>	<b>2.0210</b>	<b>1.2721</b>	<b>0.6913</b>
Cylindre R <sub>1</sub> =2a		Present(2D)	<b>0.2437</b>	<b>1.8517</b>	<b>1.3700</b>	<b>0.8935</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2389</b>	<b>1.9170</b>	<b>1.3682</b>	<b>0.9005</b>
R <sub>1</sub> =3a		Present(2D)	<b>0.2661</b>	<b>1.9451</b>	<b>1.3909</b>	<b>0.8659</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2626</b>	<b>2.0255</b>	<b>1.3902</b>	<b>0.8717</b>
R <sub>1</sub> =5a		Present(2D)	<b>0.2798</b>	<b>1.9755</b>	<b>1.3735</b>	<b>0.8169</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2772</b>	<b>2.0643</b>	<b>1.3706</b>	<b>0.8191</b>
R <sub>1</sub> =10a		Present(2D)	<b>0.2867</b>	<b>1.9671</b>	<b>1.3381</b>	<b>0.7643</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2844</b>	<b>2.0586</b>	<b>1.3317</b>	<b>0.7621</b>
R <sub>1</sub> =20a		Present(2D)	<b>0.2889</b>	<b>1.9523</b>	<b>1.3132</b>	<b>0.7332</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2867</b>	<b>2.0438</b>	<b>1.3044</b>	<b>0.7283</b>
R <sub>1</sub> =100a		Present(2D)	<b>0.2900</b>	<b>1.9353</b>	<b>1.2900</b>	<b>0.7062</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2878</b>	<b>2.0262</b>	<b>1.2790</b>	<b>0.6989</b>
Sphère R <sub>1</sub> =2a		Present(2D)	<b>0.1619</b>	<b>1.4162</b>	<b>1.0823</b>	<b>0.8075</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.1551</b>	<b>1.4398</b>	<b>1.0733</b>	<b>0.8070</b>
R <sub>1</sub> =3a		Present(2D)	<b>0.2134</b>	<b>1.7254</b>	<b>1.2710</b>	<b>0.8810</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2076</b>	<b>1.7759</b>	<b>1.2669</b>	<b>0.8861</b>
R <sub>1</sub> =5a		Present(2D)	<b>0.2551</b>	<b>1.9209</b>	<b>1.3662</b>	<b>0.8777</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>0.2511</b>	<b>1.9973</b>	<b>1.3653</b>	<b>0.8843</b>
R <sub>1</sub> =10a		Present(2D)	<b>0.2790</b>	<b>1.9804</b>	<b>1.3656</b>	<b>0.8161</b>

$R_1=20a$	Present (Quasi 3D)	<b>0.2764</b>	<b>2.0702</b>	<b>1.3625</b>	<b>0.8183</b>
	Present(2D)	<b>0.2865</b>	<b>1.9700</b>	<b>1.3351</b>	<b>0.7641</b>
$R_1=100a$	Present (Quasi 3D)	<b>0.2842</b>	<b>2.0621</b>	<b>1.3285</b>	<b>0.7619</b>
	Present(2D)	<b>0.2897</b>	<b>1.9406</b>	<b>1.2957</b>	<b>0.7131</b>
	Present (Quasi 3D)	<b>0.2876</b>	<b>2.0319</b>	<b>1.2851</b>	<b>0.7064</b>

**Tableau II.b.** Comparaison des déflexions et les contraintes non dimensionnels d'une plaque carrée en matériau métallique (Al) simplement supportée soumises à une charge sinusoïdale ( $a=b=10h$ ).

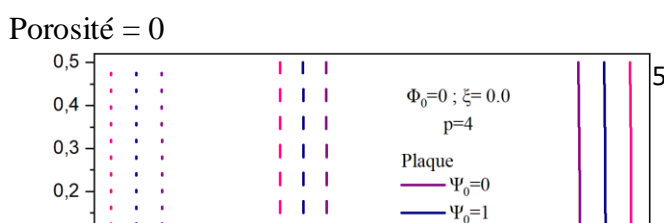
Méthode		$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$	
Parte I						
Plaque	Benyoucef et al. [93]	1.6071	1.9955	1.3121	0.7065	
	Thaïet et Choi [94]	1.6074	1.9943	1.3124	0.7067	
	Rachid et al. (2D) [23]	1.6070	1.9952	1.3120	0.7066	
	Rachid et al. (2D) [24]	1.6070	1.9952	1.3120	0.7065	
	Present(2D)	<b>1.6070</b>	<b>1.9952</b>	<b>1.3119</b>	<b>0.7065</b>	
	Rachid et al. (Quasi 3D) [23]	1.5923	2.1158	1.2882	0.6986	
	Rachid et al. (Quasi 3D) [24]	1.5924	2.1158	1.2882	0.6985	
	Present (Quasi 3D)	<b>1.5923</b>	<b>2.1157</b>	<b>1.2882</b>	<b>0.6985</b>	
Parte II						
$h_p=0$						
Plaque						
	Present(2D)	<b>1.6070</b>	<b>1.9952</b>	<b>1.3119</b>	<b>0.7065</b>	
	Present (Quasi 3D)	<b>1.5923</b>	<b>2.1157</b>	<b>1.2882</b>	<b>0.6985</b>	
Cylindre	$R_1=2a$	Present(2D)	<b>1.3506</b>	<b>1.9137</b>	<b>1.4004</b>	<b>0.9060</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>1.3205</b>	<b>1.9991</b>	<b>1.3863</b>	<b>0.9121</b>
	$R_1=3a$	Present(2D)	<b>1.4754</b>	<b>2.0116</b>	<b>1.4227</b>	<b>0.8778</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>1.4524</b>	<b>2.1164</b>	<b>1.4093</b>	<b>0.8830</b>
	$R_1=5a$	Present(2D)	<b>1.5512</b>	<b>2.0433</b>	<b>1.4048</b>	<b>0.8275</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>1.5333</b>	<b>2.1592</b>	<b>1.3894</b>	<b>0.8293</b>
	$R_1=10a$	Present(2D)	<b>1.5888</b>	<b>2.0342</b>	<b>1.3682</b>	<b>0.7734</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>1.5733</b>	<b>2.1544</b>	<b>1.3494</b>	<b>0.7709</b>
	$R_1=20a$	Present(2D)	<b>1.6004</b>	<b>2.0184</b>	<b>1.3425</b>	<b>0.7414</b>
		Present (Quasi 3D)	<b>1.5855</b>	<b>2.1393</b>	<b>1.3214</b>	<b>0.7363</b>
	$R_1=100a$					

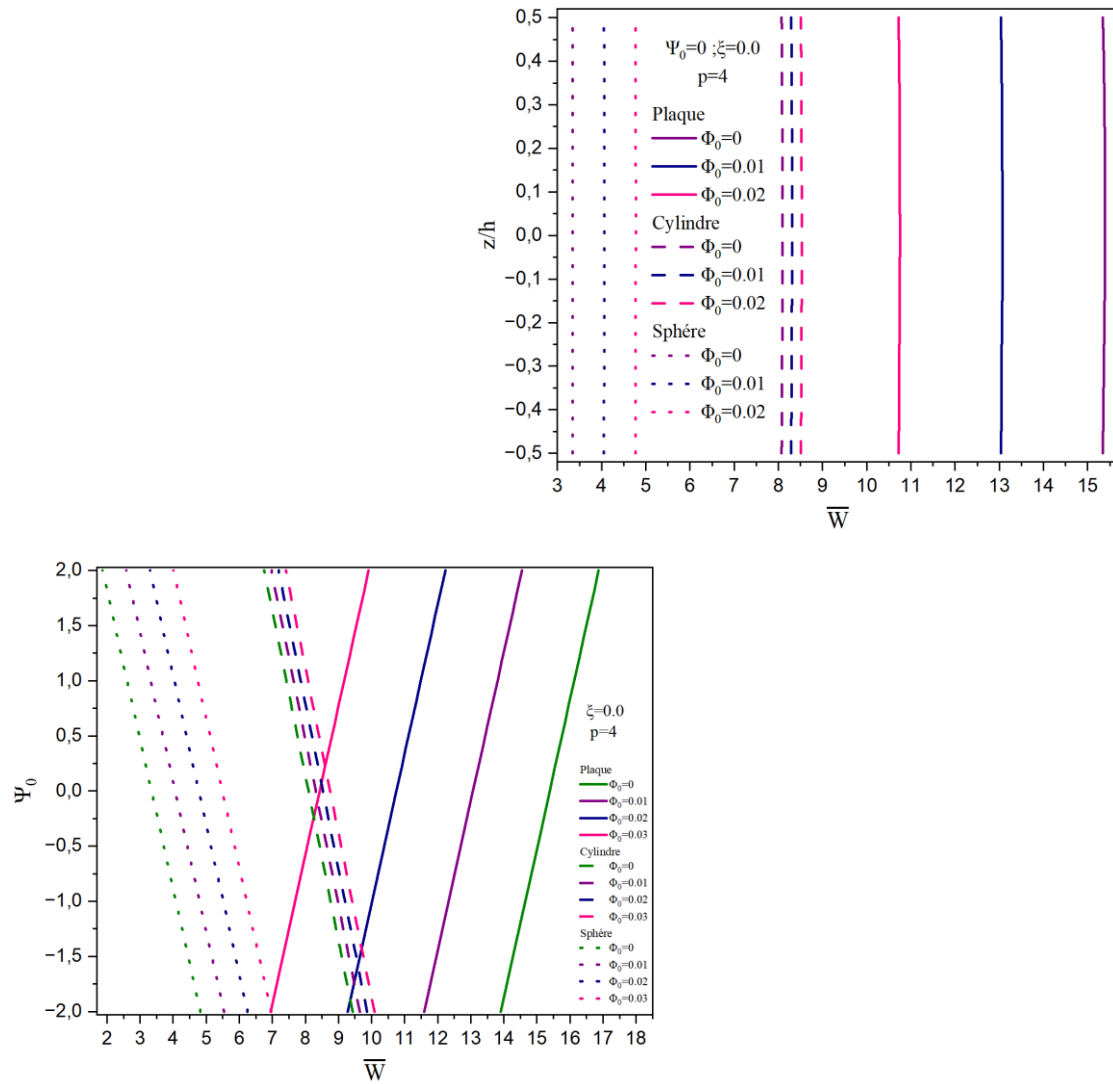
		Present(2D)	<b>1.6061</b>	<b>2.000</b>	<b>1.3184</b>	<b>0.7137</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.5914</b>	<b>2.1211</b>	<b>1.2952</b>	<b>0.7063</b>	
Sphère	R <sub>1</sub> =2a	Present(2D)	<b>0.8948</b>	<b>1.4590</b>	<b>1.1030</b>	<b>0.8174</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>0.8554</b>	<b>1.4918</b>	<b>1.0840</b>	<b>0.8164</b>	
	R <sub>1</sub> =3a	Present(2D)	<b>1.1823</b>	<b>1.7823</b>	<b>1.2986</b>	<b>0.8932</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.1473</b>	<b>1.8489</b>	<b>1.2828</b>	<b>0.8977</b>	
	R <sub>1</sub> =5a	Present(2D)	<b>1.4149</b>	<b>1.9871</b>	<b>1.3976</b>	<b>0.8901</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.3895</b>	<b>2.0861</b>	<b>1.3843</b>	<b>0.8961</b>	
	R <sub>1</sub> =10a	Present(2D)	<b>1.5472</b>	<b>2.0488</b>	<b>1.3970</b>	<b>0.8268</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.5293</b>	<b>2.1657</b>	<b>1.3814</b>	<b>0.8285</b>	
	R <sub>1</sub> =20a	Present(2D)	<b>1.5877</b>	<b>2.0373</b>	<b>1.3652</b>	<b>0.7732</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.5722</b>	<b>2.1582</b>	<b>1.3463</b>	<b>0.7707</b>	
	R <sub>1</sub> =100a	Present(2D)	<b>1.6049</b>	<b>2.0060</b>	<b>1.3243</b>	<b>0.7208</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.5902</b>	<b>2.1270</b>	<b>1.3016</b>	<b>0.7140</b>	
	<hr/>						
	Avec une couche de piézo h <sub>p</sub> =0.05						
<hr/>							
Plaque							
		Present(2D)	<b>1.4568</b>	<b>1.7041</b>	<b>1.1698</b>	<b>0.6681</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.4626</b>	<b>1.8022</b>	<b>1.1661</b>	<b>0.6622</b>	
<hr/>							
Cylindre	R <sub>1</sub> =2a	Present(2D)	<b>1.2210</b>	<b>1.6334</b>	<b>1.2488</b>	<b>0.8438</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.2171</b>	<b>1.7176</b>	<b>1.2615</b>	<b>0.8585</b>	
	R <sub>1</sub> =3a	Present(2D)	<b>1.3305</b>	<b>1.7116</b>	<b>1.2645</b>	<b>0.8181</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.3334</b>	<b>1.8079</b>	<b>1.2766</b>	<b>0.8299</b>	
	R <sub>1</sub> =5a	Present(2D)	<b>1.3994</b>	<b>1.7381</b>	<b>1.2482</b>	<b>0.7739</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.4058</b>	<b>1.8396</b>	<b>1.2563</b>	<b>0.7805</b>	
	R <sub>1</sub> =10a	Present(2D)	<b>1.4358</b>	<b>1.7327</b>	<b>1.2171</b>	<b>0.7266</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.4429</b>	<b>1.8343</b>	<b>1.2201</b>	<b>0.7275</b>	
	R <sub>1</sub> =20a	Present(2D)	<b>1.4484</b>	<b>1.7213</b>	<b>1.1954</b>	<b>0.6986</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.4550</b>	<b>1.8216</b>	<b>1.1952</b>	<b>0.6963</b>	
	R <sub>1</sub> =100a	Present(2D)	<b>1.4555</b>	<b>1.7080</b>	<b>1.1752</b>	<b>0.6744</b>	
		Present (Quasi 3D)	<b>1.4615</b>	<b>1.8066</b>	<b>1.1722</b>	<b>0.6693</b>	
	<hr/>						
	Sphère	R <sub>1</sub> =2a					

$R_1=3a$	Present(2D)	<b>0.8195</b>	<b>1.2624</b>	<b>0.9986</b>	<b>0.7678</b>
	Present (Quasi 3D)	<b>0.7990</b>	<b>1.3051</b>	<b>1.0025</b>	<b>0.7758</b>
$R_1=5a$	Present(2D)	<b>1.0706</b>	<b>1.5237</b>	<b>1.1610</b>	<b>0.8323</b>
	Present (Quasi 3D)	<b>1.0597</b>	<b>1.5942</b>	<b>1.1712</b>	<b>0.8458</b>
$R_1=10a$	Present(2D)	<b>1.2746</b>	<b>1.6887</b>	<b>1.2414</b>	<b>0.8283</b>
	Present (Quasi 3D)	<b>1.2748</b>	<b>1.7820</b>	<b>1.2538</b>	<b>0.8413</b>
$R_1=20a$	Present(2D)	<b>1.3947</b>	<b>1.7412</b>	<b>1.2403</b>	<b>0.7729</b>
	Present (Quasi 3D)	<b>1.4008</b>	<b>1.8435</b>	<b>1.2481</b>	<b>0.7794</b>
$R_1=100a$	Present(2D)	<b>1.4344</b>	<b>1.7347</b>	<b>1.2140</b>	<b>0.7264</b>
	Present (Quasi 3D)	<b>1.4413</b>	<b>1.8367</b>	<b>1.2169</b>	<b>0.7272</b>
	Present(2D)	<b>1.4538</b>	<b>1.7121</b>	<b>1.1800</b>	<b>0.6806</b>
	Present (Quasi 3D)	<b>1.4600</b>	<b>1.8114</b>	<b>1.1777</b>	<b>0.6762</b>

## II.6. Evolution de la déflexion dans les structures sous l'effet la variation du potentiel électrique $\psi_0$

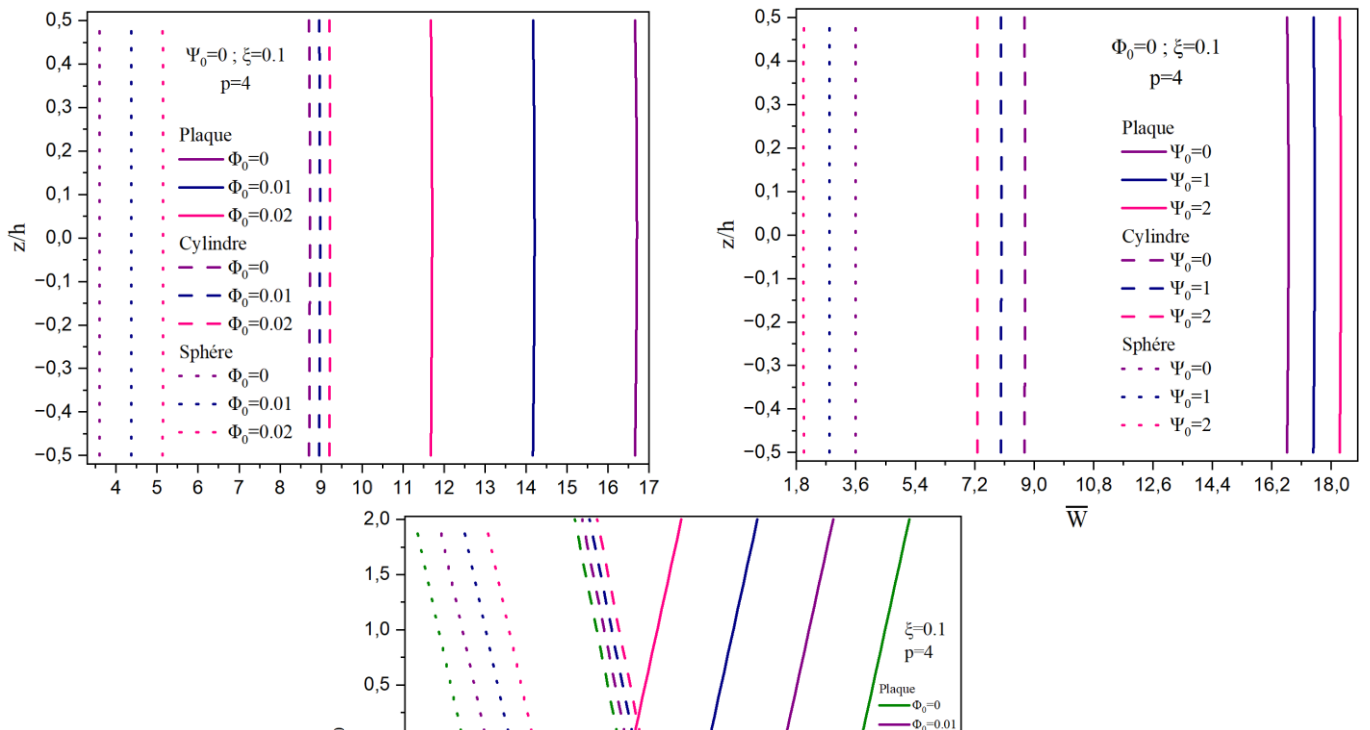
La Fig.II.2 montre l'effet de la variation du potentiel électrique en fonction du déplacement normalisé, pour différentes valeurs du potentielle magnétique. La comparaison est réalisée pour les trois différentes configurations. Il est à remarquer que les plus importants déplacements sont notés sur le couche supérieure de la plaque en FGM, et les plus faibles sont pour la sphère quel que soit le potentiel électrique. Lorsque le potentiel électrique  $\psi_0 = 0$  (voir Fig.II.2b) les déplacements sont importants lorsque le potentiel magnétique est nul. Un comportement inverse se produit pour les structures sphère et cylindre. Le déplacement est minimal lorsque le potentiel magnétique est nul. Sur la Fig.II.2c, on montre la variation du déplacement adimensionnel sur l'épaisseur de la plaque sous différents potentiels électriques et un potentiel magnétique  $\phi_0 = 0$ . Il est à noter que le comportement est totalement inversé par rapport à la Fig.II.2b. En présence de la porosité  $\xi = 0.1$ , nous avons tracé sur la Fig.II.3, le déplacement adimensionnel avec les mêmes paramètres de la Fig.II.2. Il est à constater que les allures sont identiques sauf que la porosité influe sur la dégradation du matériau en causant des valeurs plus importantes des déplacements dû à la déflexion.





**Fig. II.2.** Déflexion centrale adimensionnelle de la coque non poreuse en fonction des différents paramètres a) Effet de  $\psi_0$  sur la déflexion, b) Effet de  $\phi_0$  avec  $\psi_0 = 0$ , c) Effet de  $\psi_0$  avec  $\phi_0 = 0$ .

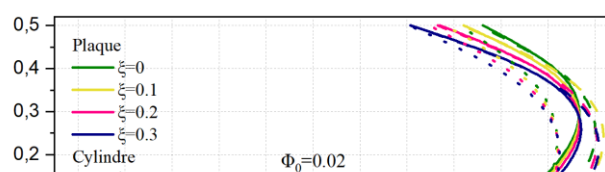
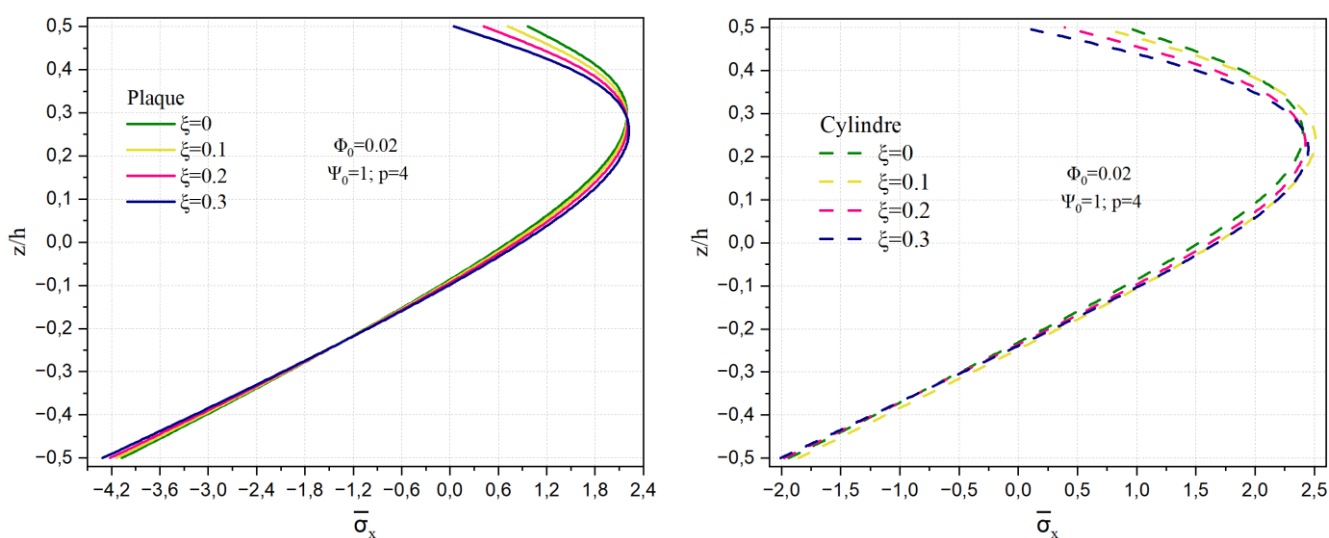
Porosité = 0.1

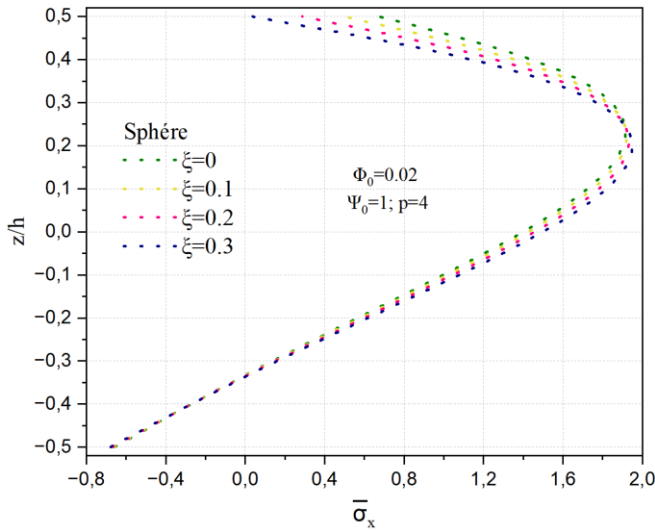


**Fig. II.3.** Déflexion centrale adimensionnelle de la coque poreuse en fonction des différents paramètres a) Effet de  $\psi_0$  sur la déflexion, b) Effet de  $\phi_0$  avec  $\psi_0 = 0$ , c) Effet de  $\psi_0$  avec  $\phi_0 = 0$ .

### II.7. Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ dans les structures

La Fig. II.4. Exhibe la variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de porosité  $\xi$ , l'indice de puissance  $p=4$  et un potentiel électrique  $\psi_0 = 1$ . L'effet de la porosité est mis en évidence. Il est à remarquer que les contraintes minimales sont dans la couche d'aluminium, elles sont de l'ordre de -4.2 alors que les contraintes maximales de tension 2 sont obtenues dans la partie supérieure à  $z/h=0.3$  pour le cas du potentiel magnétique positif de  $\phi_0 = 0.02$ . La contrainte de compression est de l'ordre de deux fois plus importantes que celle de la traction. La contrainte maximale pour le cas du cylindre et de la sphère est obtenue  $z/h=0.25$  et  $0.2$  respectivement. Les plus faibles contraintes sont obtenues pour la sphère et sont nulles sont la surface supérieure. Quelle que soit la forme de la structure l'allure de la contrainte n'est pas symétrique.

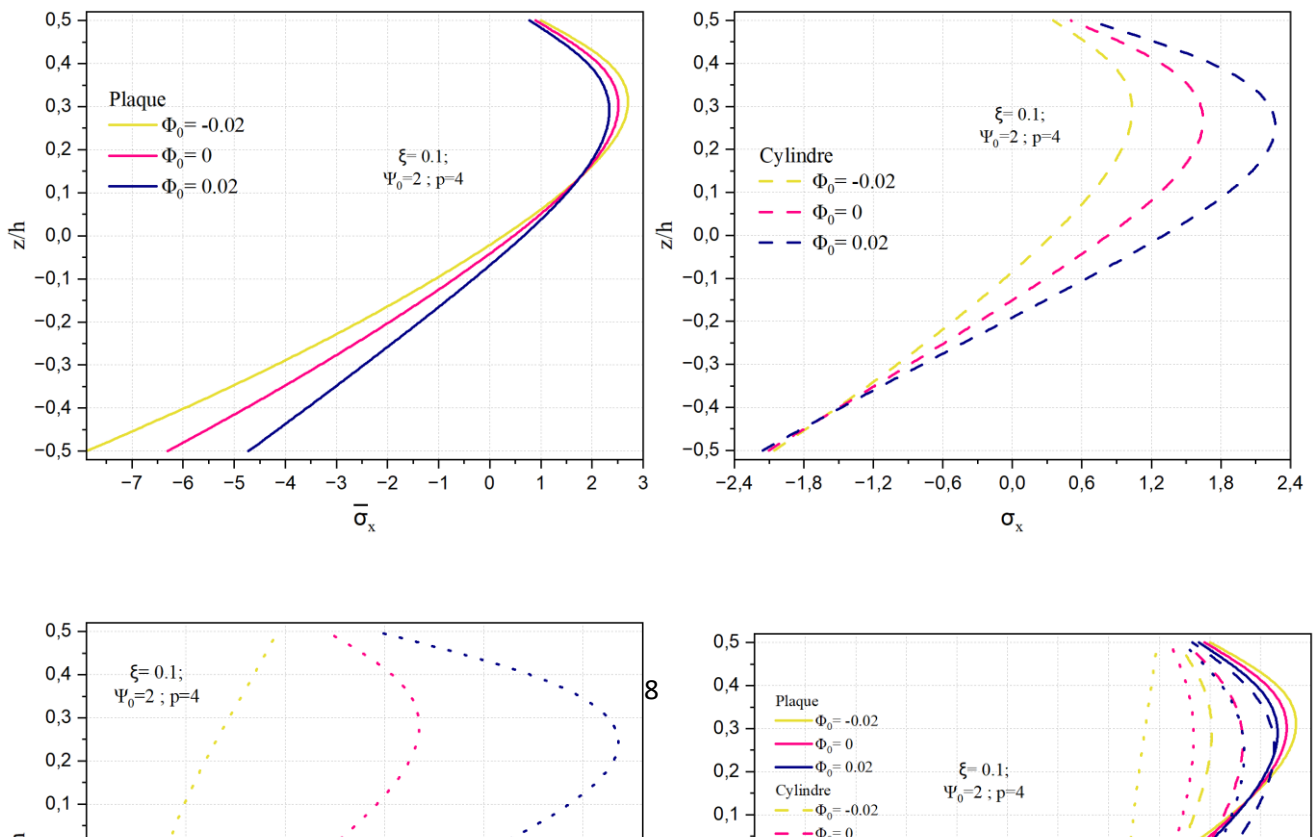




**Fig. II.4.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de la porosité.

**II.8. Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte  $\bar{\sigma}_x$**

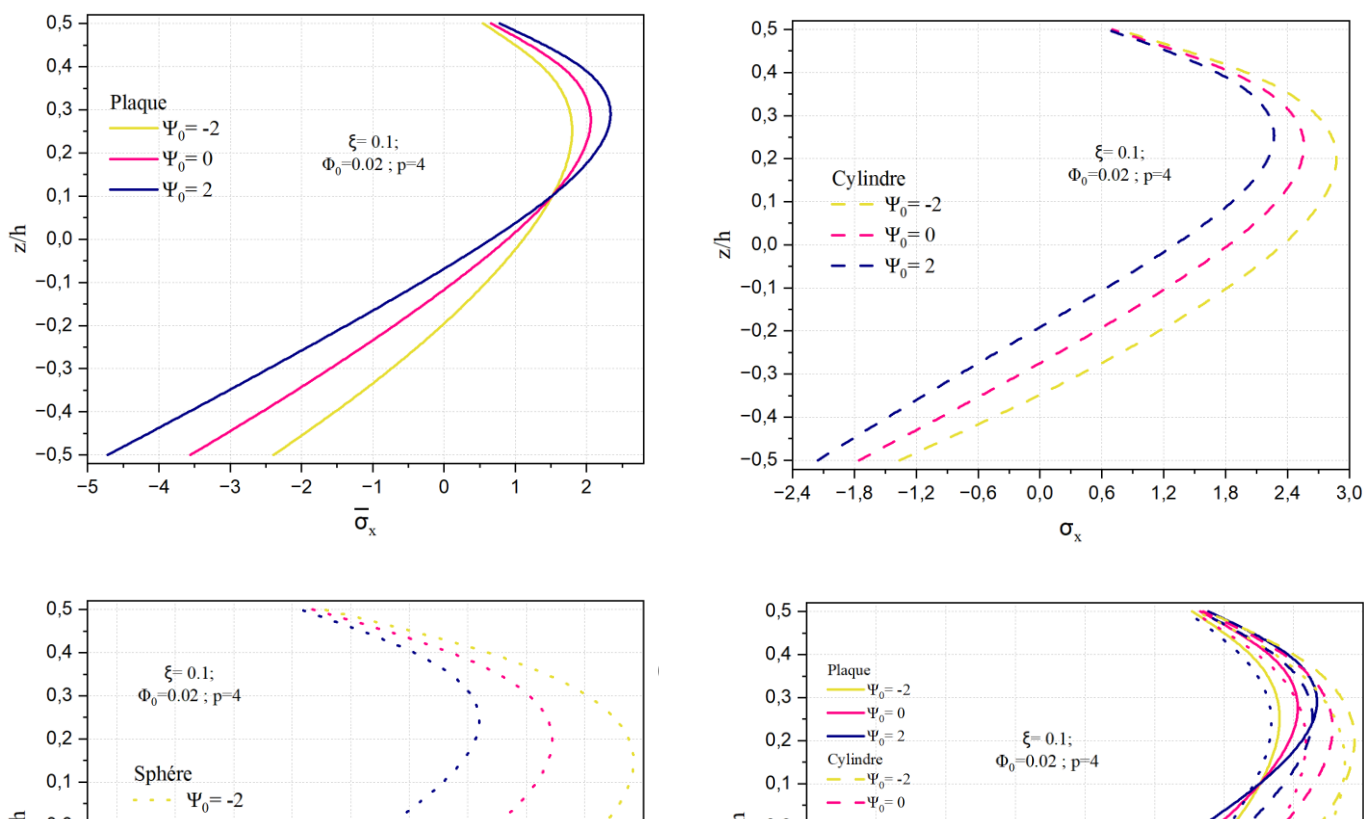
La Fig. II.5. illustre la variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique  $\phi_0$ , l'indice de puissance  $p=4$  et un potentiel électrique  $\psi_0 = 2$ . La porosité  $\xi = 0.1$ . Il est à remarquer que les contraintes minimales sont dans la couche d'aluminium, elles sont de l'ordre de -8 alors que les contraintes maximales de tension 2.4 sont obtenues dans la partie supérieure à  $z/h=0.28$  pour le cas du potentiel magnétique négatif de  $\phi_0 = -0.02$ . La contrainte de compression est de l'ordre de trois fois plus importantes que celle de la traction. Un comportement inverse est noté pour le cas du cylindre et de la sphère, les contraintes minimales sont obtenues lorsque le potentiel magnétique est positif. Quelle que soit la forme de la structure l'allure de la contrainte n'est pas symétrique.



**Fig. II.5.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique  $\phi_0$ . La porosité  $\xi = 0.1$  et  $p=4$ .

### II.9. Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_x$

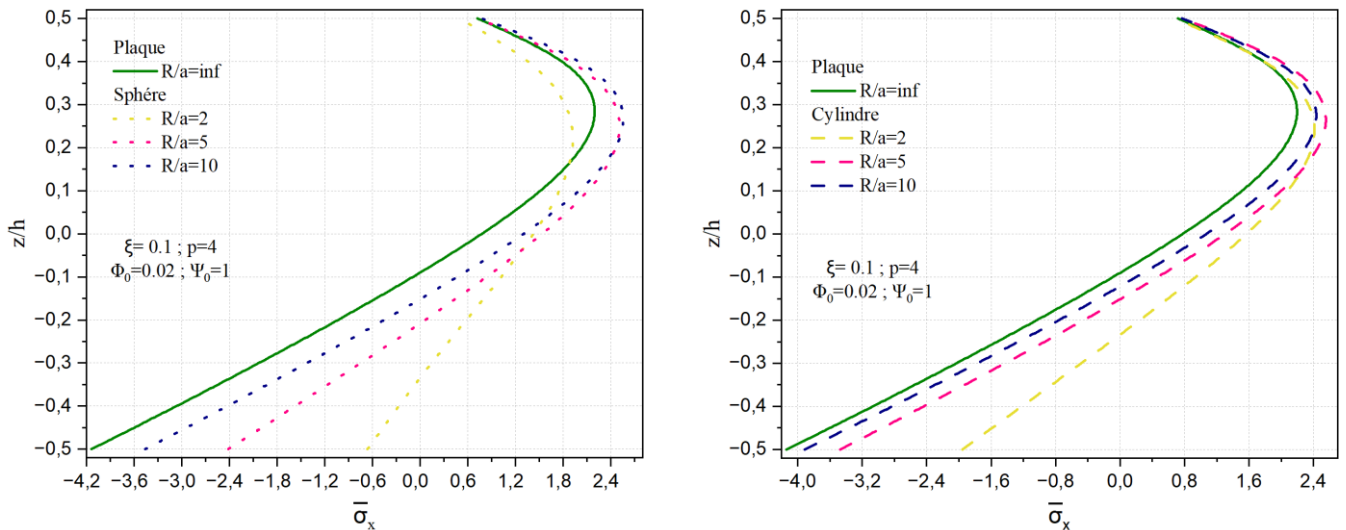
La Fig. II.6 illustre la variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique  $\psi_0$ , l'indice de puissance  $p=4$  et un potentiel magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . La porosité  $\xi = 0.1$ . Il est à remarquer que les contraintes négatives de la plaque sont dans la couche de céramique, elles sont de l'ordre de -5 lorsque le potentiel électrique  $\psi_0 = 2$  alors que les contraintes maximales positives sont dans la couche en aluminium de tension 0.1. A la position géométrique  $z/h=0.1$  la contrainte  $\bar{\sigma}_x$  est indépendante du potentiel électrique. La contrainte  $\bar{\sigma}_x$  est importante lorsque le potentiel électrique est positif au-dessous de  $z/h=0.1$ . Au-delà de cette dernière, un comportement inverse est noté. La contrainte de compression est de l'ordre de cinq fois plus importantes que celle de la traction. Quelle que soit la forme de la structure l'allure de la contrainte n'est pas symétrique et les plus faibles contraintes sont obtenues pour la sphère.



**Fig. II.6.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs du potentiel électrique. La porosité  $\xi = 0.1$  et  $p=4$ .

### II.10. Effet du rapport R/a sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_x$

La Fig. II.7 montre la variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs du rapport géométrique R/a et une porosité  $\xi = 0.1$ . Le potentiel électrique  $\psi_0 = 1$ , le potentiel magnétique  $\phi_0 = 0.02$ , et l'indice de puissance  $p=4$ . Il est à remarquer que l'augmentation du rapport R/a conduit à la convergence des contraintes  $\bar{\sigma}_x$  vers celles de la plaque. Les contraintes positives sont dans la partie supérieure des structures contenant plus de métal.

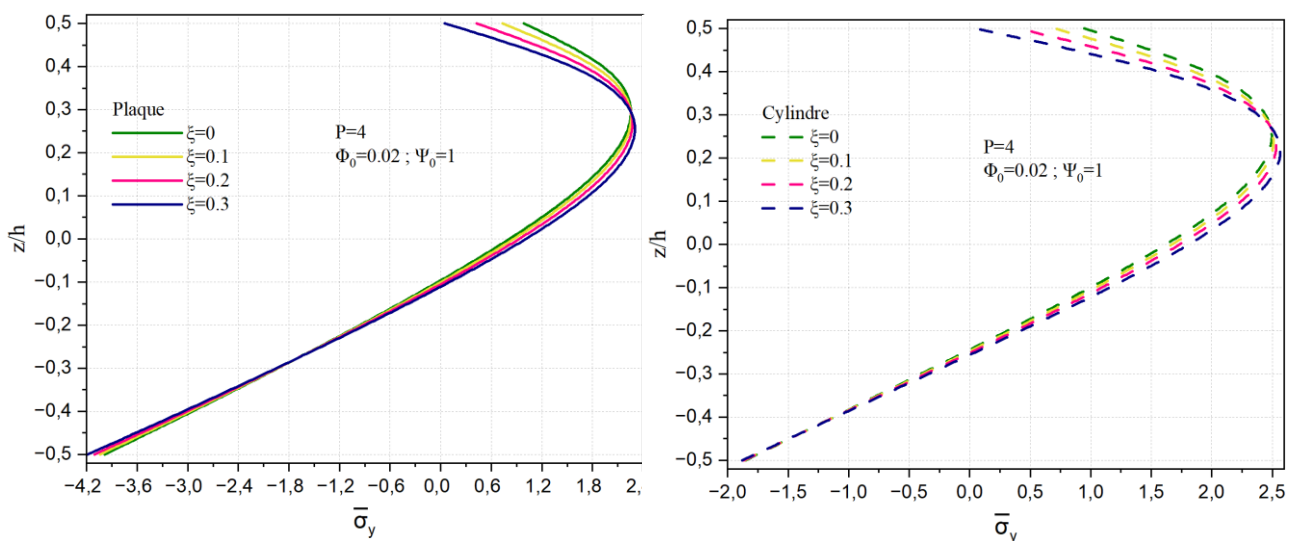


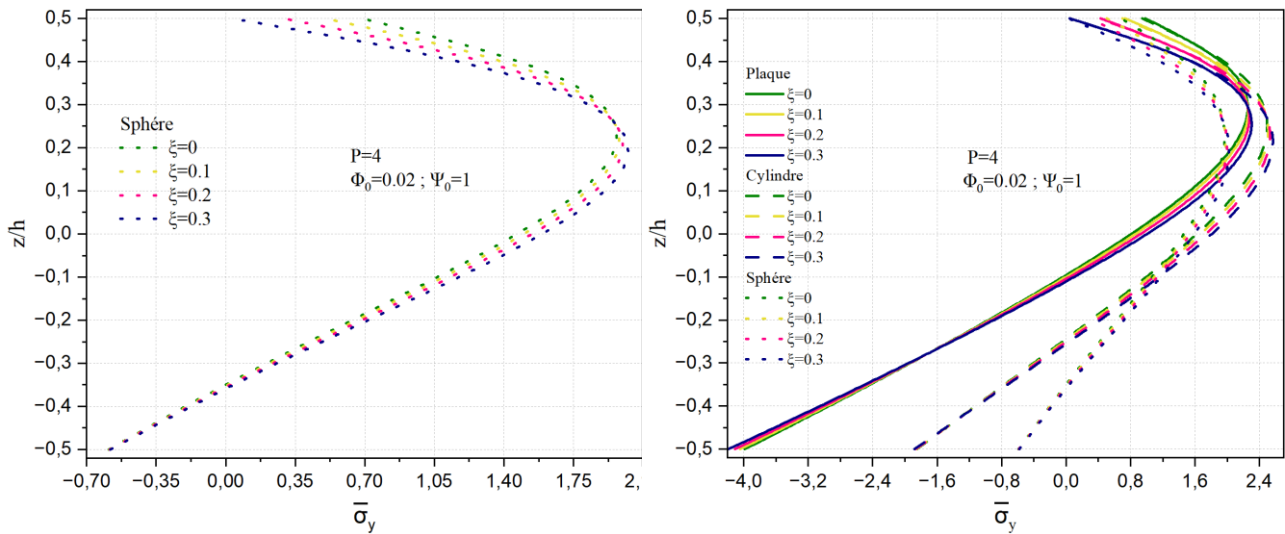
**Fig. II.7.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs du rapport géométrique R/a. La porosité  $\xi = 0.1$  et  $p=4$ .

La Fig.II.7 présente l'influence de la géométrie sur la distribution de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  selon l'épaisseur normalisée  $z/h$  pour des coques FGM poreuses soumises à un potentiel magnétique constant  $\psi_0 = 1$  et un couplage magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . La comparaison des résultats entre une plaque (cas limite  $R/a=\infty$ ) et des coques sphériques de différents rayons de courbure (rapport  $R/a=2,5,10$ ), tandis que le graphe de droite illustre le cas équivalent pour des coques cylindriques. On observe que la courbure a un effet significatif sur l'amplitude et la répartition des contraintes. En particulier, à mesure que le rapport  $R/a$  diminue, la contrainte maximale en compression s'accroît, atteignant environ  $-4,1$  pour  $R/a=2$  dans les deux géométries. Cette accentuation est plus marquée dans les coques sphériques que cylindriques dans le sens positif de contrainte et moins dans le sens négatif, ce qui s'explique par une double courbure dans le cas sphérique, induisant un effet de confinement plus important. À l'opposé, lorsque  $R/a$  augmente (vers une plaque), les profils tendent vers celui de la structure plane, avec une augmentation notable de la contrainte maximale. Dans tous les cas, les distributions restent asymétriques à travers l'épaisseur, signe de l'influence conjointe de la porosité, du gradient fonctionnel et de la géométrie. Ces résultats démontrent que la courbure est un paramètre clé dans l'ingénierie des structures FGM soumises à des champs magnétiques, et doit impérativement être prise en compte lors de la phase de conception.

### II.11. Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ dans les structures

Les Figs. II.8 montrent à travers l'épaisseur respectivement la variation des contraintes normales  $\bar{\sigma}_y$  pour différentes valeurs du facteur de porosité  $\xi$ . Il est à signaler que les allures de contraintes sont similaires à celles  $\bar{\sigma}_x$  et elles sont maximales dans la moitié de la partie supérieure de la coque et minimales au niveau de la surface inférieure de la coque pour une porosité plus élevée. La contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$  dans la plaque ne dépend pas de  $\xi$  pour deux positions  $z \approx -0,28$  et  $z \approx 0,28$  alors que, pour les autres structures une position est notée à  $z \approx 0,25$ .





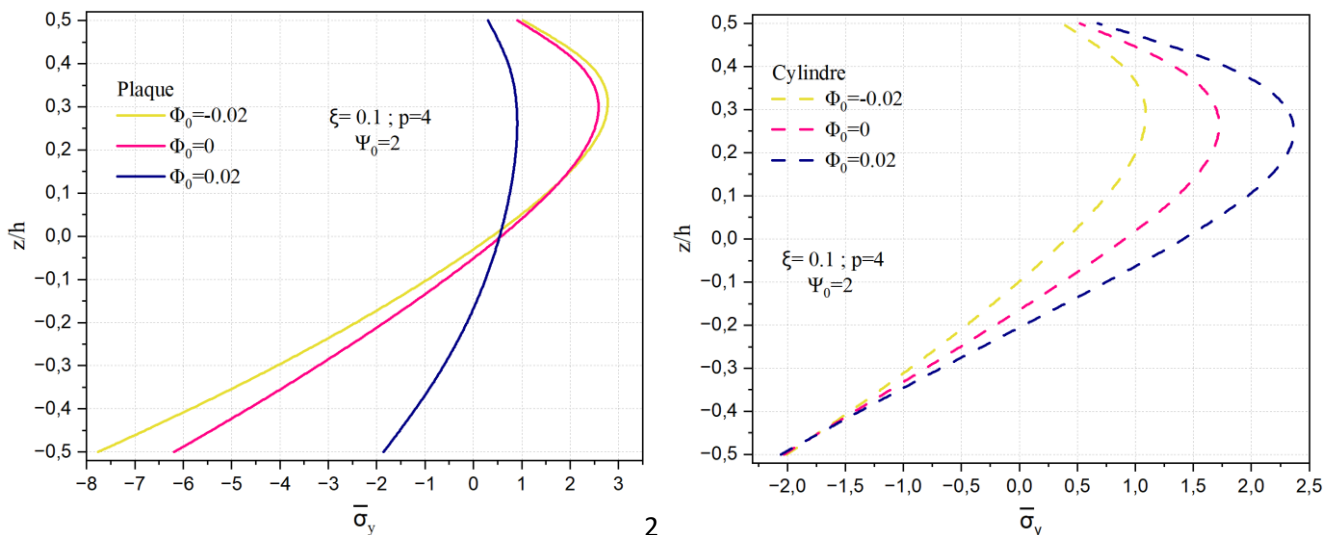
**Fig. II.8.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de porosité.

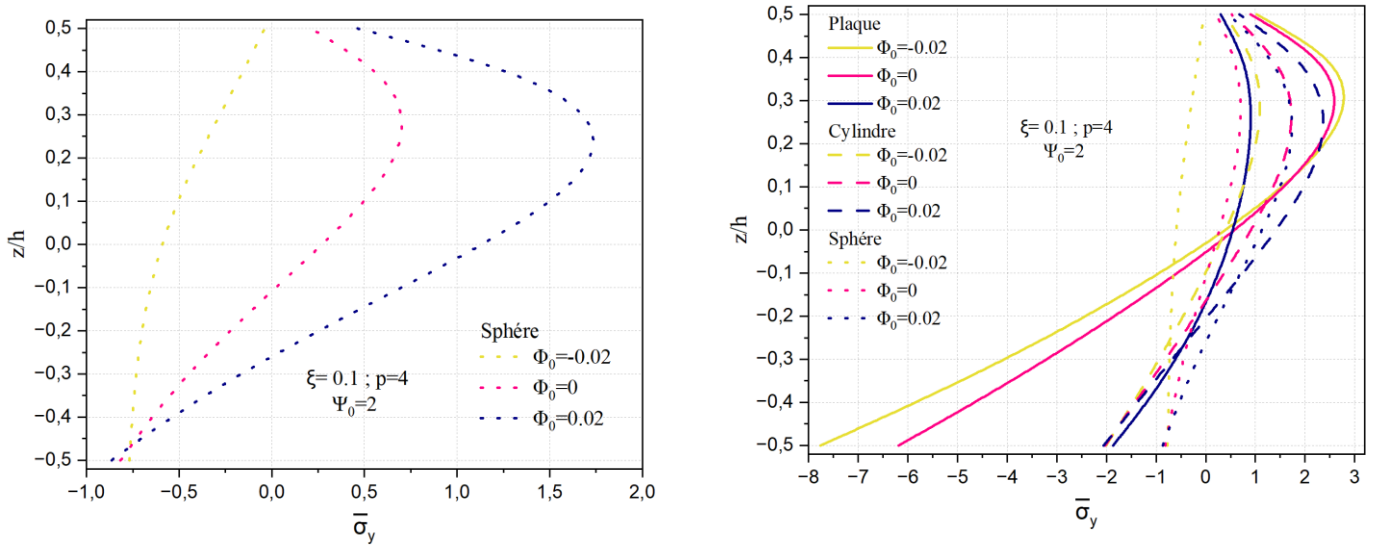
## II.12. Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_y$

La Fig. II.9 présente la distribution de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur d'une coque poreuse en matériau à gradient fonctionnel (FGM), pour différentes valeurs du potentiel magnétique  $\phi_0$ , un indice de puissance  $p=4$ , et un potentiel électrique  $\psi_0 = 2$ . La porosité du matériau est également prise en compte  $\xi = 0.1$ .

Il est à noter que les contraintes minimales sont localisées dans la couche d'aluminium, avec une valeur approximative de -8, tandis que les contraintes maximales, de l'ordre de 2,4, apparaissent dans la zone supérieure (à  $z/h=0$ ) lorsque le potentiel magnétique est négatif  $\phi_0 = -0.02$ . La contrainte de compression s'avère environ trois fois plus élevée que la contrainte de traction.

Un comportement inverse est observé pour les cas du cylindre et de la sphère : les contraintes maximales y sont atteintes lorsque le potentiel magnétique est positif. Par ailleurs, pour toutes les géométries considérées, la distribution des contraintes à travers l'épaisseur se révèle non symétrique.

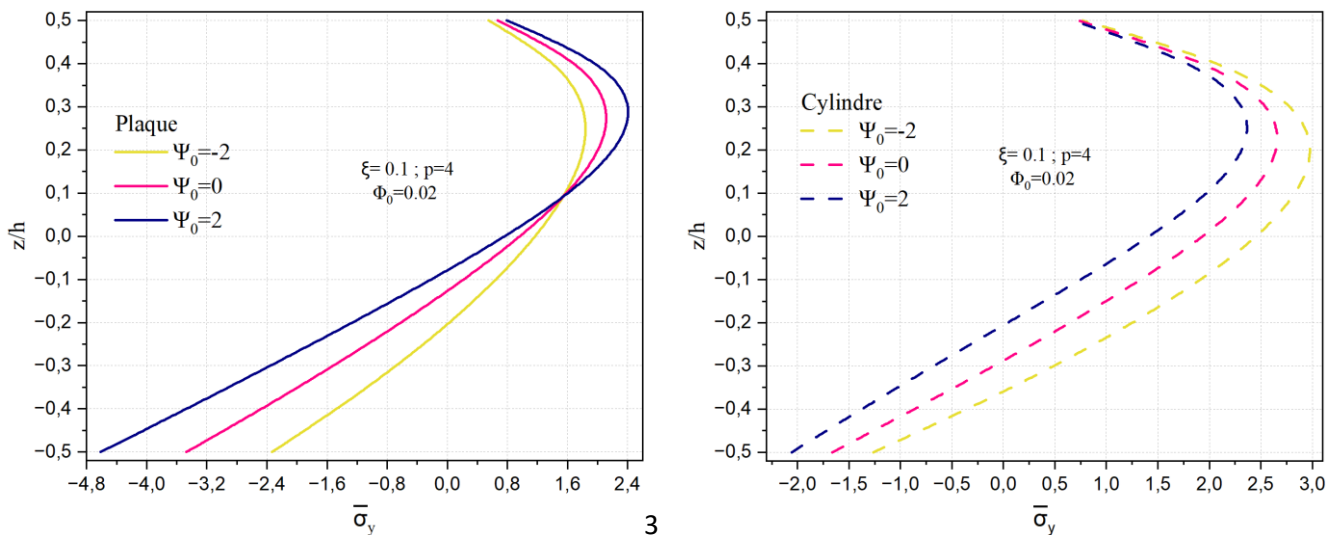


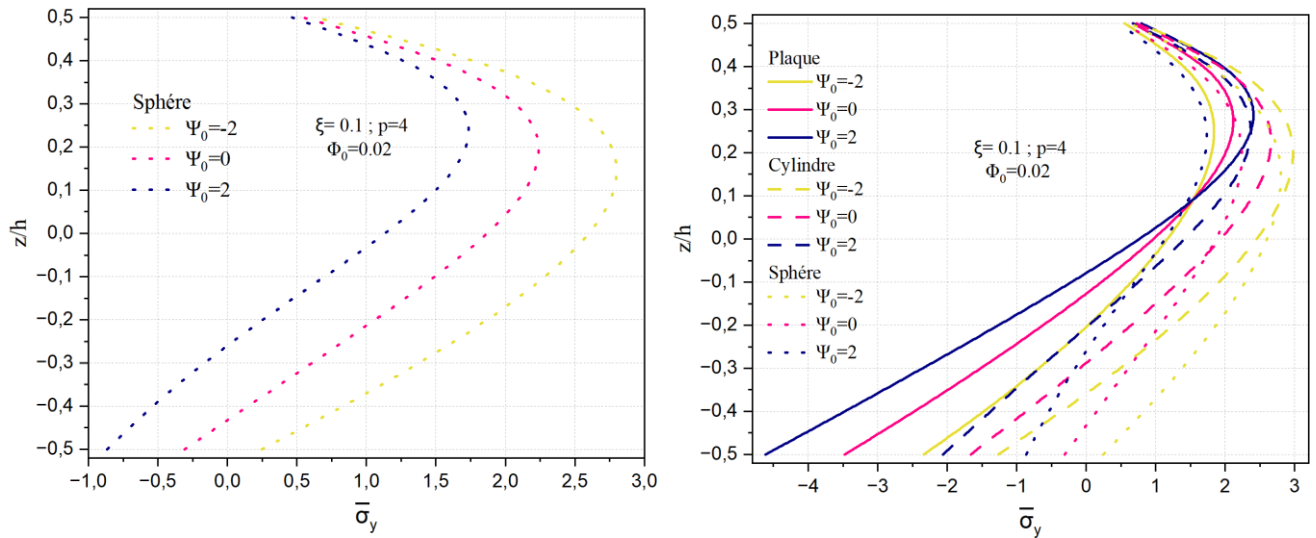


**Fig. II.9.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur de la coque poreuse en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique  $\phi_0$ . La porosité  $\xi = 0.1$  et  $p=4$ .

### II.13. Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_y$

Les Figs.II.10 présentées illustrent la distribution de la contrainte normale moyenne  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur normalisée  $z/h$  de structures en matériau à gradient fonctionnel (FGM) Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, soumises à un couplage électromagnétique. Le matériau, composé d'une matrice métallique (Al) enrichie progressivement en alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), présente une variation continue des propriétés mécaniques. Les calculs sont effectués pour un indice de gradient  $p=4$ , et des paramètres de couplage magnétique  $\xi=0,1$ ,  $\phi_0 = 0.02$ , en présence d'un potentiel électrique constant et de différentes intensités de potentiel électrique  $\psi_0 = -2,0,2$ .



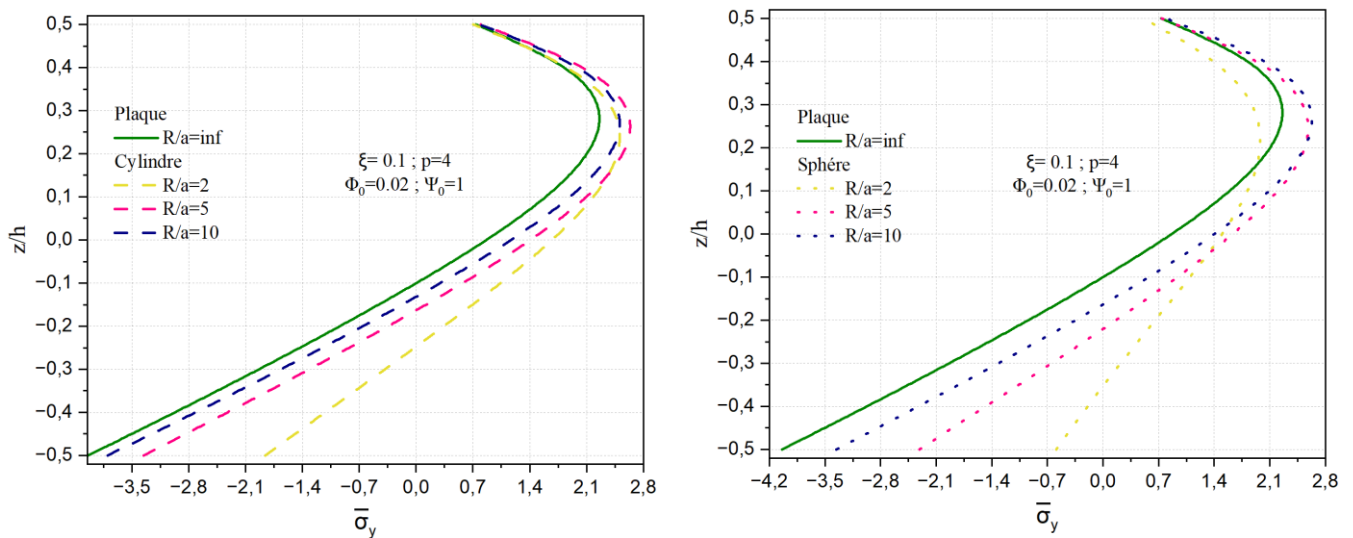


**Fig. II.10.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique  $\psi_0$ .

Pour la plaque, on note que les contraintes les plus compressives environ  $-4,8$ , apparaissent dans la partie inférieure ( $z/h=-0,5$ ), riche en céramique, tandis que les contraintes en traction atteignent environ  $2,4$  dans la couche supérieure. Ce déséquilibre marqué entre compression et traction souligne l'influence du champ magnétique appliqué combiné à la variation des propriétés mécaniques. Le champ magnétique négatif intensifie les effets compressifs dans les zones métalliques, plus sensibles à la magnétostriction.

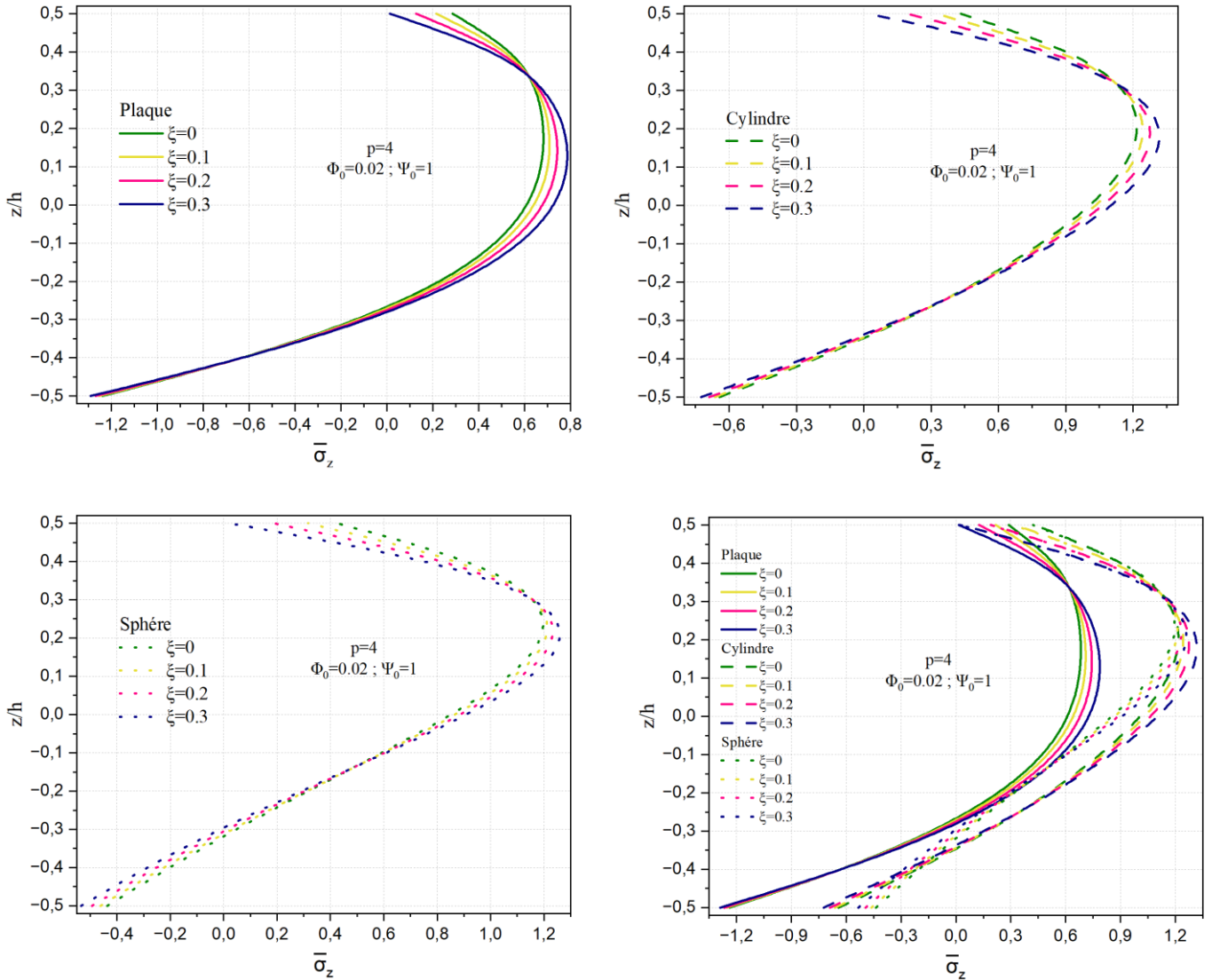
En revanche, dans les structures courbées (cylindriques et sphériques), un comportement inversé est observé : les contraintes maximales en traction sont générées pour un potentiel magnétique positif  $\psi_0 = 2$ . Dans ces cas, la géométrie joue un rôle fondamental. Les contraintes maximales atteignent environ  $2,8$  pour la coque cylindrique et  $2,7$  pour la sphérique, tandis que les valeurs en compression restent plus faibles, autour de  $-2$  et  $-1$  respectivement. Cette réponse est attribuable à l'effet de la courbure, qui modifie la distribution des efforts internes sous l'action du champ magnétique : la double courbure de la sphère renforce la contrainte de confinement, accentuant la traction au sommet.

Dans toutes les configurations, la distribution de  $\bar{\sigma}_y$  est clairement asymétrique, reflet du couplage multiphysique (électromagnétique et mécanique) dans un matériau FGM. Ces résultats mettent en évidence l'influence conjointe du gradient fonctionnel, du champ magnétique, et surtout de la géométrie de la structure. Ils démontrent que l'ajustement du potentiel magnétique permet de moduler efficacement la répartition des contraintes, offrant ainsi un outil de conception pour le contrôle de la réponse mécanique des structures intelligentes à base de FGM Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

**II.14. Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$** 


**Fig. II.11.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques  $R/a$ .

La Fig.II.11 montre l'influence du rapport géométrique  $R/a$  sur la distribution de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_y$  selon l'épaisseur normalisée  $z/h$  pour des coques FGM poreuses soumises à un potentiel électrique constant  $\psi_0 = 1$  et un couplage magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . La comparaison des résultats entre une plaque ( $R/a=\infty$ ) et des coques sphériques de différents rayons de courbure (rapport  $R/a=2,5,10$ ), tandis que le graphe de gauche montre le cas équivalent pour des coques cylindriques. On observe que la courbure a un effet significatif sur l'amplitude et la répartition des contraintes. Au fur et à mesure que le rapport  $R/a$  augmente, la contrainte maximale en compression s'accroît, atteignant environ -4,2 pour la plaque et -0,7 et -2,1 lorsque  $R/a=2$  dans les deux géométries respectivement sphère et cylindre. Cette accentuation est plus marquée dans les coques sphériques que cylindriques pour les grands rapports  $R/a$ , ce qui s'explique par une double courbure dans le cas sphérique, induisant un effet de confinement plus important. À l'opposé, lorsque  $R/a$  augmente (vers une plaque), les profils tendent vers celui de la structure plane, avec une augmentation notable de la contrainte maximale dans la couche de céramique. Dans tous les cas, les distributions restent asymétriques à travers l'épaisseur, signe de l'influence conjointe de la porosité, du gradient fonctionnel et de la géométrie.

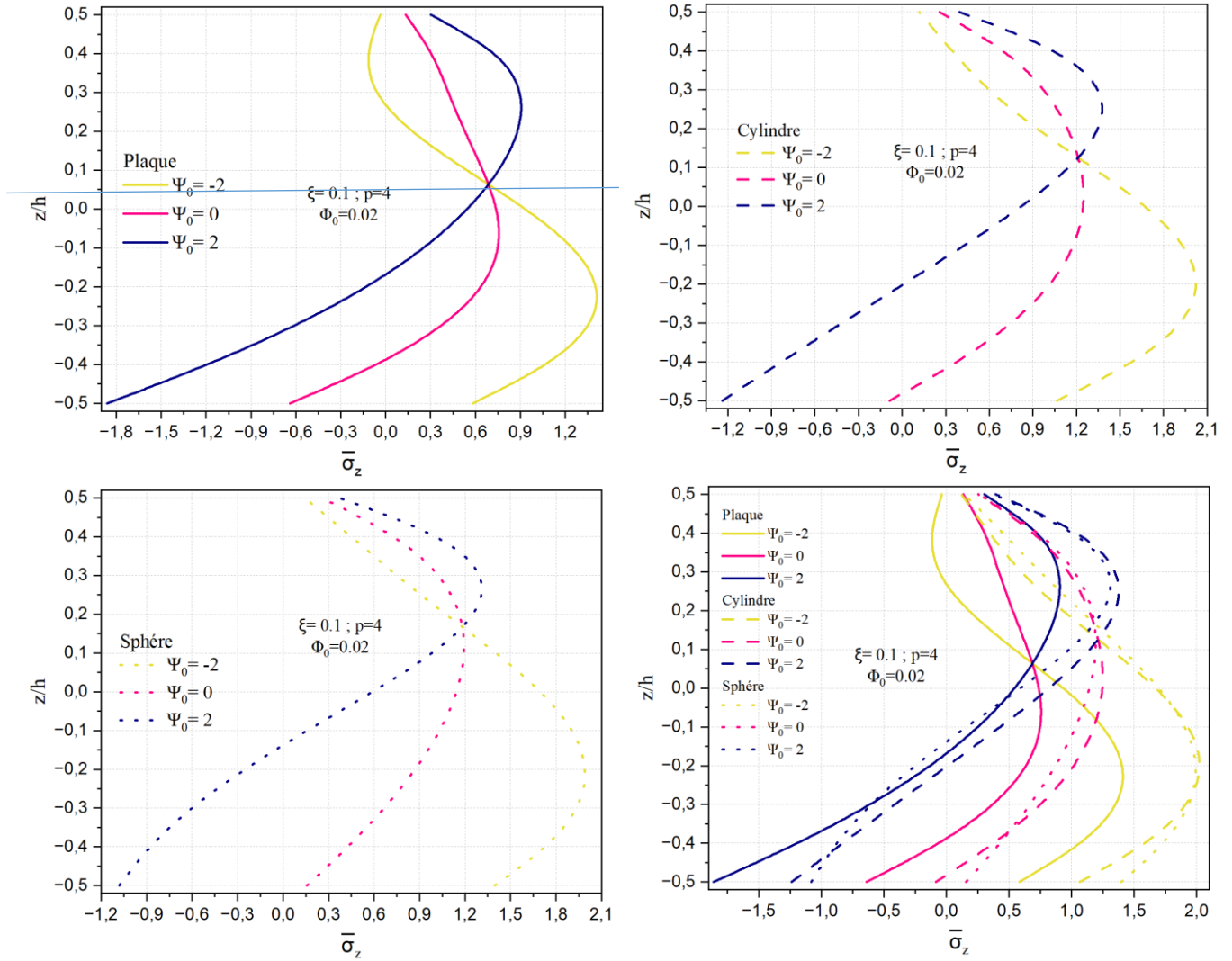
**II.15. Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte transverse  $\bar{\sigma}_z$  dans les structures**


**Fig. II.12.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_z$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\xi$ ).

Les Figs. II.12 montrent à travers l'épaisseur respectivement la variation des contraintes normales transverse  $\bar{\sigma}_z$  pour différentes valeurs du facteur de porosité  $\xi$ . Il est à signaler que les allures de contraintes sont similaires à celles  $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\sigma}_y$  ainsi elles sont maximales dans la moitié de la partie supérieure de la coque et minimales au niveau de la surface inférieure de la coque quelle que soit la porosité. La contrainte normale  $\bar{\sigma}_z$  dans la plaque ne dépend pas de  $\xi$  pour deux positions  $z < -0,2$  et à  $z \approx 0,32$  alors que, pour les autres structures une position est notée à  $z \approx 0,3$ . La contrainte  $\bar{\sigma}_z$

maximale pour le cylindre et la sphère est de l'ordre de 1.2 à  $z/h=0.2$ . La contrainte  $\bar{\sigma}_z$  minimale est de -1.2 à la surface de la céramique. Dans ce cas  $\bar{\sigma}_z$  est plus faible que  $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\sigma}_y$ .

### II.16. Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_z$



**Fig.II.13.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_z$  à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique  $\psi_0$ .

La Fig. II.13 met en exergue la distribution de la contrainte normale transverse  $\bar{\sigma}_z$  à travers l'épaisseur de la structures, plaque, cylindre et sphère, poreuse en matériau à gradient fonctionnel (FGM), pour différentes valeurs du potentiel électrique  $\psi_0 = -2, 0, 2$  avec un indice de puissance  $p=4$ , une porosité 0.1 et un paramètre d'interaction magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . Pour la plaque, il apparaît clairement que le champ électrique a un effet significatif sur le comportement mécanique de la structure en présence du potentiel magnétique constant. Lorsque  $\psi_0 = -2$ , la contrainte atteint un minimum d'environ -1.8, indiquant une forte compression dans la partie inférieure de la plaque

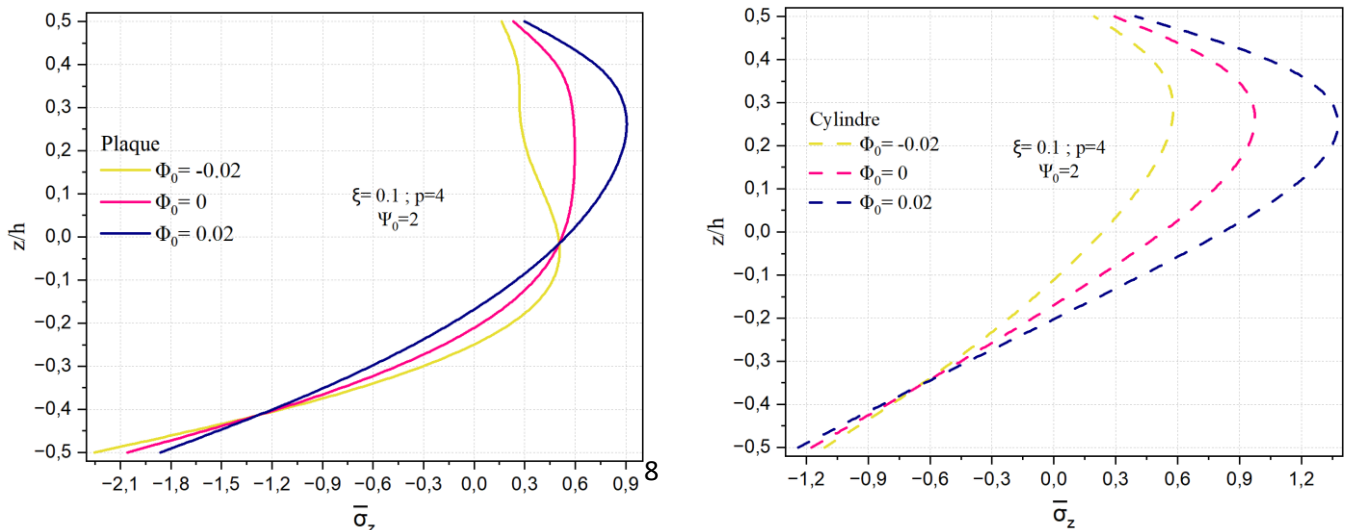
(céramique), tandis que pour  $\psi_0 = 2$ , la contrainte maximale en traction atteint environ 0.6 au niveau de la surface inférieure ( $z/h=-0,5$ ). A un potentiel électrique nul  $\psi_0 = 0$  la contrainte est de l'ordre de -0.6. Les contraintes de traction sont faibles au niveau de couche supérieure. A  $z/h=0,05$  la contrainte transverse est indépendante des potentiels électrique et magnétique. Compte tenu des autres structures (cylindrique et sphérique), leur comportement est identique à celui de la plaque, sauf que les valeurs de contrainte sont plus réduites en compression et plus importantes en traction. L'allure de la contrainte normale transverse est asymétrique, visible pour toutes les valeurs du potentiel électrique, résulte de l'interaction entre le champ magnétique, le gradient de composition du matériau et la porosité.

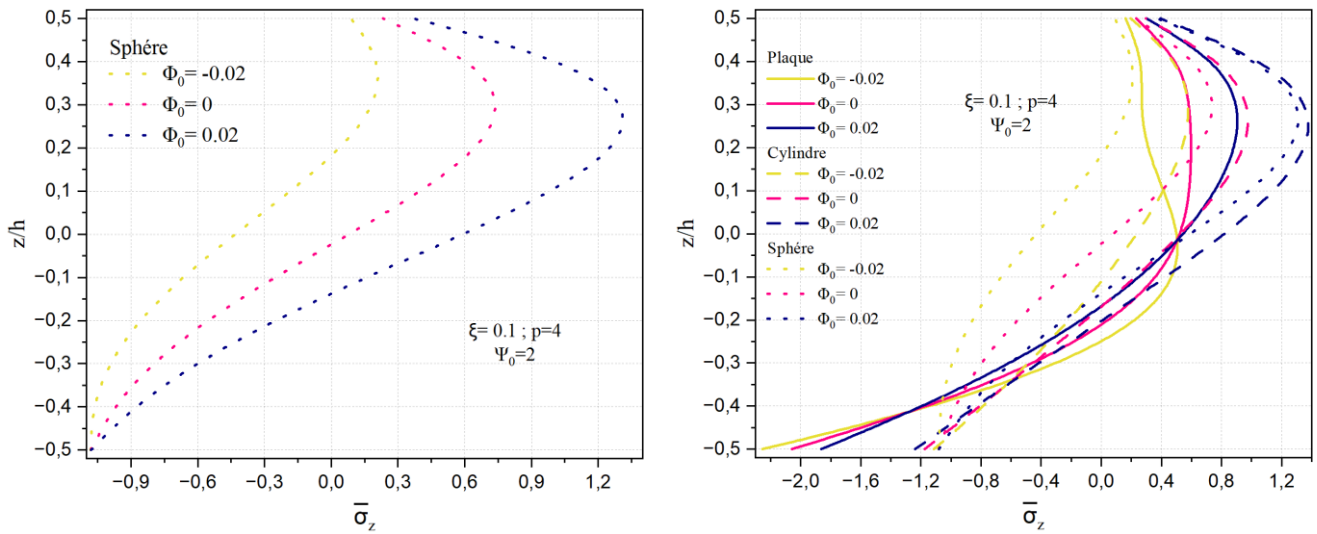
### II.17. Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_z$

La Fig. II.14 illustre la distribution de la contrainte normale transverse à travers l'épaisseur d'une coque poreuse en matériau à gradient fonctionnel (FGM), pour différentes valeurs du potentiel magnétique  $\phi_0$ , un indice de puissance de la distribution des propriétés matériaux  $p=4$ , et en présence d'un champ électrique  $\psi_0 = 2$ . La porosité intrinsèque du matériau est également prise en compte dans l'analyse,  $\xi = 0.1$ .

Il est à observer que les contraintes normales minimales se localisent dans la couche en céramique de la plaque, avec une valeur avoisinant -2.1, tandis que les contraintes maximales, de l'ordre de 0.90 apparaissent dans la région supérieure de la coque (environ à  $z/h=0,25$ ) lorsque le potentiel magnétique est positif  $\phi_0 = 0.02$ . La contrainte en compression s'avère environ deux fois plus importante que celle en traction, cette dernière étant plus marquée dans les autres configurations structurelles.

Par ailleurs, la diminution du champ potentiel magnétique, allant d'une valeur négative à une valeur positive, induit une réduction significative de la contrainte maximale : elle diminue d'environ 84 % dans le cas de la géométrie sphérique et de 50 % dans le cas cylindrique. Ce comportement met en évidence l'influence notable du champ magnétique sur la réponse mécanique de la coque FGM poreuse.





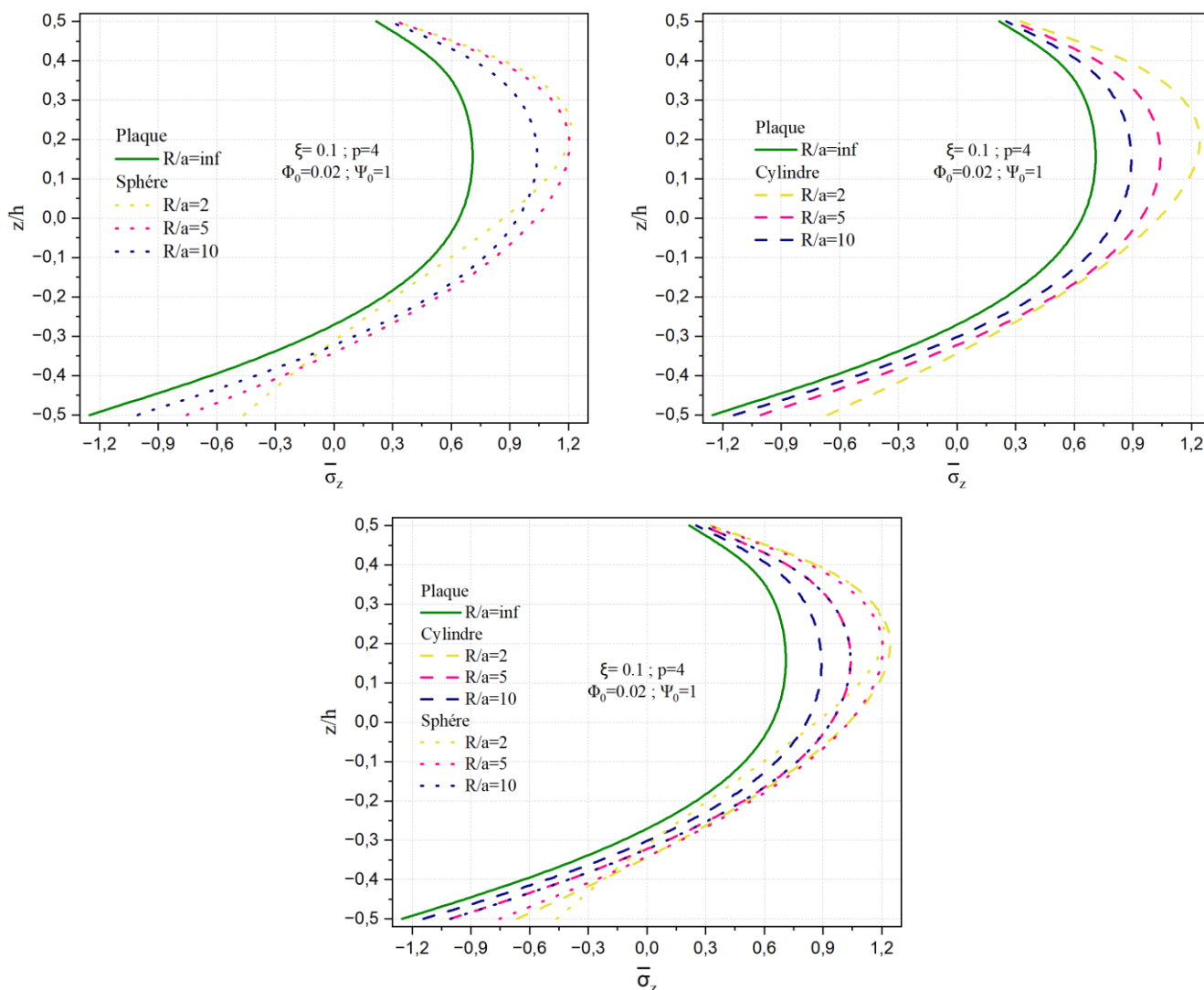
**Fig. II.14.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_z$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique  $\phi_0$ .

### II.18. Effet du rapport géométrique sur la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_z$

La Fig.II.15 présente l'influence du rapport géométrique  $R/a$  sur la distribution de la contrainte normale transverse  $\bar{\sigma}_z$  selon l'épaisseur normalisée  $z/h$ , pour des coques poreuses en matériau à gradient fonctionnel (FGM) soumises à un potentiel électrique constant  $\psi_0 = 1$  et à un couplage magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . La comparaison est effectuée entre une plaque ( $R/a \rightarrow \infty$ ) et des coques sphériques de différents rayons de courbure ( $R/a=2, 5, 10$ ), tandis que le graphe de gauche illustre les résultats pour des coques cylindriques soumises aux mêmes conditions.

Les résultats montrent que la courbure influence de manière significative l'amplitude et la répartition de la contrainte normale. Plus précisément, à mesure que le rapport  $R/a$  décroît, la contrainte maximale en compression devient plus importante. Par exemple, on observe une valeur de  $\sigma z \approx -1.2$  pour la plaque, contre environ 1.2 pour la coque sphérique et la coque cylindrique lorsque  $R/a=2$ .

Cette accentuation de la contrainte est plus marquée dans le cas des coques sphériques, en raison de leur double courbure, qui induit un effet de confinement plus prononcé par rapport aux coques cylindriques, à courbure simple. À l'inverse, lorsque  $R/a$  augmente, les profils de contraintes convergent vers celui d'une structure plane, avec une augmentation notable de la contrainte maximale localisée dans la couche céramique du FGM. Dans l'ensemble, les distributions de  $\bar{\sigma}_z$  restent asymétriques à travers l'épaisseur, ce qui reflète l'influence conjointe de la porosité, de l'hétérogénéité fonctionnelle du et de la géométrie de la coque.

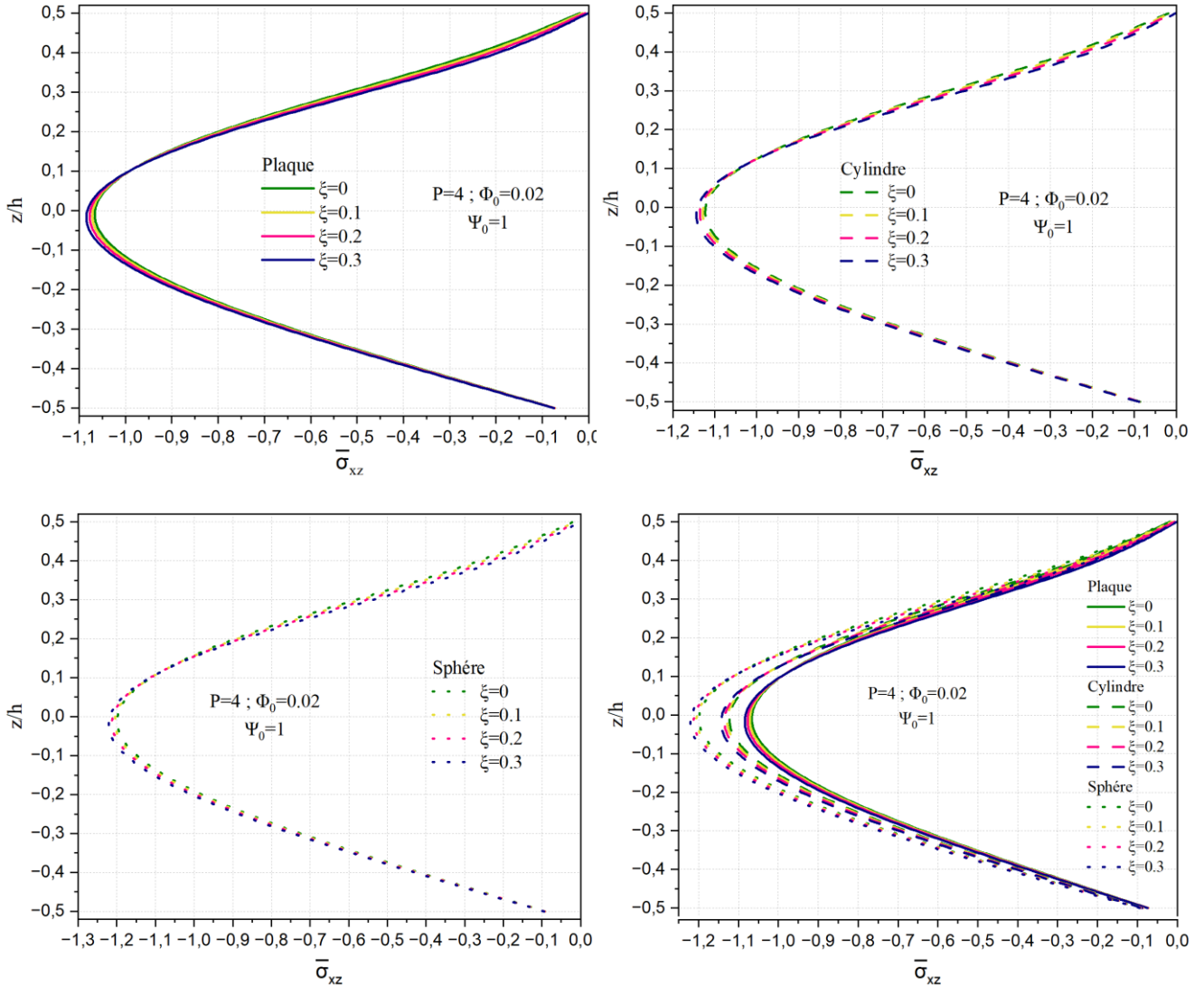


**Fig.II.15.** Variation de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_z$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques  $R/a$ .

## II.19. Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ dans les structures

La Fig. II.16 présente la variation de la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{xz}$  à travers l'épaisseur réduite  $z/h$  pour trois géométries différentes : une plaque, un cylindre et une sphère, en considérant plusieurs valeurs du paramètre de porosité  $\xi$ , qui représente vraisemblablement un facteur d'hétérogénéité du matériau. Dans le cas de la plaque, la distribution de  $\bar{\sigma}_{xz}$  est quasi parabolique et symétrique par rapport au plan médian, avec une valeur maximale au centre ( $z/h=0$ ) et nulle aux faces libres, ce qui correspond au comportement classique d'une plaque en flexion selon les théories de type Reissner-Mindlin ou HSDT. L'augmentation du paramètre  $\xi$  entraîne une légère augmentation

de la contrainte de cisaillement en valeur absolue, traduisant une modification de la rigidité effective au cisaillement due à la variation de la fraction volumique du matériau.



**Fig. II.16.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\xi$ ).

Dans le cas du cylindre, la distribution de  $\bar{\sigma}_{xz}$  reste similaire à celle de la plaque mais devient légèrement asymétrique, ce qui reflète l'influence de la courbure moyenne constante de la coque cylindrique. Le profil conserve néanmoins sa forme globale, avec un maximum au centre. L'augmentation de  $\xi$  a un effet comparable à celui observé pour la plaque, avec une augmentation modérée de la contrainte transverse. En revanche, pour la coque sphérique, la distribution de  $\bar{\sigma}_{xz}$  devient fortement asymétrique. Le maximum ne se situe plus au centre de l'épaisseur, et la forme du profil est significativement influencée par la double courbure. L'effet du paramètre  $\xi$  y est également

plus marqué, indiquant que la combinaison entre la géométrie sphérique et l'hétérogénéité du matériau engendre une redistribution plus complexe des contraintes de cisaillement.

Ainsi, cette étude montre que la géométrie de la structure joue un rôle déterminant dans la distribution des contraintes de cisaillement transverses, et que l'effet d'un paramètre d'hétérogénéité tel que  $\xi$  est amplifié dans les structures à double courbure, comme les coques sphériques. Ces résultats mettent en évidence l'importance de tenir compte à la fois de la géométrie et des propriétés fonctionnelles du matériau dans l'analyse des contraintes internes.

L'analyse des figures révèle que la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{xz}$  atteint des valeurs maximales différentes selon la géométrie considérée et le paramètre  $\xi$ , qui représente l'effet d'une hétérogénéité du matériau. Pour la plaque, la contrainte maximale  $\bar{\sigma}_{xz}$  augmente légèrement avec  $\xi$ , passant d'environ 1.02 pour  $\xi=0$  à environ 1.11 pour  $\xi=0.3$ . Cette croissance modérée suggère que l'augmentation de  $\xi$  réduit la rigidité effective du matériau, nécessitant un effort de cisaillement accru pour équilibrer les déformations induites.

Dans le cas du cylindre, les valeurs maximales sont légèrement plus élevées, allant d'environ 1.06 à 1.14 lorsque  $\xi$  croît de 0 à 0.3. Cette hausse plus marquée s'explique par la courbure moyenne du cylindre, qui modifie la répartition des efforts internes et rend la structure plus sensible à l'effet de gradient ou de porosité. Pour la sphère, l'effet combiné de la double courbure et de l'augmentation de  $\xi$  est encore plus significatif : la contrainte maximale passe d'environ 1.20 pour  $\xi=0$  à environ 1.29 pour  $\xi=0.3$ . La courbure dans deux directions intensifie les concentrations de contraintes de cisaillement, et l'hétérogénéité du matériau accentue encore cette amplification.

Donc, la contrainte maximale de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{xz}$  augmente avec le paramètre  $\xi$  dans les trois géométries étudiées, avec une intensité croissante de la plaque vers la sphère. Ce comportement met en évidence l'interaction entre la géométrie de la structure et les propriétés variables du matériau, soulignant l'importance d'une modélisation précise pour prédire les réponses mécaniques internes dans des structures complexes.

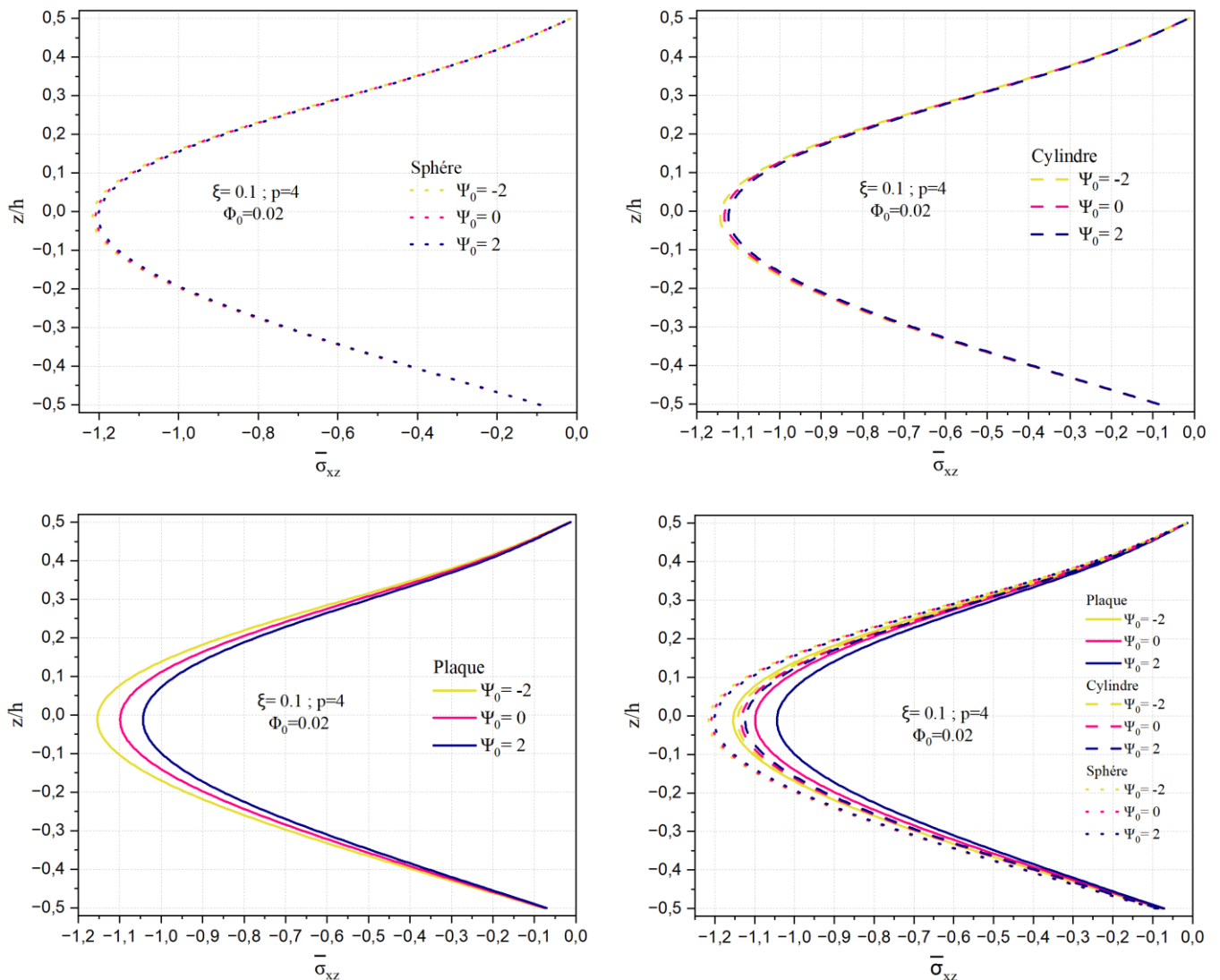
## II.20. Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$

Les Figs.II.17 illustrent l'influence du paramètre  $\psi_0$  sur la distribution de la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{xz}$  à travers l'épaisseur réduite  $z/h$  pour trois types de structures : une plaque, un cylindre et une sphère. Les autres paramètres, à savoir  $\xi=0.1$ ,  $p=4$  et  $\phi_0 = 0.02$ , sont maintenus constants afin d'isoler l'effet de  $\psi_0$ , qui semble représenter un champ transversal ou un gradient de matériau. On observe que l'impact de  $\psi_0$  dépend fortement de la géométrie de la structure.

Dans le cas de la plaque, la distribution de  $\bar{\sigma}_{xz}$  reste symétrique, mais son intensité varie significativement selon la valeur de  $\psi_0$ . Une augmentation de  $\psi_0$  engendre une augmentation de la contrainte transverse maximale, traduisant une concentration accrue des efforts de cisaillement. Ainsi,

la plaque avec  $\psi_0 = 2$  présente des contraintes bien plus élevées que celle avec  $\psi_0 = -2$ , suggérant que le paramètre  $\psi_0$  joue un rôle similaire à un renforcement ou à un affaiblissement du cisaillement effectif à travers l'épaisseur. Ce comportement est cohérent avec une variation des propriétés mécaniques en direction transverse.

Pour le cylindre, bien que la tendance reste similaire à celle de la plaque (augmentation de  $\bar{\sigma}_{xz}$  avec  $\psi_0$ ), l'effet est nettement plus modéré. Les courbes correspondant aux différentes valeurs de  $\psi_0$  sont très proches, ce qui indique que la courbure moyenne du cylindre agit comme un facteur stabilisant, amortissant l'effet de ce paramètre. La répartition des contraintes y est plus uniforme, ce qui reflète une certaine robustesse géométrique vis-à-vis des variations de propriétés à travers l'épaisseur.



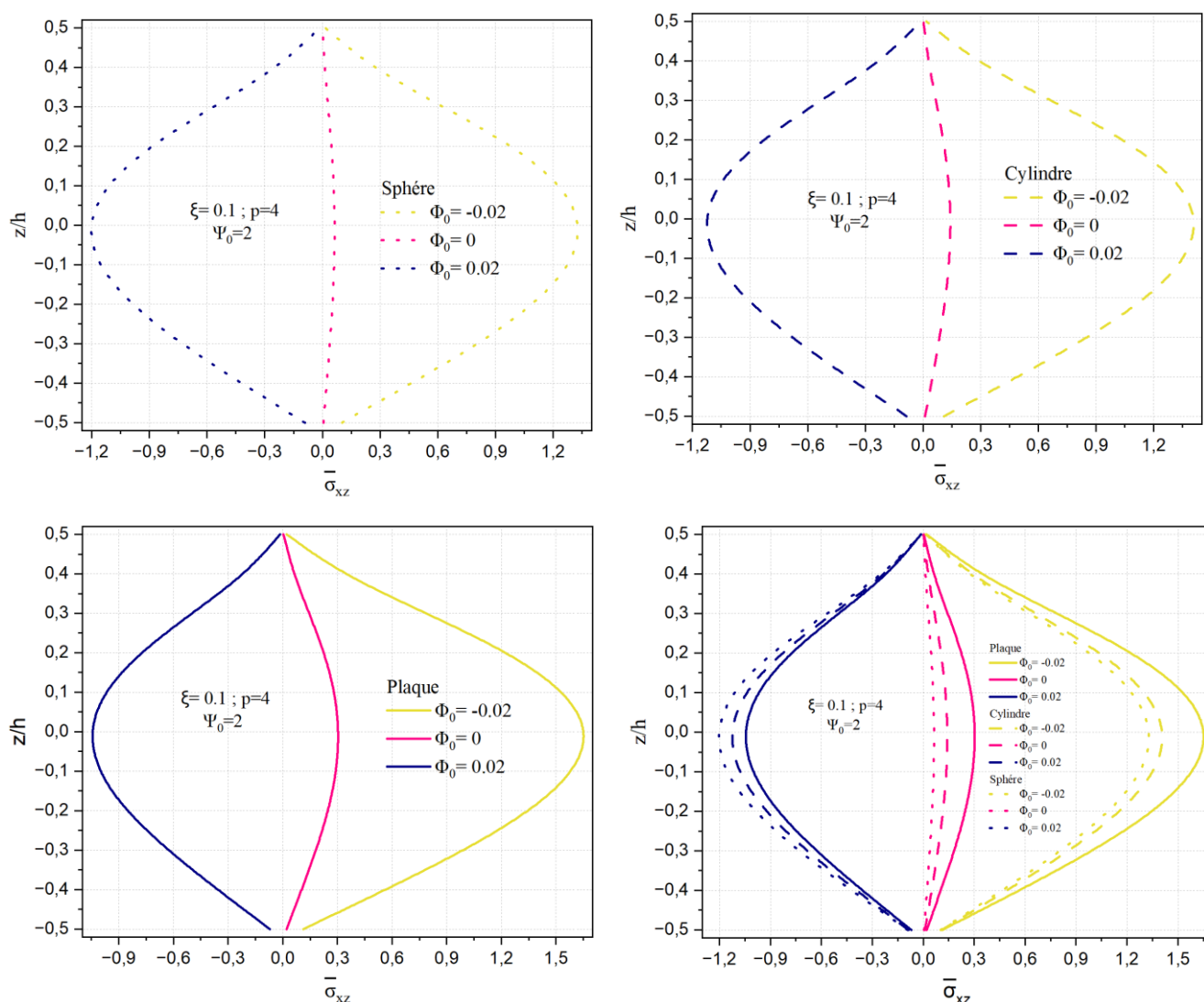
**Fig. II.17.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique  $\psi_0$ .

En revanche, dans le cas de la sphère, la courbure double intensifie nettement l'effet de  $\psi_0$ . On observe une forte asymétrie dans la distribution de la contrainte de cisaillement, surtout pour  $\psi_0 = 2$

, où les contraintes sont nettement concentrées vers la face inférieure de la structure. Cette réponse traduit une interaction complexe entre la géométrie fortement courbée et les effets induits par  $\psi_0$ , avec une amplification locale du cisaillement transverse. Ainsi, la sphère est beaucoup plus sensible aux effets de gradient transverse que les autres configurations.

L'effet de  $\psi_0$  sur la contrainte transverse  $\bar{\sigma}_{xz}$  dépend fortement de la géométrie : il est marqué dans les plaques, atténué dans les cylindres et fortement amplifié dans les sphères. Ces résultats soulignent l'importance de prendre en compte à la fois les propriétés de variation du matériau et la géométrie de la structure pour prédire fidèlement les réponses mécaniques internes, notamment dans les structures courbes fonctionnellement graduées.

## II.21. Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xz}$



**Fig. II.18.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique  $\phi_0$ .

Les Figs.II.18 fournies illustrent la distribution de la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{xz}$  selon l'épaisseur réduite  $z/h$ , pour trois géométries structurelles distinctes — plaque, cylindre et

sphère — en fonction du paramètre de porosité initiale  $\phi_0$ , avec des valeurs fixées de  $\xi=0.1$ ,  $p=4$  et  $\phi_0 = -0.02, 0, 0.02$ . L'objectif est de mettre en évidence l'influence de la porosité et du potentiel magnétique du matériau fonctionnellement gradué (FGM) sur la réponse en cisaillement transverse dans des configurations géométriques variées.

Pour la plaque, la courbe de  $\bar{\sigma}_{xz}$  est fortement influencée par la valeur  $\phi_0$ . Un potentiel magnétique négatif  $\phi_0 = -0.02$  induit une augmentation significative de la contrainte transverse maximale, atteignant des valeurs supérieures à 1,5, ce qui traduit une élévation notable de la rigidité effective en cisaillement dans la zone centrale de la plaque. À l'inverse, un potentiel magnétique positif ( $\phi_0 = 0.02$ ) réduit considérablement cette contrainte, suggérant un matériau plus souple ou endommagé dans les zones critiques. La forme symétrique et convexe des courbes indique que le cisaillement est maximal au centre de la plaque et tend vers zéro aux interfaces, conformément au comportement attendu d'un champ de cisaillement transverse sous flexion pure dans des structures symétriques.

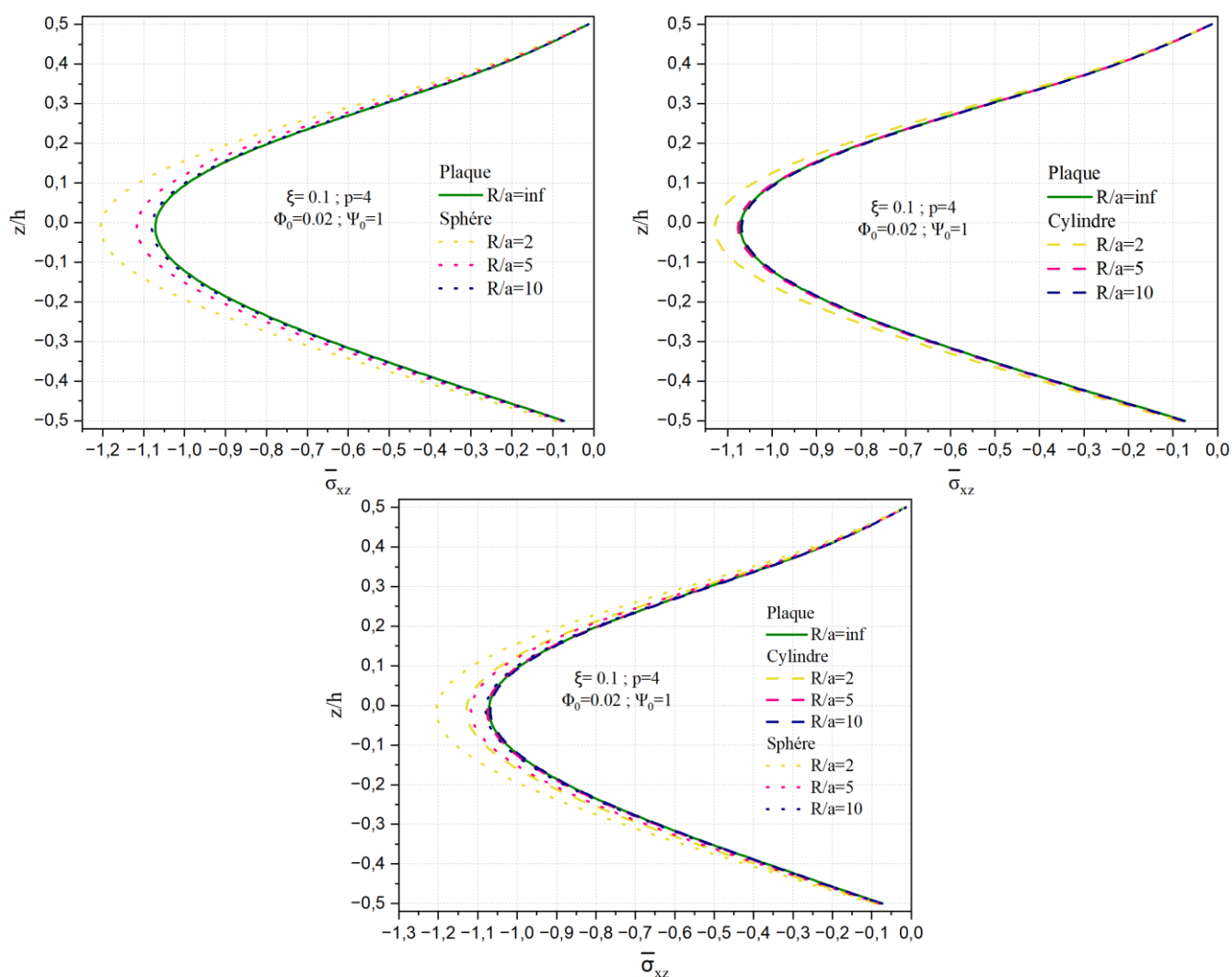
La réponse du cylindre suit une tendance similaire à celle observée dans la plaque, mais avec des intensités légèrement moindres. La variation de  $\phi_0$  influe encore sensiblement sur l'amplitude maximale de  $\bar{\sigma}_{xz}$  bien que l'effet soit atténué par la courbure unidirectionnelle du cylindre. La géométrie cylindrique engendre une répartition plus douce de la contrainte, avec des courbes légèrement moins pentues près des interfaces. Néanmoins, la symétrie reste globalement respectée, indiquant que l'effet de la porosité agit principalement sur l'amplitude du cisaillement plutôt que sur sa distribution géométrique.

Le cas de la sphère présente un comportement plus complexe. Bien que l'effet de  $\phi_0$  soit toujours manifeste, les courbes sont davantage étalées et moins abruptes, suggérant une atténuation plus marquée du cisaillement vers les faces supérieure et inférieure. La double courbure de la sphère semble amortir l'effet direct de la porosité sur la distribution du cisaillement. Néanmoins, les valeurs extrêmes de  $\bar{\sigma}_{xz}$  restent fortement influencées : une porosité positive génère une augmentation prononcée de la contrainte transverse, tandis qu'une porosité négative en réduit considérablement l'intensité. Cette réponse souligne l'interaction complexe entre les propriétés de matériau (via  $\phi_0$ ) et la géométrie intrinsèque dans le contrôle du comportement mécanique.

Les résultats confirment que le paramètre de porosité initiale  $\phi_0$  joue un rôle critique dans la modulation des contraintes de cisaillement transverse dans les structures FGM. Plus spécifiquement, une porosité positive accroît notablement la rigidité apparente, augmentant les contraintes internes, tandis qu'une porosité négative les atténue. Par ailleurs, la géométrie influence fortement la manière dont ces effets se manifestent : les plaques sont les plus sensibles à  $\phi_0$ , suivies des cylindres, puis des sphères, qui présentent une réponse plus régularisée. Ces observations sont essentielles pour la conception optimisée de structures FGM, notamment en ce qui concerne la distribution de la porosité dans les applications où les contraintes de cisaillement sont prépondérantes.

## II.22. Effet du rapport géométrique sur la variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xz}$

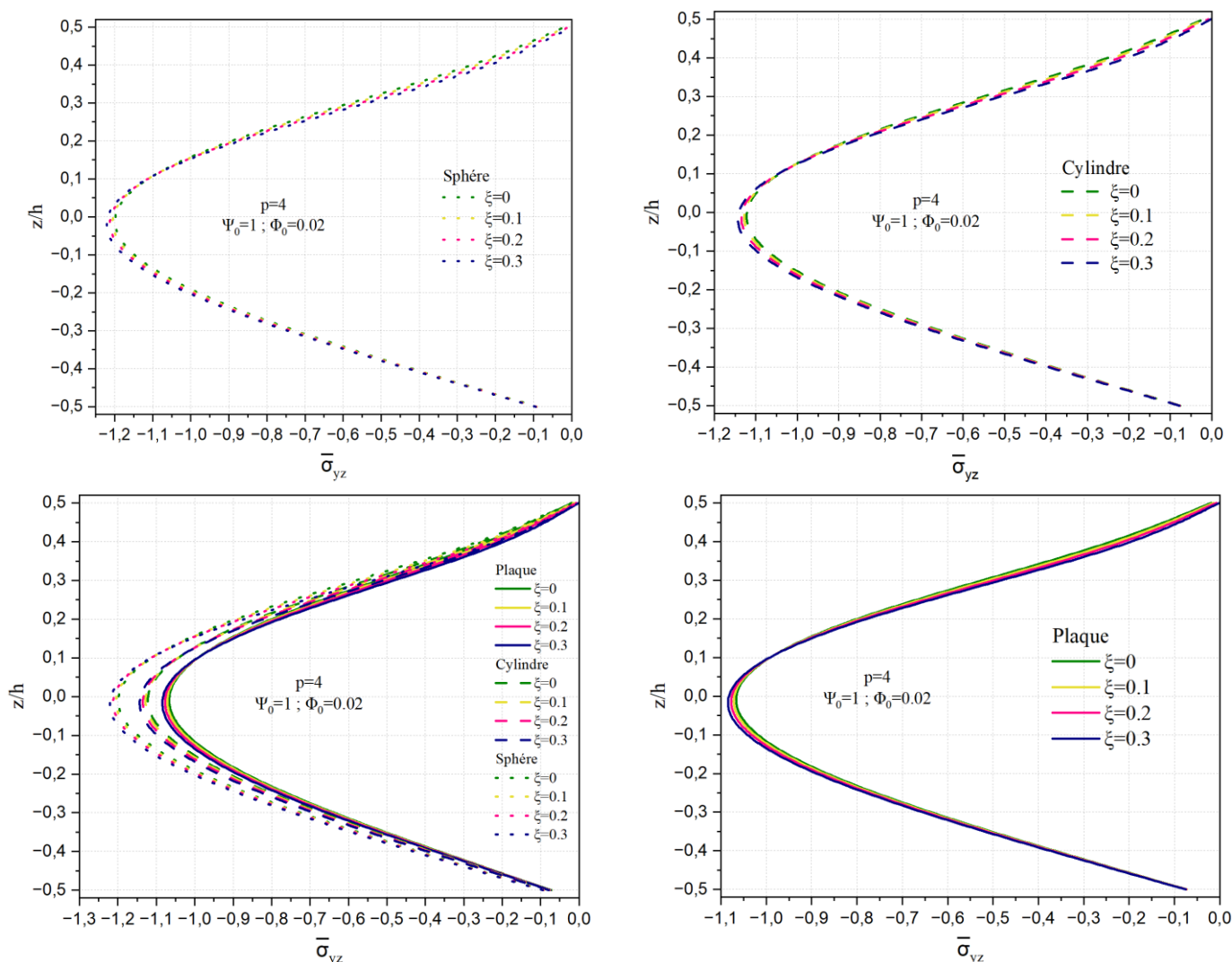
La Fig.II.19 montre l'influence du rapport géométrique  $R/a$  sur la distribution de la contrainte cisaillement  $\bar{\sigma}_{xz}$  selon l'épaisseur normalisée  $z/h$  pour des coques FGM poreuses soumises à un potentiel électrique constant  $\psi_0 = 1$  et un couplage magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . La comparaison des résultats entre une plaque ( $R/a = \infty$ ) et des coques sphériques de différents rayons de courbure (rapport  $R/a = 2, 5, 10$ ), tandis que le graphe de gauche montre le cas équivalent pour des coques sphériques. On observe que la courbure a un effet significatif sur l'amplitude et la répartition des contraintes. Au fur et à mesure que le rapport  $R/a$  décroît, la contrainte maximale en compression croît, atteignant environ -1 pour la plaque et -1.2, -1.1 lorsque  $R/a = 2$  dans les deux géométries respectivement sphère et cylindre. Cette accentuation est plus marquée dans les coques sphériques que cylindriques pour les petits rapports  $R/a$ , ce qui s'explique par une double courbure dans le cas sphérique, induisant un effet de confinement plus important.



**Fig. II.19.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{xz}$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques  $R/a$ .

### II.23. Effet de la porosité sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$

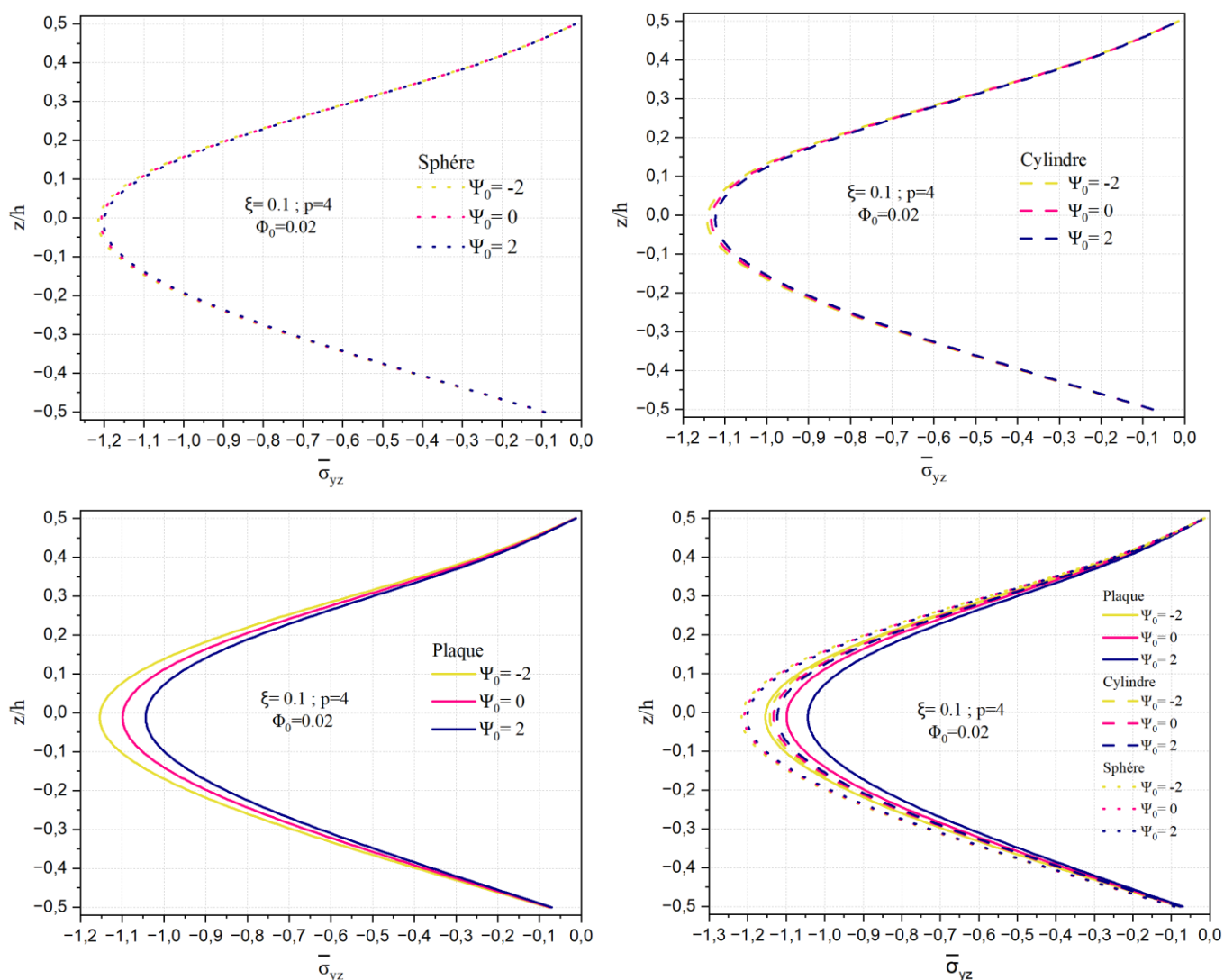
Dans ce cas, le comportement est similaire à celui du cas de la Fig.II.16.



**Fig. II.20.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{yz}$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\zeta$ ).

### II.24. Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$

La Fig.II.21 représente la distribution de la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{yz}$  à travers l'épaisseur normalisée  $z/h$ , pour différentes géométries (sphère, cylindre, plaque plane) en fonction du potentiel électrique  $\psi_0$ , avec un matériau FGM caractérisé par un indice de gradation  $p=4$ , une porosité  $\xi=0,1$  et un potentiel magnétique fixé à  $\phi_0 = 0.02$ .

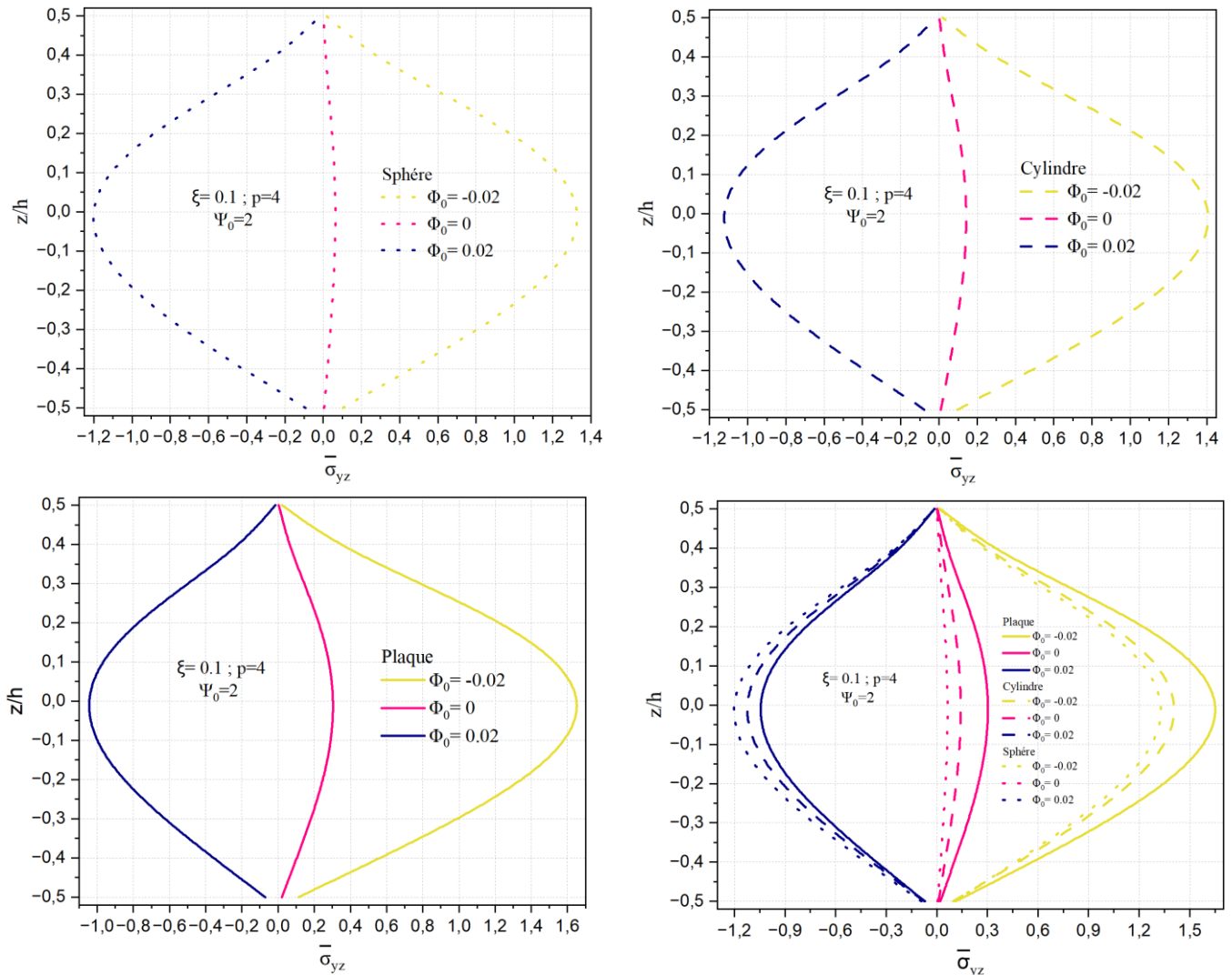


**Fig. II.21.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{yz}$  à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique  $\psi_0$ .

Dans les trois sous-figures, on observe que la contrainte  $\bar{\sigma}_{yz}$  est strictement négative à travers l'épaisseur, avec un profil globalement symétrique, dont l'intensité maximale est centrée autour du plan médian ( $z/h=0$ ). L'influence du potentiel électrique  $\psi_0$  est clairement visible : lorsqu'il augmente de  $-2$  à  $2$ , la contrainte devient progressivement plus intense (en valeur absolue), indiquant une forte sensibilité du cisaillement transverse à l'effet électromécanique. Dans le cas de la géométrie sphérique, cette sensibilité est très marquée : les courbes montrent une variation significative de  $\bar{\sigma}_{yz}$  entre les cas  $\psi_0 = -2, 0, 2$ . L'effet de  $\psi_0$  semble amplifier ou atténuer le profil selon son signe, modifiant de manière notable l'amplitude du cisaillement.

## II.25. Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{yz}$

Les Figs.II.22 fournies illustrent la distribution de la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{yz}$  selon l'épaisseur réduite  $z/h$ , pour trois géométries structurales distinctes — plaque, cylindre et sphère — en fonction du paramètre de porosité initiale, avec des valeurs fixées de  $\xi=0.1$ ,  $p=4$ ,  $\psi_0$  et  $\phi_0 = -2,0,2$ . L'objectif est de mettre en évidence l'influence du potentiel magnétique et de la porosité initiale du matériau fonctionnellement gradué (FGM) sur la réponse en cisaillement transverse dans des configurations géométriques variées.

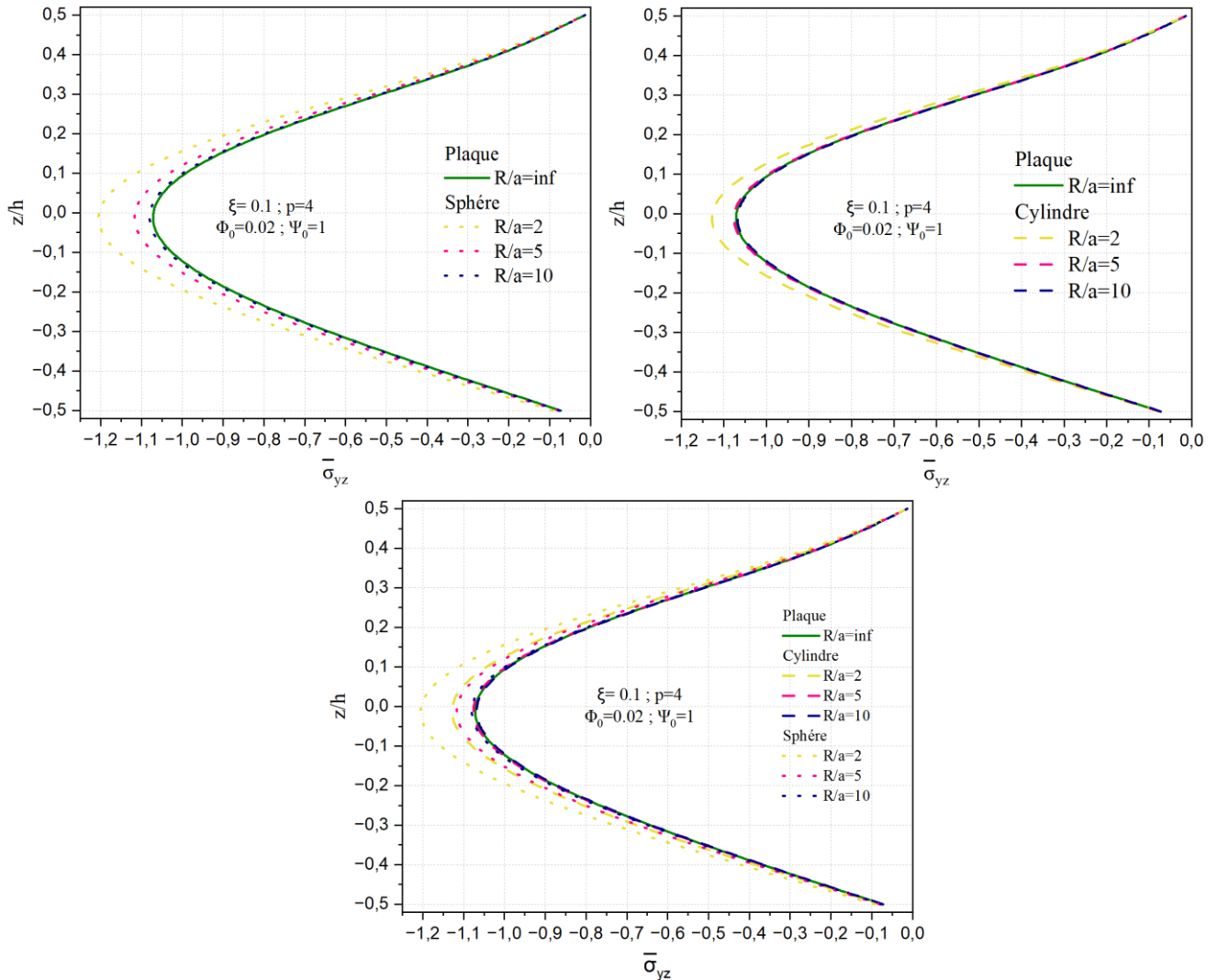


**Fig. II.22.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{yz}$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique  $\phi_0$ .

Pour la plaque, la courbe de  $\bar{\sigma}_{xz}$  est fortement influencée par la valeur  $\phi_0$ . Un potentiel magnétique  $\phi_0 = -0.02$  induit une augmentation significative de la contrainte transverse maximale, atteignant des valeurs supérieures à 1.4, ce qui traduit une élévation notable de la rigidité effective en cisaillement

dans la zone centrale de la plaque. À l'inverse, une porosité négative ( $\phi_0 = 0.02$ ) réduit considérablement cette contrainte, suggérant un matériau plus souple ou endommagé dans les zones

Critiques. La forme symétrique et convexe des courbes indique que le cisaillement est maximal au centre de la plaque et tend vers zéro aux interfaces, conformément au comportement attendu d'un champ de cisaillement transverse sous flexion pure dans des structures symétriques.



**Fig. II.23.** Variation de la contrainte de cisaillement transverse  $\bar{\sigma}_{yz}$  à travers l'épaisseur de la coque en FGM pour différents rapports géométriques  $R/a$ .

La Fig. II.23 montre la variation de la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{yz}$  à travers l'épaisseur normalisée  $z/h$  d'une plaque FGM soumise à des champs électrique et magnétique, avec une porosité  $\xi=0.1$ , un indice de gradation  $p=4$ , un potentiel électrique  $\psi_0 = 1$  et un potentiel magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . Deux géométries courbes sont considérées : sphérique et cylindrique, comparées à une plaque plane ( $R/a = \infty$ ). Contrairement à la contrainte  $\bar{\sigma}_{yz}$  ici la contrainte  $\bar{\sigma}_{yz}$  reste négative sur toute l'épaisseur et présente un profil relativement symétrique, avec un maximum (en valeur absolue) autour de la fibre neutre. On observe que l'effet de la courbure est moins marqué que

pour  $\bar{\sigma}_{yz}$  bien que l'influence de la géométrie sphérique soit légèrement plus notable que celle du cylindre. Pour  $R/a=2$ , la contrainte devient plus intense, mais l'écart avec la plaque plane demeure modéré. Ce comportement suggère que la contrainte  $\bar{\sigma}_{yz}$  étant associée au cisaillement transverse, est moins sensible à la courbure que le cisaillement dans le plan, et principalement influencée par la variation des propriétés mécaniques selon  $z$ , induite par le gradient de matériau et la porosité. En somme, l'effet de la courbure sur  $\bar{\sigma}_{yz}$  est présent mais reste secondaire comparé à celui observé pour  $\bar{\sigma}_{xy}$ .

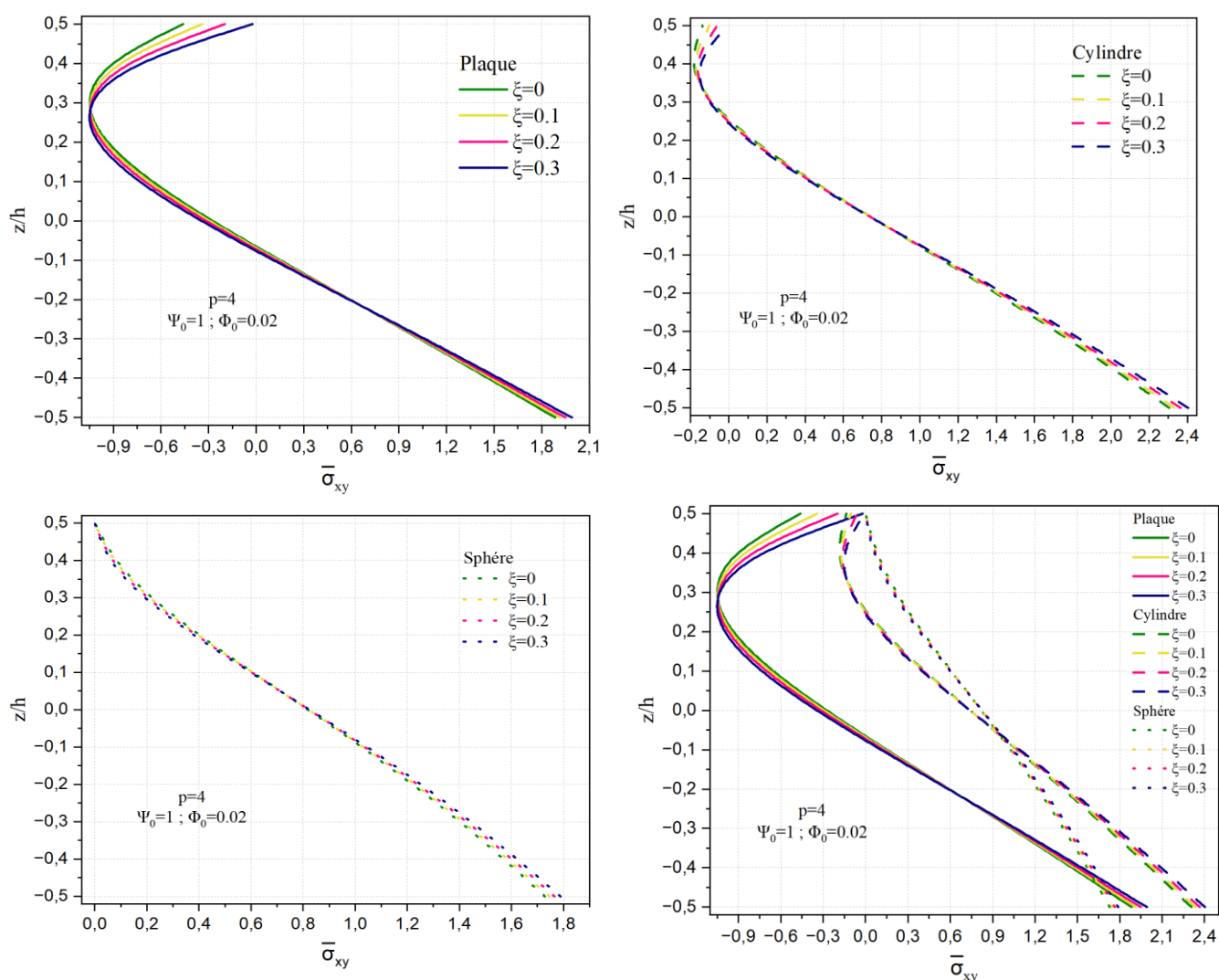
## II.26. Effet de la porosité sur l'évolution de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$ dans les structures

La Fig. II.24 illustre la distribution de la contrainte de cisaillement  $\bar{\sigma}_{xy}$  à travers l'épaisseur normalisée  $z/h$  pour trois types de géométries (plaque, cylindre et sphère), en tenant compte de l'effet de la porosité via différents taux  $\xi$  en FGM sous l'effet du potentiel électrique et du potentiel magnétique. Dans le cas de la plaque, la variation de  $\bar{\sigma}_{xy}$  présente un profil fortement non linéaire caractéristique des théories de cisaillement d'ordre élevé, avec des valeurs presque nulles à la surface supérieure libre et un maximum bas de la plaque. L'augmentation du taux de porosité entraîne une diminution progressive de l'intensité de la contrainte maximale, traduisant l'effet d'assouplissement induit par la présence de pores dans le FGM. Cet affaiblissement faible est d'autant plus marqué que le matériau présente une configuration plane, où les mécanismes de redistribution des contraintes sont plus sensibles à l'hétérogénéité matérielle. La contrainte minimale se trouve dans la partie supérieure  $-0.95$  à  $z/h=0.25$ .

En revanche, pour les structures cylindriques, la contrainte  $\bar{\sigma}_{xy}$  conserve une variation non linéaire, mais moins accentuée que dans le cas plan. Les courbes correspondant aux différentes porosités restent proches, suggérant que la géométrie incurvée favorise une répartition plus uniforme des efforts transverses, atténuant ainsi l'influence de la porosité. L'effet de la porosité reste perceptible mais modéré, en raison du rôle stabilisateur de la courbure longitudinale qui agit comme une barrière géométrique aux concentrations de contraintes.

Enfin, dans le cas des coques sphériques, la distribution de  $\bar{\sigma}_{xy}$  apparaît quasi linéaire, indiquant un comportement mécanique particulièrement homogène. L'influence de la porosité  $y$  est pratiquement négligeable, les courbes étant quasiment superposées pour l'ensemble des valeurs de  $\xi$ . Cette insensibilité relative est attribuable à la double courbure intrinsèque de la géométrie sphérique, qui engendre une rigidité accrue et une dissipation efficace des charges transversales dans toutes les directions, réduisant de manière significative les effets localisés induits par la porosité. Les contraintes de cisaillement les plus faibles se trouvent dans la plaque.

Ces résultats soulignent la pertinence de la HSDT pour capturer les effets fins de gradient de cisaillement dans les structures composites poreuses, tout en mettant en évidence le rôle crucial de la géométrie dans la sensibilité mécanique à l'endommagement par porosité. Tandis que les plaques se révèlent vulnérables à l'effet de dégradation, les coques incurvées, notamment sphériques, présentent une robustesse accrue, suggérant leur aptitude à des applications où des performances mécaniques stables sont requises malgré la présence de défauts microstructuraux.

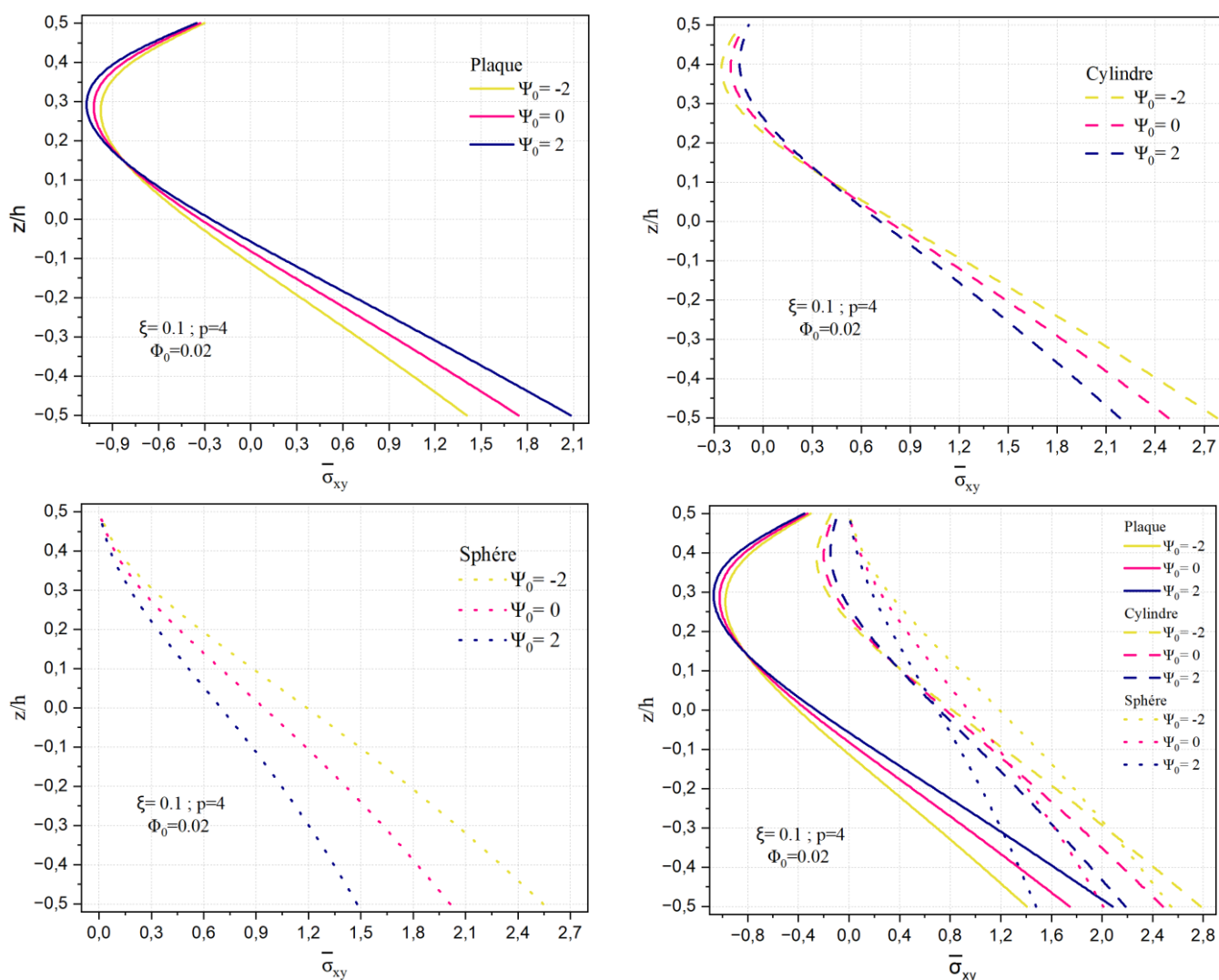


**Fig. II.24.** Variation de la contrainte  $\bar{\sigma}_{xy}$  à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de porosité ( $\xi$ ).

## II.27. Effet du potentiel électrique sur la variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$

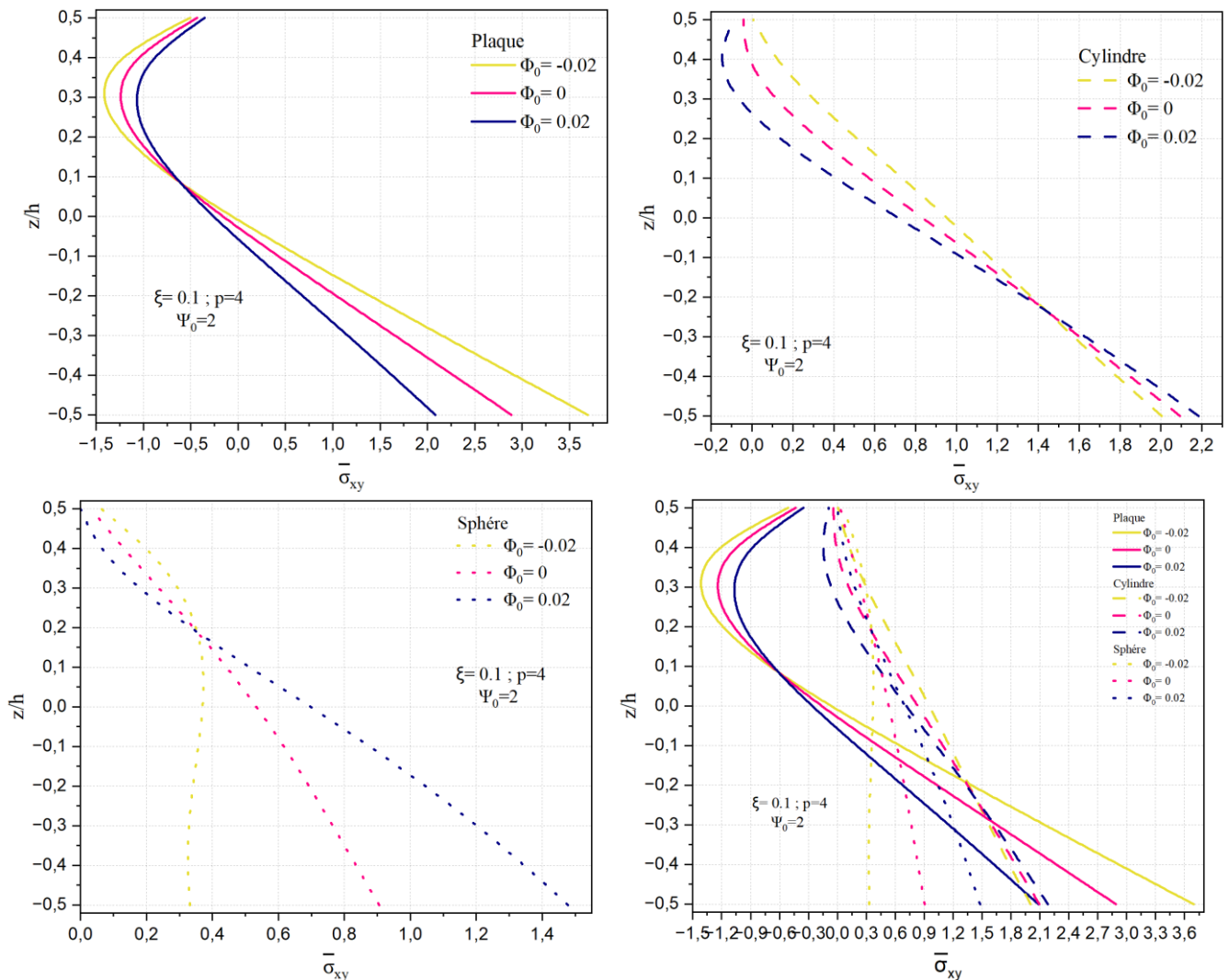
Les Figs. 25 présentées illustrent la distribution de la contrainte de cisaillement transverse normalisée  $\bar{\sigma}_{xy}$  selon l'épaisseur normalisée  $z/h$ , pour différentes géométries (sphère, cylindre, plaque) et diverses valeurs du paramètre de distribution fonctionnelle des matériaux  $\psi_0 = -2, 0, 2$ , à porosité constante  $\xi=0, 1$ . On observe que l'effet de  $\psi_0$  sur la répartition des contraintes est fortement dépendant de la géométrie : dans le cas de la plaque, l'augmentation de  $\psi_0$  entraîne une nette hausse de la contrainte maximale au centre, traduisant une déplace cette rigidité vers les faces, réduisant ainsi les contraintes internes. Le cylindre montre un comportement intermédiaire, où la variation de  $\bar{\sigma}_{xy}$  reste significative mais moins marquée qu'en plaque. La sphère, quant à elle, présente une répartition quasi linéaire et modérément sensible à  $\psi_0$ , la double courbure contribuant à une répartition plus uniforme des contraintes. Ces résultats confirment que la distribution fonctionnelle du matériau,

couplée à la géométrie de la structure, influence fortement les mécanismes de cisaillement, particulièrement captés par les modèles à haut ordre de cisaillement.



**Fig. II.25.** Variation de la contrainte  $\bar{\sigma}_{xy}$  à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel électrique  $\psi_0$ .

L'application d'un champ électrique modifie l'état de contrainte interne par l'effet piézoélectrique inverse : un potentiel électrique positif ( $\psi_0 > 0$ ) induit des déformations supplémentaires qui renforcent localement la rigidité électromécanique, augmentant ainsi les contraintes de cisaillement, notamment vers les couches électriquement activées. À l'inverse, un potentiel négatif ( $\psi_0 < 0$ ) provoque des déformations de signe opposé, ce qui relâche partiellement les contraintes dans certaines régions. Cette influence est plus marquée dans les plaques, qui ne disposent pas de courbure géométrique pour redistribuer les effets induits, alors que dans les cylindres et les sphères, la courbure tend à lisser la réponse et à disperser plus largement l'effet du champ électrique.

**II.28. Effet du potentiel magnétique sur la variation de la contrainte de cisaillement  $\bar{\sigma}_{xy}$** 


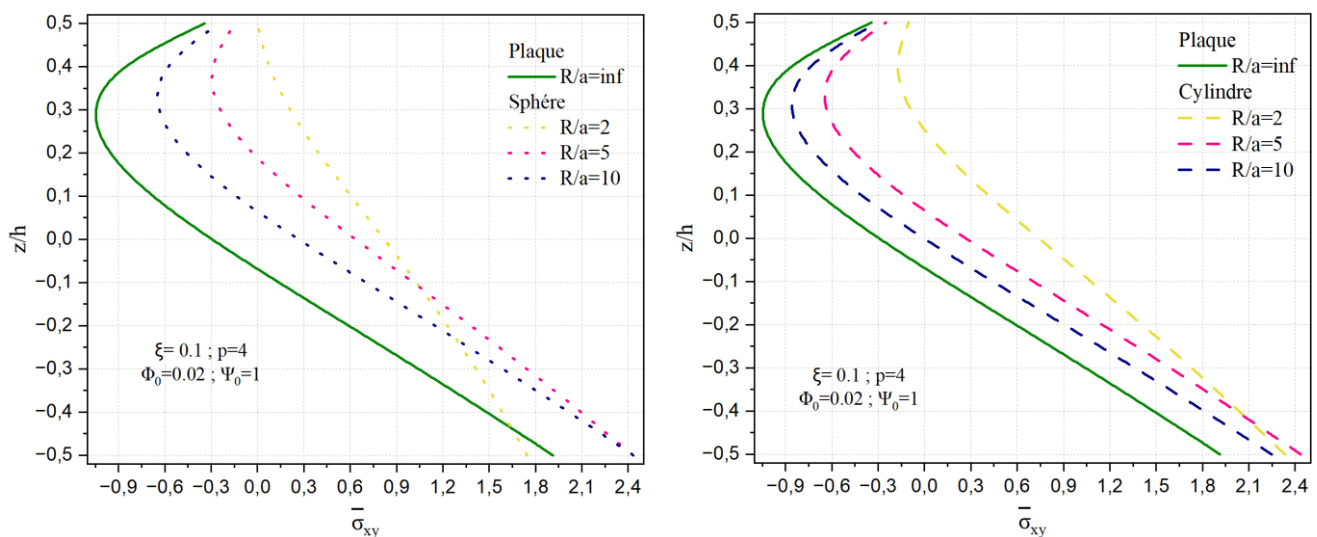
**Fig. II.26.** Variation de la contrainte  $\bar{\sigma}_{xy}$  à travers l'épaisseur d'une coque en FGM pour différentes valeurs de potentiel magnétique  $\phi_0$ .

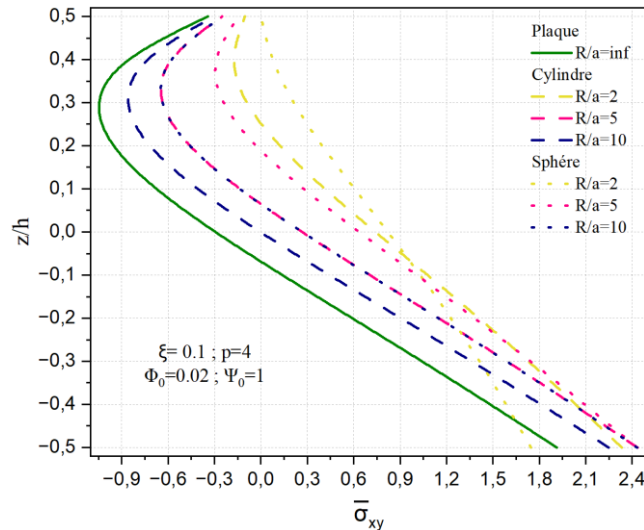
Les Figs. II.26 présentées analysent l'influence du potentiel magnétique  $\phi_0$  sur la distribution de la contrainte de cisaillement  $\bar{\sigma}_{xy}$  en fonction de l'épaisseur normalisée  $z/h$  pour trois géométries (sphère, cylindre, plaque), dans un matériau MEE (magnéto-électro-élastique) avec un potentiel électrique constant  $\psi_0 = 2$ . Dans un tel matériau couplé multiphysique, l'application conjointe de champs électrique et magnétique génère des interactions internes complexes entre déformations mécaniques, polarisation électrique et magnétostriction. L'augmentation du potentiel magnétique  $\phi_0$  (de -0,02 à 0,02) tend à renforcer la réponse mécanique dans toutes les géométries. Pour la plaque, cette variation induit une augmentation significative de la contrainte de cisaillement  $\bar{\sigma}_{xy}$ , surtout vers les surfaces, avec une accentuation de l'asymétrie du profil à travers l'épaisseur. Cela s'explique par l'effet magnéto mécanique induit qui amplifie la déformation sous couplage électromagnétique. Pour le cylindre et la sphère, les effets sont similaires mais plus modulés par la géométrie : dans la sphère,

la réponse est plus sensible et non linéaire avec une forte croissance de  $\bar{\sigma}_{xy}$  pour  $\phi_0 = 0.02$ , alors que le cylindre montre une variation plus progressive et linéaire. Ces résultats mettent en évidence que le champ magnétique appliqué  $\phi_0$ , en présence d'un potentiel électrique donné, agit comme un levier d'activation mécanique supplémentaire, modifiant significativement l'état de contrainte interne selon la configuration géométrique et la position dans l'épaisseur, ce qui est crucial pour le dimensionnement actif de structures MEE dans les dispositifs intelligents, capteurs ou actionneurs.

## II.29. Effet du rapport géométrique sur la variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xy}$

La Fig. II.27 présente la distribution de la contrainte de cisaillement normalisée  $\bar{\sigma}_{xy}$  à travers l'épaisseur d'une plaque FGM soumise à un champ électromagnétique, pour un indice de gradation  $p=4$ , une porosité  $\xi=0,1$ , un potentiel électrique  $\psi_0 = 1$  et un potentiel magnétique  $\phi_0 = 0.02$ . L'effet de la courbure est analysé pour des géométries sphérique et cylindrique, comparées à une plaque plane ( $R/a = \infty$ ). Les résultats montrent que l'introduction d'une courbure réduit significativement la contrainte de cisaillement dans le plan  $xy$ , en particulier pour les plus faibles rapports  $R/a$ . Cette réduction est plus marquée dans le cas sphérique que cylindrique, traduisant une sensibilité accrue à la double courbure. La distribution devient également asymétrique à travers l'épaisseur, notamment en raison du gradient de matériau ( $p = 4$ ) combiné à la porosité, ce qui engendre un déséquilibre des propriétés mécaniques entre les faces supérieure et inférieure. Ainsi, la courbure géométrique, couplée aux effets multiphysiques et à l'hétérogénéité du matériau, joue un rôle déterminant dans l'intensification et la répartition des contraintes de cisaillement.

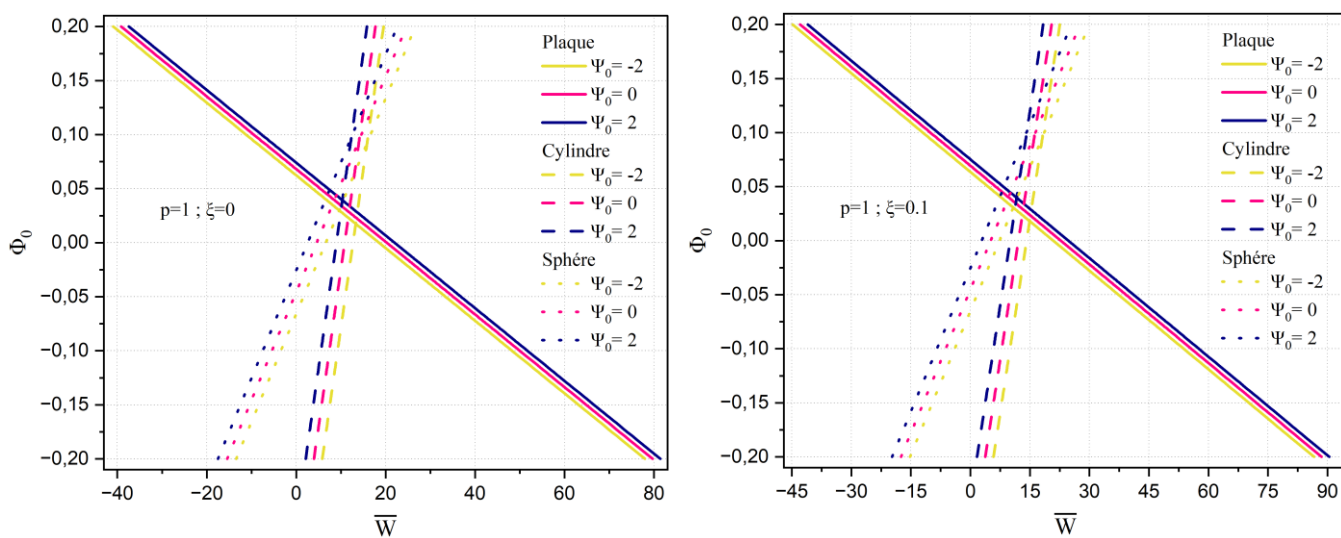




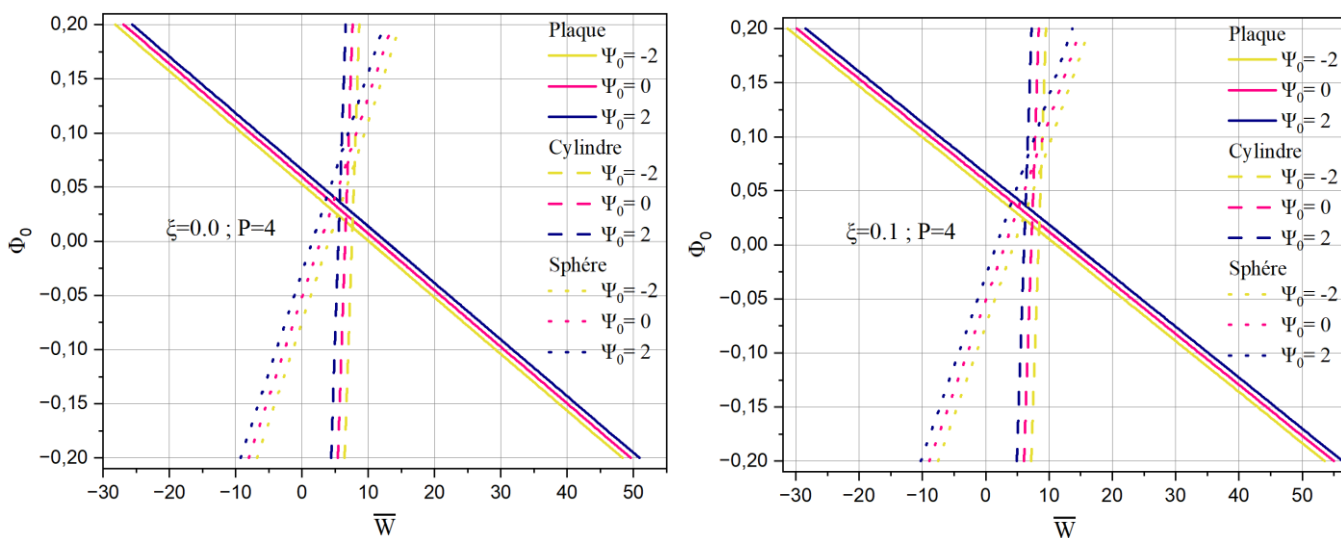
**Fig. II.27.** Variation de la contrainte  $\bar{\sigma}_{xy}$  à travers l'épaisseur d'une structure en FGM pour différents rapports R/a.

### II.30. Evolution de la déflexion dans les structures sous l'effet la variation du potentiel magnétique $\phi_0$

Les Figs. II.28 et 29 présentées analysent la comparaison de la déflexion des trois structures sous l'effet la variation du potentiel magnétique  $\phi_0$  en présence de potentiel électrique constant  $\psi_0 = -2, 0, 2$ . Il est à noter que la variation du potentiel magnétique conduit à une variation très importante de la déflexion de la plaque en comparaison avec les autres structures. Lorsque le potentiel magnétique et positif conduit à un déplacement positif est vice versa. Un comportement inverse se produit pour les structures cylindre et sphère. Il est à remarquer que le matériau FGM possédant l'indice de puissance important ( $p=4$ ) produit une déflexion moins importante



**Fig. II.28.** Déflexion centrale adimensionnelle de la coque FGM ( $p=1$ ) en fonction des différents paramètres a) Effet de  $\phi_0$  sur la déflexion  $\xi = 0$ , b) Effet de  $\phi_0$  sur la déflexion  $\xi = 0.1$



**Fig. II.29.** Déflexion centrale adimensionnelle de la coque FGM ( $p=4$ ) en fonction des différents paramètres a) Effet de  $\phi_0$  sur la déflexion  $\xi = 0$ , b) Effet de  $\phi_0$  sur la déflexion  $\xi = 0.1$



*Conclusion générale  
et perspectives*

## *Conclusion générale et perspectives*

Notre modeste étude a permis de mettre en évidence la complexité du comportement mécanique des structures poreuses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) soumises à des champs électromagnétiques. Il ressort que la réponse des contraintes normales et de cisaillement est le fruit d'interactions synergiques entre plusieurs facteurs : la porosité, la courbure géométrique, le gradient fonctionnel de matériau, ainsi que les potentiels électrique et magnétique appliqués.

Le potentiel électrique, par effet piézoélectrique, induit des déformations importantes, notamment dans les couches supérieures des structures, avec des déplacements amplifiés dans les zones éloignées du plan neutre. En parallèle, le potentiel magnétique exerce un effet tout aussi déterminant : il modifie la répartition des contraintes normales et transverses en fonction de son intensité et de sa polarité. En particulier, un potentiel magnétique négatif tend à intensifier les contraintes en compression, tandis qu'un potentiel positif les atténue. Ces effets sont fortement dépendants de la géométrie : les coques sphériques et cylindriques, du fait de leur courbure, présentent une sensibilité accrue au champ magnétique, traduite par des redistributions asymétriques des efforts internes.

La porosité contribue à l'assouplissement local du matériau, entraînant une augmentation des déflexions et une amplification des contraintes maximales, en particulier dans les couches céramiques. Cependant, son impact est fortement modulé par la géométrie : il est modeste dans les coques sphériques, mais devient critique dans les plaques planes.

La géométrie structurelle joue un rôle prépondérant dans la distribution des contraintes. Les coques sphériques, du fait de leur double courbure, génèrent un effet de confinement renforcé, stabilisant la réponse mécanique et atténuant l'influence des défauts tels que la porosité. En revanche, les plaques montrent une plus grande vulnérabilité aux hétérogénéités de matériau et aux effets électromagnétiques.

Enfin, le matériau FGM influence localement la rigidité et les transferts d'efforts à travers l'épaisseur. Les effets combinés de la porosité, des champs électromagnétiques et de la courbure ne peuvent être saisis correctement qu'en recourant à des théories de cisaillement d'ordre élevé (HSDT), particulièrement adaptées aux configurations multiphysiques complexes.

En conclusion, cette étude démontre que l'optimisation des structures FGM poreuses nécessite une intégration conjointe des effets du potentiel magnétique, du potentiel électrique, de la porosité, de la courbure géométrique et du profil fonctionnel du matériau. Ces paramètres constituent des leviers essentiels pour la conception de structures intelligentes et adaptatives capables d'évoluer efficacement dans des environnements soumis à des sollicitations multiphysiques intenses.

En somme, cette étude souligne que l'optimisation de la réponse mécanique des structures FGM poreuses repose sur une approche multiparamétrique intégrant les effets conjoints des champs

électromagnétiques, de la porosité, de la géométrie et des gradients de matériau. Ces résultats fournissent des éléments fondamentaux pour la conception rationnelle de structures intelligentes, adaptatives et performantes, destinées à fonctionner dans des environnements physiques complexes et contraignants.

Notre étude ouvre des perspectives prometteuses et pourra être poursuivie par d'autres étudiants. Nous pouvons citer comme perspectives l'exploration approfondie des effets non linéaires des champs électromagnétiques, l'étude des comportements dynamiques sous sollicitations variables, ainsi que l'intégration de modèles plus complexes de porosité et d'hétérogénéité dans les matériaux à gradient fonctionnel poreux. Extension aux analyses dynamiques et vibrations couplées

Les travaux futurs pourraient intégrer des analyses dynamiques des structures FGM poreuses sous champs électromagnétiques variables dans le temps. Étudier les effets combinés des vibrations mécaniques et des champs électromagnétiques dynamiques permettrait de mieux comprendre la stabilité et la durabilité des structures dans des environnements réels, tels que les applications aérospatiales ou biomédicales.

The background of the slide is a light gray color with a pattern of various gears and mechanical parts. The gears are of different sizes and designs, some with many teeth and others with fewer, some with a central hub and spokes. The gears are scattered across the slide, with some appearing more prominent than others. The overall style is technical and mechanical.

# **Références bibliographiques**

## *Références bibliographiques*

- [1] Gutiérrez Rivera ME, Reddy JN, Amabili M. A new twelve-parameter spectral/hp shell finite element for large deformation analysis of composite shells. *Compos Struct* 2016;151:183–96.
- [2] Amabili M, Breslavsky ID, Reddy JN. Nonlinear higher-order shell theory for incompressible biological hyperelastic materials. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2019;346:841–61.
- [3] Amabili M. Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new thirdorder thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *Int J Non-linear Mech* 2015;69:109–28.
- [4] Zaoui, F.Z.; Ouinas, D.; Tounsi, A.; Viña Olay, J.A.; Achour, B.; Touahmia, M. Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Plates with Temperature-Dependent Properties Based on Improved Exponential-Trigonometric Two-Dimensional Higher Shear Deformation Theory. *Arch Appl Mech* 2021, 91, 859–881, doi:10.1007/s00419-020-01793-1.
- [5] Zaoui, F.Z.; Ouinas, D.; Achour, B.; Tounsi, A.; Latifee, E.R.; Al-Naghi, A.A.A. A Hyperbolic Shear Deformation Theory for Natural Frequencies Study of Functionally Graded Plates on Elastic Supports. *Journal of Composites Science* 2022, 6, 285, doi:10.3390/jcs6100285.
- [6] Belkhodja Yamna, Belkhodja Mohamed, Fekirini Hamida, Ouinas Djamel. New quasi-three-, and two-dimensional trigonometric-cubic monomial HSDT for thermal buckling and thermo-mechanical bending analyses of FGM symmetrical/non-symmetrical sandwich plates with hard/soft core. *Composite Structures* 29 October 2023.
- [7] Jha DK, Kant T, Singh RK. Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nuclear Eng Design* 2012;250:8–13.
- [8] Zaoui Fatima Zohra, Ouinas Djamel, Achour Belkacem, Mabrouk Touahmia, Mustapha Boukendakdji, Enamur R. Latifee, Ahmed A. Alawi Al-Naghi and Jaime Aurelio Viña Olay. Mathematical Approach for Mechanical Behaviour Analysis of FGM Plates on Elastic Foundation. *Mathematics* 2022.
- [9] Zaoui Fatima Zohra, Ouinas Djamel, Achour Belkacem, Tounsi Abdelouahed, Enamur : R. Latifee Al-Naghi A. Alawi. A Hyperbolic Shear Deformation Theory for Natural Frequencies Study of Functionally Graded Plates on Elastic Supports. *Journal of composites science*, 2022.
- [10] Adim B, Daouadji TH, Rabahi A. A simple higher order shear deformation theory for mechanical behavior of laminated composite plates. *Int J Adv Struct Eng* 2016;8(2):103–17.
- [11] Ouinas, D.; Achour, B. Buckling Analysis of Laminated Composite Plates  $[(\theta/\theta)]$  Containing an Elliptical Notch. *Composites Part B: Engineering* 2013, 55, 575–579, doi:10.1016/j.compositesb.2013.07.011.
- [12] Ghumare SM, Sayyad AS. A new fifth-order shear and normal deformation theory for static bending and elastic buckling of P-FGM beams. *Lat Am J Solids Struct* 2017;14:1679–7825.
- [13] Zia YB, Khan AA, Naushad Alam M. Comparison of various higher order shear deformation theories for static and modal analysis of composite beam. *IOP Conf Series Mater Sci Eng* 2018;377:012170.

- [14] Ghugal YM, Gajbhiye Param D. Bending analysis of thick isotropic plates by using 5th order shear deformation theory. *J Appl Computat Mech* 2016;2(2):80–95.
- [15] Belkhodja Y, Ouinas D, Fekirini H, Olay JV, Touahmia M. Three new hybrid quasi-3D and 2D higher-order shear deformation theories for free vibration analysis of functionally graded material monolayer and sandwich plates with stretching effect. *Advanced Composites Letters* 2020;29. <https://doi.org/10.1177/0963693520941865>.
- [16] Belkhodja Y, Ouinas D, Zaoui FZ, Fekirini H. An exponential-trigonometric higher order shear deformation theory (HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates. *Advanced Composites Letters* 2020;29:1–19. <https://doi.org/10.1177/0963693519875739>.
- [17] Belkhodja Yamna, Ouinas Djamel, Fekirini Hamida, Viña OlayJaime, Achour Belkacem, Touahmia Mabrouk. A new hybrid HSDT for bending, free vibration, and buckling analysis of FGM plates (2D & quasi-3D). *Smart Structures and Systems, Vol. 29, No. 3 (2022) 395-420, 2022*.
- [18] Belkhodja Yamna, Ouinas Djamel, Fekirini Hamida, Viña Olay Jaime Aurelio, Touahmia Mabrouk. Three new hybrid quasi-3D and 2D higher-order shear deformation theories (HSDTs) for free vibration analysis of functionally graded materials (FGMs) monolayer and sandwich plates with stretching effect. *Advanced Composites Letters* 2020.
- [19] Belkhodja Yamna, Ouinas Djamel, Zaoui Fatima Zohra, Fekirini Hamida. An exponential-trigonometric higher order shear deformation theory for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates. *Advanced Composites Letters*, 2020.
- [20] Y.Belkhoadja, D. Ouinas, F.Zaoui, H. Fekirini. An exponential-trigonometric higher order shear deformation theory for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates. *Advanced Composites Letters, Volume 28: 1–19, 2019*
- [21] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos B Eng* 2011;42(2):123–33.
- [22] Zaoui Fatima Zohra, Tounsi Abdelouahed, Ouinas Djamel, Jaime Vina Olay. A refined HSDT for bending and dynamic analysis of FGM plates. *Structural Engineering and Mechanics Int J*. 2020.
- [23] Rachid Abderrahmane, Ouinas Djamel, Lousdad Abdelkader, Zaoui Fatima Zohra, Achour Belkacem, Gasmi Hatem, Tayyab Ashfaq Butt, Tounsi Abdelouahed. Mechanical behavior and free vibration analysis of FG doubly curved shells on elastic foundation via a new modified displacements field model of 2D and quasi-3D HSDTs. *Thin-Walled Structures*, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108783>
- [24] Abderrahman Rachid, Djamel Ouinas, Abdelkader Lousdad, Fatima Zohra Zaoui, Belkacem Achour, Walid Khalifa, Nawaf Alnawmasi. An analytical study of thermal environment's effect on the free vibration of FGM double curved FG shells. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2024. <https://doi.org/10.1080/15397734.2024.2371912>.
- [25] Amina Aida Belhachemi, Djamel Ouinas, Mouffok Redouane Ghezzer, Fatima Zohra Zaoui, Belkacem Achour, Mohamed Sid Ahmed Houari & Jaime Aurelio Viña Olay. Assessment of new four variables 2D and quasi-3D higher order shear theories for bending analysis of different double curved FG shells. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2024. <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2376338>

- [26] Monge JC, Mantari JL, Yarasca J, Arciniega RA. On bending response of doubly curved laminated composite shells using hybrid refined models. *J Appl Computat Mech* 2019;5(5):875–99.
- [27] Tornabene F, Francesco N, Viola E. Inter-laminar stress recovery procedure for doubly-curved, singly-curved, revolution shells with variable radii of curvature and plates using generalized higher-order theories and the local GDQ method, *Mech Adv Mater Struct*, 23 (9), 2016, Special Issue: Applications of Unified Formulation and advanced theories using several numerical approaches, 1019–1045.
- [28] Dash S, Mehar K, Sharma N, Mahapatra TR, Panda SK. Modal analysis of FG sandwich doubly curved shell structure. *Struct Eng Mech* 2018;68(6):721–33.
- [29] Ansari R, Gholami R. Size-dependent nonlinear vibrations of first-order shear deformable magneto-electro-thermo elastic nanoplates based on the nonlocal elasticity theory. *Int J Appl Mech* 2016;8(4):1650053.
- [30] Ke LL, Wang YS, Yang J, Kitipornchai S. Size-dependent vibration of embedded magneto-electro-elastic cylindrical nanoshells. *Smart Mater Struct* 2014;23 (12):125036.
- [31] H. Momeni-Khabisi, M. Tahani, Coupled thermal stability analysis of piezomagnetic nano-sensors and nano-actuators considering the flexomagnetic effect, *Eur. J. Mech. A-Solids* 97 (2023) 104773.
- [32] N. Zhang, S. Zheng, D. Chen, Size-dependent static bending, free vibration and buckling analysis of curved flexomagnetic nanobeams, *Meccanica* 57 (7) (2022) 1505–1518.
- [33] M. Malikan, V.A. Eremeyev, Effect of surface on the flexomagnetic response of ferroic composite nanostructures; nonlinear bending analysis, *Compos. Struct.* 271 (2021) 114179.
- [34] M. Malikan, N.S. Uglov, V.A. Eremeyev, On instabilities and post-buckling of piezomagnetic and flexomagnetic nanostructures, *Int. J. Eng. Sci.* 157 (2020) 103395.
- [35] H. Momeni-Khabisi, M. Tahani, Buckling and post-buckling analysis of double-layer magnetoelectric nano-plate strips considering piezo-flexoelectric and piezo- flexomagnetic effects, *Eur. J. Mech. A-Solids* 104 (2024) 105218.
- [36] L.L. Xu, Y.F. Zheng, C.P. Chen, Nonlinear statics of magneto-electro-elastic nanoplates considering flexomagnetolectric effect based on nonlocal strain gradient theory, *Thin-Walled Struct* 201 (2024) 111974.
- [37] Bao, G. et Wang, L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », *International Journal of Solids and Structures*, 32(19). 1995. doi: 10.1016/0020- 7683(94)00267-Z.
- [38] Zaoui, F.Z.; Tounsi, A.; Ouinas, D. Free Vibration of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations Based on Quasi-3D Hybrid-Type Higher Order Shear Deformation Theory. *I* 2017, 20, 509–524.
- [39] Chung, Y.-L. et Chi, S. H. The residual stress of functionally graded materials, *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 13, p. 1-9, 2001.
- [40] T. IKEDA, *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford Science, 1990.
- [41] K. C. Kao, *Dielectric Phenomena in Solids*. California, USA. Elsevier academic press, 2004.
- [42] B. NOGAREDE, *Moteurs piézoélectriques*, *Techniques de l'ingénieur*, D3 765, 1996.
- [43] M. J. Grimble, M. A. Johnson, S. O. R. Moheimani, and A. J. Fleming, *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. London: London: Springer London (in eng), 2006.

- [44] A. Preumont, *Active and passive damping with piezoelectric transducers*. Dordrecht: Dordrecht: Springer Netherlands (in eng), 2006, pp. 159-197.
- [45] M. Díaz-Michelena, “Small magnetic sensors for space applications,” *Sensors (Basel, Switzerland)*, vol. 9, pp. 2271–88, 04 2009.
- [46] A. I. B. John Clarke, *The SQUID Handbook : Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*. Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2004.
- [47] B. Gleich and J. Weizenecker, “Tomographic imaging using the nonlinear response of magnetic particles,” *Nature*, vol. 435, no. 7046, pp. 1214–1217, 2005.
- [48] V. Makhotkin, B. Shurukhin, V. Lopatin, P. Marchukov, and Y. Levin, “Magnetic field sensors based on amorphous ribbons,” *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 27, no. 1, pp. 759 – 762, 1991.
- [49] R. S. Beach and A. E. Berkowitz, “Giant magnetic field dependent impedance of amorphous FeCoSiB wire,” *Applied Physics Letters*, vol. 64, no. 26, pp. 3652–3654, 1994.
- [50] L. V. Panina and K. Mohri, “Magneto-impedance effect in amorphous wires,” *Applied Physics Letters*, vol. 65, no. 9, pp. 1189–1191, 1994.
- [51] L. Schulz, P. Heinisch, and I. Richter, “Calibration of off-the-shelf anisotropic magnetoresistance magnetometers,” *Sensors*, vol. 19, no. 8, 2019.
- [52] T. McGuire and R. Potter, “Anisotropic magnetoresistance in ferromagnetic 3d alloys,” *IEEE Transactions onMagnetics*, vol. 11, no. 4, pp. 1018–1038, 1975.
- [53] M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, F. N. Van Dau, F. Petroff, P. Etienne, G. Creuzet, A. Friederich, and J. Chazelas, “Giant magnetoresistance of (001) Fe/(001)Cr magnetic superlattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, pp. 2472–2475, Nov 1988.
- [54] G. Binasch, P. Grünberg, F. Saurenbach, andW. Zinn, “Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures with antiferromagnetic interlayer exchange,” *Phys. Rev. B*, vol. 39, pp. 4828 4830,Mar 1989.
- [55] S. Yuasa andD.D.Djayaprawira, “Giant tunnel magnetoresistance in magnetic tunnel junctions with a crystalline MgO(0 0 1) barrier,” *Journal ofPhysics D : Applied Physics*, vol. 40, pp. R337–R354, oct 2007.
- [56] S. S. P. Parkin, C. Kaiser, A. Panchula, P. M. Rice, B. Hughes, M. Samant, and S.-H. Yang, “Giant tunnelling magnetoresistance at room temperature with MgO (100) tunnel barriers,” *NatureMaterials*, vol. 3, no. 12, pp. 862–867, 2004.
- [57] J. Mathon and A. Umerski, “Theory of tunneling magnetoresistance of an epitaxial Fe/MgO/Fe (001) junction,” *Physical Review B*, vol. 63, 06 2001.
- [58] R. J. Cooper, D.W. Prescott, G. J. Lee, and K. L. Sauer, “RF atomic magnetometer array with over 40 dB interference suppression using electron spin resonance,” *Journal ofMagnetic Resonance*, vol. 296, pp. 36 – 46, 2018
- [59] A. Borna, T. R. Carter, P. DeRego, C. D. James, and P. D. D. Schwindt, “Magnetic source imaging using a pulsed optically pumped magnetometer array,” *IEEE Transactions on Instrumentation andMeasurement*, vol. 68, no. 2, pp. 493–501, 2019.
- [60] B.-B. Li, D. Bulla, V. Prakash, S. Forstner, A. Dehghan-Manshadi, H. Rubinsztein- Dunlop, S. Foster, and W. P. Bowen, “Scalable high-sensitivity optomechanical magnetometers on a chip,” *APL Photonics*, vol. 3, no. 12, p. 120806, 2018.
- [61] A. Girgin and T. C. Karalar, “Output offset in silicon Hall effect based magnetic field sensors,” *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 288, pp. 177–181, 2019.

- [62] P. N. Granell, G. Wang, G. S. Cañon Bermudez, T. Kosub, F. Golmar, L. Steren, J. Fassbender, and D. Makarov, “Highly compliant planar Hall effect sensor with sub 200 nT sensitivity,” *npj Flexible Electronics*, vol. 3, no. 1, p. 3, 2019.
- [63] M. Díaz-Michelena, “Small magnetic sensors for space applications,” *Sensors (Basel, Switzerland)*, vol. 9, pp. 2271–88, 04 2009.
- [64] G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung, *J. Reine Angew. Math.* 40 (1850) 51–88.
- [65] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.* 18 (1951) 31–38, <https://doi.org/10.1115/1.4010217>.
- [66] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* 51 (1984) 745–752, <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
- [4] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: a review, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 26 (2019) 1776–1795, <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1447178>.
- [67] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: a critical review of literature, *Compos. Struct.* 171 (2017) 486–504, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.053>.
- [68] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: a review of recent literature with some numerical results, *Compos. Struct.* 129 (2015) 177–201, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.007>.
- [69] K. Swaminathan, D.M. Sangeetha, Thermal analysis of FGM plates – a critical review of various modeling techniques and solution methods, *Compos. Struct.* 160 (2017) 43–60, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>.
- [70] K. Swaminathan, D.T. Naveenkumar, A.M. Zenkour, E. Carrera, Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-a state-of-the-art review, *Compos. Struct.* 120 (2015) 10–31, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070>.
- [71] A.M. Zenkour, Exact relationships between classical and sinusoidal theories for FGM plates, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 19 (2012) 551–567, <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.563408>.
- [72] Z. Zhong, E. Shang, Closed-form solutions of three-dimensional functionally graded plates, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 15 (2008) 355–363, <https://doi.org/10.1080/15376490801977528>.
- [73] A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi, Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 17 (2010) 419–432, <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>.
- [74] M. Cinefra, E. Carrera, S. Brischetto, S. Belouettar, Thermo-mechanical analysis of functionally graded shells, *J. Therm. Stress.* 33 (2010) 942–963, <https://doi.org/10.1080/01495739.2010.482379>.
- [75] M. Zidi, A. Tounsi, M.S.A. Houari, E.A. Adda Bedia, O. Anwar Bég, Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory, *Aerosp. Sci. Technol.* 34 (2014) 24–34, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.02.001>.
- [76] A.S. Sayyad, Y. Marotrao Ghugal, B. Machhindra Shinde, A. Shamshuddin Sayyad, Thermal stress analysis of laminated composite plates using exponential shear deformation theory Stability of Beams, Frames, and Trusses View project BENDING, BUCKLING AND FREE VIBRATION ANALYSIS OF THICK ISOTROPIC PLATE BY USING FIFTH ORDER

- SHEAR DEFORMATION THEORY View project Thermal stress analysis of laminated composite plates using exponential shear deformation theory, 2016.
- [77] J.N. Reddy, C.D. Chin, Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates, *J. Therm. Stress.* 21 (1998) 593–626, <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>.
- [78] A. Garg, H.D. Chalak, M.O. Belarbi, A.M. Zenkour, Hygro-thermo-mechanical based bending analysis of symmetric and unsymmetric power-law, exponential and sigmoidal FG sandwich beams, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 29 (2022) 4523–4545, <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1931993>.
- [79] Y.M. Ghugal, A.S. Sayyad, S.M. Girme, Thermoelastic bending analysis of laminated composite shells using a trigonometric shear and normal deformation theory, *J. Therm. Stress.* 45 (2022) 171–190, <https://doi.org/10.1080/01495739.2022.2030836>.
- [80] Xin LB, Hu ZD. Free vibration of layered magneto-electro-elastic beams by SS-DSC approach. *Compos Struct* 2015;125:96–103.
- [81] Bhangale RK, Ganesan N. Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates by finite element method. *Int J Solids Struct* 2006;294:1016–38.
- [82] Mohamad V, Meisam MS, Ali H. Free vibration analysis of magneto-electro-elastic microbeams subjected to magneto-electric loads. *J Sound Vib* 2006;294:1016–38.
- [83] Ren SH, Mahesh V, Meng GW, Zhou LM. Static responses of magneto-electroelastic structures in moisture field using stabilized node-based smoothed radial point interpolation method. *Compos Struct* 2020;252:112696.
- [84] Zhou LM, Ren SH, Meng GW, Ma ZC. Node-based smoothed radial point interpolation method for electromagnetic-thermal coupled analysis. *Appl Math Model* 2020;78:841–62.
- [85] Albarody T, Al-Kayiem HH. Dynamic analysis of laminated composite thermo-magneto-electro-elastic shells. *J Mech Sci Technol* 2014;28(12):4877–91.
- [86] Mahesh V, Harursamphath D. Nonlinear deflection analysis of CNT/magneto-electroelastic smart shells under multi-physics loading. *Mech Adv Mater Struct* 2020.
- [87] Wu CP, Tsai YH. Static behavior of functionally graded magneto-electro-elastic shells under electric displacement and magnetic flux. *Internat J Engrg Sci* 2007;45(9):744–69.
- [88] Kondaiah P, Shankar K, Ganesan N. Pyroelectric and pyromagnetic effects on multiphase magneto-electro-elastic cylindrical shells for axisymmetric temperature. *Smart Mater Struct* 2012;22(2):025007.
- [89] Zhang L, Li XW. Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells. *Appl Math Model* 2013;37(4):2279–92.
- [90] Sahmani S, Aghdam MM. Nonlocal strain gradient shell model for axial buckling and postbuckling analysis of magneto-electro-elastic composite nanoshells. *Composites B* 2018;132:258–74.
- [91] Ye W, Liu J, Zang Q, Lin G. Investigation of bending behavior for laminated composite magneto-electro-elastic cylindrical shells subjected to mechanical or electric/magnetic loads. *Comput Math Appl* 2020;80(7):1839–57.
- [92] Akbarzadeh A, Chen ZT. Thermo-magneto-electro-elastic responses of rotating hollow cylinders. *Mech Adv Mater Struct* 2014;21:67–80.
- [93] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Fekrar A, Ait Atmane H, Adda Bedia EA. Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Mech Compos Mater* 2010;46(4):425–34.

- [94] Thai H-T, Choi D-H. A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Compos Sci Technol* 2011;71(16):1850–8. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.08.016>.
- [95] Ansari R, Gholami R, Rouhi H. Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory. *Compos Struct* 2015;126:216–26.
- [96] Sobhy M. Magneto-electro-thermal bending of FG-graphene reinforced polymer, doubly-curved shallow shells with piezoelectromagnetic faces. *Compos Struct* 2018;203:844–60.
- [97] Mallik, N., & Ray, M. C. (2003). Effective coefficients of piezoelectric fiber-reinforced composites. *AIAA Journal*, 41(4), 704–710.
- [98] Aniket Gopa Chanda a, Devesh Punera. Electro-Elasto-Statics of porosity-gradient smart functionally graded plates with piezoelectric fibre-reinforced composite. *European Journal of Mechanics / A Solids* 100 (2023) 104997.