Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Abdelaziz OUALID

Equations Différentielles au Sens de Hadamard

soutenu publiquement le 13 Juin 2018 devant le jury composé de :

Présidente :	S. TAF	MCB	U. MOSTAGANEM.
Examinatrice :	L. TABHARIT	MCB	U. MOSTAGANEM.
Encadreur :	Z. DAHMANI	MCA	U. MOSTAGANEM.

Année Universitaire : 2017 / 2018

MASTER

Remerciements

Bismi Allah et Louange à Allah le Tout puissant.
Je tiens à remercier mon encadreur de mémoire Monsieur Zoubir DAHMANI.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Je remercie mes frères et mes sœurs pour leur encouragement.

J'adresse aussi mes remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions.

Enfin, je remercie tous mes Amis que j'aime tant, B. Mohammed Nadjib, D.B. Mohammed pour leur sincère amitié et confiance, et à qui je dois ma reconnaissance et mon attachement.

Table des matières

Index des notations

$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	:	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
$L^p[a,b]$	:	Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0,+\infty)$ intégrables.
$(C[a,b],X)$	:	Espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace de Ba
$AC[a,b]$ ou $AC^1[a,b]$	:	Espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.
$\Gamma(.)$	:	La fonction Gamma.
$B(.,.)$	:	La fonction Bêta.
$I_a^\alpha y$	:	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$
${}^{RL}D_a^\alpha y$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$
${}^{c}D_a^\alpha y$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
$J_a^\alpha y$	:	Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$
$D_a^\alpha y$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.

Introduction

La dérivée fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Ses origines remontent à la fin du $17^{ième}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt}$ pour désigne là $n^{ième}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathrm{N}$), l'Hôpital a répondu :
Que signifie $\frac{d^n f}{dt}$ si $n = \frac{1}{2}$?
Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Le calcul fractionnaire a été développé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974. Depuis, il a gagné une popularité et une considération importante due principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus. Donc, il est très important d'établir une théorie claire et nette pour l'étude et l'analyse des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire.
Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour des problèmes aux limites avec des conditions non locales, et cela en utilisant des différentes techniques du point fixe.
Notre mémoire est organisé comme suit :
Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, nous citons par exemple la fonction Gamma et la fonction Bêta. Deux approches sont présentées, ainsi que l'approche de Hadamard pour la généralisation des notions de dérivation entière.
L'objet du deuxième chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour le problème différentiel fractionnaire soumis à la condition non locale suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{D}^\alpha x(t) = f(t, x(t), \mathrm{D}^{\alpha-1} x(t)), & 1 < t < e, 1 < \alpha \leq 2 \\ x(1) = 0, & \mathrm{AJ}^\beta x(\eta) + \mathrm{B}x'(e) = c, \quad \beta > 0, 1 < \eta < e. \end{cases}$$

Nous commençons d'abord par établir une équivalence entre ce problème et une certaine équation intégrale. Ensuite, nous présentons dans la deuxième section notre premier résultat d'existence et d'unicité en utilisant le principe de contraction de Banach. Un deuxième résultat d'existence sera présenté dans la dernière section. Il s'agit d'un résultat d'existence obtenu à l'aide du théorème de Schaeffer.
Le troisième chapitre est concerné par l'utilisation des théorèmes du point fixe, à résoudre

le système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), D^{\mu}x(t))(t),\ D^{\beta}y(t) = g(t, y(t), D^{\nu}y(t))(t),\ 1 < t < e \\ x^{j}(1) = y^{j}(1) = 0,\ 0 \leq j \leq n-2 \\ AJ^{\gamma}x(\eta) + Bx'(e) = c,\ AJ^{\gamma}y(\eta) + By'(e) = c \qquad \gamma > 0, 1 < \eta < e. \end{cases}$$

Nous commençons par présenter la solution intégrale, puis on étudie seulement l'existence et l'unicité de solutions par le principe de contraction de Banach.
On terminera par une conclusion qui rassemble tout ce qui était fait.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1 Espaces Fonctionnels

1.1 L'espace L^p

Soit $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On note par $\mathrm{L}^p[a,b]$ l'espace des classes équivalence de fonction de puissance p intégrales sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$\mathrm{L}^p([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathrm{C},\ f\ mesurable, et \| f \|_p < \infty \right\},$$

avec

$$\| f \|_{\mathrm{L}^p([a,b])} \left(\int_a^b | f(x) |^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Espaces des Fonctions Absolument Continues

Définition 1.2 *[15] On note par $\mathrm{AC}([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables i.e :*

$$f \in \mathrm{AC}([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \varphi \in \mathrm{L}^1([a,b])\ telleque f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Définition 1.3 *[15] Pour $n \in \mathbb{N}$ on note par $\mathrm{AC}^n[a,b]$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)}(x) \in \mathrm{AC}[a,b]$, c'est-à-dire*

$$\mathrm{AC}^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\ et\ f^{(n-1)}(x) \in \mathrm{AC}[a,b] \right\}.$$

En particulier on a $\mathrm{AC}^1[a,b] = \mathrm{AC}[a,b]$.

Définition 1.4 *[15] L'espace noté $\mathrm{AC}^n_\delta[a,b]$ défini par*

$$\mathrm{AC}^n_\delta[a,b] = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\ et\ \delta^{(n-1)} f(x) \in \mathrm{AC}[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\}$$

est appelé espace des fonctions absolument continues avec un point qui égale 1.

2 Notions Préliminaires en Calcul Fractionnaire :

Dans ce paragraphe nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées ultérieurement. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.5 *Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction donnée par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.1}$$

Proposition 1.1 *Pour tout $z > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$.
4. $\Gamma(z+n+1) = \Pi_{i=0}^{n}(z+i)\Gamma(z)$.

Proposition 1.2 *Pour $x = -n$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction gamma d'Euler admet des pôles simples en x.*

Remarque 1.1 *La fonction $\Gamma(.)$ peut-être considérée comme une généralisation de la fonction factorielle.*

2.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.6 *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction Bêta d'Euler la fonction donnée par :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} dt. \tag{1.2}$$

Proposition 1.3 *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.*

1. $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.
2. $\mathrm{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

3 Opérateurs de Riemann Liouville

3.1 Intégration Fractionnaire au Sens de Riemann Liouville

Définition 1.7 *L'intégrale fractionnaire d'ordre α $(\alpha > 0)$ de Riemann Liouville d'une fonction $f \in \mathrm{C}[a,b]$ est donnée par*

$$(\mathrm{I}_a^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{1.3}$$

Définition 1.8 *La dérivée fractionnaire d'ordre* α *(*$\alpha > 0$*) au sens de Riemann Liouville d'une fonction* f *définie sur un intervalle* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(t) &= (D_a^n I_a^{n-\alpha} f)(t) &(1.4)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, &(1.5)\end{aligned}$$

où $n = [\alpha]+1$*, et* $[\alpha]$ *est la partie entière de* α*.*
En particulier si $\alpha = 0$*, alors*

$$({}^{RL}D_a^0 f)(t) = (I_a^0 f)(t) = f(t)$$

Si $\alpha = n \in \mathrm{N}$*, alors*

$$(D_a^n f)(t) = f^{(n)}(t)$$

Si de plus $0 < \alpha < 1$*, alors* $n = 1$*, d'où*

$$({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds.$$

Exemple :
Soient $\alpha > 0$, $\beta > -1$ et $f(t) = (t-a)^{\beta}$, alors

$$\begin{aligned}(I_a^{\alpha} f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\beta+\alpha+1}(t-a)^{\beta+\alpha}.\\ ({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

En effet,

$$(I_a^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta} ds. \tag{1.6}$$

En effectuant le changement de variable

$$s = a + u(t-a), \quad 0 \le u \le 1,$$

alors (1.1) devient

$$(I_a^{\alpha} f)(t) = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta} du.$$

En utilisant les propriétés de la fonction Bêta, on trouve

$$\begin{aligned}(I_a^{\alpha} f)(t) &= \frac{B(\beta+1,\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}.\end{aligned}$$

En particulier si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann Liouville d'une constante est en général non nulles. On a

$$({}^{RL}D_a^{\alpha} c) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha},$$

où c est une constante.
Énonçons maintenant quelques propriétés des opérateurs I^{α} et D^{α}.

Proposition 1.4 *Si* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, *alors*

$$\begin{aligned}(I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f)(t) &= I_a^{\alpha+\beta} f)(t)\\ &= (I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f)(t).\end{aligned}$$

Proposition 1.5 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in C[a,b]$, *alors*

$$({}^{RL}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f)(t) = f(t).$$

Proposition 1.6 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in C[a,b]$, *alors*

$$(I_a^{\alpha})({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(t) \neq f(t).$$

4 Opérateur de Caputo

4.1 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.9 *Pour une fonction* $f \in C^n[a,b]$, *et* $\alpha > 0$. *La dérivée fractionnaire au sens du Caputo de f est définie par*

$$\begin{aligned}({}^{c}D_a^{\alpha} f)(t) &= (I_a^{n-\alpha} D_a^{n} f)(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,ds,\end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$, *avec* $[\alpha]$ *est la partie entière de* α.

Proposition 1.7 *Soit* $\alpha > 0$

1. $({}^{c}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f)(t) = f(t)$.
2. $({}^{c}D_a^{\alpha} c) = 0, c \in \mathbb{R}$.
3. ${}^{c}D_a^{\alpha}({}^{c}D_a^{\beta} f(t)) = ({}^{c}D_a^{\alpha+\beta} f)(t) = {}^{c}D^{\beta}({}^{c}_{a}D_a^{\alpha} f(t))$, *où* $f \in C^1[a,b]$, $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ *et* $0 < \alpha + \beta < 1$.

En effet pour 1,

$$\begin{aligned}{}^{c}D_a^{\alpha}(I_a^{\alpha} f)(t) &= I_a^{n-\alpha} D_a^{n} I_a^{\alpha} f(t)\\ &= I_a^{n-\alpha} D_a^{n} I_a^{n} I_a^{\alpha-n} f(t)\\ &= I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha-n} f(t)\\ &= f(t).\end{aligned}$$

en effet pour 2,

$$\begin{aligned}{}^{c}D_a^{\alpha} c &= I_a^{n-\alpha} D_a^{n} c\\ &= I_a^{n-\alpha} 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

en effet pour 3,

$$\begin{aligned}{}^{c}D_a^{\alpha}({}^{c}D_a^{\beta} f(t)) &= I_a^{1-\alpha} D_a^{1} I_a^{1-\beta} D_a^{1} f(t)\\ &= I_a^{1-\alpha+\beta-\beta} D_a^{1} I_a^{1-\beta} D_a^{1} f(t).\end{aligned}$$

On sait que $\mathrm{I}_a^{\beta}(\mathrm{D}_a^1 f(t)) = ({}^c\mathrm{D}_a^{1-\beta} f)(t)$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^{1-\alpha-\beta}\mathrm{I}_a^{\beta}\mathrm{D}_a^1\mathrm{I}_a^{1-\beta}\mathrm{D}_a^1 f(t) &= \mathrm{I}_a^{1-\alpha-\beta}\mathrm{D}_a^{1-\beta}\mathrm{I}_a^{1-\beta}\mathrm{D}_a^1 f(t) \\
&= \mathrm{I}_a^{1-\alpha-\beta}\mathrm{D}_a^1 f(t).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
{}^c\mathrm{D}_a^{\alpha}({}^c\mathrm{D}_a^{\beta} f(t)) &= {}^c\mathrm{D}_a^{\alpha+\beta} f(t) \\
&= {}^c\mathrm{D}_a^{\beta}({}^c\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t)).
\end{aligned}$$

Lemme 1.1 *Soient $m-1<\alpha<m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathrm{C}^n[a,b]$. Alors*

$$ {}^c\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i (t-a)^i,\ \forall c_i \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Preuve. On a d'après la définition de Caputo :

$$ {}^c\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t) = \mathrm{I}^{m-\alpha}(\mathrm{D}_a^m f(t)).$$

Alors,

$$ \mathrm{I}^{m-\alpha}(\mathrm{D}_a^m f(t)) = 0. \tag{1.8}$$

On applique l'opérateur $\mathrm{D}_a^{m-\alpha}$ dans l'équation (1.8), on trouve

$$ \mathrm{D}_a^m f(t) = 0.$$

Donc,

$$ f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i (t-a)^i,\ \forall c_i \in \mathbb{R}.$$

■

4.2 Relation entre La Dérivation de Riemann Liouville et de Caputo

Proposition 1.8 *Soient $m-1<\alpha<m$, $m \in \mathrm{N}^*$, et $f \in \mathrm{C}^n[a,b]$ alors*

$$ {}^c\mathrm{D}_a^{\alpha} = ({}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha})(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)).$$

Preuve. On sait que

$$ \mathrm{I}_a^m \mathrm{D}_a^m f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

On applique l'opérateur ${}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}$ de Riemann Liouville, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}\mathrm{I}_a^m\mathrm{D}_a^m f(t) &= \mathrm{D}_a^m\mathrm{I}_a^{m-\alpha}\mathrm{J}_a^m\mathrm{D}_a^m f(t) \\
&= \mathrm{D}_a^m\mathrm{I}_a^m\mathrm{I}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}_a^m f(t) \\
&= \mathrm{I}_a^{m-\alpha}\mathrm{D}_a^m f(t) \\
&= {}^c\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathrm{D}_a^{\alpha}(\mathrm{I}_a^m\mathrm{D}_a^m f(t)) &= \mathrm{D}_a^{\alpha}(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)) \\
&= {}^c\mathrm{D}_a^{\alpha} f(t).
\end{aligned}$$

■

5 Opérateurs de Hadamard

5.1 Intégration Fractionnaire au Sens de Hadamard

Définition 1.10 *[13][15] Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a \leq b \leq \infty$ et $\alpha > 0$.*
L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de f définie par :

$$\mathrm{J}_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt; a < x < b, \tag{1.9}$$

où : Γ est la fonction Gamma d'Euler.

5.2 Quelques propriétés :

Proposition 1.9 *[8](La linéarité)*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall\ \alpha > 0$ *on a :*

$$\mathrm{J}_a^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 \mathrm{J}_a^\alpha f(x) + \lambda_2 \mathrm{J}_a^\alpha g(x).$$

Pour la preuve on utilisant la linéarité de l'intégrale classique.

Proposition 1.10 *[8](Propriété de semi groupe)*
Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, $f \in \mathrm{L}^p([a,b])$.
$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, *on a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\beta f(x) &= \mathrm{J}_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= \mathrm{J}_a^\beta \mathrm{J}_a^\alpha f(x). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Preuve. $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\mathrm{J}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}. \tag{1.11}$$

On remarque que :

$$a \leq t \leq x$$
$$\text{et}$$
$$a \leq s \leq t.$$

Donc, on prend $s \leq t \leq x$.
Puis, on pose le changement de variable :

$$y = \frac{\log(\frac{t}{s})}{\log(\frac{x}{s})}. \tag{1.12}$$

On obtient alors :

$$\mathrm{J}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \right] \frac{ds}{s}. \tag{1.13}$$

On remplace (1.12) dans (1.13), on obtient :

$$\int_s^t (\log\frac{x}{t})^{\alpha-1}(\log\frac{t}{s})^{\beta-1} f(s)\frac{dt}{t} = \int_0^1 \left[\log x - y\log\frac{x}{s} - \log s\right]^{\alpha-1}\left[y\log\frac{x}{s} + \log s - \log s\right]^{\beta-1} \log(\frac{x}{s})dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 ((1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1})\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} dy\\
&= \mathrm{B}(\alpha,\beta)\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

égalité (1.11) devient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_a^\alpha \mathrm{J}_a^\beta f(x) &= \frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\log(\frac{x}{s})\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \left(\log(\frac{x}{s})\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds\\
&= \mathrm{J}_a^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$\mathrm{J}_a^\beta \mathrm{J}_a^\alpha f(x) = \mathrm{J}_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

D'où la résultat. ■

Exemple 1.1 *Soient* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $f(t) = \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}$

$$\mathrm{J}_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1}. \tag{1.14}$$

En effet,

$$\mathrm{J}_a^\alpha \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s}. \tag{1.15}$$

Effectuant le changement de variable

$$u = \frac{\left(\log\frac{s}{a}\right)}{\left(\log\frac{t}{a}\right)}, \tag{1.16}$$

alors, (1.15) *devient*

$$\mathrm{J}_a^\alpha \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1} = \frac{\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}. \tag{1.17}$$

En utilisant la définition 1.6 *et la propriété* 1.3 *on aboutit à :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_a^\alpha f(t) &= \frac{\mathrm{B}(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

5.3 Dérivation Fractionnaire au Sens de Hadamard

Définition 1.11 *[15] Soient $f \in AC^n_\delta[a,b]$ et $\alpha > 0$, $\delta = x\dfrac{d}{dx}$.*
La dérivation fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} D^\alpha_a f(x) &= \delta^n J^{n-\alpha}_a f(x) \\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n J^{n-\alpha}_a f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $n-1 < \alpha < n$, $n = [\alpha]+1$.
Une des propriétés importantes qui lie la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard avec l'intégrale fractionnaire de Hadamard est la suivante :

Proposition 1.11 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, on a*

$$D^\alpha J^\alpha f(t) = f(t). \tag{1.19}$$

La propriété (1.19) signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Hadamard est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Hadamard du même ordre.

Proposition 1.12 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, on a*

$$J^\alpha D^\alpha f(t) \neq f(t). \tag{1.20}$$

Exemple 1.2 *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f(t) = \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}$*

$$D^\alpha_a f(t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1}.$$

En effet,

$$D^\alpha_a f(t) = \delta^n\left(J^{n-\alpha}_a\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right). \tag{1.21}$$

D'après (1.14), on obtient

$$J^{n-\alpha}_a\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{n-\alpha+\beta-1}. \tag{1.22}$$

Alors,

$$D^\alpha_a f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\delta^n\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{n-\alpha+\beta-1}. \tag{1.23}$$

Si n=1, on a

$$\begin{aligned} \delta^1\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{n-\alpha+\beta-1} &= t\frac{d}{dt}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{n-\alpha+\beta-1} \\ &= (\beta+n-\alpha-1)\log(\frac{t}{a})^{\beta+n-\alpha-2}. \end{aligned}$$

Pour n=2, on obtient :

$$\begin{aligned}\delta^2\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{n-\alpha+\beta-1} &= \delta^1\left((\beta+n-\alpha-1)\log(\frac{t}{a})^{\beta+n-\alpha-2}\right)\\ &= (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\log(\frac{t}{a})^{\beta+n-\alpha-3}.\end{aligned}$$

Pour n quelconque, on a

$$\delta^n\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{n-\alpha+\beta-1} = (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)...(\beta-\alpha)\log(\frac{t}{a})^{\beta-\alpha-1}.$$

Alors (1.23) *devient :*

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)(\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)...(\beta-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

D'après la propriété $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$*, on trouve*

$$\Gamma(n-\alpha+\beta) = (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha).$$

Donc,

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

En particulier, si $\beta = 1$ *et* $\alpha > 0$*, alors la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une constante est en général non nulle :*

$$D_a^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha}\Big)\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{-\alpha}.$$

5.4 Lien Entre la Dérivée Fractionnaire au Sens de Caputo et Celle au Sens de Hadamard

Soient $y \in AC_\delta^n[a,b]$, $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1$. Alors :

$$^cD_a^\alpha y(x) = D_a^\alpha\left[y(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\delta^i y(a)}{i!}\left(\log\frac{x}{a}\right)\right]. \quad (1.24)$$

Cas particulier, si $0 < \alpha < 1$, on a :

$$^cD_a^\alpha y(x) = D_a^\alpha\left[y(x) - y(a)\right]. \quad (1.25)$$

5.5 Lemmes Auxiliaires

Lemme 1.2 *[14][15][16] Soient* $x \in C([1,e],\mathbb{R})$ *et* $\alpha > 0$*. L'équation* $D^\alpha x(t) = 0$ *admet une solution générale donnée par :*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\log t)^{\alpha-i},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,...,n$ *et* $n-1 < \alpha < n$, $n = [\alpha]+1$.

Lemme 1.3 *[14][15][16] Soient* $x \in C([1,e],\mathbb{R})$ *et pour tout* $\alpha > 0$*, on a :*

$$J^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(\log t)^{\alpha-i},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,...,n$ *et* $n-1 < \alpha < n$, $n = [\alpha]+1$.

6 Théorèmes de Point Fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme des équations différentielles linéaires et non linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe [12]. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonctions donnée. Dans le cas des EDFs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe et le point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solutions.

6.1 Notion Nécessaire

Espace de Banach

Définition 1.12 *On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace.*

Définition 1.13 *[12] Soient A et B deux espaces de Banach. Un opérateur* $Q : A \longrightarrow B$ *est complètement continu s'il transforme tout borné de A en une partie relativement compact de B.*

Définition 1.14 *[12] On dit que l'opérateur Q est complètement continue si il est continue et compact.*

Définition 1.15 *[12] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

Définition 1.16 *"Continuité et Suites" La fonction f est continue en a si et seulement si, quelle que soit la suite* (x_n) *qui converge vers a, alors la suite image* $f(x_n)$ *converge vers* $f(a)$.

Définition 1.17 *[12] Soit* $D \subset I \times E$ *où E est un espace. On dit qu'une application f est lipschitzienne par rapport a la deuxième variable sur D si :*
il existe une constante $K > 0$ *telle que :*$\forall(t,x) \in D, \forall(t,y) \in D$

$$|f(t,x) - f(t,y)|_E < K|x-y|_E.$$

Si $K < 1$, *alors f est contractante.*

Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.1 *[12] soit (B,d) un espace métrique complet, et soit* $f : B \longrightarrow B$ *une application qui pour tout* $y, z \in B$, *vérifie :*

$$d(f(y) - f(z)) \leq kd(y-z) \;\; avec \;\; 0 < k < 1.$$

Alors, f admet un point fixe unique.

Théorème du Point Fixe de Schauder-Rappel

Théorème 1.2 *[12] Soit C une partie convexe et fermée d'un espace de Banach, et soit* $T : C \longrightarrow C$ *un opérateur continu et compact. Alors, T possède au moins un point fixe dans* $\mathbb{C}$.

Théorème du Point Fixe de Scheaffer-Rappel

Théorème 1.3 *[12] Soient* X *un espace de Banach et* $A : X \longrightarrow X$ *un opérateur complètement continu.*
Si l'ensemble

$$\Delta = \left\{x \in X : x = \lambda(Ax),\ pour\ un\ certain\ \lambda \in [0,1]\right\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe dans X.

Théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 1.18 *[12] Soit* (f_n) *une famille de fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
On dit que la suite (f_n) *est équicontinue si :*

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ tels\ que\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in I : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Théorème 1.4 *Soit A un sous ensemble de* $C(J, E)$ *; A est relativement compact dans* $C(J; E)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante* $K > 0$ *tel que :*

$$\| f(x) \| \leq k \ \ pour tout\ \ x \in J\ et\ tout\ \ f \in A.$$

2. *L'ensemble A est équicontinu. i.e pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$| t_1 - t_2 | \leq \delta \Rightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| < \varepsilon \ \ pour tout\ \ t_1, t_2 \in J\ \ et\ \ f \in A.$$

3. *Pour tout* $x \in J$*, l'ensemble* $\left\{f(x), f \in A\right\}$ *est relativement compact.*

Chapitre 2

Résolution d'un Problème aux Limites avec des Conditions Non-locales

Les problèmes différentiels à conditions non locales ont été abordés par plusieurs auteurs [5] [1] [2] [3] [4] [6] [7] [9] [10].
Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire avec des conditions initiales non locales. Ce chapitre est structuré comme suit :
Dans la première section, nous étudions l'existence et l'unicité de solution pour une classe d'équations différentielles fractionnaires avec condition non locale. Nous montrons à l'aide du principe de contraction de Banach, que sous certaines hypothèses, nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution pour notre problème.
Dans la deuxième section nous présentons notre deuxième résultat lié à l'existence d'une solution au moins du même problème. L'approche utilisée, dans ce cas, est le théorème classique de schaeffer.

1 Problème Différentiel à Condition Non Locale

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence de la solution d'un problème différentiel fractionnaire soumis à une condition non locale de la forme :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), D^{\alpha-1}x(t)), & 1 < t < e, 1 < \alpha < 2 \\ x(1) = 0, & AJ^{\beta}x(\eta) + Bx'(e) = c, \quad \beta > 0, 1 < \eta < e, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- D^{α} est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard.
- J^{β} est l'intégral fractionnaire d'ordre β au sens de Hadamard.
- $f : [1, e] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, et A, B, c sont des constants.

La condition non locale est une condition donnée sur la solution en un nombre fini ou infini d'instants. Celle-ci est présentée sous forme de la relation $AJ^{\beta}x(\eta) + Bx'(e) = c$.
La condition non locale associée à l'équation principale au lieu de la condition initiale classique s'avère nécessaire pour bien modéliser et décrire mathématiquement, de la manière la plus proche de la réalité de nombreux phénomènes dans de multiples disciplines.

Tout d'abord on commence par transformer le problème à valeur initiale (2.1) en une équation intégrale.

1.1 Problème Intégral

Lemme 2.1 *[17] Soit $1<\alpha<2$ La fonction x est la solution du problème au limite fractionnaire (2.1) si et seulement si x est la solution de l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega} \\ &\quad \times\left[c-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\ &\quad \left.-\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right], \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$\Omega=\frac{B(\alpha-1)}{e}+\frac{A\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\eta)^{\alpha+\beta-1}.$$

Preuve. Soit l'équation :

$$D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)). \tag{2.3}$$

Alors

$$J^{\alpha}(D^{\alpha}x(t))=J^{\alpha}f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)). \tag{2.4}$$

D'après lemme 1.3, on obtient

$$x(t)=J^{\alpha}f\left(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t)\right)+c_1(\log t)^{\alpha-1}+c_2(\log t)^{\alpha-2}. \tag{2.5}$$

Maintenant, on cherche les constant c_1, c_2.
D'après la première condition en $t=1$, on trouve $c_2=0$.
Alors l'équation (2.5), devient

$$x(t)=J^{\alpha}f(t,x(t),D^{\alpha-1}x(t))+c_1(\log)^{\alpha-1}. \tag{2.6}$$

D'après la deuxième condition en $t=\eta$ et $t=e$

$$AJ^{\beta}x(\eta)+Bx'(e)=c. \tag{2.7}$$

Alors,

$$J^{\beta}x(\eta)=J^{\alpha+\beta}f(\eta,x(\eta),D^{\alpha-1}x(\eta))+\frac{c_1}{\Gamma(\beta)}\int_1^{\eta}(\log\eta)^{\beta-1}(\log s)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}.$$

Donc,

$$J^{\beta}x(\eta)=J^{\alpha+\beta}f(\eta,x(\eta),D^{\alpha-1}x(\eta))+c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\eta)^{\beta+\alpha-1} \tag{2.8}$$

et

$$x'(e)=J^{\alpha-1}f(e,x(e),D^{\alpha-1}x(e))+\frac{c_1(\alpha-1)}{e}. \tag{2.9}$$

En remplaçant (2.8) et (2.9) dans (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} c=AJ^{\alpha+\beta}f(\eta,x(\eta),D^{\alpha-1}x(\eta)) \quad &+ \quad Ac_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\eta)^{\beta+\alpha-1} \\ &+BJ^{\alpha-1}f(e,x(e),D^{\alpha-1}x(e))+c_1\frac{B(\alpha-1)}{e}. \end{aligned}$$

D'où,

$$c_1=\frac{c-AJ^{\alpha+\beta}f(\eta,x(\eta),D^{\alpha-1}x(\eta))-BJ^{\alpha-1}f(e,x(e),D^{\alpha-1}x(e))}{A\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log)^{\alpha+\beta-1}+\frac{B(\alpha-1)}{e}}. \tag{2.10}$$

Il suffit de remplacer (c_1) et (c_2) dans (2.5) pour obtenir la formule. ∎

2 Problème de Point Fixe

Tout d'abord, on introduit l'espace de Banach X défini par :

$$\mathrm{X} = \left\{x \mid x \in \mathrm{C}([1,e],\mathbb{R}) \;\; et \; \mathrm{D}^{\alpha-1}x \in \mathrm{C}([1,e],\mathbb{R})\right\}$$

muni de la norme :

$$\| x \|_{\mathrm{X}} = \| x \|_{\infty} + \| \mathrm{D}^{\alpha-1} x \|_{\infty},$$

où

$$\| x \|_{\infty} = \max_{t\in[1,e]} | x(t) |, \quad \| \mathrm{D}^{\alpha-1} x \|_{\infty} = \max_{t\in[1,e]} | \mathrm{D}^{\alpha-1} x(t) | .$$

On considère l'opérateur T défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{T} \;:\; & \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \\ & x \longmapsto \mathrm{T}x \end{aligned}$$

tel que, $\forall\, t \in [1,e]$, on a :

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}x)(t) \;=\; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s), \mathrm{D}^{\alpha-1}x(s)) \frac{ds}{s} + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega} \\ & \times \left[c - \frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_1^{\eta} \left(\log \frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} f(s, x(s), \mathrm{D}^{\alpha-1}x(s)) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. - \frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{e} \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s), \mathrm{D}^{\alpha-1}x(s)) \frac{ds}{s} \right], t \in [1,e], \end{aligned}$$

où

$$\Omega = \frac{\mathrm{B}(\alpha-1)}{e} + \mathrm{A} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\log \eta)^{\alpha+\beta-1} .$$

3 Résultats originaux

3.1 Existence et Unicité

Dans cette section nous allons étudier l'existence et l'unicité de solution du problème (2.1). Pour cela, nous imposons les conditions sur les données du problème.
Dans la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

Soit $f : [1,e] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant l'hypothèse suivante :
(H_1) $f : [1,e] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow$ R est une fonction continues.
(H_2) Pour chaque $t \in [1,e]$ et $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| f\left(t, x_1, y_1\right) - f\left(t, x_2, y_2\right) \right| \le k_1 \left| x_1 - x_2 \right| + k_2 \left| y_1 - y_2 \right|,$$

où
$k := \max\{ k_1, k_2\}$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 2.1 *[17] Sous l'hypothèse* H_2 *le problème (2.1) possède une solution unique si*

$$k\mathrm{M} < 1, \tag{2.11}$$

tel que, $M = M_1 + M_2$ *et*

$$M_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{1}{|\Omega|}\left[\frac{|A|(\log\eta)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|B|}{\Gamma(\alpha)}\right],$$

$$M_2 = 1 + \frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[\frac{|A|(\log\eta)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|B|}{\Gamma(\alpha)}\right].$$

Preuve. Le théorème de contraction de Banach s'appuit sur le fait que si T est un opérateur contractant, alors il existe un unique point fixe pour T. De là vient l'idée de chercher l'existence d'une constante $kM > 0$ telle que $\| Tx - Ty \|_X \leq kM \| x - y \|_X$ avec $kM < 1$.
On procède donc en deux étapes :
Étape 1 : On montre qu'il existe M_1 tel que $\| Tx - Ty \|_\infty \leq M_1 \| x - y \|_\infty$
Étape 2 : On montre qu'il existe M_2 tel que $\| (D^{\alpha-1}T)x - (D^{\alpha-1}T)y \|_\infty \leq M_2 \| x - y \|_\infty$
Puis on passe à la norme $\| . \|_X$ et on fait la conclusion.

Étape 1

Soient $x, y \in X$ et pour tout $t \in [1, e]$, alors

$$\begin{aligned}
\left|(Tx)(t) - (Ty)(t)\right| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s} + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega} \\
&\quad \times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\
&\quad \left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right] \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s), D^{\alpha-1}y(s))\frac{ds}{s} - \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega} \\
&\quad \times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s), D^{\alpha-1}y(s))\frac{ds}{s}\right. \\
&\quad \left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s), D^{\alpha-1}y(s))\frac{ds}{s}\right]\Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s)) - f(s, y(s), D^{\alpha-1}y(s))|}{s}ds \\
&\quad + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right. \\
&\quad \times \frac{|f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s)) - f(s, y(s), D^{\alpha-1}y(s))|}{s}ds + \frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)} \\
&\quad \left. \times \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \frac{|f(s, x(s), D^{\alpha-1}x(s)) - f(s, y(s), D^{\alpha-1}y(s))|}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2), on obtient

$$
\begin{aligned}
\left|(\mathrm{T}x)(t)-(\mathrm{T}y)(t)\right| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{k(|x(s)-y(s)|+|\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s)-\mathrm{D}^{\alpha-1}y(s)|)}{s}ds\\
&+\frac{\left(\log t\right)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right.\\
&\times\frac{|k(|x(s)-y(s)|+|\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s)-\mathrm{D}^{\alpha-1}y(s)|)|}{s}ds+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\\
&\left.\times\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{k(|x(s)-y(s)|+|\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s)-\mathrm{D}^{\alpha-1}y(s)|)}{s}ds\right].
\end{aligned}
$$

Maintenant, en passant à la norme, on trouve :

$$
\begin{aligned}
|\,(\mathrm{T}x)(t)-(\mathrm{T}y)(t)\,| \leq\ & k\left(\|\,x-y\,\|_\infty+\|\,\mathrm{D}^{\alpha-1}x-\mathrm{D}^{\alpha-1}y\,\|_\infty\right)\max_{t\in[1,e]}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right.\\
&+\frac{\left(\log t\right)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds\right.\\
&\left.\left.+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

En calculant les intégral $\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}$ et $\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}$, puis en passant à la norme, on trouve :

$$
\|\,(\mathrm{T}x)-(\mathrm{T}y)\,\|_\infty\leq k\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}+\frac{1}{|\,\Omega\,|}\left[\frac{|\,\mathrm{A}\,|\left(\log\eta\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|\,\mathrm{B}\,|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right)\left(\|\,x-y\,\|_\infty+\|\,\mathrm{D}^{\alpha-1}x-\mathrm{D}^{\alpha-1}y\,\|_\infty\right). \tag{2.12}
$$

Donc,

$$
\|\,(\mathrm{T}x)-(\mathrm{T}y)\,\|_\infty\leq k\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}+\frac{1}{|\,\Omega\,|}\left[\frac{|\,\mathrm{A}\,|\left(\log\eta\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|\,\mathrm{B}\,|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right)\|\,x-y\,\|_{\mathrm{X}} \tag{2.13}
$$

D'où,

$$
\|\,(\mathrm{T}x)-(\mathrm{T}y)\,\|_\infty\leq k\mathrm{M}_1\,\|\,x-y\,\|_{\mathrm{X}}\,. \tag{2.14}
$$

Étape 2

On calcule $\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\alpha-1}(\mathrm{T}x)(t) =\ & \mathrm{D}^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}+\frac{\left(\log t\right)^{\alpha-1}}{\Omega}\right.\\
&\times\left[c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.\left.-\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right]\right).
\end{aligned}
$$

En revenant à la forme $J^{\alpha} f$ et par linéarité de $D^{\alpha-1}$, on a :

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1}(Tx)(t) &= D^{\alpha-1}\left(J^{\alpha} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\right) + D^{\alpha-1}\left(\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega}\right. \\ &\times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\ &\left.\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right]\right). \end{aligned}$$

En appliquant la définition de $D^{\alpha-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1}(Tx)(t) &= J^{1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Omega} \\ &\times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\ &\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right]. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1}(Tx)(t) &= \int_1^{t} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s)) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Omega} \\ &\times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\ &\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right]. \end{aligned}$$

Maintenant, soient $x, y \in X$. On a :

$$\begin{aligned} \left|(D^{\alpha-1}Tx)(t) - (D^{\alpha-1}Ty)(t)\right| &= \left|\int_1^{t} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Omega}\right. \\ &\times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right. \\ &\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right] \\ &- \int_1^{t} f(s,y(s),D^{\alpha-1}y(s))\frac{ds}{s} - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Omega} \\ &\times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} f(s,y(s),D^{\alpha-1}y(s))\frac{ds}{s}\right. \\ &\left.\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,y(s),D^{\alpha-1}y(s))\frac{ds}{s}\right]\right|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|(D^{\alpha-1}Tx)(t)-(D^{\alpha-1}Ty)(t)\right| \leq\ & \int_1^t \frac{|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,y(s),D^{\alpha-1}y(s))|}{s}ds \\ & +\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right. \\ & \times\frac{|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,y(s),D^{\alpha-1}y(s))|}{s}ds \\ & +\frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \\ & \left.\times\frac{|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))-f(s,y(s),D^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\right].\end{aligned}$$

En utilisant (H_2), on obtient :

$$\begin{aligned}\left|(D^{\alpha-1}Tx)(t)-(D^{\alpha-1}Ty)(t)\right| \leq\ & \int_1^t \frac{k(|x(s)-y(s)|+|D^{\alpha-1}x(s)-D^{\alpha-1}y(s)|)}{s}ds \\ & +\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right. \\ & \times\frac{k(|x(s)-y(s)|+|D^{\alpha-1}x(s)-D^{\alpha-1}y(s)|)}{s}ds \\ & +\frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \\ & \left.\times\frac{k(|x(s)-y(s)|+|D^{\alpha-1}x(s)-D^{\alpha-1}y(s)|)}{s}ds\right].\end{aligned}$$

En passant à la norme, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|(D^{\alpha-1}Tx)(t)-(D^{\alpha-1}Ty)(t)\right| \leq\ & k\left(\| x-y\|_\infty+\| D^{\alpha-1}x-D^{\alpha-1}y\|_\infty\right)\max_{t\in[1,e]}\left\{\int_1^t\frac{1}{s}ds\right. \\ & +\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds\right. \\ & \left.\left.+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]\right\}.\end{aligned}$$

En calculant les intégrales $\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}$ et $\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}$, puis en passant à la norme, on trouve :

$$\| (D^{\alpha-1}Tx)-(D^{\alpha-1}Ty)\|_\infty\leq k\left(1+\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[\frac{|A|\left(\log\eta\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right)\left(\| x-y\|_\infty+\| D^{\alpha-1}x-D^{\alpha-1}y\|_\infty\right) \tag{2.15}$$

D'où,

$$\| (D^{\alpha-1}Tx)-(D^{\alpha-1}Ty)\|_\infty\leq k\left(1+\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[\frac{|A|\left(\log\eta\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right)\left(\| x-y\|_X\right). \tag{2.16}$$

Donc,

$$\| (D^{\alpha-1}Tx)-(D^{\alpha-1}Ty)\|_\infty\leq kM_2\| x-y\|_X. \tag{2.17}$$

Alors d'après (2.14) et (2.17), on peut écrire :

$$\| (\mathrm{T}x)-(\mathrm{T}y) \|_\infty + \| (\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}y) \|_\infty \leq k(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2) \| x-y \|_{\mathrm{X}} . \tag{2.18}$$

Conclusion :

$$\| (\mathrm{T}x)-(\mathrm{T}y) \|_{\mathrm{X}} \leq k\mathrm{M} \| x-y \|_{\mathrm{X}} .$$

■

3.2 Existence Sans Unicité

Théorème 2.2 *[17] On suppose que* (H_1) *est vérifiée et*
(H_3) *: Il existe* $\mathrm{L}>0$*, tel que* f *est borné par* L.
Alors, Le problème (2.1) admet au moins une solution sur $[1,e]$.

Preuve.
On va utiliser le théorème du point fixe de Schaeffer pour montrer l'existence d'une solution pour le problème, et pour cela, on passera par 4 étapes :

Étape 1 : Montrons que T est continue.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{X}$ une suite telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X. Alors pour tout $t\in[1,e]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{T}x_n)(t)-(\mathrm{T}x)(t)| \ = \ & \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))\frac{ds}{s} + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega} \\
& \times \left[c - \frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))\frac{ds}{s} \right. \\
& \left. - \frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))\frac{ds}{s} \right] \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s} - \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega} \\
& \times \left[c - \frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s} \right. \\
& \left. - \frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s} \right] \Bigg| .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{T}x_n)(t)-(\mathrm{T}x)(t)| \ \leq \ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))-f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds \\
& + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Omega|} \left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \right. \\
& \times \frac{|f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))-f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds + \frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)} \\
& \left. \times \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \frac{|f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))-f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds \right] .
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue, alors

$$\| (\mathrm{T}x_n)(t)-(\mathrm{T}x)(t) \|_\infty \longrightarrow 0 \ quand \ n \longrightarrow 0. \tag{2.19}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left|(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x_n)(t)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t)\right| &= \Bigg|\int_1^t f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))\frac{ds}{s}+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Omega}\\
&\times\left[c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.-\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))\frac{ds}{s}\right]\\
&-\int_1^t f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Omega}\\
&\times\left[c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.-\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right]\Bigg|.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\left|(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x_n)(t)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t)\right| &\leq \int_1^t\frac{|f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))-f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\\
&+\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right.\\
&\times\frac{|f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))-f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\\
&+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\\
&\left.\times\frac{|f(s,x_n(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x_n(s))-f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue, alors

$$\|\,(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x_n)(t)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t)\,\|_\infty\longrightarrow 0\ quand\ n\longrightarrow 0. \tag{2.20}$$

D'après (2.19) et (2.21), on a

$$\|\,\mathrm{T}x_n(t)-\mathrm{T}x(t)\,\|_{\mathrm{X}}\longrightarrow 0\ quand\ n\longrightarrow 0. \tag{2.21}$$

Donc, T est continu.

Étape 2 : Montrons que T est borné.

On définit l'ensemble $\mathrm{B}_r := \{x\in\mathrm{X},\ \|x\|_{\mathrm{X}}\leq r\}$, où $r>0$. Pour $x\in\mathrm{B}_r$, On a

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{T}x)(t)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\\
&+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega}\left[c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right.\\
&\times\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\\
&\left.+\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\right]\Bigg|.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{T}x)(t)| \leq\; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds \\
& +\frac{\left(\log t\right)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\left[|c|+\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\right. \\
& \times\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds \\
& \left.+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3), on obtient

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{T}x)(t)| \leq\; & \max_{t\in[1,e]}\left\{\frac{\mathrm{L}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right. \\
& +\frac{\left(\log t\right)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\left[\frac{\mathrm{L}|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds\right. \\
& \left.\left.+\frac{\mathrm{L}|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]+\frac{|c|\left(\log t\right)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\right\}.
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales $\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}$ et $\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}$, puis en passant à la norme, on trouve :

$$\|(\mathrm{T}x)\|_\infty\leq \mathrm{L}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}+\frac{1}{|\Omega|}\left[\frac{|\mathrm{A}|\left(\log\eta\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right\}+\frac{|c|}{|\Omega|}. \tag{2.22}$$

D'où,

$$\|(\mathrm{T}x)\|_\infty\leq \mathrm{LM}_1+\frac{|c|}{|\Omega|}. \tag{2.23}$$

Pour $\mathrm{D}^{\alpha-1}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t)\right| =\; & \int_1^t\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds \\
& +\frac{\Gamma(\alpha)}{(\Omega}\left[c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\right. \\
& \left.+\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left|(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t)\right| \leq\; & \int_1^t\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds \\
& +\frac{\Gamma(\alpha)}{(|\Omega|}\left[|c|+\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\right. \\
& \left.+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x\|_\infty \leq\; & \max_{t\in[1,e]}\left\{\int_1^t\frac{\mathrm{L}}{s}ds+\frac{\Gamma(\alpha)}{(\log t)^2|\Omega|}\left[\frac{\mathrm{L}|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right.\right. \\
& \left.\left.\times\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds+\frac{\mathrm{L}|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]+\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{(\log t)^2|\Omega|}\right\}.
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales $\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}$ et $\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}$, puis en passant à la norme, on trouve :

$$\| (D^{\alpha-1}Tx) \|_\infty \leq L\left\{1+\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left\{\frac{|A|\left(\log\eta\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha)}\right\}\right\}+\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}. \tag{2.24}$$

Donc,

$$\| (D^{\alpha-1}Tx) \|_\infty \leq LM_2+\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}. \tag{2.25}$$

D'après (2.23) et (2.25), on obtient

$$\| Tx \|_\infty + \| (D^{\alpha-1}T)(x) \|_\infty \leq L(M_1+M_2)+2\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}. \tag{2.26}$$

Ceci, implique :

$$\| Tx \|_X \leq L(M_1+M_2)+2\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}. \tag{2.27}$$

Donc,

$$\| Tx \|_X \leq \infty. \tag{2.28}$$

D'où T est borné.

Étape 3 : Montrons T est équi-continue.

Pour $t_1, t_2 \in [1, e]$; $t_1 < t_2$, et $x \in B_r$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)| \quad = \quad & \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))}{s}ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))}{s}ds \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))}{s}ds \\
&+\frac{\left((\log t_2)^{\alpha-1}-(\log t_1)^{\alpha-1}\right)}{\Omega}\Bigg[c-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&\times\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))}{s}ds \\
&-\frac{B}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\Bigg]\Bigg|.
\end{aligned}$$

En utilisant (H_3), on trouve

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)| \quad \leq \quad & \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{s}ds\right| \\
&+\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right| \\
&+\frac{\left|\left((\log t_2)^{\alpha-1}-(\log t_1)^{\alpha-1}\right)\right|}{|\Omega|}\Bigg[|c|+\frac{L|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds \\
&+\frac{L|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\Bigg].
\end{aligned}$$

Donc,

$$|(\mathrm{T}x)(t_2)-(\mathrm{T}x)(t_1)| \leq \frac{\mathrm{L}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left|(\log t_1)^{\alpha}-(\log t_2)^{\alpha}+(\log t_2-\log t_1)^{\alpha}\right|+|(\log t_1-\log t_2)^{\alpha}|\right]$$
$$+\frac{|\left((\log t_2)^{\alpha-1}-(\log t_1)^{\alpha-1}\right)|}{|\Omega|}\left[|c|+\frac{\mathrm{L}|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{L}|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]. \tag{2.29}$$

Alors pour $t_1 \longrightarrow t_2$, on va avoir :

$$\| (\mathrm{T}x)(t_2)-(\mathrm{T}x)(t_1) \|_{\infty} \longrightarrow 0. \tag{2.30}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_2)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_1)\right| &\leq \left|\int_1^{t_2}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds-\int_1^{t_1}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\right|\\ &\leq \left|\int_1^{t_1}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds-\int_1^{t_1}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\right.\\ &\quad\left.+\int_{t_1}^{t_2}\frac{f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))}{s}ds\right|.\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (H_3), on obtient

$$\left|(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_2)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_1)\right| \leq \left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{L}}{s}ds\right|.$$

D'où,

$$\left|(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_2)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_1)\right| \leq \left|\mathrm{L}(\log t_2-\log t_1)\right|.$$

Alors pour $t_1 \longrightarrow t_2$, on va avoir :

$$\| (\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_2)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_1) \|_{\infty} \longrightarrow 0. \tag{2.31}$$

Par conséquent, on obtient

$$\| \mathrm{T}x(t_2)-\mathrm{T}x(t_1) \|_{\infty}+\| (\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_2)-(\mathrm{D}^{\alpha-1}\mathrm{T}x)(t_1) \|_{\infty} \longrightarrow 0 \ quand\ t_1 \longrightarrow t_2.$$

D'où

$$\| \mathrm{T}x(t_2)-\mathrm{T}x(t_1) \|_{\mathrm{X}} \longrightarrow 0 \quad t_1 \longrightarrow t_2.$$

D'après les étapes 1-2-3 et le théorème Arzela-Ascoli, T est complètement continue.

Étape 4 : Montrons que l'ensemble

$$\Delta := \{(x) \in \mathrm{X};\, x=\lambda\mathrm{T}(x),\, 0<\lambda<1\} \tag{2.32}$$

est borné.
Soit $x \in \Delta$. Alors $x=\lambda\mathrm{T}(x)$, pour chaque $0<\lambda<1$, et pour tout $t \in [1,e]$, on a :

$$\begin{aligned}x(t) &= \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega}\right.\\ &\quad\left\{c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right.\\ &\quad\left.\left.-\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x(s),\mathrm{D}^{\alpha-1}x(s))\frac{ds}{s}\right\}\right].\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|x(t)| &\leq \max_{t\in[1,e]}\left\{\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right.\\ &+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\left[\frac{L|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds\right.\\ &\left.\left.+\frac{L|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]+\frac{|c|(\log t)^{\alpha-1}}{|\Omega|}\right\}.\end{aligned}$$

Donc,

$$|x(t)|\leq\lambda\left(LM_1+\frac{|c|}{|\Omega|}\right). \tag{2.33}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\left|(D^{\alpha-1}x(t)\right| &\leq \int_1^t\frac{|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\\ &+\frac{\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\left[|c|+\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\right.\\ &\left.+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{|f(s,x(s),D^{\alpha-1}x(s))|}{s}ds\right].\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (H_3) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|(D^{\alpha-1}x)(t)| &\leq \max_{t\in[1,e]}\left\{\int_1^t\frac{L}{s}ds+\frac{\Gamma(\alpha)}{(|\Omega|}\left[\frac{L|A|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right.\right.\\ &\left.\left.\times\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{s}ds+\frac{L|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]+\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{(\log t)^2|\Omega|}\right\}.\end{aligned}$$

Donc,

$$|(D^{\alpha-1}x)(t)|\leq\lambda\left(LM_2+\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\right). \tag{2.34}$$

D'après (2.33) et (2.34), on a

$$\|x\|_\infty+\|D^{\alpha-1}x\|_\infty\leq\lambda\left(L(M_1+M_2)+2\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\right). \tag{2.35}$$

Ceci implique que

$$\|x\|_X\leq\lambda\left(L(M_1+M_2)+2\frac{|c|\Gamma(\alpha)}{|\Omega|}\right). \tag{2.36}$$

D'où,

$$\|x\|_X\leq\infty. \tag{2.37}$$

L'ensemble Δ est un borné.
Grâces aux étapes 1, 2, 3, et 4 , et d'après théorème du point fixe de Shaeffer, on déduit que T admet un point fixe qui est solution du problème (2.1).

Chapitre 3

Sur un Système différentiel de Type Hadamard

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution du problème

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), D^{\mu}x(t)),\ D^{\beta}y(t) = g(t, y(t), D^{\nu}y(t)),\ 1 < t < e \\ x^{(j)}(1) = y^{(j)}(1) = 0,\ 0 \leq j \leq n-2 \\ AJ^{\gamma}x(\eta) + Bx'(e) = c,\ AJ^{\gamma}y(\eta) + By'(e) = c \qquad \gamma > 0, 1 < \eta < e, \end{cases}$$

où
$\alpha - \mu > 1$ et $\beta - \nu > 1$, $n-1 < \alpha, \beta \leq n$, $n \geq 2$. et $(A, B) \neq (0,0)$
Tout d'abord on commence par établir la représentation intégrale du système par l'utilisation des propriétés des opérateurs de Hadamard. Puis, ont utilisé le principe de contraction de Banach pour montrer l'existence et l'unicité de solution.

1 Problème Intégral

Lemme 3.1 *Soient $u, v \in C([1,e])$, Le problème*

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = u(t),\ D^{\beta}y(t) = v(t),\ 1 < t < e \\ x^{j}(1) = y^{j}(1) = 0,\ 0 \leq j \leq n-2 \\ AJ^{\gamma}x(\eta) + Bx'(e) = c,\ AJ^{\gamma}y(\eta) + By'(e) = c \quad \gamma > 0, 1 < \eta < e \end{cases} \tag{3.1}$$

admet une solution intégrale s'écrivant comme suit :

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(s)}{s}ds + \left(\log t\right)^{\alpha-1}\left[\frac{c - AJ^{\alpha+\gamma}u(\eta) - BJ^{\alpha-1}u(e)}{\Omega_1}\right],$$
$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}\frac{v(s)}{s}ds + \left(\log t\right)^{\beta-1}\left[\frac{c - AJ^{\beta+\gamma}v(\eta) - BJ^{\beta-1}v(e)}{\Omega_2}\right],$$

d'où

$$\Omega_1 = \frac{B(\alpha-1)}{e} + \frac{A\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\log\eta\right)^{\alpha+\gamma-1},$$
$$\Omega_2 = \frac{B(\beta-1)}{e} + \frac{A\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma)}\left(\log\eta\right)^{\beta+\gamma-1}.$$

Preuve : Grâce au lemme 1.3, on a

$$x(t) = c_{11}(\log t)^{\alpha-1} + c_{12}(\log t)^{\alpha-2} + \dots + c_{1n}(\log t)^{\alpha-n} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(s)}{s}ds, \quad (3.2)$$

$$y(t) = c_{21}(\log t)^{\beta-1} + c_{22}(\log t)^{\beta-2} + \dots + c_{2n}(\log t)^{\beta-n} + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}\frac{v(s)}{s}ds. \quad (3.3)$$

D'après la première condition $x^j(1) = y^j(1) = 0, \quad 0 \le j \le n-2$, on a

$$c_{in} = c_{i(n-1)} = \dots = c_{i2} = 0 \;\; (i = 1,2).$$

Donc, (3.2) et (3.3), devient :

$$\begin{aligned} x(t) &= c_{11}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(s)}{s}ds, \\ y(t) &= c_{21}(\log t)^{\beta-1} + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}\frac{v(s)}{s}ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En utilisant la deuxième condition $AJ^{\gamma}x(\eta) + Bx'(e) = c$ et $AJ^{\gamma}y(\eta) + By'(e) = c$, on obtient

$$c_{11} = \frac{c - AJ^{\alpha+\gamma}u(\eta) - BJ^{\alpha-1}u(e)}{A\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}(\log)^{\alpha+\gamma-1} + \frac{B(\alpha-1)}{e}}, \quad (3.5)$$

$$c_{21} = \frac{c - AJ^{\beta+\gamma}v(\eta) - BJ^{\beta-1}v(e)}{A\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma)}(\log)^{\beta+\gamma-1} + \frac{B(\beta-1)}{e}}. \quad (3.6)$$

Il suffit de remplacer c_1 et c_2 dans (3.4), pour avoir :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(s)}{s}ds + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega_1}\left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\frac{u(s)}{s}ds \right. \\ &\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{u(s)}{s}ds\right], \\ y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}\frac{v(s)}{s}ds + \frac{(\log t)^{\beta-1}}{\Omega_2}\left[c - \frac{A}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1}\frac{v(s)}{s}ds \right. \\ &\left. - \frac{B}{\Gamma(\beta-1)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2}\frac{v(s)}{s}ds\right]. \end{aligned}$$

2 Problème de Point Fixe

On considère les espace de Banach suivante :

$$X := \left\{x \mid x \in C([1,e],\mathbb{R}), D^{\mu}x \in C([1,e],\mathbb{R})\right\},$$

muni de la norme

$$\| x \|_X = \| x \|_{\infty} + \| D^{\mu-1}x \|_{\infty},$$

et

$$Y := \left\{ y \mid y \in C([1,e],\mathbb{R}), D^{\nu} y \in C([1,e],\mathbb{R}) \right\}$$

muni de la norme

$$\| y \|_{Y} = \| y \|_{\infty} + \| D^{\nu} y \|_{\infty}.$$

On peut démonter que ,
$(X, \| . \|_X)$ et $(Y, \| . \|_Y)$, sont des espaces de Banach.
En plus,

$$(X \times Y, \| . \|_{X\times Y})$$

est un espace de Banach dont la norme est :

$$\| (x,y) \|_{X\times Y} = \| x \|_X + \| y \|_Y.$$

On introduit l'opérateur T défini par :

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & X \times Y \longrightarrow X \times Y \\ & (x,y) \longmapsto T\left(x,y\right) = \left(T_1 y, T_2 x\right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} T_1 y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f\left(s, y(s), D^{\mu} y(s)\right)}{s} ds + \frac{\left(\log t\right)^{\alpha-1}}{\Omega_1} \\ &\times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_1^{\eta} \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1} \frac{f\left(s, y(s), D^{\mu} y(s)\right)}{s} ds \right. \\ &\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha-1)} \int_1^{e} \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \frac{f\left(s, y(s), D^{\mu} y(s)\right)}{s} ds \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{g\left(s, x(s), D^{\nu} x(s)\right)}{s} ds + \frac{\left(\log t\right)^{\beta-1}}{\Omega_2} \\ &\times \left[c - \frac{A}{\Gamma(\beta+\gamma)} \int_1^{\eta} \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1} \frac{g\left(s, x(s), D^{\nu} x(s)\right)}{s} ds \right. \\ &\left. - \frac{B}{\Gamma(\beta-1)} \int_1^{e} \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2} \frac{g\left(s, x(s), D^{\nu} x(s)\right)}{s} ds \right]. \end{aligned}$$

3 Résultat Original

3.1 Existence et Unicité

Maintenant, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1). On utilise le principe de contraction de Banach.

Pour cela on a besoin des hypothèses suivantes :
$(\tilde{H_1})$ Les fonctions $f, g : [1, e] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow$ R sont continues.
$(\tilde{H_2})$ Pour chaque $t \in [1, e]$ et $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, on suppose

$$\left|f\left(t, x_1, y_1\right) - f\left(t, x_2, y_2\right)\right| \leq k_1 |x_1 - x_2| + k_2 \left|y_1 - y_2\right|$$
$$\left|g\left(t, x_1, y_1\right) - g\left(t, x_2, y_2\right)\right| \leq k_3 |x_1 - x_2| + k_4 \left|y_1 - y_2\right|$$

avec,

$$k = max(k_1, k_2), \quad k^{'} = max(k_3, k_4),$$

et $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ sont des constants de $\mathbb{R}^+$

Théorème 3.1 *On suppose* (H_2) *est satisfait,*
Si

$$k(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2) + k^{'}(\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2) < 1, \tag{3.7}$$

tels que

$$\mathrm{M}_1 = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha + \gamma\right)} + \frac{1}{|\,\Omega_1\,|} \left\{ \frac{|\,\mathrm{A}\,| \left(\log \eta\right)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma\left(\alpha + \gamma + 1\right)} + \frac{|\,\mathrm{B}\,|}{\Gamma(\alpha)} \right\},$$

$$\mathrm{M}_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha - \mu + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - \mu)\,|\,\Omega_1\,|} \left\{ \frac{|\,\mathrm{A}\,| \left(\log \eta\right)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma\left(\alpha + \gamma + 1\right)} + \frac{|\,\mathrm{B}\,|}{\Gamma(\alpha)} \right\},$$

et

$$\mathrm{N}_1 := \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \gamma\right)} + \frac{1}{|\,\Omega_2\,|} \left\{ \frac{|\,\mathrm{A}\,| \left(\log \eta\right)^{\beta+\gamma}}{\Gamma\left(\beta + \gamma + 1\right)} + \frac{|\,\mathrm{B}\,|}{\Gamma(\beta)} \right\},$$

$$\mathrm{N}_2 := \frac{1}{\Gamma(\beta - \nu + 1)} + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \nu)\,|\,\Omega_2\,|} \left\{ \frac{|\,\mathrm{A}\,| \left(\log \eta\right)^{\beta+\gamma}}{\Gamma\left(\beta + \gamma + 1\right)} + \frac{|\,\mathrm{B}\,|}{\Gamma(\beta)} \right\}.$$

Alors, le problème (3.1) admet une unique solution dans $[1, e]$.

Preuve : On applique le théorème de point fixe de Banach pour démontrer ce résultat. On a besoin de passer par 2 étapes.

Étape 1 :

a-On montre qu'il existe M_1 tel que $\|\, \mathrm{T}y - \mathrm{T}y_1 \,\|_\infty \leq \mathrm{M}_1 \,\|\, y - y_1 \,\|_{\mathrm{X}}$.
b- On montre qu'il existe M_2 tel que $\|\, (\mathrm{D}^\mu \mathrm{T})y - (\mathrm{D}^\mu \mathrm{T})y_1 \,\|_\infty \leq \mathrm{M}_2 \,\|\, y - y_1 \,\|_{\mathrm{X}}$.

Étape 2 :

a-On montre qu'il existe N_1 tel que $\|\, \mathrm{T}x - \mathrm{T}x_1 \,\|_\infty \leq \mathrm{N}_1 \,\|\, x - x_1 \,\|_{\mathrm{Y}}$.
b- On montre qu'il existe N_2 tel que $\|\, (\mathrm{D}^\nu \mathrm{T})x - (\mathrm{D}^\nu \mathrm{T})x_1 \,\|_\infty \leq \mathrm{N}_2 \,\|\, x - x_1 \,\|_{\mathrm{Y}}$.
Puis on passe à la norme $\|\,.\,\|_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}$ pour pouvoir conclure.

Étape1 : a-Soient $(x,y),(x_1,y_1)\in X\times Y$. et pour chaque $t\in[1,e]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|(T_1y)(t)-(T_1y_1)(t)\right| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y(s),D^{\mu}y(s))\frac{ds}{s}+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega_1}\\
&\times\left[c-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}f(s,y(s),D^{\mu}y(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.-\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y(s),D^{\mu}y(s))\frac{ds}{s}\right]\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y_1(s),D^{\mu}y_1(s))\frac{ds}{s}-\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{\Omega_1}\\
&\times\left[c-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}f(s,y_1(s),D^{\mu}y_1(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\left.-\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y_1(s),D^{\mu}y_1(s))\frac{ds}{s}\right]\Bigg|\\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|f(s,y(s),D^{\mu}y(s))-f(s,y_1(s),D^{\mu}y_1(s))|}{s}ds\\
&+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Omega_1|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right.\\
&\times\frac{|f(s,y(s),D^{\mu}y(s))-f(s,y_1(s),D^{\mu}y_1(s))|}{s}ds+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\\
&\left.\times\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{|f(s,y(s),D^{\mu}y(s))-f(s,y_1(s),D^{\mu}y_1(s))|}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

D'apèrs l'hypothèse $(\tilde{H_2})$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|T_1y(t)-T_1y_1(t)\right| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{k(|y(s)-y_1|+|D^{\mu}y(s))-D^{\mu}y_1(s))|)}{s}ds\\
&+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Omega_1|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right.\\
&\times\frac{k(|y(s)-y_1|+|D^{\mu}y(s))-D^{\mu}y_1(s))|)}{s}ds+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\\
&\left.\times\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{k(|y(s)-y_1|+|D^{\mu}y(s))-D^{\mu}y_1(s))|)}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

En passant à la norme de sup, on récupère :

$$\begin{aligned}
\| T_1y(t)-T_1y_1(t)\|_{\infty} &\le k\left(\| y-y_1\|_{\infty}+\| D^{\mu}y-D^{\mu}y_1\|_{\infty}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right.\\
&+\frac{(\log e)^{\alpha-1}}{|\Omega_1|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\frac{1}{s}ds\right.\\
&\left.\left.+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]\right\}.
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales $\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}$ et $\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\frac{ds}{s}$, puis en passant encore à la norme, on trouve :

$$\| (T_1y)-(T_1y_1)\|_{\infty}\le k\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)}+\frac{1}{|\Omega_1|}\left[\frac{|A|(\log\eta)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right)\left(\| y-y_1\|_{\infty}+\| D^{\mu}y-D^{\mu}y_1\|_{\infty}\right). \tag{3.8}$$

Donc,

$$\| (T_1 y) - (T_1 y_1) \|_\infty \leq k\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} + \frac{1}{|\Omega_1|}\left[\frac{|A|(\log\eta)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} + \frac{|B|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right) \| y - y_1 \|_X . \tag{3.9}$$

D'où

$$\| (T_1 y) - (T_1 y_1) \| \leq k M_1 \left(\| y - y_1 \|_X\right). \tag{3.10}$$

b- D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
D^\mu T_1(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\mu)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-\mu-1} \frac{f(s,y(s),D^\mu y(s))}{s} ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)\Omega_1}\left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right. \\
&\quad \times \frac{f(s,y(s),D^\mu y(s))}{s} ds - \frac{B}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \\
&\quad \left.\times \frac{f(s,y(s),D^\mu y(s))}{s} ds\right].
\end{aligned}$$

Maintenant, Soient $(x,y),(x_1,y_1) \in X \times Y$. Alors, il est clair que :

$$\begin{aligned}
\left|D^\mu T_1 y(t) - D^\mu T_1 y_1(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha-\mu)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-\mu-1} \frac{f(s,y(s),D^\mu y(s))}{s} ds\right. \\
&\quad + \frac{\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)\Omega_1}\left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right. \\
&\quad \times \frac{f(s,y(s),D^\mu y(s))}{s} ds - \frac{B}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \\
&\quad \left.\times \frac{f(s,y(s),D^\mu y(s))}{s} ds\right] \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\mu)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-\mu-1} \frac{f(s,y_1(s),D^\mu y_1(s))}{s} ds \\
&\quad - \frac{\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)\Omega_1}\left[c - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right. \\
&\quad \times \frac{f(s,y_1(s),D^\mu y_1(s))}{s} ds - \frac{B}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \\
&\quad \left.\left.\times \frac{f(s,y_1(s),D^\mu y_1(s))}{s} ds\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\mu)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-\mu-1} \\
&\quad \times \frac{|f(s,y(s),D^\mu y(s)) - f(s,y_1(s),D^\mu y_1(s))|}{s} ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)|\Omega_1|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right. \\
&\quad \times \frac{|f(s,y(s),D^\mu y(s)) - f(s,y_1(s),D^\mu y_1(s))|}{s} ds \\
&\quad + \frac{|B|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \\
&\quad \left.\times \frac{|f(s,y(s),D^\mu y(s)) - f(s,y_1(s),D^\mu y_1(s))|}{s} ds\right].
\end{aligned}$$

Grâce à $(\mathrm{H}_2^{\sim})$, on écrit :

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y(t)-\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y_1(t)\right| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha-\mu)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-\mu-1} \\
&\times\frac{k(|y(s)-y_1(s)|+|\mathrm{D}^{\mu}y(s)-\mathrm{D}^{\mu}y_1(s)|)}{s}ds \\
&+\frac{\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)|\Omega_1|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right. \\
&\times\frac{k(|y(s)-y_1(s)|+|\mathrm{D}^{\mu}y(s)-\mathrm{D}^{\mu}y_1(s)|)}{s}ds \\
&+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2} \\
&\left.\times\frac{k(|y(s)-y_1(s)|+|\mathrm{D}^{\mu}y(s)-\mathrm{D}^{\mu}y_1(s)|)}{s}ds\right].
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y(t)-\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y_1(t)\|_{\infty} \leq\ & k\left(\|y-y_1\|_{\infty}+\|\mathrm{D}^{\mu}y-\mathrm{D}^{\mu}y_1\|_{\infty}\right) \\
&\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha-\mu)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-\mu-1}\frac{1}{s}ds\right. \\
&+\frac{\Gamma(\alpha)(\log e)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)|\Omega_1|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\alpha+\gamma-1}\frac{1}{s}ds\right. \\
&\left.\left.+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{1}{s}ds\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y-\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y_1\|_{\infty} \leq\ & k\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha-\mu+1)}+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\mu)\,|\,\Omega_1\,|}\left[\frac{|\,\mathrm{A}\,|\,(\log\eta)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}+\frac{|\,\mathrm{B}\,|}{\Gamma(\alpha)}\right]\right\} \\
&\times\left(\|y-y_1\|_{\infty}+\|\mathrm{D}^{\mu}y-\mathrm{D}^{\mu}y_1\|_{\infty}\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\|\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y-\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{T}_1 y_1\|_{\infty}\leq k\mathrm{M}_2\left(\|y-y_1\|_{\infty}+\|\mathrm{D}^{\mu}y-\mathrm{D}^{\mu}y_1\|_{\infty}\right). \tag{3.11}
$$

D'après (3.15) et (3.16), on trouve

$$
\|\mathrm{T}_1 y-\mathrm{T}_1 y_1\|_{\mathrm{X}}\leq k(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2)\left(\|y-y_1\|_{\infty}+\|\mathrm{D}^{\mu}y-\mathrm{D}^{\mu}y_1\|_{\infty}\right). \tag{3.12}
$$

Étape 2 a-Soient $(x,y),(x_1,y_1)\in \mathrm{X}\times\mathrm{Y}$. et pour chaque $t\in[1,e]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{T}_2x)(t)-(\mathrm{T}_2x_1)(t)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s,x(s),\mathrm{D}^\nu x(s))\frac{ds}{s}+\frac{(\log t)^{\beta-1}}{\Omega_2}\\
&\quad\times\left[c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1} f(s,x(s),\mathrm{D}^\nu x(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\beta)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-1} f(s,y(s),\mathrm{D}^\nu y(s))\frac{ds}{s}\right]\\
&\quad-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s,x_1(s),\mathrm{D}^\nu x_1(s))\frac{ds}{s}-\frac{(\log t)^{\beta-1}}{\Omega_2}\\
&\quad\times\left[c-\frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1} f(s,x_1(s),\mathrm{D}^\nu x_1(s))\frac{ds}{s}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\mathrm{B}}{\Gamma(\beta)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-1} f(s,x_1(s),\mathrm{D}^\nu x_1(s))\frac{ds}{s}\right]\Bigg|\\
&\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^\nu x(s))-f(s,x_1(s),\mathrm{D}^\nu x_1(s))|}{s}ds\\
&\quad+\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|\Omega_1|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1}\right.\\
&\quad\times\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^\nu x(s))-f(s,x_1(s),\mathrm{D}^\nu x_1(s))|}{s}ds+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\beta-1)}\\
&\quad\left.\times\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2}\frac{|f(s,x(s),\mathrm{D}^\nu x(s))-f(s,x_1(s),\mathrm{D}^\nu x_1(s))|}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}_2x(t)-\mathrm{T}_2x_1(t)| &\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}\frac{k'(|x(s)-x_1|+|\mathrm{D}^\nu x(s))-\mathrm{D}^\nu x_1(s))|)}{s}ds\\
&\quad+\frac{(\log t)^{\beta-1}}{|\Omega_2|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1}\right.\\
&\quad\times\frac{k'(|x(s)-x_1(s)|+|\mathrm{D}^\mu x(s))-\mathrm{D}^\nu x_1(s))|)}{s}ds+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\beta-1)}\\
&\quad\left.\times\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2}\frac{k'(|x(s)-x_1|+|\mathrm{D}^\nu x(s))-\mathrm{D}^\nu x_1(s))|)}{s}ds\right].
\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{T}_2x(t)-\mathrm{T}_2x_1(t)\|_\infty &\le k'\left(\|x-x_1\|_\infty+\|\mathrm{D}^\nu x-\mathrm{D}^\nu x_1\|_\infty\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-1}\frac{1}{s}ds\right.\\
&\quad+\frac{(\log e)^{\beta-1}}{|\Omega_2|}\left[\frac{|\mathrm{A}|}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^\eta\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1}\frac{1}{s}ds\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\beta-1)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2}\frac{1}{s}ds\right]\right\}.
\end{aligned}$$

cela implique que :

$$\|(\mathrm{T}_2x)-(\mathrm{T}_2x_1)\|_\infty\le k'\left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)}+\frac{1}{|\Omega_2|}\left[\frac{|\mathrm{A}|(\log\eta)^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}+\frac{|\mathrm{B}|}{\Gamma(\beta)}\right]\right)\left(\|x-x_1\|_\infty+\|\mathrm{D}^\nu x-\mathrm{D}^\nu x_1\|_\infty\right). \tag{3.13}$$

il s'en suit que :

$$\| (T_2x) - (T_2x_1) \|_\infty \leq k' \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)} + \frac{1}{|\Omega_2|} \left[\frac{|A| (\log\eta)^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} + \frac{|B|}{\Gamma(\beta)} \right] \right) \| x - x_1 \|_X . \tag{3.14}$$

D'où

$$\| (T_2x) - (T_2x_1) \| \leq k' N_1 (\| x - x_1 \|_X) . \tag{3.15}$$

tel que :

$$N_1 := \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)} + \frac{1}{|\Omega_2|} \left\{ \frac{|A| (\log\eta)^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} + \frac{|B|}{\Gamma(\beta)} \right\}.$$

b- D'autre part,

$$\begin{aligned} D^\nu T_2 x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta-\nu)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-\nu-1} \frac{f(s,x(s),D^\nu x(s))}{s} ds \\ &+ \frac{\Gamma(\beta)(\log t)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)\Omega_2} \left[c - \frac{A}{\Gamma(\beta+\gamma)} \int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1} \right. \\ &\times \frac{f(s,x(s),D^\nu x(s))}{s} ds - \frac{B}{\Gamma(\beta-1)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2} \\ &\left. \times \frac{f(s,x(s),D^\nu x(s))}{s} ds \right]. \end{aligned}$$

Pour $(x,y),(x_1,y_1) \in X \times Y$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| D^\nu T_2 x(t) - D^\nu T_2 x_1(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta-\nu)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-\nu-1} \frac{f(s,x(s),D^\nu x(s))}{s} ds \right. \\ &+ \frac{\Gamma(\beta)(\log t)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)\Omega_2} \left[c - \frac{A}{\Gamma(\beta+\gamma)} \int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1} \right. \\ &\times \frac{f(s,x(s),D^\nu x(s))}{s} ds - \frac{B}{\Gamma(\beta-1)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2} \\ &\left. \times \frac{f(s,x(s),D^\nu x(s))}{s} ds \right] \\ &- \frac{1}{\Gamma(\beta-\nu)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-\nu-1} \frac{f(s,x_1(s),D^\nu x_1(s))}{s} ds \\ &- \frac{\Gamma(\beta)(\log t)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)\Omega_2} \left[c - \frac{A}{\Gamma(\beta+\gamma)} \int_1^\eta \left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1} \right. \\ &\times \frac{f(s,x_1(s),D^\nu x_1(s))}{s} ds - \frac{B}{\Gamma(\beta-1)} \int_1^e \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2} \\ &\left.\left. \times \frac{f(s,x_1(s),D^\nu x_1(s))}{s} ds \right] \right|, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\left|D^{\nu}T_2x(t)-D^{\nu}T_2x_1(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\nu)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-\nu-1}\\ &\times\frac{|f(s,x(s),D^{\nu}x(s))-f(s,x_1(s),D^{\nu}x_1(s))|}{s}ds\\ &+\frac{\Gamma(\beta)(\log t)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\mu)|\Omega_2|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1}\right.\\ &\times\frac{|f(s,x(s),D^{\nu}x(s))-f(s,x_1(s),D^{\nu}x_1(s))|}{s}ds\\ &+\frac{|B|}{\Gamma(\beta-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2}\\ &\left.\times\frac{|f(s,x(s),D^{\nu}x(s))-f(s,x_1(s),D^{\nu}x_1(s))|}{s}ds\right].\end{aligned}$$

Grâce à $(H_2^{\sim})$, on a :

$$\begin{aligned}\left|D^{\nu}T_2x(t)-D^{\nu}T_2x_1(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta-\nu)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-\nu-1}\\ &\times\frac{k'(|x(s)-x_1(s)|+|D^{\nu}x(s)-D^{\nu}x_1(s)|)}{s}ds\\ &+\frac{\Gamma(\beta)(\log t)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)|\Omega_2|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1}\right.\\ &\times\frac{k'(|x(s)-x_1(s)|+|D^{\nu}x(s)-D^{\nu}x_1(s)|)}{s}ds\\ &+\frac{|B|}{\Gamma(\beta-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2}\\ &\left.\times\frac{k'(|x(s)-x_1(s)|+|D^{\nu}x(s)-D^{\nu}x_1(s)|)}{s}ds\right].\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}\| D^{\nu}T_2x(t)-D^{\nu}T_2y_1(t)\|_{\infty} &\leq k'\left(\| x-x_1\|_{\infty}+\| D^{\nu}x-D^{\nu}x_1\|_{\infty}\right)\\ &\left\{\frac{1}{\Gamma(\beta-\nu)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-\nu-1}\frac{1}{s}ds\right.\\ &+\frac{\Gamma(\beta)(\log e)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)|\Omega_2|}\left[\frac{|A|}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_1^{\eta}\left(\log\frac{\eta}{s}\right)^{\beta+\gamma-1}\frac{1}{s}ds\right.\\ &\left.\left.+\frac{|B|}{\Gamma(\beta-1)}\int_1^{e}\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-2}\frac{1}{s}ds\right]\right\}.\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\| D^{\nu}T_2x-D^{\nu}T_2x_1\|_{\infty} &\leq k'\left\{\frac{1}{\Gamma(\beta-\nu+1)}+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta-\nu)\mid\Omega_2\mid}\left[\frac{\mid A\mid\left(\log\eta\right)^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}+\frac{\mid B\mid}{\Gamma\left(\beta\right)}\right]\right\}\\ &\times\left(\| x-x_1\|_{\infty}+\| D^{\nu}x-D^{\nu}x_1\|_{\infty}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\| D^{\nu}T_2x-D^{\nu}T_2x_1\|_{\infty}\leq k'N_2\left(\| x-x_1\|_{\infty}+\| D^{\nu}x-D^{\nu}x_1\|_{\infty}\right). \tag{3.16}$$

D'après (3.15) et (3.16), on trouve

$$\| T_2 x - T_2 x_1 \|_X \leq k'(N_1 + N_2)\left(\| x - x_1 \|_\infty + \| D^\nu x - D^\nu x_1 \|_\infty\right). \tag{3.17}$$

Grâce à (3.12) et (3.17), on obtient

$$\| T(x-y) - T(x_1 - y_1) \|_{X\times Y} \leq \left[k(M_1 + M_2) + k^{'}(N_1 + N_2)\right]\left(\| (x - x_1, y - y_1 \|_{X\times Y}\right). \tag{3.18}$$

Grâce à (3.7), on conclut que T est contraction.
D'après le théorème de point fixe de Banach, on déduit que le problème (3.1) admet une unique solution sur [1,e].

Conclusion

Dans ce mémoire de Master, on a abordé les équations différentielles au sens de Hadamard ; un sujet qui n' a pas été abordé durant notre formation de Master.
Dans un premier chapitre original, on a pu établir quelques résultats originaux sur l'étude d'une classe d'équations au sens de Hadamard et ce chapitre original a été accepté pour publication en 2018 dans le journal de Mathematics and Open Problems.
Dans un deuxième chapitre original, on a essayé de présenter une généralisation technique en abordant les systèmes différentiels au sens de Hadamard ; un seul résultat original a été établit dans ce sens.

Bibliographie

[1] B. Ahmad and A. Alsaedi, K. Ntouyas, W. Shammakh, P. Agarwal : Existence theory for fractional differential equations with non-separated type nonlocal multi-point and multi-strip boundary, Adv. Diff. Equations, (2018). 14

[2] B. Ahmad and S.K Ntouyas :On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems , Appl. Math. Comput., PIER 47, pp 119–131, (2015). 14

[3] B. Ahmad and S.K. Ntouyas :Initial Value Problem for Hybrid Hadamard fractional integro-differential equations , EJDE, PIER 47, pp 110-120, (2015). 14

[4] B. Ahmad and J. Nieto :Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions , Comput. Math. Appl, PIER 58, pp 1838-1843, (2009). 14

[5] A. Alsaedi, S. K. Ntouyas,A. Bashir and A. Hobiny : Nonlinear Hadamard fractional differential equations with Hadamard type nonlocal non-conserved conditions, Adv. Diffe. Equat, (2015). 14

[6] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo : Fractional Calculus Models and Numerical Methods. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. World Scientific, PIER 33, Boston (2012). 14

[7] M. Benchohra, S. Hamani, S.K Ntouyas : Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear. Anal. tma, PIER 71, pp 2391–2396, (2009). 14

[8] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt. Math. , (2012). 8

[9] P.L. Butzer A.A. Kilbas, J.J Trujillo : Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, Math. Anal. Appl, PIER 269, pp 387–400, (2002). 14

[10] G. Christopher : Existence and uniqueness of solutions to a fractional difference equation with nonlocal conditions, Comput. Math. Appl, PIER 61, pp 191–202, (2011). 14

[11] Z. Dahmani and L. Tabharit : Fractional Order Differential Equations Involving Caputo Derivative, Comput. Math. Appl, PIER 4, pp 40–55, (2014).

[12] F. Dugundji and A. Granas : Fixed Point Theory, Springer, New York, (2003). 12, 13

[13] J. Hadamard : Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor , Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892). 8

[14] A.A. Kilbas : Hadamard-type fractional calculus, Korean Math. Soc, PIER 38, pp 1191–1204, (2001). 11

[15] A.A. Kilbas, I.O Marichev, G.S Samko : Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Langhorne, (1993). 3, 8, 10, 11

[16] A.A. Kilbas, H.M Srivastava, J.J Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V, PIER 204, (2006). 11

[17] A. Oualid, Z. Dahmani : Differential Equation Via Hadamard Approach , Some Existence Uniqueness Results, Int. J. Open Prob. Compt. Math., Accepted paper, (2018). 15, 16, 21

Equations Différentielles aux Sens de Hadamard

Résumé : Dans ce mémoire de Master, on s'intéresse aux équations différentielles selon l'approche de Hadamard.
On commence par étudier une classe d'EDFs avec des conditions intégrales /non locales. Dans ce sens, on établit certains résultats originaux concernant l'existence et l'unicité /l'existence de solutions.
Puis, on s'intéresse aux systèmes d'EDFs avec conditions non locales : un résultat original sur l'existence et l'unicité est établit.

Mots-Clés. Dérivée de Hadamard,Intégrales de Hadamard, Point fixe, Existence et Unicité.

Differential Equations With Hadamard

Abstract : This work deals with the study of a class of fractional order differential equation with non local conditions involving Hadamard operators.
We establish new existence and uniqueness results by applying Banach contraction principle. Then, we use Schaeffer theorem to generate an existence result.
At the end, a system of FDEs of Hadamard type is studied.

Key Words. Hadamard derivative, Hadamard integral , Fixed point, Existence and uniqueness.