

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE*

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

=====*o* ○ *o*=====

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

APPLICATIONS DE LA THEORIE DE NEVANLINNA
DANS L'ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES
COMPLEXES DANS LE DISQUE UNITE

Présenté par : **BEDDANI Hamid**

Soutenu le : devant le jury composé de :

Président : Mr BENDOUKHA Berrabah (Professeur à l'université de Mostaganem).

Encadreur : Mr BELAÏDI Benharrat (Professeur à l'université de Mostaganem).

Examineur : Mr TERBECHE Mekki (Professeur à l'université d'Oran Es-sénia).

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon professeur et directeur de ce mémoire monsieur Belaïdi Benharrat Professeur à L'université de Mostaganem, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements durant ces années m'ont beaucoup aidée à progresser.

Je tiens également à exprimer mes plus vifs remerciements à monsieur le président du jury, Mr Bendoukha Berrabah, Professeur, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem et à M. Belkhelfa Mohamed, Professeur, Université de Mascara, à M. Hamouda Saada, Maître de Conférences A, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, pour leur aide inestimable tout au long de ma formation.

Je dédie cet ouvrage à mes chers parents, mes frères, mes sœurs, toute ma famille ainsi qu'à mes amis et à toute personne qui a contribué de près ou de loin pour accomplir ce mémoire

Table des matières

Introduction	3
1 Rappels et définitions	5
1.0.1 Théorie de R. Nevanlinna :	5
1.0.2 La densité des ensembles :	9
1.0.3 $[p, q]$ -ordre et $[p, q]$ -type	11
1.0.4 $[p, q]$ couple indice	11
2 Croissance des solutions des équations différentielles homogènes à coefficients fonctions entières d'ordre $[p, q]$	14
2.1 Introduction et résultats	14
2.2 Lemmes préliminaires	18
2.3 Preuve des Théorèmes	21
2.3.1 Preuve du Théorème 2.1	21
2.3.2 Preuve du Théorème 2.2	23
2.3.3 Preuve du Théorème 2.3	24
2.3.4 Preuve du Théorème 2.4	26
2.3.5 Preuve du Théorème 2.5	26
2.3.6 Preuve du Théorème 2.6	26
3 Croissance des solutions des équations différentielles non homogènes à coefficients fonctions entières d'ordre $[p, q]$	28
3.1 Introduction et résultats	28
3.2 Lemmes Préliminaires	32
3.3 Preuve des Théorèmes	33
3.3.1 Preuve du Théorème 3.1	33
3.3.2 Preuve du Théorème 3.2	34
3.3.3 Preuve du Théorème 3.3	35
3.3.4 Preuve du Théorème 3.4	35
3.3.5 Preuve du Théorème 3.5	37
3.3.6 Preuve du Théorème 3.6	37
3.3.7 Preuve du Théorème 3.7	39
3.3.8 Preuve du Théorème 3.8	41
3.4 Références	42

Introduction

Les équations différentielles linéaires dans le domaine complexe sont un secteur des mathématiques admettant plusieurs manières d'approche. La théorie locale est peut-être la plus étudiée de ces approches, ses résultats de base comme :

Le théorème de base d'existence et d'unicité et la structure linéaire de base des solutions des équations linéaires, la singularité etc, que nous sommes familier avec, aident à comprendre notre intérêt.

Notre intérêt est différent, il se trouve dans la direction de la théorie des fonctions, c'est l'application de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondées par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna, qui nous donne une aperçu sur les propriétés des solutions des équations différentielles, cette direction est apparue dès 1929 (Voir [23,24]). Le premier qui a effectué des études systématiques sur les applications de la théorie de Nevanlinna sur les équations complexes est H. Wittich commençant dès 1942 (Voir [23]).

Maintenant, la théorie globale des équations différentielles complexes en liaison avec la théorie de Nevanlinna est devenue plus populaire. Pendant les trois dernières décennies plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans des pays différents ont joué un rôle remarquable dans ce domaine, des résultats importants ont été établis. Cette théorie est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes.

Spécifiquement notre étude est sur l'ordre de croissance et les points fixes des solutions. La théorie des équations différentielles linéaires complexes a été développée depuis les années 1960. Beaucoup d'auteurs ont étudié les équations linéaires complexes

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_0(z) f = 0 \quad (1)$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_0(z) f = F(z). \quad (2)$$

Des résultats importants quand les coefficients $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), F(z), (k \geq 2)$, dans (1) ou (2) sont des fonctions entières d'ordre fini (par exemple. [7, 9, 10]) ont été établi. L. G. Bernal, L. Kinnunen et J. Tu ont étudié la croissance des solutions de (1) et (2) individuellement quand les coefficients dans (1) ou (2) sont des fonctions entières d'ordre itératif fini (voir [11, 12]). Les propriétés de (1) et (2) ont été également étudiées par T-B. Cao et J. Heittokangas quand les coefficients sont des fonctions analytiques dans le disque unité (voir [8, 22]). Dans [16, 17]

O.P.Juneja G.P. Kopoor, S.K. Bajpai ont étudié quelques propriétés des fonctions entières d'ordre $[p, q]$, et ont obtenu quelques résultats. Notre but dans ce mémoire est d'utiliser les concepts des fonctions entières d'ordre $[p, q]$ pour étudier les équations différentielles linéaires complexes (1) et (2).

Dans le premier chapitre on donne les notions fondamentales sur la théorie de Nevanlinna dont on aura besoin par la suite.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z) f = 0,$$

où $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), (k \geq 2)$ sont des fonctions entières transcendentes d'ordre $[p, q]$ fini. Quelques estimations sont données pour l'ordre $[p, q]$ des solutions de l'équation ci-dessus quand l'un des coefficients A_s est dominant.

Dans le troisième chapitre, on étudie la croissance des solutions des équations différentielles non homogènes

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z) f = F(z),$$

où $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), (k \geq 2)$ et $F(z)$ sont des fonctions entières transcendentes d'ordre $[p, q]$.

Chapitre 1

Rappels et définitions

On va citer quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite.

1.0.1 Théorie de R. Nevanlinna :

Théorème 1.1 (voir [22]) (Jensen) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$, et soient a_1, a_2, \dots (resp. b_1, b_2, \dots) ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i| < r} \frac{r}{|a_i|}.$$

Définition 1.1 Soit f une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. Soit $i(z, a, f)$ désignant la multiplicité de a -point de f à z . Ainsi, on définit

$$n(r, a, f) = n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=a}} i(z, a, f)$$

c'est à-dire, $n(r, a, f)$ est le nombre de racines de $f(z) = a$ dans $|z| \leq r$, chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité. Pour les pôles de f , nous définissons

$$n(r, \infty, f) = n(r, f) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=\infty}} i(z, \infty, f).$$

Définition 1.2 (voir [22]) (**fonction a -points**). Pour la fonction méromorphe f , on définit

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r$$

pour $a \neq \infty$ et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r$$

$N(r, a, f)$ est appelée fonction a -points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Définition 1.3 (voir [11]. [23]) (**fonction de proximité**). Pour la fonction méromorphe f , on définit

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, a \neq \infty$$

et

$$m(r, 0, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$m(r, a, f)$ est appelée fonction de proximité de la fonction f au point a

Définition 1.4 (voir [19,24]) (**Fonction caractéristique**). La fonction caractéristique de la fonction méromorphe f est définie comme suit

$$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f).$$

Exemple 1.1 Pour la fonction $f(z) = e^{az}$, $a \neq 0$, on a $m(r, f) = \frac{|a|r}{\pi}$, $N(r, f) = 0$ d'où

$$T(r, f) = \frac{|a|r}{\pi}$$

Définition 1.5 Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on définit

$$\log^+ \alpha = \max(0, \log \alpha)$$

Les propriétés de bases du logarithme tronqué sont contenues dans le lemme suivant :

Lemme 1.1 On a

- (a) $\log \alpha \leq \log^+ \alpha$,
- (b) $\log^+ \alpha \leq \log^+ \beta$ pour $\alpha \leq \beta$,
- (c) $\log \alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha}$,
- (d) $|\log \alpha| = \log^+ \alpha + \log^+ \frac{1}{\alpha}$,
- (e) $\log^+ \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \log^+ \alpha_i$,
- (f) $\log^+ \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \log^+ \alpha_i + \log n$.

Preuve Montrons (e) et (f) :

(e) : Si $\prod_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$, alors l'inégalité est triviale. Si $\prod_{i=1}^n \alpha_i > 1$, alors

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^n \ln \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n \ln^+ \alpha_i.$$

(f) De (b) et (e) on a

$$\begin{aligned} \ln^+ \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) &\leq \ln^+ \left(n \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \right) \leq \ln n + \ln^+ \left(n \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \right) \\ &\leq \ln n + \sum_{i=1}^n \ln^+ \alpha_i. \end{aligned}$$

Théorème 1.2 (Premier théorème fondamental). Soient f une fonction méromorphe, $a \in \mathbb{C}$ et

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

le développement de Laurent de la fonction $f - a$ à l'origine. Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \log |c_m| + \varphi(r, a),$$

où

$$\varphi(r, a) \leq \log 2 + \log^+ |a|.$$

Remarque 1.1 Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit :

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1).$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Lemme 1.2 (voir [22]) Soient f, f_1, \dots, f_n des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Alors

- (A) $m\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \log n,$
- (B) $m\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i),$
- (C) $N\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i),$
- (D) $N\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i),$
- (E) $T\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \log n \quad \text{pour } n \geq 1,$
- (F) $T\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) \quad \text{pour } n \geq 1,$
- (G) $T(r, f^n) = nT(r, f), \quad \text{pour } (n \geq 1),$
- (K) $T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1), \quad f \neq -\frac{d}{c}.$

Preuve F) On a

$$m\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) \quad \text{et} \quad N\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i)$$

$$\text{donc } T\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) = m\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i)$$

G) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1 \Leftrightarrow |f| \leq 1$.

Si $|f| \leq 1$, alors

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = nN(r, f) = nT(r, f)$$

Si $|f| > 1$, alors

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) + m(r, f^n) = nN(r, f) + nm(r, f) = nT(r, f).$$

$$\begin{aligned} \text{E) } T\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) &= N\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i) + \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \ln n = \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \log n. \end{aligned}$$

$$\text{K) Posons } f_0 = f, f_1 = f_0 + \frac{d}{c}, f_2 = cf_1, f_3 = \frac{1}{f_2},$$

$$f_4 = \frac{bc - ad}{c} f_3, f_5 = f_4 + \frac{a}{c}, \text{ si } c \neq 0, \text{ alors } T(r, f_{k+1}) = T(r, f_k) + O(1).$$

Définition 1.6 (voir [22,24,27]) Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$ et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\bar{\lambda}(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$,

Exemple 1.2 L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^z - 1$ est égal à 1.

Définition 1.7 (voir [20,29]) Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\rho(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}$$

et

$$\rho_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} f(z)$. Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

et

$$\rho_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r},$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de f .

Exemple 1.3 La fonction $f(z) = \exp\{\exp z\}$ est d'ordre $\rho(f) = \infty$ et d'hyper ordre $\rho_2(f) = 1$.

Lemme 1.3 Si f est une fonction méromorphe non constante dans \mathbb{C} , alors $\rho(f^{(k)}) = \rho(f)$ ($k \in \mathbb{N}$).

Définition 1.8 La fonction $a(z)$ est appelée petite fonction par rapport à f si $a(z)$ est une fonction méromorphe satisfaisant $T(r, a) = S(r, f)$, c'est-à-dire $T(r, a) = o(T(r, f))$ quand $r \rightarrow \infty$ à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie.

Lemme 1.4 Soient f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un entier positif. Alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r, f))).$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

1.0.2 La densité des ensembles :

Définition 1.9 (voir [12]) La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ est définie par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt$$

Définition 1.10 (voir [12]) La densité inférieure d'un sous-ensemble $\mathcal{H} \subset [0, +\infty)$ est définie par

$$\underline{dens}\mathcal{H} = \liminf_{r \rightarrow \infty} \left(\int_0^r \chi_{\mathcal{H}}(t) dt \right) / r$$

et la densité supérieure de \mathcal{H} est définie par

$$\overline{\text{dens}}\mathcal{H} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\int_0^r \chi_{\mathcal{H}}(t) dt \right) / r$$

Définition 1.11 (voir [12]) La densité logarithmique inférieure $\underline{\log \text{dens}}\mathcal{H}$

d'un sous-ensemble $\mathcal{H} \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$\underline{\log \text{dens}}\mathcal{H} = \liminf_{r \rightarrow \infty} \left(\int_1^r \frac{\chi_{\mathcal{H}}(t)}{t} dt \right) / \log r$$

et la densité logarithmique supérieure $\overline{\log \text{dens}}\mathcal{H}$ d'un sous-ensemble $H \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$\overline{\log \text{dens}}\mathcal{H} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\int_1^r \frac{\chi_{\mathcal{H}}(t)}{t} dt \right) / \log r$$

$\chi_{\mathcal{H}}(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble \mathcal{H} .

Exemple 1.4 Soit $E = [1, 2]$. Alors $m(E) = 1$, $lm(E) = \ln 2$, $\overline{\text{dens}}E = \underline{\text{dens}}E = \underline{\log \text{dens}}E = \log \text{dens}E = 0$

Définition 1.12 On dénoté pour $r \in [0, +\infty)$, $\exp_1 r = e^r$ et $\exp_{i+1} r = \exp(\exp_i r)$, $i \in \mathbb{N}$. Pour tout r suffisamment grand, nous définissons $\log_1 r = \log r$ et $\log_{i+1} r = \log(\log_i r)$, $i \in \mathbb{N}$. Nous dénotons également $\exp_0 r = r = \log_0 r$ et $\exp_{-1} r = \log_1 r$.

Définition 1.13 (voir [14], [21]) Soit f une fonction entière. Alors l'ordre itératif de f est défini par

$$\rho_p(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log r} \quad (p \geq 1, p \in \mathbb{N})$$

Définition 1.14 (voir [14], [21]) Soit f une fonction entière. Alors le degré de finitude de l'ordre de f est défini par

$$i(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est un polynôme,} \\ \min \{j \in \mathbb{N} : \rho_j(f)\} & \text{si } f \text{ transcendante pour un certain } j \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{avec } \rho_j(f) < \infty, \\ & \text{pour } \rho_j(f) = \infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Définition 1.15 Soit f une fonction entière. On définit l'exposant itératif de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda_p(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p n\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Maintenant, nous présentons les définitions des fonctions entières de $[p, q]$ -ordre, où p, q sont des nombres entiers positifs satisfaisant $p \geq q \geq 1$. Afin de garder l'accord avec la Définition 1.13, nous donnons une modification mineure à la définition originale de la définition du $[p, q]$ -ordre (voir [16,17]).

1.0.3 $[p, q]$ –ordre et $[p, q]$ –type

Définition 1.16 : Soit f une fonction entière transcendante. On définit le $[p, q]$ –ordre de f par

$$\rho_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log_q r}.$$

Exemple 1.5 Il est facile de voir que $0 \leq \rho_{[p,q]}(f) \leq \infty$. Si $f(z)$ est un polynôme, alors $\rho_{[p,q]}(f) = 0$ pour tout $p \geq q \geq 1$. Par la Définition 1.16, nous avons $\rho_{[1,1]}(f) = \rho_1(f) = \rho(f)$, $\rho_{[2,1]}(f) = \rho_2(f)$ et $\rho_{[p+1,1]}(f) = \rho_{p+1}(f)$.

Exemple 1.6 Si $f(z) = \exp_5 z$ alors $\rho_{[5,1]}(f) = 1$ et $\rho_{[6,2]}(f) = 1$, et si $g(z) = \exp_6 z^3$ alors $\rho_{[6,1]}(g) = 3$ et $\rho_{[7,2]}(g) = 1$.

Remarque 1.2 Si $f(z)$ est une fonction entière telle que $0 < \rho_{[p,q]}(f) < \infty$, alors

- (i) $\rho_{[p-n,q]} = \infty$ ($n < p$), $\rho_{[p,q-n]} = 0$ ($n < q$), $\rho_{[p+n,q+n]} = 1$ ($n < p$) pour $n = 1, 2, 3, \dots$
- (ii) si $[p', q']$ est un couple de nombres entiers satisfaisant $q' = p' + q - p$ et $p' < p$, alors $\rho_{[p',q']} = 0$ si $0 < \rho_{[p,q]} < 1$ et $\rho_{[p',q']} = \infty$ si $1 < \rho_{[p,q]} < \infty$.
- (iii) $\rho_{[p',q']} = \infty$ pour $q' - p' > q - p$ et $\rho_{[p',q']} = 0$ pour $q' - p' < q - p$.

Définition 1.17 Soit f une fonction entière. On définit le $[p, q]$ –type de f de $[p, q]$ –ordre ρ ($0 < \rho < \infty$) par

$$\tau_{[p,q]} = \tau_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p M(r, f)}{(\log_{q-1} r)^\rho}.$$

Définition 1.18 Soit f une fonction entière. On définit le $[p, q]$ –exposant de convergence des zéros de f par

$$\lambda_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p n\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r}.$$

Définition 1.19 Soit f une fonction entière. On définit le $[p, q]$ –exposant de convergence des zéros distincts de f par

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p \bar{n}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q r}.$$

1.0.4 $[p, q]$ couple indice

Définition 1.20 Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante. On dit que f est de couple indice $[p, q]$, $p \geq q \geq 1$, si $b < \rho_{[p,q]} < \infty$ et $\rho_{[p-1,q-1]} = \infty$

$$b = 1 \text{ si } p = q \quad \text{et} \quad b = 0 \quad \text{si } p > q$$

Remarque 1.3 Si $\rho_{[p,q]}$ n'est jamais plus grand que 1 et $\rho_{[p',q']} = 1$ pour un certain entier $p' \geq 1$, alors le couple indice de $f(z)$ est défini par $[m, m]$, où $m = \inf\{p' : \rho_{[p',q']} = 1\}$. Si $\rho_{[p,q]} \notin \{0, \infty\} \forall p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\rho_{[p'',1]} = 0$ pour un certain nombre entier $p'' \geq 1$, alors le couple indice de $f(z)$ est défini par $[n, 1]$, où $n = \inf\{p'' : \rho_{[p'',1]} = 0\}$. Si $\rho_{[p,q]}$ est infini alors le couple indice de $f(z)$ est défini pour être $[\infty, \infty]$. Si $f(z)$ a le couple indice $[p, q]$ alors $\rho = \rho_{[p,q]}$ s'appelle son $[p, q]$ -order.

Définition 1.21 On dit que le couple indice $[p, q]$ d'une fonction entière transcendante est inférieur au couple indice (p', q') , $p' \geq q' \geq 1$, si l'une des conditions suivantes est vérifiées

- (i) $p' - p > q' - q$,
- (ii) $p' - p < q' - q < 0$ et $\rho_{[p,q]} < 1$,
- (iii) $p' - p = q' - q > 0$ et $\rho_{[p-1, q-1]} = 0$,
- (iv) $p' - p = q' - q > 0$.

Remarque 1.4 Soient $f_1(z)$ une fonction entière de $[p, q]$ -ordre ρ_1 et $f_2(z)$ une fonction entière de $[p', q']$ -ordre ρ_2 et soit $p \leq p'$. Les résultats suivants au sujet de leur croissance comparative peuvent être facilement déduits :

- (i) Si $p' - p > q' - q$, alors la croissance de f_1 est plus lente que la croissance de f_2 ,
- (ii) Si $p' - p < q' - q$, alors f_1 croît plus rapidement que f_2 ,
- (iii) Si $p' - p = q' - q < 0$, alors la croissance de f_1 est plus lente que la croissance de f_2 si $\rho_2 \geq 1$ tandis que la croissance de f_1 est plus rapide que la croissance de f_2 si $\rho_2 < 1$,
- (iv) Si $p' - p = q' - q < 0$, alors f_1 et f_2 possèdent le même couple indice $[p, q]$. Si $\rho_1 > \rho_2$, alors f_1 croît plus rapidement que f_2 , et si $\rho_1 < \rho_2$, alors f_1 se développe plus rapidement que f_2 . Si $\rho_1 = \rho_2$, on peut rien dire sur la relation de croissance entre f_1 et f_2 .

Exemple 1.7 Soit $f_1(z) = e^z$, $f_2(z) = e^{e^z}$, par la Remarque 13, nous avons que le couple indice de $f_1(z)$ est $[1, 1]$ et le couple indice de $f_2(z)$ est $[2, 1]$.

Définition 1.22 (voir [12, 28]) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, le terme maximal de f est défini par $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n; n = 0, 1, \dots\}$, et l'indice central de f est défini par $\nu_f(r) = \max\{m, \mu(r) = |a_m| r^m\}$

Exemple 1.8 Pour le polynôme $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, on a $\mu(r) = |a_n| r^n$ et $\nu_P(r) = n$ pour r assez grand.

Lemme 1.5 Pour $r > 0$, on a $\mu(r) \leq M(r, f) \leq 2\mu(2r)$.

Lemme 1.6 $\nu_f(r)$ est croissante et $\nu_f(r) \rightarrow \infty$ quand $r \rightarrow \infty$.

Lemme 1.7 (voir [6, 15]) Soient $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\mu(r)$ le terme maximal, $\nu_g(r)$ l'indice central de g . Alors

$$\log \mu(r) = \log |a_0| + \int_0^r \frac{\nu_g(t)}{t} dt,$$

où $a_0 \neq 0$. Pour $r < R$, on a

$$M(r, g) < \mu(r) \left\{ \nu_g(R) + \frac{R}{R-r} \right\}.$$

Lemme 1.8 Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $[p, q]$ fini, et soit $\nu_f(r)$ l'indice central $f(z)$. Alors

$$\rho_{[p,q]} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p \nu_f(r)}{\log_q r}$$

Preuve Posons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tel que $|a_0| \neq 0$

1) Par le Lemme 1.7, le terme maximal, $\mu(r)$ de f satisfait

$$\log \mu(2r) = \log |a_0| + \int_0^{2r} \frac{v_f(t)}{t} dt \geq \log |a_0| + \nu_f(r) \log 2.$$

Par l'inégalité de Cauchy, on a $\log \mu(2r) \leq M(2r, f)$. Alors

$$\nu_f(r) \log 2 \leq M(2r, f) + c_1 \quad (1.1)$$

où $c_1 (> 0)$ est une constante. De (1.1), on a

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p \nu_f(r)}{\log_q r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log_q r} = \rho_{[p,q]}(f). \quad (1.2)$$

D'autre part, par la deuxième propriété du Lemme 1.7, on a

$$M(r, f) < \mu(r) \{v_f(2r) + 2\} = |a_{v_f(r)}| r^{v_f(r)} \{v_f(2r) + 2\}. \quad (1.3)$$

Comme $\{|a_n|\}$ est bornée, d'après (1.3) on a

$$\log_{p+1} M(r, g) \leq \log_p v_f(2r) \left[1 + \frac{\log_{p+1} v_f(2r)}{\log_p v_f(2r)} \right] + \log_{p+1} r + c_2,$$

où $c_2 (> 0)$ est une constante. Alors on a

$$\rho_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log_q r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p v_f(2r)}{\log_q 2r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p \nu_f(r)}{\log_q r}, \quad (1.4)$$

Donc, par (1.2) et (1.4), le Lemme 1.8 est prouvé.

Chapitre 2

Croissance des solutions des équations différentielles homogènes à coefficients fonctions entières d'ordre $[p, q]$

2.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on étudie l'équation différentielle linéaire homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_0(z) f = 0 \quad (2.1)$$

où $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$, ($k \geq 2$) sont des fonctions entières transcendentes d'ordre $[p, q]$ finis. Dans [5], B.Belaïdi a obtenu les théorèmes suivants :

Théorème 2.1.1 Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E > 0\}$, et soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles $0 \leq \beta < \alpha$ avec $\mu > 0$, on ait

$$|A_0(z)| \geq \exp(\alpha |z|^\mu)$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp(\beta |z|^\mu) \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$. Alors chaque solution $f \neq 0$ de (2.1) satisfaisant $\rho(f) = +\infty$ et $\mu \leq \rho_2(f)$.

Dans [21], L. Kinnunen a obtenu les théorèmes suivants :

Théorème 2.1.2 Supposons que $A(z)$ est une fonction entière avec $i(A) = p$, ($0 < p < \infty$). Alors toute solution non triviale de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0 \quad (2.2)$$

satisfait $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A)$.

Théorème 2.1.3 Soient $A(z)$ une fonction entière avec $i(A) = p$, ($0 < p < \infty$) et f_1, f_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.2).

Notons par $E := f_1 f_2$. alors $i_\lambda(E, 0) \leq p + 1$ et

$$\lambda_{p+1}(E, 0) = \rho_{p+1}(E) = \max\{\lambda_{p+1}(f_1, 0), \lambda_{p+1}(f_2, 0)\} \leq \rho_p(A).$$

Si $i_\lambda(E, 0) \leq p$, alors $i_\lambda(f, 0) = p + 1$ pour toutes les solutions de type $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$, où $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$.

Théorème 2.1.4 Soient $A(z)$ une fonction entière avec $i(A) = p$, et f une solution non triviale de (2.2). Supposer $\bar{\lambda}_p(A, 0) < \rho_p(A) \neq 0$. Alors $\lambda_{p+1}(f, 0) \leq \rho_p(A) \leq \lambda_p(f, 0)$.

Théorème 2.1.5 Soient $A(z)$ une fonction entière avec $i(A) = p$, ($1 < p < \infty$) et f une solution non triviale de (2.2). Si $i_\lambda(A, 0) < p$, alors $i_\lambda(f, 0) \geq p$.

Théorème 2.1.6 Soient $A(z)$ une fonction entière avec $i(A) = p$, et d'ordre itératif $\rho_p(A) = \rho$ où $1 < p < \infty$, et f_1, f_2 deux solutions linéairement indépendantes de (2.2) telles que $\max\{\lambda_p(f_1, 0), \lambda_p(f_2, 0)\} < \rho$. Soit $\Pi \neq 0$ une fonction entière pour laquelle $i(\Pi) < p$ où $i(\Pi) = p$ et $\rho_p(\Pi) < \rho$. Alors chaque deux solutions linéairement indépendantes g_1 et g_2 de l'équation différentielle

$$y'' + (A(z) + \Pi(z))y = 0$$

vérifient $\max\{\lambda_p(g_1, 0), \lambda_p(g_2, 0)\} \geq \rho$.

Dans ce chapitre, on démontre les théorèmes suivants

Théorème 2.1 Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E > 0\}$, et soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles α, β avec $0 \leq \beta < \alpha$ et $\mu > 0$, on ait

$$|A_0(z)| \geq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|))$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta |z|)) \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$. Alors chaque solution $f \neq 0$ de (2.1) satisfait $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$ et $\rho_{[p+1,q]}(f) \geq \mu$.

Théorème 2.2 Supposons que $A(z)$ est une fonction entière de couple indice $[p, q]$. Alors toute solution f non triviale de $f'' + A(z)f = 0$

est de couple indice $[p+1, q]$ et $\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A)$.

Théorème 2.3 Soient $A(z)$ une fonction entière de couple indice $[p, q]$, f_1 et f_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0$$

Notons par $E := f_1 f_2$. Alors le couple indice $[i, j]$ de l'exposant de convergence de E , vérifie $i \leq p+1, j \leq q$ et on a

$$\lambda_{[p+1,q]}(E, 0) = \rho_{[p+1,q]}(E) = \max\{\lambda_{[p+1,q]}(f_1, 0), \lambda_{[p+1,q]}(f_2, 0)\} \leq \rho_{[p,q]}(A).$$

Si le couple $[i, j]$ de l'exposant de convergence de E , vérifie $i \leq p, j \leq q$, alors le couple indice de l'exposant de convergence de f est $[p+1, q]$ pour toutes les solutions de type $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$, où $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$.

Théorème 2.4 Soient $A(z)$ une fonction entière de couple indice $[p, q]$ et f une solution non triviale de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0.$$

Supposons que $\bar{\lambda}_{[p,q]}(A, 0) < \rho_{[p,q]}(A) \neq 0$. Alors $\lambda_{[p+1,q]}(f, 0) \leq \rho_{[p,q]}(A) \leq \lambda_{[p,q]}(f, 0)$.

Théorème 2.5 Soient $A(z)$ une fonction entière de couple indice $[p, q]$ et f une solution non triviale de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0.$$

Si le couple indice $[i, j]$ de l'exposant de convergence de A vérifie $i \leq p, j \leq q$, alors le couple indice de l'exposant de convergence de f est $[p, q]$.

Théorème 2.6 Soient $A(z)$ une fonction entière de couple indice $[p, q]$ et $\rho_{[p,q]}(A) = \rho$, soient f_1 et f_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0$$

telles que $\max\{\lambda_{[p,q]}(f_1, 0), \lambda_{[p,q]}(f_2, 0)\} < \rho$. Soit $\Pi \neq 0$ une fonction entière de couple indice $[p, q]$ et $\rho_{[p,q]}(\Pi) < \rho$. Alors chaque deux solutions linéairement indépendantes g_1 et g_2 de l'équation différentielle

$$y'' + (A(z) + \Pi(z))y = 0$$

vérifient $\max\{\lambda_{[p,q]}(g_1, 0), \lambda_{[p,q]}(g_2, 0)\} \geq \rho$.

Remarque 2.1 Soient $h_{1,2} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes pour lesquelles

$\lim_{r \rightarrow \infty} h_i(r) = \infty$, $i = 1, 2$ et soient $p, q \in \mathbb{N}$. S'il existe $r_0 < \infty$ tel que $\log_p h_1(r) < \log_q h_2(r)$ pour tout $r > r_0$, alors $h_1(r) < \exp_{p-q} h_2(r)$ pour tout $r > r_0$.

De plus s'il existe $r_0 < \infty$ tel que, pour $r > r_0$, on a

$$h_1(r) < C \exp_{p-q} h_2(r)$$

pour un certain C , alors il existe $R_0 < \infty$ et $C_0 < \infty$ tels que

$$\log_{p-q} h_1(r) < C_0 h_2(r)$$

pour tout $r > R_0$. Ceci peut être facilement démontré en remarquant qu'il existe $C_1 < \infty$ tel que $\log h_1(r) < \log C + \exp_{p-q-1} h_2(r) < C_1 \exp_{p-q-1} h_2(r)$ et en répétant ce raisonnement

Remarque 2.2 Dans la définition de l'exposant de convergence, nous pouvons remplacer $n(r, a)$ avec la fonction intégrale $N(r, a)$. On a

$$\begin{aligned} N(3r, a) &= \int_0^{3r} \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log 3r \\ &\geq \int_r^{3r} \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log 3r \\ &\geq (n(r, a) - n(0, a)) \log 3 + n(0, a) \log 3r \geq n(r, a). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} N(3r, a) &= \int_0^{3r} \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log 3r \\ &\leq C + \int_1^{3r} \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log 3r \\ &= C + \int_1^{3r} \frac{n(t, a)}{t} dt \leq C + n(3r, a) \log 3r. \end{aligned}$$

où C est une constante. Alors

$$n(r, a) \leq N(3r, a) \leq C + n(3r, a) \log 3r.$$

et on a

$$\lambda_{[i,j]}(f, a) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_i n(r, a)}{\log_j r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_i N(r, a)}{\log_j r}$$

Notons par $N(r, a) = N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a})$. Si aucune confusion n'est possible, nous pouvons employer quelconque d'entre ces notations.

Remarque 2.3 Soit $\lambda_{[p,q]}(f, a) = \lambda$. Par la définition de $[p, q]$ -exposant de convergence et la Remarque 2.1, nous obtenons, pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$N(r, a) = O\left(\exp_p\left((\lambda + \varepsilon) \log_q r\right)\right).$$

Remarque 2.4 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe par la Remarque 2.3, on obtient, pour chaque $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_{[p,q]}(f, a) \leq \rho_{[p,q]}(f).$$

Exemple 2.1 La fonction $f(z) = \exp_2 z$ est une solution de l'équation

$$f'' - (\exp z + \exp 2z) f = 0$$

Nous observons que : $\rho_{[3,2]}(f) = \rho_{[2,2]}(A) = 1$ où $A(z) = e^{2z} \left(1 + \frac{1}{e^z}\right)$.

Exemple 2.2 La fonction $f(z) = \exp_3(iz)$ est une solution de l'équation

$$f'' + e^{iz} \exp_2(iz) [1 + e^{iz} + e^{iz} \exp_2(iz)] f = 0.$$

Nous observons que : $\rho_{[3,1]}(f) = \rho_{[2,1]}(A) = 1$.

2.2 Lemmes préliminaires

Les démonstration des théorèmes dépendent principalement des lemmes suivants.

Lemme 2.1 (voir [10], p.90) Soient f une fonction entière non triviale, $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ des constantes données. Alors il existe un constante $c > 0$ et un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ ayant une mesure linéaire finie tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq c [T(\alpha r, f) r^\varepsilon \log T(\alpha r, f)]^k, k \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.2 (voir [19]) Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles qu'il existe une fonction transcendante A_s ($0 \leq s \leq k-1$) satisfaisant $\rho_{[p,q]}(A_j) \leq \rho_{[p,q]}(A_s) < +\infty$ pour tout $j \neq s$. Alors l'équation (1) admet au moins une solution f satisfaisant $\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_s)$.

Lemme 2.3 (voir [2]. [21]) Soient $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes telles que $g(r) \leq h(r)$ à l'extérieur d'un ensemble E de mesure linéaire finie. Alors pour n'importe quel $\alpha > 1$, il existe $r_0 > 0$ tel que $g(r) \leq h(\alpha r)$ pour tout $r > r_0$.

Lemme 2.4 Soient f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un entier positif avec $\rho_{[p,q]}(f) = \rho$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right),$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie.

Preuve Soit $k = 1$. Puisque $\rho_{[p,q]}(f) = \rho < \infty$, nous avons pour tout r suffisamment grand

$$T(r, f) < \exp_p\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right).$$

En utilisant le lemme de la dérivée logarithmique, on a $m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log T(r, f) + \log r)$ à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie. Donc

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right), \quad r \notin E. \quad (2.3)$$

Maintenant supposons que

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right), \quad r \notin E$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Comme $N(r, f^{(k)}) \leq (k+1)N(r, f)$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^{(k)}) &= m(r, f^{(k)}) + N(r, f^{(k)}) \leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m(r, f) + (k+1)N(r, f) \\ &\leq (k+1)T(r, f) + O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right) = O\left(\exp_p\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right). \end{aligned}$$

Par (2.3), nous obtenons encore

$$m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right), \quad r \notin E$$

et par conséquent

$$m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_p\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right), \quad r \notin E.$$

Lemme 2.5 (voir [6].[15]) Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière avec $\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho$, $\mu(r)$ le terme maximal de f et soit $\nu_f(r)$ l'indice central de f . Alors

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{p+1} \nu_f(r)}{\log_q r} = \rho.$$

Lemme 2.6 (Wiman-Valiron, [12].[28]) Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante, et soit z un point avec $|z| = r$ et $|f(z)| = M(r, f)$. Alors, on a

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right)^k (1 + o(1)) \quad (k \text{ est un nombre entier}), \quad (2.4)$$

à l'extérieur d'un ensemble E_2 de r de mesure logarithmique finie $lm(E_2) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_{E_2}(t)}{t} dt$, où χ_{E_2} est la fonction caractéristique de E_2 .

Lemme 2.7 (voir [8]) *Soient f_1, \dots, f_k l des solutions méromorphes inéairement indépendantes de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_0(z) f = 0,$$

avec des coefficients méromorphes $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$. Alors

$$m(r, A_j) = O \left\{ \log \left(\max_{1 \leq n \leq k} T(r, f_n) \right) \right\} \quad (j = 0, \dots, k-1).$$

Lemme 2.8 *Soient f_1, f_2 deux fonctions entières ayant respectivement le couple indice*

$[p_1, q_1]$ et $[p_2, q_2]$ de leurs exposants de convergence. Notons par $E := f_1 f_2$. Alors le couple indice $[p, q]$ de l'exposant de convergence de E vérifie $[p, q] = \max\{[p_1, q_1], [p_2, q_2]\}$ et on a $\lambda_{[p,q]}(E, 0) = \max\{\lambda_{[p,q]}(f_1, 0), \lambda_{[p,q]}(f_2, 0)\}$

Preuve

Soient $n(t)$, respectivement $n_1(t)$ et $n_2(t)$, la fonction intégrale de comptage pour l'exposant de convergence des zéros de E , respectivement f_1 et f_2 . Les inégalités $\max\{\lambda_{[p,q]}(f_1, 0), \lambda_{[p,q]}(f_2, 0)\} \leq \lambda_{[p,q]}(E, 0)$ sont triviales.

Supposons que $[k_1, k_2] = [p_1 - p_2, q_1 - q_2]$ telle que $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$. Comme le cas $[p_2, q_2] = [0, 0]$ est trivial, nous supposons ($p_2 > 0, q_2 > 0$). De la relation

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \log n(t) &= \log(n_1(t) + n_2(t)) \leq \log(2 \max\{n_1(t), n_2(t)\}) \\ &= \log 2 + \log(\max\{n_1(t), n_2(t)\}) \leq \log 2 + \log(n_1(t)) + \log(n_2(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

pour t assez grand, c-à-d. $n_1(t) > 1$ et $n_2(t) > 1$. Par la répétition de l'argumentation dans (2.5) on a

$$\log_{p_2 - q_2 - 1} n(t) \leq C + \log_{p_2 - q_2 - 1} n_1(t) + \log_{p_2 - q_2 - 1} n_2(t) \quad (2.6)$$

où C est un constant et t assez grand.

D'abord, supposons $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné et t suffisamment grand, on a

$$\log_{p_2 - q_2 - 1} n_2(t) \leq \log t^{\lambda_{[p,q]} + \varepsilon}$$

où $\lambda_{[p,q]} = \lambda_{[p,q]}(f_2, 0)$. Alors

$$\log_{p_2-q_2-1} n(t) \leq C + \log_{p_2-q_2-1} n_1(t) + \log t^{\lambda_{[p,q]}+\varepsilon}$$

Finalement, pour une constante C' , on a

$$\log_{p_1-q_1} n(t) \leq C' + \log_{p_1-q_1} n_1(t) + \log_{k_1-k_2+1} t$$

et l'affirmation suit.

Ensuite, supposons que $k_1 = 0$ et $k_2 = 0$. Alors, $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. L'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{C}{t^{\alpha+1}} dt$$

converge pour tout $\alpha > 0$. Donc il existe $0 < \alpha < \infty$ tel que les intégrales

$$\int^{\infty} \frac{\log_{p_2-q_2-1} n_1(t)}{t^{\alpha+1}} dt \text{ et } \int^{\infty} \frac{\log_{p_2-q_2-1} n_2(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

convergent. D'où par (2.6), on a $p \leq p_2$ et $q \leq q_2$ alors, $[p, q] = [p_1, q_1] = [p_2, q_2]$.soit $\lambda := \lambda_{[p,q]}(E, 0) > 0$ Maintenant, pour $\varepsilon > 0$ l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{\log_{p-q-1} n(t)}{t^{\lambda_{[p,q]}+1-\varepsilon}} dt$$

diverge, et de (2.6), au moins l'une des intégrales

$$\int^{\infty} \frac{\log_{p-q-1} n_1(t)}{t^{\lambda+1-\varepsilon}} dt \text{ et } \int^{\infty} \frac{\log_{p-q-1} n_2(t)}{t^{\lambda+1-\varepsilon}} dt$$

diverge. Donc, $\max\{\lambda_{[p_1,q_1]}(f_1, 0), \lambda_{[p_2,q_2]}(f_2, 0)\} \geq \lambda_{[p,q]} - \varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\max\{\lambda_{[p_1,q_1]}(f_1, 0), \lambda_{[p_2,q_2]}(f_2, 0)\} \geq \lambda_{[p,q]}$. \diamond

Lemme 2.9 ([10], p.90) *Soit f une fonction entière transcendante d'ordre fini ρ .*

$\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de couples d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$; $i = 1, \dots, m$ et $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)} .$$

2.3 Preuve des Théorèmes

2.3.1 Preuve du Théorème 2.1

Supposons que $f \neq 0$ est une solution de l'équation (2.1) avec $\rho_{[p,q]}(f) < \infty$. De l'équation (2.1), on a

$$\frac{1}{A_0(z)} \frac{f^{(k)}}{f} + \frac{A_{n-1}(z)}{A_0(z)} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + \frac{A_1(z)}{A_0(z)} \frac{f'}{f} + 1 = 0 \quad (2.7)$$

ou

$$\frac{1}{A_0(z)} \frac{f^{(k)}}{f} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_j(z)}{A_0(z)} \frac{f^{(j)}}{f} = -1. \quad (2.8)$$

Du Lemme 2.9, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire finie, tels que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E_1$ et pour tout $j = 1, 2, \dots, k$ on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq |z|^{jc}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad c = \rho - 1 + \varepsilon \quad (2.9)$$

En outre, par les hypothèses du Théorème 2.1, il existe un ensemble E_2 avec $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E > 0\}$ tels que pour tout z satisfaisant $z \in E_2$, on a

$$|A_0(z)| \geq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|)) \quad (2.10)$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta |z|)) \quad (j = 0, \dots, n-1) \quad (2.11)$$

quand $z \rightarrow \infty$. Alors de (2.9), (2.10) et (2.11) pour tout z vérifiant $z \in E_2$ et $|z| \notin E_1$, on a

$$\left| \frac{A_j(z)}{A_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right| \leq \frac{1}{\exp_{p+1}(\mu \log_q((\alpha - \beta) |z|))} |z|^{jc}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad c = \rho - 1 + \varepsilon \quad (2.12)$$

et

$$\left| \frac{1}{A_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| \leq \frac{1}{\exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|))} |z|^{kc}, \quad c = \rho - 1 + \varepsilon \quad (2.13)$$

quand $z \rightarrow \infty$. Ainsi il existe un ensemble $\mathcal{H} \subset [0, \infty)$ de densité supérieure positive tel que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{H}}} \frac{1}{\exp_{p+1}(\mu \log_q((\alpha - \beta) |z|))} |z|^{jc} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{H}}} \frac{1}{\exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|))} |z|^{kc} = 0,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{H}}} \left| \frac{A_j(z)}{A_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right| = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

et

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathcal{H}}} \left| \frac{1}{A_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| = 0.$$

En faisant tendre $z \rightarrow \infty$ pour $z \in \mathcal{H}$ dans la relation (2.8), nous obtenons une contradiction. Alors chaque solution $f \neq 0$ de l'équation (2.1) est d'ordre $[p, q]$ fini.

De la relation (2.1), on a

$$|A_0(z)| \leq \left| \frac{f^{(n)}}{f} \right| + |A_{n-1}(z)| \left| \frac{f^{(n-1)}}{f} \right| + \dots + |A_1(z)| \left| \frac{f'}{f} \right|. \quad (2.14)$$

D'après le Lemme 2.1, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_3$, on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq r [T(2r, f)]^{j+1} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.15)$$

Aussi, par les hypothèse du Théorème 2.1, il existe un ensemble E_4 avec $\overline{\text{dens}} \{|z| : z \in E_4\} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \in E_4$, on a

$$|A_0(z)| \geq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|)) \quad (2.16)$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta |z|)) \quad (j = 0, \dots, n-1) \quad (2.17)$$

quand $z \rightarrow \infty$. Alors des relations (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17) pour tout z tel que $z \in E_4$ et $|z| \notin E_3$, on a

$$\exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|)) \leq |z| [T(2|z|, f)]^{n+1} [1 + (n-1) \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta |z|))] \quad (2.18)$$

quand $z \rightarrow \infty$. Ainsi il existe un ensemble $\mathcal{H} \subset [0, +\infty)$ de densité supérieure positive tel que

$$\exp_{p+1}((1 - o(1)) \log_q(\alpha - \beta) r) \leq [T(2r, f)]^{n+1}$$

quand $r \rightarrow \infty$ dans \mathcal{H} . Donc

$$\rho_{[p+1, q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{p+1} T(r, f)}{\log_q r} \geq \mu.$$

Ceci prouve le Théorème 2.1

2.3.2 Preuve du Théorème 2.2

Supposons que f est une solution de (2.2) On peut écrire (2.2) sous la forme

$$\frac{f''}{f} + A(z) = 0. \quad (2.19)$$

Par le Lemme 2.6, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique $lm(E_2) < +\infty$ tel que pour z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a la relation (2.4). Pour $\varepsilon > 0$ donné et r suffisamment grand on a

$$|A(z)| \leq \exp_p \{ (\rho_{[p, q]}(A) + \varepsilon) \log_q r \}. \quad (2.20)$$

En remplaçant (2.4) dans (2.19), et par l'utilisation de (2.20) on trouve

$$\left(\frac{v_f(r)}{|z|} \right)^2 |1 + o(1)| \leq 2 \left(\frac{v_f(r)}{|z|} \right) |1 + o(1)| \exp_p \{ (\rho_{[p, q]}(A) + \varepsilon) \log_q r \} \quad (2.21)$$

pour $r \notin [0, 1] \cup E_2$. Par le Lemme 2.5, Lemme 2.3 et (2.21), nous obtenons que f est de couple indice $[p+1, q]$ et on a

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{p+1} v_f(r)}{\log_q r} \leq \rho_{[p,q]}(A) + \varepsilon. \quad (2.22)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $\rho_{[p+1,q]}(f) \leq \rho_{[p,q]}(A)$. Supposons que $\{f_1, f_2\}$ est une solution base de (2.2). Alors par le Lemme 2.7

$$m(r, A) \leq M \cdot \log \left(\max_{1 \leq n \leq 2} T(r, f_n) \right). \quad (2.23)$$

Nous assertons qu'il existe un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire infinie tel que

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\log_p m(r, A)}{\log_q r} = \rho_{[p,q]}(A). \quad (2.24)$$

En fait, il existe une suite $\{r_n\}$ ($r_n \rightarrow \infty$) tel que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p m(r_n, A)}{\log_q r_n} = \rho_{[p,q]}(A) \quad (2.25)$$

On prend $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n, 2r_n]$. Alors, (2.24) est vérifiée sur E . Maintenant en posant $E_n = \{r : r \in E \text{ et } m(r, A) \leq M \log T(r, f_n) (n = 1, 2)\}$, on a $E = \bigcup_{n=1}^2 E_n$. Il est facile de voir qu'il existe au moins un E_n , dire E_1 , ayant une mesure linéaire infinie tel que

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E_1}} \frac{\log_p m(r, A)}{\log_q r} = \rho_{[p,q]}(A) \quad (2.26)$$

et

$$m(r, A) \leq M \log T(r, f_1). \quad (2.27)$$

Des relations (2.25) et (2.26) on a f_1 est de couple indice $[p+1, q]$ et $\rho_{[p+1,q]}(f_1) = \rho_{[p,q]}(A)$. La preuve du Théorème 2.2 est complète.

2.3.3 Preuve du Théorème 2.3

Par le Théorème 2.2, on a $\rho_{[p+1,q]}(f_1) = \rho_{[p+1,q]}(f_2) = \rho_{[p,q]}(A)$. D'après la Remarque 2.3, on a

$$\lambda_{[p+1,q]}(E, 0) \leq \rho_{[p+1,q]}(E) \leq \max\{\lambda_{[p+1,q]}(f_1, 0), \lambda_{[p+1,q]}(f_2, 0)\} = \rho_{[p,q]}(A) < \infty.$$

Du Théorème 2.2, on obtient

$$\max\{\lambda_{[p+1,q]}(f_1, 0), \lambda_{[p+1,q]}(f_2, 0)\} = \lambda_{[p+1,q]}(E, 0) \leq \rho_{[p+1,q]}(E) \leq \rho_{[p,q]}(A).$$

Il reste à montrer que $\lambda_{[p+1,q]}(E, 0) = \rho_{[p+1,q]}(E)$. De l'équation $f'' + A(z)f = 0$, on trouve (voir[18],) que tous les zéros de E sont le simple et

$$E^2 = c^2 \left(\left(\frac{E'}{E} \right)^2 - 2 \frac{E''}{E} - 4A \right)^{-1}. \quad (2.28)$$

Donc

$$\begin{aligned} 2T(r, E) &= T \left(r, \left(\frac{E'}{E} \right)^2 - 2 \frac{E''}{E} - 4A \right) + O(1) \\ &\leq O \left(\bar{N} \left(r, \frac{1}{E} \right) + m \left(r, \frac{E'}{E} \right) + m \left(r, \frac{E''}{E} \right) + m(r, A) \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Par le Lemme 2.4, on a $m(r, A) = m(r, \frac{f''}{f}) = O(\exp_p(\alpha \log_q r))$, $m(r, \frac{E'}{E}) = O(\exp_p(\alpha \log_q r))$ et $m(r, \frac{E''}{E}) = O(\exp_p(\alpha \log_q r))$ pour $\alpha < \infty$ à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E . Alors on a

$$T(r, E) = O \left(\bar{N} \left(r, \frac{1}{E} \right) + \exp_p(\alpha \log_q r) \right) \quad r \notin E. \quad (2.30)$$

Supposons $\lambda_{[p+1, q]}(E, 0) < \rho_{[p+1, q]}(E)$. D'après la Remarque 2.2, on a

$$\bar{N} \left(r, \frac{1}{E} \right) = N \left(r, \frac{1}{E} \right) = O(\exp_{p+1}(\beta \log_q r))$$

pour $\beta < \rho_{[p+1, q]}(E)$. De la relation (2.30), on obtient

$$T(r, E) = O(\exp_{p+1}(\beta \log_q r)), \quad r \notin E,$$

ce qui implique $\lambda_{[p+1, q]}(E, 0) \leq \beta < \rho_{[p+1, q]}(E)$, c'est une contradiction. Ainsi la première affirmation est prouvée. Si $[p, q]$ est le couple indice de l'exposant de convergence de E , alors $\lambda_{[p, q]}(f_1, 0) < \infty$ et $\lambda_{[p, q]}(f_2, 0) < \infty$. Soit $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$, où $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$. Supposons que $\lambda_{[p, q]}(f, 0) < \infty$. Pour les fonctions $E := f_1 f_2$ et $F := f f_2$, on a $\lambda_{[p, q]}(E, 0) < \infty$ et $\lambda_{[p, q]}(F, 0) < \infty$. Puisque (2.30) est réalisée pour E et F et comme $F = (c_1 f_1 + c_2 f_2) f_1 = c_1 f_1^2 + c_2 E$, alors on a

$$\begin{aligned} T(r, f_1) &= O(T(r, F) + T(r, E)) \\ &= O \left(\bar{N} \left(r, \frac{1}{F} \right) + \bar{N} \left(r, \frac{1}{E} \right) + \exp_p(\alpha \log_q r) \right) = O(\exp_p(\beta \log_q r)) \end{aligned}$$

pour $\beta < \infty$. Donc, $\rho_{[p, q]}(f_1) < \infty$, c'est une contradiction avec le Théorème 2.2

Donc $\lambda_{[p, q]}(f, 0) = \infty$. Puisque, $\lambda_{[p+1, q]}(f, 0) < \rho_{[p+1, q]}(f) < \infty$, on obtient que le couple indice de l'exposant de convergence de f est $[p+1, q]$. \diamond

2.3.4 Preuve du Théorème 2.4

La première affirmation $\bar{\lambda}_{[p,q]}(A, 0) < \rho_{[p,q]}(A)$ suit du Théorème 2.2 et de la Remarque 2.3. Par l'équation $f'' + A(z)f = 0$ on a

$$T\left(r, \frac{f}{f'}\right) = O\left(\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{A}\right)\right) \quad (2.31)$$

presque partout quand $r \rightarrow \infty$ Supposons que $\lambda_{[p,q]}(f, 0) < \rho_{[p,q]}(A)$, alors on a

$$T\left(r, \frac{f}{f'}\right) = O(\exp_p \beta (\log_q r)),$$

où $\beta < \rho_{[p,q]}(A)$. Donc, $\rho_{[p,q]}(\frac{f}{f'}) = \rho_{[p,q]}(\frac{f'}{f}) \leq \beta < \rho_{[p,q]}(A)$. Comme

$$-A(z) = \left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \quad (2.32)$$

alors on a $\rho_{[p,q]}(A) < \rho_{[p,q]}(\frac{f'}{f}) < \rho_{[p,q]}(A)$ c'est une contradiction.

2.3.5 Preuve du Théorème 2.5

Supposons que $\lambda_{[p-1,q]}(f, 0) < \infty$. Alors on a

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = O(\exp_{p-1}(\alpha_1 \log_q r))$$

pour $\alpha_1 < \infty$ De même, en supposant que le couple indice $[i, j]$ de l'exposant de convergence de A est tel que $i < p$ et $j < q$, alors on a, pour $\alpha_2 < \infty$

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{A}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{A}\right) = O(\exp_{p-1}(\alpha_2 \log_q r)).$$

La relation (2.31) implique maintenant

$$T\left(r, \frac{f}{f'}\right) = O(\exp_{p-1}(\alpha \log_q r))$$

pour $\alpha < \infty$. Donc, $\rho_{[p-1,q]}(\frac{f}{f'}) = \rho_{[p-1,q]}(\frac{f'}{f}) < \infty$ et par (2.32), on a $\rho_{[p-1,q]}(A) < \infty$. Par cette contradiction on a $\lambda_{[p-1,q]}(f, 0) = \infty$, donc le couple indice de l'exposant de convergence de f est $[n, m]$ tel que $n \geq p$ et $m \geq q$.

2.3.6 Preuve du Théorème 2.6

Comme dans la preuve du Théorème 3.1 dans [1], notons $E := f_1 f_2$ et $F := g_1 g_2$.

Supposons que $\lambda_{[p,q]}(F, 0) = \max\{\lambda_{[p,q]}(g_1, 0), \lambda_{[p,q]}(g_2, 0)\} < \rho$ Par le Théorème 2.2, on a $\rho_{[p+1,q]}(E) \leq \rho_{[p,q]}(A) = \rho$, et donc, par le Lemme 2.4, pour un nombre entier $k \geq 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$

$$m\left(r, \frac{E^{(k)}}{E}\right) = O\left(\exp_p\left((\rho + \varepsilon)\log_q r\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E_0 . De plus, par la supposition $\lambda_{[p,q]}(E, 0) < \rho$, on a $\bar{N}\left(r, \frac{1}{E}\right) = O\left(\exp_p\left(\beta\log_q r\right)\right)$ pour $\beta \leq \rho$ et l'ordre $[p, q]$ de la fonction A implique que $T(r, A) = O\left(\exp_p\left((\rho + \varepsilon)\log_q r\right)\right)$. De l'équation (2.29), on a $T(r, E) = O\left(\exp_p\left((\rho + \varepsilon)\log_q r\right)\right)$ et donc $\rho_{[p,q]}(E) \leq \rho$. D'autre part,

$$4A = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 - 2\frac{E''}{E} - \frac{1}{E^2}, \quad (2.33)$$

on remarque que $\rho_{[p,q]}(A) = \rho \leq \rho_{[p,q]}(E)$. Le même raisonnement est valable pour la fonction F et donc $\rho_{[p,q]}(E) = \rho_{[p,q]}(F) = \rho$. Comme $\lambda_{[p,q]}(E, 0) < \rho$ et $\lambda_{[p,q]}(F, 0) < \rho$, nous d'après le théorème Hadamard, on a

$$E = Qe^P, \quad F = Re^S, \quad (2.34)$$

où $\rho_{[p,q]}(Q) = \lambda_p(E, 0) < \rho$, $\rho_{[p,q]}(R) = \lambda_{[p,q]}(F, 0) < \rho$ et $\rho_{[p,q]}(e^P) = \rho_{[p,q]}(e^S) = \rho$. En remplaçant (2.34) dans (2.33) et après la même étape de raisonnement que dans la preuve du Théorème 3.1 dans [1] on obtient que $ce^{2(P-S)} = -R^2/Q^2 (= H_1)$, où $c \neq 0$. Donc,

$$\frac{E^2}{F^2} = \frac{Q^2}{R^2}e^{2(P-S)} = -\frac{1}{c}.$$

De l'équation (2.33) et de l'équation semblable pour F ,

$$4(A + \Pi) = \left(\frac{F'}{F}\right)^2 - 2\frac{F''}{F} - \frac{1}{F^2} \quad (2.35)$$

on obtient

$$4\left(A + \Pi + \frac{1}{c}A\right) = \left(\frac{F'}{F}\right)^2 - 2\frac{F''}{F} + \frac{1}{c}\left(\left(\frac{E'}{E}\right)^2 - 2\frac{E''}{E}\right).$$

D'après le Lemme 2.4, on a

$$T\left(r, \left(A + \Pi + \frac{1}{c}A\right)\right) = m\left(r, \left(A + \Pi + \frac{1}{c}A\right)\right) = O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon)\log_q r\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E . Ce qui implique par le Lemme 2.3

$$\rho_{[p-1,q]}\left(\left(A + \Pi + \frac{1}{c}A\right)\right) < \infty.$$

Donc $c = -1$. Comme $E^2 = F^2$, alors $\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F}$ et $\frac{E''}{E} = \frac{F''}{F}$. Des équations (2.33) et (2.35), on a $\Pi = 0$, c'est une contradiction. \diamond

Chapitre 3

Croissance des solutions des équations différentielles non homogènes à coefficients fonctions entières d'ordre $[p, q]$

3.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre on étudie l'équation différentielle linéaire non-homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_0(z) f = F(z), \quad (3.1)$$

où $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), F(z), (k \geq 2)$ sont des fonctions entières transcendantes d'ordre $[p, q]$ fini.

Dans [21], L.Kinnunen a obtenu les théorèmes suivants :

Théorème 3.2.1 Si $p + 1 = q < \infty$, alors

$$i(f) = i_\lambda(f, 0) = q \text{ et } \lambda_q(f, 0) = \rho_q(f) = \rho_q(F).$$

Théorème 3.2.2 Si $0 < q < p + 1 < \infty$ alors toute solution de (3.1) satisfait

$$\lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \bar{\lambda}_{p+1}(f).$$

Théorème 3.2.3. Si $p + 1 = q < \infty$, $i_\lambda(F, 0) = q$ et $\lambda_q(F, 0) = \rho_q(F)$, alors

$$i(f) = i_\lambda(f, 0) = q \text{ et } \lambda_q(f, 0) = \rho_q(f) \geq \rho_q(F)$$

pour toutes les solutions de (3.1).

Dans ([4], [5]), B. Belaïdi a obtenu le théorème suivant :

Théorème 3.2.4 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ des fonctions entières telles que pour un nombre entier $s, 1 \leq s \leq k - 1$, on a $\max\{\rho_p(A_j) (j \neq s), \rho_p(F)\} < \rho_p(A_s) <$

$+\infty$. Alors chaque solution transcendantale f de (1.2) telle que $\rho_p(f) < +\infty$ satisfait $\rho_p(f) \geq \rho_p(A_s)$.

Théorème 3.2.5 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ des fonctions entières telles que pour un nombre entier s , $1 \leq s \leq k-1$,

on a $\rho_p(A_s) = +\infty$ et $\max\{\rho_p(A_j) (j \neq s), \rho_p(F)\} < +\infty$. Alors chaque solution f de (1.2) satisfait $\rho_p(f) = +\infty$.

Théorème 3.2.6 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ et $F(z) \neq 0$ des fonctions entières, telles que $0 < \rho_p(A_0) < \frac{1}{2}$ et $\rho_p(F) = \rho < +\infty$, Supposons qu'il existe une constante $\beta < \rho_p(A_0)$ et un ensemble $E_\beta \subset [0, +\infty)$ avec $\underline{\text{dens}} E_\beta = 1$ tel que pour tout $r \in E_\beta$, on a

$$\min_{|z|=r} |A_j(z)| \leq \exp(r^\beta) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1).$$

Alors chaque solution f de (1.2) est d'ordre infini et d'hyper-order $\rho_2(f) \geq \rho_p(A_0)$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_p(f_0) < +\infty$.

Théorème 3.2.7 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles qu'il existe une fonction transcendentale A_s ($0 \leq s \leq k-1$) satisfaisant $\rho_{p+1}(A_j) < \rho_p(A_s) < +\infty$ pour tout $j \neq s$ et soit $F(z) \neq 0$ une fonction entière avec $i(F) = q$. Supposons que f_0 est une solution de (3.1), et g_1, \dots, g_k est une base de solutions de l'équation homogène correspondante (2.2) de (3.1). En outre si $i(F) = q < p+1$ ou $q = p+1$ et $\rho_{p+1}(F) < \rho_p(A_s) < +\infty$, alors il existe g_j ($1 \leq j \leq k$), soit g_1 , tel que toutes les solutions dans le sous-espace de solutions $\{cg_1 + f_0, c \in \mathbb{C}\}$ satisfaisant $i(f) = p+1$ et $\rho_{p+1}(f) = \bar{\lambda}_{p+1}(f) = \rho_p(A_s)$, avec au plus une exception.

Théorème 3.2.8 Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E > 0\}$,

et soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles α, β avec $0 \leq \beta < \alpha$ et $\mu > 0$, on ait

$$|A_0(z)| \geq \exp(\alpha |z|^\mu)$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp(\beta |z|^\mu) \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$. Soit $F \neq 0$ une fonction entière avec $\rho(F) < +\infty$. Alors chaque solution f de (3.1) satisfait $\rho(f) = +\infty$, $\rho_2(f) \geq \mu$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho(f_0) < \infty$.

Dans ce chapitre on démontre les résultats suivants

Théorème 3.1 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), F(z) \neq 0$ des fonctions entières satisfaisant

$\max\{\rho_{[p,q]}(A_j), \rho_{[p,q]}(F), j = 0, \dots, k-1\} < \infty$. Alors

$$\lambda_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(F)$$

pour toute solution de (3.1) avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{[p+1,q]}(f_0) < \rho_{[p+1,q]}(F)$.

Théorème 3.2 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), F(z) \not\equiv 0$ des fonctions entières satisfaisant $\max\{\rho_{[p,q]}(A_j), \rho_{[p,q]}(F), j = 0, \dots, k-1\} < \infty$. Alors toute solution de (3.1) satisfait

$$\lambda_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(f) = \bar{\lambda}_{[p,q]}(F).$$

Théorème 3.3 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), F(z) \not\equiv 0$ des fonctions entières.

Si $\max\{\rho_{[p,q]}(A_j), j = 0, \dots, k-1\} < \rho_{[p+1,q]}(F)$ et $\lambda_{[p+1,q]}(F) = \rho_{[p+1,q]}(F)$, alors

$$\lambda_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(f) \geq \rho_{[p+1,q]}(F)$$

pour toutes les solutions de (3.1).

Théorème 3.4 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions entières tels que pour un nombre entier $s, 1 \leq s \leq k-1$, on a

$$\max\{\rho_{[p,q]}(A_j) (j \neq s), \rho_{[p,q]}(F)\} < \rho_{[p,q]}(A_s) < +\infty.$$

Alors chaque solution transcendante f de (3.1) avec $\rho_{[p,q]}(f) < +\infty$ satisfait $\rho_{[p,q]}(f) \geq \rho_{[p,q]}(A_s)$.

Théorème 3.5 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions entières telles que pour un nombre entier $s, 1 \leq s \leq k-1$, on a $\rho_{[p,q]}(A_s) = +\infty$ et $\max\{\rho_{[p,q]}(A_j) (j \neq s), \rho_{[p,q]}(F)\} < +\infty$. Alors chaque solution f de (3.1) satisfait $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$. ■

Théorème 3.6 Soit E un ensemble de nombres complexes satisfaisant $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E > 0\}$, et soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles α, β avec $0 \leq \beta < \alpha$ et $\mu > 0$, on ait

$$|A_0(z)| \geq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|))$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta |z|)) \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in E$ Soit $F \not\equiv 0$ une fonction entière avec $\rho_{[p,q]}(F) < +\infty$. Alors chaque solution f de (3.1) satisfait $\mu \leq \rho_{[p+1,q]}(f)$ et $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisante $\rho_{[p,q]}(f_0) < \infty$.

Théorème 3.7 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles qu'il existe une fonction transcendente A_s ($0 \leq s \leq k-1$) satisfaisant $\rho_{[p+1,q]}(A_j) < \rho_{[p,q]}(A_s) < +\infty$ pour tout $j \neq s$ et $F(z) \not\equiv 0$ une fonction entière. Supposons que f_0 est une solution de (3.1) et g_1, \dots, g_k est une base de solutions de l'équation homogène correspondante (2.1) de (3.1). En outre si $\rho_{[p+1,q]}(F) < \rho_{[p,q]}(A_s) < +\infty$, alors il existe g_j ($1 \leq j \leq k$), soit g_1 , tel que toutes les solutions dans le sous-espace de solutions $\{cg_1 + f_0, c \in \mathbb{C}\}$ satisfont $\rho_{[p+1,q]}(f) = \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_s)$, avec au plus une exception.

Théorème 3.8 Soient $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions entières,

où $0 < \rho_{[p,q]}(A_0) < \frac{1}{2}$ et $\rho_{[p,q]}(F) = \rho < +\infty$. Supposons qu'il existe une constante $\beta < \rho_{[p,q]}(A_0)$ et un ensemble $E_\beta \subset [0, +\infty)$ avec $\underline{\text{dens}} E_\beta = 1$ tel que pour tout $r \in E_\beta$, on a

$$\min_{|z|=r} |A_j(z)| \leq \exp_{p+1}(\beta \log_q r) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1). \quad (3.2)$$

Alors chaque solution f de (3.1) satisfait $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$ et $\rho_{[p+1,q]}(f) \geq \rho_{[p,q]}(A_0)$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho_{[p,q]}(f_0) < +\infty$.

Exemple 3.1 La fonction $f(z) = \frac{\exp_2(z)}{z}$ est une solution de l'équation pour tout $z \neq 0$

$$f'' + \left[ze^{2z} - \left(1 - \frac{1}{z}\right) \right] f' - \left(ze^{3z} - \frac{1}{z} \right) f = 0$$

D'où

$$\rho_{[1,1]} \left(\frac{\exp_2(z)}{z} \right) = \infty, \quad \rho_{[2,1]} \left(\frac{\exp_2(z)}{z} \right) = 1.$$

Exemple 3.2 La fonction $f(z) = \exp \left(\frac{\exp z^2}{z} \right)$ est une solution de l'équation pour tout $z \neq 0$

$$f'' + \left[4z^3 e^{2z^2} - 2z + \frac{1}{z} \right] f' - \left(8z^4 e^{3z^2} - 2 - \frac{1}{z^2} \right) f = 0$$

D'où

$$\rho_{[1,1]} \left(\exp \left(\frac{\exp z^2}{z} \right) \right) = \rho_{[2,1]} \left(\exp \left(\frac{\exp z^2}{z} \right) \right) = \infty, \quad \rho_{[3,2]} \left(\exp \left(\frac{\exp z^2}{z} \right) \right) = 1.$$

Exemple 3.3 La fonction $f(z) = \frac{e^{e^z}}{z}$ est une solution de l'équation pour tout $z \neq 0$

$$f''' + \left(\frac{e^z}{z} - 1\right) f'' + \frac{e^z}{z} \left(\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z} + 1\right) f = \frac{2}{z^2} \left(\frac{1}{z} - 1\right) e^z e^{e^z}$$

On a

$$\rho_{[1,1]} \left(\frac{e^{e^z}}{z}\right) = \rho_{[2,1]} \left(\frac{e^{e^z}}{z}\right) = \infty, \quad \rho_{[3,2]} \left(\frac{e^{e^z}}{z}\right) = \rho_{[2,2]} \left(\frac{e^z}{z} \left(\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z} + 1\right)\right) = 1$$

et $\max \left\{ \rho_{[3,2]} \left(\frac{e^z}{z} \left(\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z} + 1\right)\right), \rho_{[3,2]} \left(\frac{2}{z^2} \left(\frac{1}{z} - 1\right) e^z e^{e^z}\right) \right\} < +\infty$.

D'après le Théorème 3.3, toute solution transcendante f de cette équation satisfait

$$\rho_{[p,q]}(f) = \lambda_{[p,q]}(f) \geq \rho_{[p,q]} \left(\frac{2}{z^2} \left(\frac{1}{z} - 1\right) e^z e^{e^z}\right) \text{ où } p > q \geq 2.$$

Exemple 3.4 Soit $f(z) = z^2 \exp_2 z = z^2 e^{e^z}$

$$f''' - e^z f'' - 2e^z f' - e^z f = 2e^z (2 + z + ze^z) e^{e^z}$$

on a $M(r, f) = r^2 e^{e^r}$ d'où

$$\begin{aligned} \rho_{[2,1]}(f) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_3 r^2 e^{e^r}}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 (2 \log r + e^r)}{\log r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \left[e^r \left(1 + \frac{2 \log r}{e^r} \right) \right]}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left(r + \log \left(1 + \frac{2 \log r}{e^r} \right) \right)}{\log r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r + \log \left(\frac{1 + \log \left(1 + \frac{2 \log r}{e^r} \right)}{r} \right)}{\log r} = 1 \end{aligned}$$

on a $\rho_{[2,1]}(z^2 \exp_2 z) = \rho_{[2,1]}(2e^z (2 + z + ze^z) e^{e^z}) < +\infty$,

D'où d'après le Théorème 3.4 on a $\rho_{[2,1]}(f) = \lambda_{[2,1]}(f) \geq \rho_{[2,1]}(f)$ pour toutes les solutions

3.2 Lemmes Préliminaires

Lemme 3.1 Soient f une fonction entière d'ordre $[p, q]$, où $0 < \rho_{[p,q]} < \frac{1}{2}$, et $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{\text{dens}} E \geq 1 - 2\rho_{[p,q]}$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E$, on a

$$|f(z)| \geq \exp(r^{\rho_{[p,q]} - \varepsilon}).$$

Lemme 3.2 (voir [19]) Sif (z) une fonction entière d'ordre $[p, q]$, alors $\rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(f')$.

3.3 Preuve des Théorèmes

3.3.1 Preuve du Théorème 3.1

Par la Remarque 2.4, on a $\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(F)$ pour toutes les solutions f . On note $\rho = \rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(F)$.

(i) Cas $\rho > 0$. Soit f_0 une solution de (3.1) satisfaisant $\lambda_{[p+1,q]}(f_0) < \rho$ et f une solution de l'équation (3.1) tel que $f \neq f_0$. Supposons $\lambda_{[p+1,q]}(f) < \rho$. Par le théorème d'Hadamard, on a

$$f_0(z) = U(z) e^{V(z)}$$

Où U et V sont des fonctions entières vérifiant $\lambda_{[p+1,q]}(U) = \rho_{[p+1,q]}(U) < \rho$ et $\rho_{[p+1,q]}(e^V) = \rho$.

Par la substitution $g = f - f_0$ dans (3.1), nous voyons que g est une solution de l'équation homogène correspondante

$$g^{(k)} + A_{k-1}(z)g^{(k-1)} + \dots + A_0(z)g = 0.$$

Donc $\rho_{[p+1,q]}(g) \leq \rho_{[p+1,q]}(f) \leq \rho_{[p+1,q]}(F)$

En appliquant maintenant le deuxième théorème fondamental pour la fonction

$$\frac{U(z)}{g(z)} e^{V(z)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} (1 + O(1)) T\left(r, \frac{U}{g} e^V\right) &\leq N\left(r, \frac{U}{g} e^V\right) + N\left(r, 0, \frac{U}{g} e^V\right) + N\left(r, -1, \frac{U}{g} e^V\right) \\ &\leq N(r, 0, g) + N(r, 0, U) + N(r, 0, f) \end{aligned} \quad (3.3)$$

à l'extérieur d'un ensemble E . Soit $\gamma = \max\{\lambda_{[p+1,q]}(U), \rho_{[p+1,q]}(f)\}$. De (3.3), pour tout $\varepsilon > 0$,

$$T\left(r, \frac{U}{g} e^V\right) \leq \exp_p((\gamma + \varepsilon) \log_q r),$$

où $r \notin E$ suffisamment grand. En utilisant le Lemme 2.3,

$$\rho_{[p+1,q]}\left(\frac{U}{g} e^V\right) \leq \gamma + \varepsilon,$$

et par conséquent, $\rho = \rho_{[p+1,q]}(e^V) \leq \gamma + \varepsilon$. En choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit, nous obtenons une contradiction avec $\gamma < \rho$. Par conséquent, $\lambda_{[p+1,q]}(f) = \rho > 0$.

(ii) Cas $\rho = 0$. Soit f_0 une solution de (3.1) satisfaisant $\lambda_{[p+1,q]}(f_0) < \rho$ et f une solution de (3.1) telle que $f \neq f_0$. Supposons $\lambda_{[p+1,q]}(f_0) < \rho$. Maintenant, dans la représentation

$$f_0(z) = U(z) e^{V(z)}$$

où U et V sont des fonctions entières satisfaisant $\lambda_{[p,q]}(U) = \rho_{[p,q]}(U) < \infty$ et $\rho_{[p,q]}(e^V) = \infty$. Comme $\rho_{[p,q]}(U) < \infty, \rho_{[p,q]}(g) < \infty$ et $\rho_{[p,q]}(f) < \infty$

nous voyons de (3.3) que $\rho_{[p,q]}(e^V) < \infty$. C'est une contradiction. Donc, $\lambda_{[p+1,q]}(F) \leq \rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(F)$. \diamond

3.3.2 Preuve du Théorème 3.2

Si $f(z)$ a un zéro z_0 d'ordre $> k$, alors $F(z_0) = 0$. Donc

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right). \quad (3.4)$$

Comme $q - 1 \leq p - 1$,

$$N\left(r, \frac{1}{F}\right) \leq T(r, F) + O(1) = O(\exp_{p-1}(\beta_1 \log_q r)) \leq O(\exp_{p-1}(\beta_1 \log_q r)).$$

pour un certain $\beta_1 < \infty$. Par la relation (3.4), on a $\lambda_{[p+1,q]}(f) = \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f)$. D'autre part, de l'équation

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_0 \right),$$

nous obtenons

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} m(r, A_i) + \sum_{i=1}^k m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) + O(1). \quad (3.5)$$

En combinant (3.4) et (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \\ &\leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + \sum_{i=0}^{k-1} T(r, A_i) + \sum_{i=1}^k m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Puisque $\rho_{[p+1,q]}(f) < \infty$, le Lemme 2.4 implique

$$m\left(r, \frac{f^{(i)}}{f}\right) = O(\exp_{p-1}(\beta_2 \log_q r)), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

pour un certain $\beta_2 < \infty$ à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E . Donc

$$T(r, f) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(\exp_{p-q} r^\beta),$$

où $\beta < \infty$, à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E . En utilisant le Lemme 2.3, nous obtenons $\rho_{[p+1,q]}(f) \leq \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f) = \lambda_{[p+1,q]}(f) \leq \rho_{[p+1,q]}(f)$.

3.3.3 Preuve du Théorème 3.3

(i) Cas $\rho_{[p+1,q]}(f) > 0$. Supposons que $\lambda_{[p+1,q]}(f) < \rho_{[p+1,q]}(f)$. Alors on a

$$\rho_{[p+1,q]}(F) = \lambda_{[p+1,q]}(F) \leq \lambda_{[p+1,q]}(f) < \rho_{[p+1,q]}(f)$$

Par conséquent, $\rho_{[p+1,q]}(F) < \rho_{[p+1,q]}(f)$. Par le théorème d' Hadamard, nous pouvons écrire

$$f = U_1 e^{V_1}, \quad F = U_2 e^{V_2},$$

où U_1, U_2, V_1 et V_2 sont des fonctions entières de telles que $\lambda_{[p+1,q]}(U_1) = \rho_{[p+1,q]}(U_1) = \rho_{[p+1,q]}(f)$, et $\rho_{[p+1,q]}(e^{V_1}) = \rho_{[p+1,q]}(f) > \rho_{[p+1,q]}(F) \geq \rho_{[p+1,q]}(e^{V_2})$.

Donc, $\rho_{[p+1,q]}(e^{V_2-V_1}) = \rho_{[p+1,q]}(e^{V_1})$. D'autre part la fonction U_1 est une solution de l'équation différentielle

$$U_1^{(k)} + B_{k-1}U_1^{(k-1)} + \dots + B_0U_1 = U_2e^{V_2-V_1}, \quad (3.6)$$

où B_0, B_1, \dots, B_{k-1} sont des polynômes différentiels en fonction de A_i et V_1 .

Comme $\rho_{[p,q]}(B_i) < \infty, i = 0, \dots, k-1$ nous obtenons à partir de (3.6)

$$\rho_{[p+1,q]}(U_2e^{V_2-V_1}) \leq \rho_{[p+1,q]}(U_1).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \rho_{[p+1,q]}(U_1) &= \lambda_{[p+1,q]}(f) < \rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(e^{V_1}) = \rho_{[p+1,q]}(e^{V_2-V_1}) \\ &\leq \max \{ \rho_{[p+1,q]}(e^{V_2-V_1}), \rho_{[p+1,q]}(U_2) \} = \rho_{[p+1,q]}(U_2e^{V_2-V_1}) \leq \rho_{[p+1,q]}(U_1), \end{aligned}$$

où la dernière équation suit des propriétés des produits canoniques. Ainsi $\rho_{[p+1,q]}(U_1) < \rho_{[p+1,q]}(U_1)$, c'est une contradiction. Par conséquent $\rho_{[p+1,q]}(U_1) < \rho_{[p+1,q]}(U_1)$. De plus, comme $\lambda_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(f) > 0$, alors $\lambda_{[p+1,q]}(f) < \infty$.

(ii) Cas on a $\rho_{[p+1,q]}(f) = 0$. Si $\lambda_{[p+1,q]}(f) < \rho_{[p+1,q]}(F)$, alors $\rho_{[p,q]}(U_1) < \infty$. De l'équation (3.6),

$$\rho_{[p,q]}(U_2e^{V_2-V_1}) < \infty.$$

Donc

$$\rho_{[p,q]}(U_2e^{V_2-V_1}) = \max \{ \rho_{[p,q]}(U_2), \rho_{[p,q]}(e^{V_2-V_1}) \} < \infty,$$

et nous obtenons $\rho_{[p,q]}(U_2) = \lambda_{[p,q]}(F) < \infty$. Ceci est en contradiction avec $\lambda_{[p+1,q]}(F) < \infty$.

Donc, $\rho_{[p+1,q]}(F) \leq \lambda_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(f) = 0$.

3.3.4 Preuve du Théorème 3.4

Soit $\max \{ \rho_{[p,q]}(A_j) (j \neq s), \rho_{[p,q]}(F) \} = \beta < \rho_{[p,q]}(A_s) = \alpha$. Supposons que f est une solution transcendante de (3.1) avec $\rho = \rho_{[p,q]}(f) < +\infty$. De l'équation (3.1), on a

$$\begin{aligned} A_s(z) &= \frac{F(z)}{f^{(s)}} - \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} - A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} - \dots - A_{s+1}(z) \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} \\ &\quad - A_{s-1}(z) \frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} - \dots - A_1(z) \frac{f'}{f^{(s)}} - A_0(z) \frac{f}{f^{(s)}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

En appliquant le Lemme 2.4 on a

$$m\left(r, \frac{f^{(j+1)}}{f^{(s)}}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right) \quad (j = 0, \dots, k-1) \quad (3.8)$$

pour tout r à l'extérieur d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire $m(E) = \delta < +\infty$. Comme $N(r, f^{(j+1)}) \leq (j+2)N(r, f)$, pour $j = 0, \dots, k-1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^{(j+1)}) &= m(r, f^{(j+1)}) + N(r, f^{(j+1)}) \\ &\leq m\left(r, \frac{f^{(j+1)}}{f^{(s)}}\right) + m(r, f) + (j+2)N(r, f) \\ &\leq (j+2)T(r, f) + m\left(r, \frac{f^{(j+1)}}{f^{(s)}}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

De la relation (3.7), nous pouvons obtenir des relations (3.8) et (3.9)

$$\begin{aligned} T(r, A_s) &\leq T(r, F) + cT(r, f) + \sum_{j \neq s} T(r, A_j) \\ &\quad + O\left(\exp_{p-1}\left((\rho + \varepsilon) \log_q r\right)\right) \quad (r \notin E), \end{aligned} \quad (3.10)$$

où c est une constante positive. Comme $\rho_{[p,q]}(A_s) = \alpha$, alors il existe un point $\{r'_n\}$ ($r'_n \rightarrow +\infty$) tel que

$$\lim_{r'_n \rightarrow +\infty} \frac{\log_p T(r'_n, A_s)}{\log_q r'_n} = \alpha. \quad (3.11)$$

Puisque $m(E) = \delta < +\infty$, il existe un point $r_n \in [r'_n, r'_n + \delta + 1] - E$. Donc

$$\frac{\log_p T(r_n, A_s)}{\log_q r_n} \geq \frac{\log_p T(r'_n, A_s)}{\log_q (r'_n + \delta + 1)} = \frac{\log_p T(r'_n, A_s)}{\log_q r'_n + \log\left(\frac{\log_{p-1}(r'_n + \delta + 1)}{\log_{q-1} r'_n}\right)}, \quad (3.12)$$

d'où

$$\liminf_{r_n \rightarrow +\infty} \frac{\log_p T(r_n, A_s)}{\log_q r_n} \geq \alpha. \quad (3.13)$$

Ainsi pour ε ($0 < 2\varepsilon < \alpha - \beta$), et pour $j \neq s$,

$$T(r_n, A_j) \leq \exp_p((\beta + \varepsilon) \log_q r_n), \quad T(r_n, F) \leq \exp_p((\beta + \varepsilon) \log_q r_n) \quad (3.14)$$

et

$$T(r_n, A_s) \geq \exp_p((\alpha - \varepsilon) \log_q r_n). \quad (3.15)$$

Alors pour r_n suffisamment grand par (3.10), (3.14) et (3.15), nous obtenons

$$\exp_p((\alpha - \varepsilon) \log_q r_n) \leq k \exp_p((\beta + \varepsilon) \log_q r_n) + cT(r_n, f) + O\left(\exp_{p-1}((\alpha + \varepsilon) \log_q r_n)\right). \quad (3.16)$$

Donc

$$\limsup_{r_n \rightarrow +\infty} \frac{\log_p T(r_n, f)}{\log_q r_n} \geq \alpha - \varepsilon \quad (3.17)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous obtenons $\rho_{[p,q]}(f) \geq \rho_{[p,q]}(A_s) = \alpha$. Ceci prouve le Théorème 3.4.

3.3.5 Preuve du Théorème 3.5

Posons $\max\{\rho_{[p,q]}(A_j) (j \neq s), \rho_{[p,q]}(F)\} = \beta$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$T(r, A_j) \leq \exp_p((\beta + \varepsilon) \log_q r) (j \neq s), \quad T(r, F) \leq \exp_p((\beta + \varepsilon) \log_q r) \quad (3.18)$$

pour r suffisamment grand. Ecrivons l'équation (3.1) sous la forme

$$\begin{aligned} A_s(z) = & \frac{F(z)}{f^{(s)}} - \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} - A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} - \dots - A_{s+1}(z) \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} \\ & - A_{s-1}(z) \frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} - \dots - A_1(z) \frac{f'}{f^{(s)}} - A_0(z) \frac{f}{f^{(s)}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Par (3.9) et (3.19) nous obtenons

$$T(r, A_s) \leq T(r, F) + cT(r, f) + \sum_{j=0}^{k-1} m\left(r, \frac{f^{(j+1)}}{f^{(s)}}\right) + \sum_{j \neq S} T(r, A_j), \quad (3.20)$$

où c est une constante. Si $\rho = \rho_{[p,q]}(f) < +\infty$, Donc

$$m\left(r, \frac{f^{(j+1)}}{f^{(s)}}\right) = O\left(\exp_{p-1}((\rho + \varepsilon) \log_q r)\right) \quad (j = 0, \dots, k-1), \quad (3.21)$$

pour tout r à l'extérieur d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire $m(E) = \delta < +\infty$. Pour r suffisamment grand, nous avons

$$T(r, f) \leq \exp_p((\rho + \varepsilon) \log_q r). \quad (3.22)$$

Ainsi

$$T(r, A_s) \leq k \exp_p((\beta + \varepsilon) \log_q r) + c \exp_p((\rho + \varepsilon) \log_q r) + O\left(\exp_{p-1}((\rho + \varepsilon) \log_q r)\right) \quad (3.23)$$

pour $r \notin E$ et r suffisamment grand. Par le Lemme 2.3, nous avons pour $\alpha > 1$

$$T(r, A_s) \leq k \exp_p((\beta + \varepsilon) \log_q \alpha r) + c \exp_p((\rho + \varepsilon) \log_q \alpha r) + O\left(\exp_{p-1}((\rho + \varepsilon) \log_q \alpha r)\right) \quad (3.24)$$

pour r suffisamment grand. Alors,

$$\rho_{[p,q]}(A_s) \leq \max\{\beta + \varepsilon, \rho + \varepsilon\} < +\infty.$$

Ceci est une contradiction avec $\rho_{[p,q]}(A_s) = +\infty$.

3.3.6 Preuve du Théorème 3.6

Nous affirmons que (3.1) possède au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que $\rho_{[p,q]}(f_0) < +\infty$. En fait si f^* est une deuxième solution avec $\rho_{[p,q]}(f^*) < +\infty$, alors $\rho_{[p,q]}(f_0 - f^*) < +\infty$. Mais $f_0 - f^*$ est une solution de l'équation homogène correspondante de (3.1) c'est une contradiction avec le Théorème 2.1. Supposons que f est une solution de (3.1) avec $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$. De l'équation (3.1), on a

$$|A_0(z)| \leq \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + |A_{k-1}(z)| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f} \right| + \dots + |A_1(z)| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right|. \quad (3.25)$$

Par le Lemme 2.9, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E$, on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq r [T(2r, f)]^{k+1} \quad (j = 0, \dots, k-1). \quad (3.26)$$

D'autre part, par l'hypothèse du Théorème 3.5, il existe un ensemble E_2 avec $\overline{\text{dens}} \{|z| : z \in E\} > 0$, tel que pour tout z satisfaisant $z \in E_2$, on a

$$|A_0(z)| \geq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|)) \quad (3.27)$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta |z|)) \quad (j = 0, \dots, k-1) \quad (3.28)$$

quand $z \rightarrow \infty$. Comme $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$, il existe $\{r'_n\}$ ($r'_n \rightarrow +\infty$) tel que

$$\lim_{r'_n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{p+1} M(r'_n, f)}{\log_q r'_n} = +\infty. \quad (3.29)$$

Soit la mesure linéaire de E_1 , $m(E_1) = \delta < +\infty$. Alors il existe un point $r_n \in [r'_n, r'_n + \delta + 1] - E$. Donc

$$\frac{\log_{p+1} M(r_n, f)}{\log_q r_n} \geq \frac{\log_{p+1} M(r'_n, f)}{\log_q (r'_n + \delta + 1)} = \frac{\log_p M(r'_n, f)}{\log_q r'_n + \log \left(\frac{\log_q (r'_n + \delta + 1)}{\log_q r'_n \log_q r'_n} \right)} \quad (3.30)$$

d'où

$$\lim_{r_n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{p+1} M(r_n, A_s)}{\log_q r_n} = +\infty. \quad (3.31)$$

Donc pour σ assez grand $\sigma > \rho_{[p,q]}(F)$, on a

$$M(r_n, f) \geq \exp_{p+1}(\sigma \log_q r_n). \quad (3.32)$$

D'où pour r_n suffisamment grand et pour $0 < \varepsilon < \sigma - \rho_{[p,q]}(F)$, on a

$$\begin{aligned} F(z_n) &\leq \exp_{p+1}((\rho_{[p,q]}(F) + \varepsilon) \log_q r_n), \\ \left| \frac{F(z_n)}{f(z_n)} \right| &\leq \frac{\exp_{p+1}((\rho_{[p,q]}(F) + \varepsilon) \log_q r_n)}{\exp_{p+1}(\sigma \log_q r_n)} \rightarrow 0 \quad (r_n \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (3.33)$$

où $|f(z_n)| = M(r_n, f)$ et $|z_n| = r_n$. Alors par (3.25) – (3.28) et (3.33), pour tout z_n satisfaisant $z_n \in E_2, |z_n| = r_n \notin E_1$ et $|f(z_n)| = M(r_n, f)$

$$\exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha |z|)) \leq |z_n| [T(2|z_n|, f)]^{k+1} [1 + (k-1) \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta |z|))] + o(1)$$

quand $z_n \rightarrow \infty$. Soit $E = \{|z_n| : z_n \in E_2\} \setminus E_1 \subset [0, +\infty)$, alors $\overline{\text{dens}} E > 0$ et

$$\exp_{p+1}(\mu \log_q(\alpha r_n)) \leq d r_n \exp_{p+1}(\mu \log_q(\beta r_n)) [T(2r_n, f)]^{k+1} \quad (3.34)$$

quand $|z_n| = r_n \rightarrow +\infty$ dans E où $d (> 0)$ est une constante. Donc

$$\rho_{[p,q]} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q r} \geq \mu.$$

◇

moins une solution, soit f_a , parmi f_a et f_b satisfaisante $\rho_{[p+1,q]}(f_a) = \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f_a) = \rho_{[p,q]}(A_s)$. Comme $f_a = (a-b)g_1 + f_b$, alors

$$T(r, g_1) \leq T(r, f_a) + T(r, f_b) + O(1). \quad (3.42)$$

Supposons que l'ensemble E_1 remplit la condition du Théorème 2.2. Alors il existe au moins f_a et f_b , soit f_a , telle qu'il existe un sous-ensemble E_4 de E_1 mesure linéaire infinie et

$$T(r, f_a) \leq T(r, f_b). \quad \text{pour } r \in E_4. \quad (3.43)$$

Nous obtenons de (3.42) et (3.43)

$$T(r, g_1) \leq 2T(r, f_b) + O(1) \quad \text{pour } r \in E_4. \quad (3.44)$$

Ainsi $\rho_{[p+1,q]}(f_a) \geq \rho_{[p+1,q]}(g_1) = \rho_{[p,q]}(A_s)$ et donc $\rho_{[p+1,q]}(f_a) = \rho_{[p,q]}(A_s) = \rho$. Maintenant nous prouvons que $\rho_{[p+1,q]}(f_a) = \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f_a) = \rho$. Par (3.1), il est facile de voir que si f_a a un zéro z_0 d'ordre α ($> k$), alors F doit avoir un zéro z_0 d'ordre $\alpha - k$. Donc,

$$n \left(r, \frac{1}{f_a} \right) \leq k\bar{n} \left(r, \frac{1}{f_a} \right) + n \left(r, \frac{1}{F} \right), \quad (3.45)$$

et

$$N \left(r, \frac{1}{f_a} \right) \leq k\bar{N} \left(r, \frac{1}{f_a} \right) + N \left(r, \frac{1}{F} \right). \quad (3.46)$$

Maintenant écrivons (3.1) sous la forme

$$\frac{1}{f_a} = \frac{1}{F} \left(\frac{f_a^k}{f_a} + A_{k-1} \frac{f_a^{(k-1)}}{f_a} + \dots + A_1 \frac{f_a'}{f_a} + A_0 \right). \quad (3.47)$$

Par (3.47), on a

$$m \left(r, \frac{1}{f_a} \right) \leq \sum_{j=1}^k m \left(r, \frac{f_a^{(j)}}{f_a} \right) + \sum_{j=1}^k m(r, A_{k-j}) + m \left(r, \frac{1}{F} \right) + O(1). \quad (3.48)$$

En appliquant le Lemme 2.4, on a

$$m \left(r, \frac{f_a^{(j)}}{f_a} \right) = O \left(\exp_{p-1} \{ (\rho + \varepsilon) \log_q r \} \right) \quad (j = 1, \dots, k), \quad \rho_{[p+1,q]}(f_a) = \rho. \quad (3.49)$$

Alors pour tout r à l'extérieur d'un ensemble $E_3 \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire $m(E_3) = \delta < +\infty$. Par (3.46), (3.48) et (3.49), nous obtenons

$$\begin{aligned} T(r, f_a) &= T \left(r, \frac{1}{f_a} \right) + O(1) \\ &\leq k\bar{N} \left(r, \frac{1}{f_a} \right) + \sum_{j=1}^k T(r, A_{k-j}) + T(r, F) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$+O\left(\exp_{p-1}\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\}\right) \quad (|z| = r \notin E_3),$$

Pour r suffisamment grand, on a

$$T(r, A_0) + \dots + T(r, A_{k-j}) \leq k \exp_{p-1}\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\} \quad (3.51)$$

et

$$T(r, F) \leq \exp_{q-1}\{(\rho_{[p,q]}(F) + \varepsilon)\log_q r\}, \quad (\rho_{[p,q]}(F) < \infty). \quad (3.52)$$

Ainsi, par (3.50) - (3.52), on a

$$\begin{aligned} T(r, f_a) &\leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f_a}\right) + k \exp_p\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\} \\ &\quad + \exp_{q-1}\{(\rho_{[p,q]}(F) + \varepsilon)\log_q r\} + O\left(\exp_{p-1}\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\}\right), \quad (|z| = r \notin E_3). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donc pour tout f_a avec $\rho_{[p+1,q]}(f_a) = \rho$, de (3.53) et le Lemme 2.3, on a $\rho_{[p+1,q]}(f_a) \leq \bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f_a)$. Donc, $\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f_a) = \rho_{[p+1,q]}(f_a) = \rho$.

Si $\rho_{[p+1,q]}(F) < \rho_{[p,q]}(A_s) = \rho$, alors

$$T(r, F) \leq \exp_{p-q}\{r^{\rho_{[p+1,q]}(F)+\varepsilon}\} \leq \exp_{p-1}\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\}. \quad (3.54)$$

Ainsi, par (3.50) - (3.51) et (3.54), on a

$$\begin{aligned} T(r, f_a) &\leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f_a}\right) + k \exp_{p-1}\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\} \\ &\quad + \exp_{p-1}\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\} + O\left(\exp_{p-1}\{(\rho + \varepsilon)\log_q r\}\right), \quad (|z| = r \notin E_3). \end{aligned} \quad (3.55)$$

En utilisant un raisonnement semblable comme ci-dessus, nous obtenons à partir de (3.55) et le Lemme 2.3 que $\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f_a) = \rho_{[p+1,q]}(f_a) = \rho$. \diamond

3.3.8 Preuve du Théorème 3.8

Soient $\beta < \rho_{[p,q]}(A_0)$ et f une solution de (3.1). Supposons que $\beta < \alpha < \rho_{[p,q]}(A_0)$ et l'ensemble $E_\beta \subset [0, +\infty)$ de densité inférieure égale à 1 satisfaisant (3.2). Posons

$$E_1 = \left\{ z : |z| = r \in E_\beta \text{ et } |A_j(z)| = \min_{|z|=r} |A_j(z)| \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \right\}. \quad (3.56)$$

Alors $\underline{\text{dens}}\{z : |z| = r \in E_1\} = 1$ et

$$|A_j(z)| \leq \exp_{p+1}(\beta \log_q r) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1). \quad (3.57)$$

Pour tout $z \in E_1$, et le Lemme 3.1, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, +\infty)$ de densité supérieure positive tel que pour tout z satisfaisant $|z| \in E_2$, on a

$$|A_0(z)| \geq \exp_{p+1}(\alpha \log_q r) \quad (3.58)$$

Soit maintenant $E = \{z \in E_1 : |z| \in E_2\}$. Alors l'ensemble E et le nombre α , $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ et $F(z)$ satisfont les hypothèses du Théorème 3.6, respectivement. Alors nous concluons par le Théorème 3.6, que chaque solution f de l'équation (3.1) satisfait $\rho_{[p,q]}(f) = +\infty$ et $\rho_{[p,q]}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log_q r} \geq \alpha$. \diamond

3.4 Références

- [1] S. Bank, I. Laine, J. Langeley, Oscillation results for solutions of linear differential equations in the complex domain, *Resultate Math.* 16, 3-15 (1989).
- [2] S. Bank, A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations, *Compositio Math.* 25 (1972), pp. 61-70.
- [3] L. G. Bernal, On growth k -order of solutions of a complex homogeneous linear differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 101 (1987), 317-322.
- [4] B. Belaïdi. On the iterated order and the fixed points of entire solutions of some complex linear differential equations (2006), No. 9, 1-11 ; <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>
- [5] B. Belaïdi, Iterated order of fast growth solutions of linear differential equations. *Aust. J. Math. Anal. Appl.* 4 (2007), no. 1, Art. 20, 1-8 .
- [6] T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng and J. Tu, On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, *Ann. of Diff. Eqs.*, 21, 2 (2005), 111-122.
- [7] T-B. Cao the growth, Oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc, *J. Math. Anal. Appl.* 352 (2) (2009) 739-748.
- [8] G. Frank and S. Hellerstein, On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients, *Proc. London Math. Soc.* (3), 53 (1986), 407-428.
- [9] G. Gundersen, E. M. Steinbart, Finite order solutions of nonhomogeneous linear differential equations. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 17 (1992), no. 2, 327–341.
- [10] G. Gundersen, Estimations for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, *J. London Math. Soc.* (2) 37 (1998), pp. 88-104.
- [11] W. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [12] W. Hayman , The local growth of power series : a survey of the Wiman–Valiron method. *Canad. Math. Bull.*, 17, 317–358 (1974).
- [13] J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä, Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc, *Results Math.* 49 (2006) 265-278.
- [14] J. Tu, Z.-X. Chen, Growth of solutions of complex differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order, *Southeast Asian Bull Math* 33 (1) (2009) 153-164.
- [15] J. Tu, Z. X. Chen and X. M. Zheng, Growth of solutions of complex differential equations with coefficients of finite iterated order, *Electron. J. Diff. Eqns.*, Vol. 2006 (2006), N 54, 1-8.
- [16] O.P. Juneja, G.P. Kapoor, S.K. Bajpai, On the (p,q) -order and lower (p,q) -order of an entire function. *J. Reine Angew. Math.* 282 (1976) 53-67.
- [17] O.P. Juneja, G.P. Kapoor, S.K. Bajpai, On the (p,q) -type and lower (p,q) -type of an entire function. *J. Reine Angew. Math.* 290 (1977) 180-190.
- [18] G. Jank, Volkmann L, *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.
- [19] Jie Liu, Jin Tu, Ling-Zhi Shi Linear differential equation with entire coefficients of $[p, q]$ -order in the complex plane *J. Math. Anal. Appl.* 372 (2010) 55-67.
- [20] K. H. Kwon, On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations. *Bull. Korean Math. Soc.* 33 (1996), no. 3, 487–496.
- [21] L. Kinnunen, linear differential equations with solutions of finite iterated order, *Southeast Asian Bull. Math.* (4) 22 (1998) 385-405.
- [22] I. Laine, *Nevalinna Theory and Complex Differential Equations*, W. de Gruyter, New York, 1993.

-
- [23] I. Laine and Yang R., Finite order solutions of complex linear differential equations, *Electron. J. Diff. Eqns*, N 65, Vol. 2004 (2004), 1-8.
- [24] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage. Reprint. *Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften*, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [25] J. Rossi, Second order differential equations with transcendental coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97, No. 1 (1986), 61-66.
- [26] A. Schönhage, Über das Wachstum zusammengesetzter Funktionen, *Math. Z* 73, 22-44 (1960).
- [27] L. C. Shen, Solution to a problem of S. Bank regarding the exponent of convergence of the solutions of the differential equation $f'' + Af = 0$; *Kexue Tongbao.*, 30 (1985) 1579-1585.
- [28] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, translated by E. F. Collingwood, Chelsea, New York, 1949.
- [29] C. C. Yang, H. X. Yi, *Uniqueness theory of meromorphic functions. Mathematics and its Applications*, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.