REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Thèse

Présentée par

Fatima BOUZIANI

Pour l'obtention du titre de

Doctorat Es-Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Étude de Problèmes aux Limites et de Transmission Régis par des Équations Différentielles Abstraites de Type Elliptique à Coefficients Opérateurs Variables dans les Espaces de Hölder

Soutenue le 28 Avril 2012 devant la commission d'examen constituée de :

Président :	BELAÏDI Benharrat, Pr. Université de Mostaganem (Algérie)
Examinateurs :	LEMRABET Keddour, Pr. USTHB, Alger
	SADALLAH Boubaker Khaled, Pr. ENS de Kouba, Alger
	DOGBÉ Christian, MC, Habilité, Université de Caen (France)
Directeurs de thèse :	MEDEGHRI Ahmed, Pr. Université de Mostaganem (Algérie)
	LABBAS Rabah, Pr. Université du Havre (France).

Année Universitaire : 2011-2012

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du laboratoire de mathématiques pures et appliquées de l'université de Mostaganem (LMPAM) en collaboration avec le laboratoire de mathématiques appliquées du Havre (LMAH).

Tout d'abord et en premier lieu je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse en Algérie, le Professeur Ahmed Medeghri pour m'avoir intégré dans son équipe, d'avoir dirigé ce travail, pour son aide constante, ses encouragements, sa disponibilité et les moyens mis à ma disposition durant ces années de thèse.

J'exprime toute ma gratitude à mon directeur de thèse en France le Professeur Rabah Labbas. Ses qualités scientifiques et humaines, son expérience, ses grandes compétences, sa finesse, ses nombreux conseils et ses précieuses remarques ont permis l'accomplissement et l'aboutissement de ce travail. J'ai eu un grand plaisir à apprendre et à travailler à ses cotés et je l'aurai toujours. Qu'il trouve ici les marques de ma reconnaissance et de mon profond respect.

Toute ma considération à Monsieur Benharrat Belaïdi, Professeur à l'université de Mostaganem et directeur du laboratoire LMPAM, d'avoir accepté de présider le jury et d'évaluer ce travail. Je le remercie vivement.

Je suis très reconnaissante à Monsieur Keddour Lemrabet, Professeur à L'USTHB à Alger, précurseur dans les problèmes de transmission pour m'avoir initié à ce thème de recherche. Je suis particulièrement honorée et émue de sa présence dans ce jury de thèse.

Mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à Messieurs : Boubaker Khaled Sadallah, Professeur à L'ENS de Kouba à Alger, et Christian Dogbé, Maître de Conférences Habilité de l'université de Caen en France, pour l'estime qu'ils m'ont fait en acceptant de bien vouloir participer à ce jury de soutenance et pour l'attention qu'ils portent à ce travail.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble de l'équipe "EDA" de l'université de Mostaganem.
Un grand et chaleureux merci à tous les membres de l'équipe du laboratoire LMAH, pour m'avoir accueilli avec beaucoup de gentillesse lors de mon séjour au Havre.

Finalement, j'adresse un grand merci à toute ma famille qui a été toujours présente à mes cotés, en particulier mes parents pour leurs encouragements, leur soutien affectif permanant et indéfectible et leur patience. Qu'ils trouvent ici un modeste geste de reconnaissance et de remerciement.

Une pensée très particulière à mon mari pour son assistance et ses encouragements.

Table des matières

Introduction **1**
0.1 Objectif et description du problème . . . 1
0.2 Commentaires sur les hypothèses . . . 2
0.3 Motivation et exemple modèle . . . 2
0.4 Travaux effectués sur le même sujet . . . 4
0.5 Méthode et techniques utilisées . . . 4
0.6 Résultats essentiels obtenus . . . 6
0.7 Brève description des chapitres . . . 7
0.8 Perspectives . . . 8

1 Rappels **9**
1.1 Opérateurs linéaires fermés . . . 9
1.2 Intégrale de Dunford . . . 10
1.3 Mesurabilité au sens de Bochner . . . 10
1.4 Semi-groupes . . . 12
1.4.1 Semi-groupe fortement continu . . . 12
1.4.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu . . . 12
1.4.3 Semi-groupe analytique . . . 14
1.5 Espaces d'interpolation . . . 15
1.6 Espaces de Hölder et petits espaces de Hölder . . . 17
1.7 Espaces de Sobolev et espaces de Besov . . . 18
1.7.1 Espaces de Sobolev . . . 18
1.7.2 Espaces de Besov . . . 19

2 Lemmes techniques **20**

3 Construction de la solution stricte **33**
3.1 Conditions nécessaires . . . 35
3.2 Cas scalaire et passage au cas abstrait . . . 39
3.3 Convergence et régularité des termes avec intégrales . . . 45
3.4 Étude du système obtenu . . . 66
3.5 Régularité du second membre F^{δ} . . . 70

4 Le problème approché **89**

5 Régularité maximale de la solution **103**
5.1 Régularité de l'opérateur intégral Π_λ^δ 103
5.2 Régularité de l'opérateur $\left(I + \Pi_\lambda^\delta\right)^{-1}$ 112
5.3 Résultat de régularité sur le second membre 113
5.4 Théorème de régularité maximale 120

6 Exemples d'application **121**
6.1 Cas $E = L^r(\Omega)\,, 1 < r < +\infty$ 121
6.2 Cas $E = C\left(\overline{\Omega}\right)$ 128

Introduction

0.1 Objectif et description du problème

L'objectif de ce travail est l'étude d'une famille de problèmes aux limites et de transmission régis par des équations différentielles opérationnelles de type elliptique à coefficients opérateurs variables dans le cadre des espaces de Hölder :

$$(P_\delta)\begin{cases} (u^\delta)''(x) + \mathbf{A}(x)\, u^\delta(x) - \lambda u^\delta(x) = g^\delta(x), \quad x \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,\delta\right[, \\ u^\delta(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+), \quad p_-(u^\delta)'(0^-) = p_+(u^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

où $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(\mathbf{A}(x))$ non nécessairement denses dans un espace de Banach complexe E, δ un paramètre fixé strictement positif (destiné à tendre vers zéro), λ est un paramètre spectral positif, $\left(f_-, f_+^\delta\right)$ sont des données dans E, (p_+, p_-) sont les coefficients de conductivité des deux intervalles $\left]-1,0\right[$ et $\left]0,\delta\right[$ positifs non nuls et qui peuvent dépendre de δ. Le second membre $g^\delta \in C(\left[-1,0\right[\cup \left]0,\delta\right]; E)$ et est tel que

$$\begin{cases} g^\delta|_{[-1,0]} = g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0]; E) \\ g^\delta|_{[0,\delta]} = g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; E), \end{cases}$$

avec $0 < 2\alpha_0 < 1$.

g^δ n'est pas nécessairement höldérienne sur tout l'intervalle $[-1,\delta]$. On peut montrer facilement qu'elle l'est si et seulement si $g_-(0) = g_+^\delta(0)$ (autrement dit si et seulement si g^δ est continue en zéro). On ne supposera pas cela dans ce travail.

Cet objectif comportera naturellement les points suivants :

1. l'existence et l'unicité de solutions strictes u^δ de (P_δ), pour tout $\delta > 0$,
2. la régularité maximale de ces solutions,
3. l'étude complète du problème limite de solution u_- (à découvrir) quand $\delta \to 0$,
4. les estimations d'erreurs $\left\|u^\delta - u_-\right\|$ dans différents espaces.

L'étude du problème (P_δ) sera faite en supposant que la famille d'opérateurs $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ vérifie les deux hypothèses fondamentales suivantes :

- $\exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0 : \forall x \in [-1,\delta], \forall z \geq \lambda_0$, $(\mathbf{A}(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et
$$\left\|(\mathbf{A}(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{z} \tag{H.1}$$
- $\exists m \in \mathbb{N}^*, C, \alpha_i, \mu_i > 0,\ i = 1, ..., m : \forall x, \tau \in [-1,\delta],\ \forall z \geq \lambda_0$
$$\begin{aligned}&\left\|(\mathbf{A}(x) - \lambda_0 I)(\mathbf{A}(x) - zI)^{-1}\left[(\mathbf{A}(x) - \lambda_0 I)^{-1} - (\mathbf{A}(\tau) - \lambda_0 I)^{-1}\right]\right\|_{L(E)} \\ \leq\ & C\sum_{i=1}^{m} \frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{z^{\mu_i}}\end{aligned} \tag{H.2}$$
avec $\alpha_i + 2\mu_i - 2 > 0$, $i = 1, ..., m$.

Les points 1 et 2 cités ci-dessus ont fait l'objet d'une publication dans un journal international (voir [10]).
Une autre publication est en cours pour plus d'investigations concernant les points 3 et 4 et d'autres perspectives.

0.2 Commentaires sur les hypothèses

L'hypothèse (H.1) est naturelle et nécessaire et exprime l'ellipticité de l'équation différentielle. Elle a été utilisée pour la première fois dans le célèbre travail de S. G. Krein [22].
L'hypothèse (H.2) traduit une certaine höldérianité des résolvantes des opérateurs $\mathbf{A}(x)$ et a été utilisée pour la première fois par R. Labbas [23]. Elle est inspirée du travail de P. Acquistapace et B. Terreni [2] pour l'étude du problème de Cauchy abstrait non homogène et de R. Labbas et B. Terreni [24] et [25] dans l'étude des sommes d'opérateurs de type parabolique ou elliptique. Cette hypothèse peut être réécrite, dans un cadre plus général, en fonction d'un commutateur de deux résolvantes, voir à cet effet [25], page 148 (démonstration du lemme 2.6).
Une hypothèse différente à (H.2), a été utilisée dans le célèbre travail sur les sommes d'opérateurs linéaires de G. Da Prato et P. Grisvard dans [14]. Cette dernière impose, entre autres, des conditions de différentiabilité première et seconde sur les résolvantes des opérateurs $\mathbf{A}(x)$, (voir [14], page 346, hypothèse (6.5), page 355, hypothèse (6.22) et leurs traductions en équations différentielles abstraites page 373, hypothèse (8.8) et page 375, hypothèse (8.10)). Une étude comparative sur toutes ces différentes hypothèses est faite dans [3].

0.3 Motivation et exemple modèle

Plusieurs phénomènes physiques concrets peuvent se modéliser par des équations différentielles abstraites. On cite par exemple la propagation de la chaleur entre deux corps de natures physiques différentes (voir exemple ci-dessous), la transmission d'ondes électromagnétiques et aussi la transmission des champs électriques produits, entre autres, par les cellules, les tissus ou les organismes vivants...

Un exemple modèle et concret en équations aux dérivées partielles illustrant le problème opérationnel (P_δ) est le suivant :

$$(PC)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\delta}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u^\delta}{\partial y^2}(x,y) - \lambda u^\delta(x,y) = g^\delta(x,y), \quad (x,y) \in (]-1,0[\cup]0,\delta[)\times]0,1[\\ u^\delta(-1,y) = f_-(y), \quad \dfrac{\partial u^\delta}{\partial x}(\delta,y) = f_+^\delta(y), \quad y\in]0,1[\\ u^\delta(0^-,y) = u^\delta(0^+,y), \quad y\in]0,1[\\ p_-\dfrac{\partial u^\delta}{\partial x}(0^-,y) = p_+\dfrac{\partial u^\delta}{\partial x}(0^+,y), \quad y\in]0,1[\\ u^\delta(x,0) = 0, \quad x\in]-1,0[\cup]0,\delta[\\ a(x)u^\delta(x,1) + b(x)\dfrac{\partial u^\delta}{\partial y}(x,1) = 0, \quad x\in]-1,0[\cup]0,\delta[, \end{cases}$$

où, par exemple les fonctions réelles a, b vérifient

$$a, b \in C^{1,\nu}([-1,\delta]); \quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ \nu > 0; \quad \inf_{x\in[-1,\delta]}(a(x)+b(x)) > 0.$$

On peut choisir ici $E = C([0,1])$ (on peut prendre aussi $E = L^p(0,1)$, $1 < p < +\infty$). La famille $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ est définie par

$$\begin{cases} D(\mathbf{A}(x)) = \{\varphi \in C^2([0,1]) : \varphi(0) = 0, \quad a(x)\varphi(1) + b(x)\varphi'(1) = 0\} \\ [\mathbf{A}(x)]\,\varphi(y) = \varphi''(y), \quad y\in]0,1[. \end{cases}$$

Noter que les domaines $D(\mathbf{A}(x))$ sont réellement variables.

Il est connu que le spectre de $\mathbf{A}(x)$, pour tout $x \in [-1,\delta]$, est inclus dans $]-\infty,0[$ et que

$$\begin{cases} \overline{D(\mathbf{A}(x))} = \{\varphi \in C([0,1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \quad \text{si} \quad b(x) = 0 \\ \\ \overline{D(\mathbf{A}(x))} = \{\varphi \in C([0,1]) : \varphi(0) = 0\} \quad \text{si} \quad b(x) \neq 0; \end{cases}$$

donc $D(\mathbf{A}(x))$ est non dense dans E pour tout $x \in [-1,\delta]$.

L'hypothèse (H.1) est vérifiée, voir Proposition 7.1, page 53 dans [1]. Quant à l'hypothèse (H.2), on peut la démontrer grâce à une estimation a priori de type H. B. Stewart [[34], [35]] (dans le cas $E = C([0,1])$) ou de type Agmon-Douglis-Niremberg [5] (dans le cas $E = L^p(0,1)$). La démonstration repose sur un calcul explicite et utilise une méthode analogue à celle qui est faite par R. Labbas dans [23].
Pour retrouver l'écriture du problème (PC) en formulation opérationnelle (P_δ), il suffit d'utiliser la notation vectorielle usuelle

$$u^\delta(x,y) = u^\delta(x,.)(y) = u^\delta(x)(y).$$

0.4 Travaux effectués sur le même sujet

Il est à noter que cette thèse se situe dans une continuité d'amélioration des travaux effectués par O. Belhamiti, R. Labbas, K. Lemrabet et A. Medeghri [[8], [9]] (cadre où les opérateurs $\mathbf{A}(x)$ sont constants) et par A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et B-K. Sadallah [19] (cadre où les $\mathbf{A}(x)$ sont variables avec des hypothèses de différentiabilité des résolvantes à la Da Prato-Grisvard).

Un premier travail sur les problèmes de transmission posés dans un cadre abstrait a été effectué par A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et S. Maingot dans [18], où les auteurs utilisent la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Da Prato et Grisvard avec un second membre dans un espace d'interpolation. Une autre étude consacrée au même problème mais avec $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ (cas constant), dans le cadre L^p, $1 < p < +\infty$, est faite dans l'article de G. Dore, A. Favini, R. Labbas et K. Lemrabet dans [15]. Ici les auteurs utilisent fondamentalement le calcul fonctionnel H^∞ [21] pour les opérateurs sectoriels dans les espaces de Banach UMD et le célèbre théorème de Dore et Venni.
Beaucoup d'autres études ont été faites sur les problèmes de transmission posés dans différents domaines (réguliers ou à coins) mais dans le cadre hilbertien, on cite les travaux de K. Lemrabet [26] et celui de G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge et G. Vial [13] et D. Mercier [30]. Les techniques utilisées dans ces derniers sont basées essentiellement sur les méthodes variationnelles et sur des développements asymptotiques de la solution par rapport à l'épaisseur de la couche mince.

0.5 Méthode et techniques utilisées

Dans cette thèse, notre approche diffère complètement de celles qui ont été utilisées dans les travaux cités ci-dessus.
Notre étude s'appuie d'abord sur une construction explicite de la solution sous forme d'une intégrale de Dunford. On utilisera aussi les espaces d'interpolation réels et leur caractérisation par la résolvante faite par P. Grisvard [20] ; certains résultats de E. Sinestrari [33] et des techniques similaires à celles employées dans la thèse de R. Labbas [23].

En posant
$$u^\delta = \begin{cases} u_-^\delta & \text{sur} \quad (-1,0) \\ u_+^\delta & \text{sur} \quad (0,\delta)\,, \end{cases}$$
et, pour tout $x \in [-1,\delta]$,
$$Q(x) = (\mathbf{A}(x) - \lambda I), \quad \lambda \geq \lambda_0,$$
le problème (P_δ) peut s'écrire sous la forme
$$(P_\delta) \qquad \begin{cases} \left(u_-^\delta\right)''(x) + Q(x)u_-^\delta(x) = g_-(x)\,, \quad x \in (-1,0)\,, \\ \left(u_+^\delta\right)''(x) + Q(x)u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x)\,, \quad x \in (0,\delta)\,, \\ u_-^\delta(-1) = f_-, \quad \left(u_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta, \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0)\,, \quad \left(u_-^\delta\right)'(0) = p\left(u_+^\delta\right)'(0)\,, \end{cases}$$

où $p = p_+/p_-$.

Dans un premier temps, on commence par résoudre le problème scalaire :

$$(P_\delta^{sca}) \quad \begin{cases} \left(v_-^\delta\right)''(x) + zv_-^\delta(x) = g_-(x), & x \in (-1,0), \\ \left(v_+^\delta\right)''(x) + zv_+^\delta(x) = g_+^\delta(x), & x \in (0,\delta), \\ v_-^\delta(-1) = f_-, \quad \left(v_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta, \\ v_-^\delta(0) = v_+^\delta(0), \quad \left(v_-^\delta\right)'(0) = p\left(v_+^\delta\right)'(0), \end{cases}$$

où dans (P_δ), on a remplacé $Q(x)$ par un complexe z tel que $\sqrt{-z}$ soit une détermination analytique de la racine carrée ($\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$) ; on obtient alors des représentations de la forme

$$\begin{cases} v_+^\delta(x) = L_{z,+}^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \\ v_-^\delta(x) = L_{z,-}^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x), \end{cases}$$

(voir (3.2) et (3.4) pages 39 et 40 pour les expressions de $L_{z,+}^\delta$ et $L_{z,-}^\delta$).

On fait ensuite le raisonnement heuristique suivant : on suppose l'existence d'une solution stricte $u^\delta = \left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$ de (P_δ), c'est-à-dire celle qui vérifie

$$\begin{aligned} \forall x &\in [0,\delta], \; u_+^\delta(x) \in D(Q(x)); \; u_+^\delta \in C^2([0,\delta]; E) \text{ et} \\ x &\longmapsto Q(x)u_+^\delta(x) \in C([0,\delta]; E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x &\in [-1,0], \; u_-^\delta(x) \in D(Q(x)); \; u_-^\delta \in C^2([-1,0]; E) \text{ et} \\ x &\longmapsto Q(x)u_-^\delta(x) \in C([-1,0]; E), \end{aligned}$$

et on écrit formellement que, pour $x \in]0,\delta[$

$$\begin{aligned} & L_{z,+}^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \\ = \; & L_{z,+}^\delta(f_+^\delta, f_-, \left(u_+^\delta\right)''(.) + Q(.)u_+^\delta(.), \left(u_-^\delta\right)''(.) + Q(.)u_-^\delta(.))(x), \end{aligned}$$

et pour $x \in]-1,0[$

$$\begin{aligned} & L_{z,-}^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \\ = \; & L_{z,-}^\delta(f_+^\delta, f_-, \left(u_+^\delta\right)''(.) + Q(.)u_+^\delta(.), \left(u_-^\delta\right)''(.) + Q(.)u_-^\delta(.))(x). \end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, en effectuant une double intégration par parties (en tenant compte des conditions de transmission), en se servant du calcul fonctionnel de Dunford et en utilisant une identité algébrique qui fait apparaître l'expression du commutateur décrite dans l'hypothèse (H.2), on obtient les deux équations intégrales (3.9) et (3.10) page 43, puis le système

(3.14) page 66 qu'on résout pour λ assez grand. On obtient alors une représentation formelle du couple solution $\left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$ (voir l'expression (3.23) page 87).

Pour montrer qu'effectivement cette dernière représentation est celle du couple solution $\left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$, on étudie le problème approché associé suivant :

$$(P_{\delta;n}) \quad \begin{cases} (u_n^\delta)''(x) + \mathbf{A}_n(x)\, u_n^\delta(x) - \lambda u_n^\delta(x) = g^\delta(x), & x \in]-1,0[\,\cup\,]0,\delta[\,, \\ u_n^\delta(-1) = f_-, \quad (u_n^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \\ u_n^\delta(0^-) = u_n^\delta(0^+), \quad p_-(u_n^\delta)'(0^-) = p_+(u_n^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

où $(\mathbf{A}_n(x))_{x\in[-1,\delta]}$ est la famille des approchants de Yosida de $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$, pour laquelle l'hypothèse (H.2) est aussi vérifiée uniformément par rapport à n. On montrera alors l'existence d'une suite unique $u_n^\delta = \left(u_{n+}^\delta, u_{n-}^\delta\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de solutions de $(P_{\delta;n})$ qui converge vers $u^\delta = \left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$. Quant aux résultats de régularité, ils reposent essentiellement sur une analyse minutieuse de la représentation de la solution où figurent beaucoup d'intégrales singulières entre autres.

0.6 Résultats essentiels obtenus

L'hypothèse d'ellipticité (H.1) permet de définir et donc d'utiliser pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, les racines carrées

$$(-Q(x))^{1/2} = (-(\mathbf{A}(x) - \lambda I))^{1/2}, \quad x \in [-1,\delta],$$

et de plus, il est connu que $-(-Q(x))^{1/2}$ génèrent des semi-groupes analytiques non fortement continus en zéro, (voir [6] pour les domaines denses et [29] pour les domaines non denses). Dans les cas concrets, mis à part le cadre hilbertien, ces racines carrées ne sont pas faciles à caractériser (actions et domaines). Cependant l'inclusion bien connue suivante :

$$(D(Q(x));E)_{1/2,1} \subset D((-Q(x))^{1/2}) \subset (D(Q(x));E)_{1/2,\infty},$$

permet de les exploiter sachant que les espaces d'interpolation réels $(D(Q(x));E)_{1/2,1}$ et $(D(Q(x));E)_{1/2,\infty}$ sont plus faciles à décrire (voir [20]).

Les principaux résultats de cette thèse, sous les hypothèses (H.1) et (H.2) (pour tout δ strictement positif fixé) sont illustrés par les deux théorèmes ci-après :

le premier donne des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité sur les données pour avoir une solution stricte du problème,

le second donne des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité sur les données pour avoir la régularité maximale höldérienne.

Théorème 0.1 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient $\lambda \geq \lambda^*$ (voir définition de λ^* page 70), $f_+^\delta \in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$, $f_- \in D(Q(-1))$, $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$ et $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0];E)$. Alors on a l'équivalence des deux propositions suivantes :*

1.

$$\begin{cases} g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(Q(0))}, \\ (-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(Q(\delta))}, \\ Q(-1)f_- - g_-(-1) \in \overline{D(Q(-1))}. \end{cases}$$

2. Le couple $\left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$ *donné par (3.23) est l'unique solution stricte du problème* (P_δ) *.*

Théorème 0.2 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $\lambda \geq \lambda^*$ *(voir définition de* λ^* *page 70),*

$$\beta \in \left]0, \min(2\alpha_0, \sigma)\right], \ \sigma = \min_{i=1, \ldots, m} (\alpha_i + 2\mu_i - 2),$$

$f_+^\delta \in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$, $f_- \in D(Q(-1))$, $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; E)$ *et* $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0]; E)$*. Alors on a l'équivalence des deux propositions suivantes :*

1.

$$\begin{cases} g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_{Q(0)}(\alpha_0, +\infty), \\ (-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in D_{Q(\delta)}(\alpha_0, +\infty), \\ Q(-1)f_- - g_-(-1) \in D_{Q(-1)}(\alpha_0, +\infty). \end{cases}$$

2. Le couple $\left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$ *donné par (3.23) vérifie*

$$\begin{cases} u_+^\delta(.) \in C^\beta([0,\delta]; D(Q(.))), \ u_-^\delta(.) \in C^\beta([-1,0]; D(Q(.))), \\ \left(u_+^\delta\right)''(.) \in C^\beta([0,\delta]; E), \ \ \left(u_-^\delta\right)''(.) \in C^\beta([-1,0]; E), \\ \left(u_+^\delta\right)''(.) \in B\left([0,\delta]; D_{Q(.)}(\beta/2, +\infty)\right), \\ \left(u_-^\delta\right)''(.) \in B\left([-1,0]; D_{Q(.)}(\beta/2, +\infty)\right). \end{cases}$$

Ici $B\left([0,\delta]; D_{Q(.)}(\beta/2, +\infty)\right)$ est l'ensemble de fonctions $v : [0,\delta] \to E$, fortement mesurables, telles que

$$v(x) \in D_{Q(x)}(\beta/2, +\infty) \ \text{ pour } p.p.\ x \in [0,\delta],$$

et

$$\sup_{x\in[0,\delta]} \sup_{r\geq 0} \left\| r^{\beta/2} Q(x) (Q(x) - rI)^{-1} v(x) \right\|_E < \infty.$$

0.7 Brève description des chapitres

Ce travail est organisé comme suit :
Le **chapitre 1** présente une synthèse des outils nécessaires qui seront utilisés par la suite, comme les espaces d'interpolation, les espaces de Hölder avec leurs propriétés fondamentales et la théorie des semi-groupes.
Quelques lemmes techniques très utiles sont donnés avec leurs preuves au **chapitre 2**.
Le **chapitre 3** est consacré à la construction de la solution stricte du problème aux limites et de transmission en question en suivant un raisonnement heuristique.

On montre l'existence de cette solution et on justifie sa représentation au **chapitre 4** par l'étude du problème approché associé.
Au **chapitre 5** on montre le résultat de la régularité maximale de la solution stricte.
Finalement, au **chapitre 6** on donne deux exemples concrets illustratifs en considérant un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients variables en $(x, y) \in [-1, \delta] \times \overline{\Omega}$ dans les deux cas $E = L^r(\Omega)$, $1 < r < +\infty$ et $E = C(\overline{\Omega})$, où Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$.

0.8 Perspectives

1. La continuation naturelle, dans un premier temps, est l'étude du passage à la limite quand $\delta \to 0$; cela comportera :
   - l'étude du problème limite,
   - les estimations d'erreurs $\left\|u^\delta - u_-\right\|$.
2. Dans une deuxième étape, il faudra étudier l'équation complète

$$(P_\delta)\begin{cases} (u^\delta)''(x) + 2B(x)(u^\delta)'(x) + \mathbf{A}(x)\,u^\delta(x) - \lambda u^\delta(x) = g^\delta(x), \quad x \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,\delta\right[, \\ u^\delta(-1) = f_-, \quad (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+), \quad p_-(u^\delta)'(0^-) = p_+(u^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

   où
   - $B(x) = B$,
   - $B(x)$ une perturbation.
   - $B(x)$ est linéaire fermé.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Opérateurs linéaires fermés

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe.
Un opérateur linéaire A sur l'espace E est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset E$ dit domaine de A et à valeurs dans E. On désigne par $L(E)$ l'espace des opérateurs linéaires continus définis sur E $(D(A) = E)$. Cet espace muni de la norme

$$\|A\|_{L(E)} = \sup \{\|Ax\|_E : x \in E, \|x\|_E = 1\},$$

est un espace de Banach.

Définition 1.1 *L'opérateur A est dit fermé si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\},$$

est fermé dans $E \times E$.
La norme du graphe sur $D(A)$ est donnée pour tout $x \in D(A)$ par

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_E.$$

Si A est fermé, alors $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.1 *L'opérateur A est fermé si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que*

$$x_n \to x \text{ et } Ax_n \to y,$$

on a

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

Définition 1.2 *L'opérateur A est dit fermable s'il admet une extension fermée.*

Proposition 1.2 *L'opérateur A est fermable si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que*

$$x_n \to 0 \text{ et } Ax_n \to y,$$

on a

$$y = 0.$$

1.2 Intégrale de Dunford

Soient E un espace de Banach complexe et A un opérateur linéaire fermé. On note $\mathcal{H}(A)$ l'ensemble des fonctions f holomorphes dans un ensemble fermé contenant $\sigma(A)$ (le spectre de A).
Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(A)$, on définit l'intégrale de Dunford, inspirée d'une intégrale de Cauchy, par

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où γ est une courbe fermée entourant $\sigma(A)$ orientée dans le sens positif.

Proposition 1.3 *Soient $A \in L(E)$, $f, g \in \mathcal{H}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda f + \mu g$, $fg \in \mathcal{H}(A)$ et*

$$\begin{cases} (\lambda f + \mu g)(A) = \lambda f(A) + \mu g(A), \\ (fg)(A) = f(A) g(A). \end{cases}$$

Théorème 1.1 *(Théorème spectral) Si $A \in L(E)$ et $f \in \mathcal{H}(A)$ alors*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

1.3 Mesurabilité au sens de Bochner

Soit E un espace de Banach, muni de la norme $\|.\|_E$.

Définition 1.3 *Une fonction f de $[0,T]$ à valeurs dans E est dite étagée s'il existe une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles Lebesgue mesurables de $[0,T]$ et $(a_i)_{i\in I} \subset E$ tels que*

1. *$\cup_{i\in I} A_i = [0,T]$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.*
2. *$f(x) = \sum_{i\in I} a_i \chi_{A_i}(x)$,*

où χ_{A_i} est la fonction caractéristique de l'ensemble A_i.

Définition 1.4 (mesurabilité au sens de Bochner)
La fonction f définie sur $[0,T]$ et à valeurs dans E est dite fortement mesurable au sens de Bochner s'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées telle que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E quand n tend vers l'infini pour presque tout x de $[0,T]$. On dit alors que f est B-mesurable.

Définition 1.5 (intégrabilité au sens de Bochner)
La fonction f définie sur $(0,T)$ et à valeurs dans E est dite B-intégrable s'il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\geq 0}$ telle que

1. *Pour presque tout x de $[0,T]$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ dans E quand n tend vers l'infini (i. e f est B-mesurable),*
2. *$\int_0^T \|f_n(x) - f(x)\|_E \, dx$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.*

Théorème 1.2 *Soit f une fonction définie sur $(0,T)$ à valeurs dans E et B-mesurable. Alors f est B-intégrable si et seulement si l'application qui à x de $(0,T)$ associe $\|f(x)\|_E$ est intégrable au sens de Lebesgue.*

Définition 1.6 *Soit f une fonction B-mesurable définie sur $(0,T)$. Alors, pour tout ensemble Lebesgue mesurable X de $(0,T)$, on définit :*

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \chi_X(x)\, f_n(x)\,dx,$$

où $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions étagées satisfaisant

1. *$f_n(x)$ tend vers $f(x)$ pour presque tout $x \in (0,T)$,*
2. *$\int_0^T \|f_n(x) - f(x)\|_E\, dx$ tend vers zéro quand n tend vers ∞.*

Proposition 1.4 *Soit f une fonction B-mesurable définie sur $(0,T)$ à valeurs dans E. Alors, pour tout ensemble X de $(0,T)$, on a*

1. *$\left\|\int_X f(x)\,dx\right\|_E \leq \int_X \|f(x)\|_E\, dx$.*
2. *L'application $f \mapsto \int_X f(x)\,dx$ est linéaire.*
3. *Si L est une forme linéaire continue sur E (i.e. $L \in E'$) alors*

$$L\left(\int_X f(x)\,dx\right) = \int_X L(f(x))\,dx.$$

Pour plus de détails sur ce paragraphe voir [32].

Définition 1.7 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit les espaces*

$$\begin{aligned} L^p(0,T;E) &= \{f : [0,T] \mapsto E,\ \text{B-mesurable telle que la fonction } x \mapsto \|f(x)\|_E^p \\ &\qquad \text{est Lebesgue intégrable sur } (0,T)\}, \end{aligned}$$

si p est fini. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;E)} = \left(\int_0^T \|f(x)\|_E^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Si p est infini, alors on définit

$$\begin{aligned} L^\infty(0,T;E) &= \Big\{f : [0,T] \mapsto E,\ \text{B-mesurable telle que la fonction } x \mapsto \|f(x)\|_E \\ &\qquad \text{est mesurable et } \sup_{x\in[0,T]} ess\, \|f(x)\|_E \ \text{ est fini}\Big\}, \end{aligned}$$

ce dernier est munit de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;E)} = \sup_{x\in[0,T]} ess\, \|f(x)\|_E\,.$$

Théorème 1.3 *Les espaces $L^p(0,T;E)$, $p \in [1,\infty]$ munis des normes précédentes sont des espaces de Banach.*

1.4 Semi-groupes

1.4.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.8 *Soit E un espace de Banach complexe et $(G(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires sur E. Alors $(G(t))_{t\geq 0}$ constitue un semi-groupe sur E si*

1. $\forall t \geq 0$, $G(t) \in L(E)$, $G(0) = I_E$.
2. $\forall t, s \geq 0$, $G(t+s) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$.
   Si la deuxième condition est vérifiée pour t et s de signes quelconques, on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.9 *Le semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est dit fortement continu si et seulement si*

$$\forall x \in E, \ \lim_{t\to 0} G(t)x = x.$$

$(G(t))_{t\geq 0}$ est dit aussi un C_0 semi-groupe.

Exemple 1.1 *Si $A \in L(E)$ et $G(t) = e^{tA}; t \geq 0$, alors $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.*

Proposition 1.5 *Si $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe, alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \ \ \|G(t)\|_{L(E)} \leq M e^{\omega t}.$$

Le C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est dit aussi du type (M, ω).

Le C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément borné si $M \geq 1$ et $\omega = 0$, en particulier il est de contractions si $M = 1$ et $\omega = 0$.

1.4.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu

Définition 1.10 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire non borné $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \longrightarrow E$ défini par*

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \left\{ \varphi \in E : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{(G(t)\varphi - \varphi)}{t} \text{ existe dans } E \right\} \\ \\ \forall \varphi \in D(\Lambda), \ \Lambda\varphi = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{(G(t)\varphi - \varphi)}{t}. \end{cases}$$

Exemple 1.2 *Soit $E = BU([0, +\infty[)$, l'espace des fonctions uniformément continues et bornées de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $(G(t))_{t\geq 0}$ la famille d'opérateurs définie pour tout $f \in E, s, t \in \mathbb{R}_+$ par*

$$[G(t)f](s) = f(t+s).$$

Alors $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe de contractions et son générateur infinitésimal Λ est donné par

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \left\{ f \in E : \ f' \text{ existe, } f' \in E \right\} \\ \\ \forall f \in D(\Lambda), \ \Lambda f = f'. \end{cases}$$

Proposition 1.6 *Si Λ est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, alors*

1. *Λ est linéaire fermé.*
2. *$D(\Lambda)$ est dense dans E.*
3. *L'ensemble résolvant $\rho(\Lambda)$ contient le demi plan $P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ et*

$$\forall \lambda \in P_\omega,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n},$$

où M et ω désignent les constantes de la proposition 1.5.

Théorème 1.4 *(Hille-Yosida) Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \to E$ un opérateur linéaire fermé tel que $\overline{D(\Lambda)} = E$. Alors Λ est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ si et seulement s'il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\rho(\Lambda) \supset]\omega, +\infty[,$$

et

$$\forall \lambda \in]\omega, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|(A - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Proposition 1.7 *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe tel que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|G(t)\|_{L(E)} \leq M e^{\omega t} \quad \left(M \geq 1,\ \omega \in \mathbb{R}^+\right).$$

Alors Λ, le générateur infinitésimal de $(G(t)))_{t\geq 0}$, vérifie

1. *$\rho(\Lambda) \supset P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ et*

$$\forall \lambda \in P_\omega,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}.$$

2. *La résolvante de Λ est donnée par la transformation de Laplace*

$$\forall \lambda \in P_\omega, \quad (\lambda I - \Lambda)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x dt.$$

3. *Le semi-groupe $(G(t)))_{t\geq 0}$ peut se retrouver à partir de son générateur Λ par la formule*

$$G(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t\Lambda_\lambda} x,\ t \geq 0,\ x \in E,$$

où $\Lambda_\lambda \in L(E)$ est l'approximation de Yosida de Λ définie par

$$\Lambda_\lambda = -\lambda\Lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1},\ \lambda > \omega.$$

Propriétés des C_0 semi-groupes

Proposition 1.8 *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et Λ son générateur infinitésimal. Alors*

1. *Pour tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Si $x \in D(\Lambda)$ et $t \geq 0$ alors $G(t)x \in D(\Lambda)$, de plus, le graphe $t \mapsto G(t)x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie*
$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt}G(t)x = \Lambda G(t)x = G(t)\Lambda x.$$
3. *Pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$*
$$\int_0^t G(s)xds \in D(\Lambda) \text{ et } \Lambda \int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$
et si de plus $x \in D(\Lambda)$
$$\Lambda \int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)\Lambda xds = G(t)x - x.$$
4. *Si Λ est aussi générateur infinitésimal d'un autre C_0 semi-groupe $(H(t))_{t\geq 0}$, alors*
$$\forall t \geq 0, \quad G(t) = H(t).$$

Définition 1.11 *On dit qu'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est différentiable si pour tout x de E, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est différentiable de $]0, +\infty[$ dans E.*

1.4.3 Semi-groupe analytique

Définition 1.12 *Soit $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. On appelle semi-groupe analytique de type α, une application G définie sur l'ensemble*
$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \alpha\},$$
à valeurs dans $L(E)$ telle que

1. *$z \mapsto G(z)$ est analytique sur Σ.*
2. *$G(0) = I_E$ et $\forall x \in E$, $\lim\limits_{z\in\Sigma,\ z\to 0} G(z)x = x$.*
3. *$\forall z_1, z_2 \in \Sigma$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$.*

Générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique

Théorème 1.5 *(Kato) Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \to E$ un opérateur linéaire tel que*

1. *Λ est fermé.*
2. *$D(\Lambda)$ est dense dans E.*

3. $\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ *et*

$$\exists K > 0,\ \forall \lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0,\ \ \left\| (\Lambda - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{K}{|\lambda|}.$$

Alors Λ *est générateur d'un semi-groupe analytique* G *vérifiant*

1. $\exists M > 0, \forall t > 0, \|G(t)\|_{L(E)} \leq M.$
2. $\forall t > 0,\ G(t) \in L\left(E, D\left(\Lambda\right)\right)$ *et*

$$\|\Lambda G(t)\|_{L(E)} \leq \frac{M}{t}.$$

Exemple 1.3 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé à domaine* $D(A)$ *non nécessairement dense dans l'espace de Banach* E*. On suppose que* $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ *et que pour tout* $\lambda > 0$,

$$\exists C > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ *telle que* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ *et* $x \in D(A)$*, on définit l'opérateur* J^α *par*

$$J^\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (A - \lambda I)^{-1} \left(-A\right) x d\lambda.$$

L'opérateur J^α *est fermable et* $\overline{J^\alpha} = (-A)^\alpha$ *. De plus,*

$$\exists C > 0 : \left\| ((-A)^\alpha - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{\lambda},$$

(voir [21]).
En particulier, pour tout $0 < \alpha \leq 1/2$, $-\left(-A\right)^\alpha$ *génère un semi-groupe analytique non fortement continu en zéro [6].*

Pour plus de détails sur les semi-groupes voir ([31], [38]).

1.5 Espaces d'interpolation

Soient $(E_0, \|.\|_0)$ et $(E_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé $\mathcal{F}$.

On munit les espaces de Banach $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ des normes suivantes :

$$\begin{cases} \|x\|_{E_0 \cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1} \ \text{ pour } x \in E_0 \cap E_1 \\ \|x\|_{E_0 + E_1} = \inf\limits_{x_i \in E_i,\ x_0 + x_1 = x} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} \right) \ \text{ pour } x \in E_0 + E_1. \end{cases}$$

Définition 1.13 *Soient* $p \in [1, \infty]$ *et* $\theta \in]0,1[$. *On appelle espace d'interpolation ou espace intermédiaire entre* E_0 *et* E_1 *noté* $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ *, l'ensemble des vecteurs* $x \in E_0 + E_1$ *tels que*

$$\begin{cases} \forall t > 0, \quad \exists u_0(t) \in E_0, \quad \exists u_1(t) \in E_1 : x = u_0(t) + u_1(t), \\ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1), \end{cases}$$

où $L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0)$ *est l'espace des fonctions fortement mesurables* $u : \mathbb{R}_+ \to E_0$ *telles que*

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,E_0)} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|u(t)\|^p_{E_0} \dfrac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty \quad si \quad p \in [1, +\infty[\,, \\ \|u\|_{L^\infty_*(\mathbb{R}_+,E_0)} = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} ess \, \|u(t)\|_{E_0} < \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.9 $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ *est un espace de Banach en le munissant de la norme*

$$\|x\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{u_i:\mathbb{R}_+ \longrightarrow E_i, \ i=0,1 \\ \forall t>0, \ u_0(t)+u_1(t)=x}} \left(\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,E_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,E_1)} \right),$$

et vérifiant

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta,p} \subset E_0 + E_1,$$

avec injections continues.

On cite aussi d'autres définitions équivalentes de ces espaces :

$$1) \quad x \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists u_0(y) \in E_0, \quad \exists u_1(y) \in E_1 : x = u_0(y) + u_1(y), \\ e^{-\theta y} u_0 \in L^p(\mathbb{R}, E_0), \quad e^{(1-\theta)y} u_1 \in L^p(\mathbb{R}, E_1). \end{cases}$$

$$2) \quad x \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t > 0, \quad \exists u(t) \in E_0 \cap E_1 : x = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \dfrac{dt}{t}, \\ t^{-\theta} u \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0), \quad t^{1-\theta} u \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1). \end{cases}$$

$$3) \quad x \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists u(y) \in E_0 \cap E_1 : x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y) \, dy, \\ e^{-\theta y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_0), \quad e^{(1-\theta)y} u \in L^p(\mathbb{R}, E_1). \end{cases}$$

Exemple 1.4 *Soit* $A : D(A) \subset E \to E$, *un opérateur linéaire fermé. Il est connu que* $D(A)$ *est un espace de Banach muni de la norme du graphe*

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_E \,, \quad pour \ tout \ x \in D(A).$$

Si on prend $E_0 = D(A)$ et $E_1 = E$, on note

$$D_A(\theta, p) = (D(A), E)_{1-\theta,p},$$

pour $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$.

Certains espaces d'interpolation ont une caractérisation explicite, on cite par exemple les cas suivants :

1. Si $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ (l'ensemble résolvant de A) et il existe une constante $C > 0$ telle que

   $$\forall \lambda > 0, \ \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{\lambda},$$

   alors l'espace $D_A(\theta, p)$ est donné par

   $$D_A(\theta, p) = \left\{ u \in E : t^{\theta} A (A - tI)^{-1} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E) \right\},$$

   (voir [14], [20]).
   Dans ce cas et grâce à la propriété de réitération de Lions-Peetre [27], on a pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}^*$

   $$D_A(m\theta, p) = D_{A^m}(\theta, p).$$

2. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans E, alors

   $$D_A(\theta, p) = \left\{ u \in E : t^{-\theta} \left(e^{tA} - I \right) u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E) \right\},$$

   (voir [27]).

3. Si A génère un semi-groupe analytique et borné dans E, alors

   $$D_A(\theta, p) = \left\{ u \in E : t^{1-\theta} A e^{tA} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E) \right\},$$

   (voir [12]).

Ces espaces vérifient la propriété d'inclusion

$$D_A(\theta', q) \subset D_A(\theta, p),$$

pour $\theta' > \theta$ et $p, q \in [1, +\infty]$ quelconques ou pour $\theta = \theta'$ et $q \leq p$.

1.6 Espaces de Hölder et petits espaces de Hölder

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe, $\alpha \in]0, 1[$ un nombre fixé et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.14 *On désigne par*
– $B(\Omega; E)$, l'espace des fonctions bornées de Ω dans E, muni de la norme

$$\|f\|_{B(\Omega;E)} = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E.$$

– *$C(\Omega; E)$ l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme*

$$\|f\|_{C(\Omega;E)} = \|f\|_{B(\Omega;E)}\,.$$

– *$C^k(\Omega; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues et bornées, muni de la norme*

$$\|f\|_{C^k(\Omega;E)} = \sum_{i=0}^{k} \left\|f^{(i)}\right\|_{B(\Omega;E)}\,.$$

– *$C^\infty(\Omega; E)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.*

Définition 1.15 *Les espaces de Hölder $C^\alpha(\Omega; E)$ et $C^{k+\alpha}(\Omega; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont définis par*

$$C^\alpha(\Omega; E) = \left\{ f \in B(\Omega; E) : \sup_{x,y\in\Omega;\ x\neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{\|x - y\|_2^\alpha} = [f]_{C^\alpha(\Omega;E)} < \infty \right\},$$

munis de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega;E)} = \|f\|_{B(\Omega;E)} + [f]_{C^\alpha(\Omega;E)}\,,$$

et

$$C^{k,\alpha}(\Omega; E) = \left\{ f \in C^k(\Omega; E) : f^{(k)} \in C^\alpha(\Omega; E) \right\},$$

munis de la norme

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega;E)} = \|f\|_{C^k(\Omega;E)} + \left[f^{(k)}\right]_{C^\alpha(\Omega;E)}\,.$$

Définition 1.16 *Les petits espaces de Hölder $h^\alpha(\Omega; E)$ sont définis par*

$$h^\alpha(\Omega; E) = \left\{ f \in C^\alpha(\Omega; E) : \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{x,y\in\Omega;\\ 0<\|x-y\|_2<\varepsilon}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{\|x - y\|_2^\alpha} = 0 \right\},$$

munis de la norme induite par celle de $C^\alpha(\Omega; E)$.

Proposition 1.10 *Soient $\Omega = I$, un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \,]0, 1[$ et $\theta > \alpha$. Alors $h^\alpha(\Omega; E)$ est la fermeture de $C^\theta(\Omega; E)$ dans $C^\alpha(\Omega; E)$.*

(Voir [28], [39])

1.7 Espaces de Sobolev et espaces de Besov

1.7.1 Espaces de Sobolev

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ un point générique.

On note

$$\begin{cases} |\beta| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i, \\ D^\beta = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2} \cdots\cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}. \end{cases}$$

Les espaces de Sobolev notés $W^{k,p}(\Omega; E)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$ sont définis par

$$W^{k,p}(\Omega; E) = \left\{ f \in L^p(\Omega; E) : D^\beta f \in L^p(\Omega; E), \forall \beta \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\beta| \leq k \right\},$$

(ici les dérivées sont au sens de distributions). Ces espaces sont des Banach munis de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{k,p}(\Omega;E)} &= \left(\sum_{|\beta|\leq k} \left\| D^\beta f \right\|^p_{L^p(\Omega;E)} \right)^{1/p}, \quad \text{si} \quad p \in [1, +\infty[\\ \|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega;E)} &= \max_{|\beta|\leq k} \left\| D^\beta f \right\|_{L^\infty(\Omega;E)}. \end{aligned}$$

Les espaces fractionnaires de Sobolev $W^{s,p}(\Omega; E)$ où $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ sont définis par

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{\|f(x+h) - f(x)\|_E^p}{\|h\|_2^{sp+n}} dx dh < \infty \right\}.$$

1.7.2 Espaces de Besov

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $s \in]0, 1[$ et $p, q \in [1, +\infty]$. On définit l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\Omega; E)$ par

$$B^s_{p,q}(\Omega; E) = \left\{ f \in L^p(\Omega; E) : \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{\|f(x+h) - f(x)\|_E^p}{\|h\|_2^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dh < \infty \right\},$$

avec la modification usuelle quand $p = +\infty$ ou $q = +\infty$.

Pour $q = +\infty$, l'espace $B^s_{p,+\infty}$ est dit de Nikolski.

Remarque 1.1 *Pour $p \in]1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 1[$ avec $k(1-\theta) < 1$, on a*

$$B^{k(1-\theta)}_{p,q}(\Omega) = \left(W^{k,p}(\Omega), L^p(\Omega) \right)_{\theta,q}.$$

Pour plus de détails sur les propriétés de ces espaces voir, par exemple, [20].

Chapitre 2

Lemmes techniques

On donne dans ce chapitre quelques lemmes très utiles pour la suite de cette étude.
Soit Π_{θ_0,r_0} le secteur défini par

$$\Pi_{\theta_0,r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_0\}\,;$$

avec $\theta_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $r_0 > 0$ et γ son bord orienté de $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$.
On pose

$$\Sigma_{\theta_0} = (\mathbb{C} \diagdown \Pi_{\theta_0,r_0}) \cup \gamma,$$

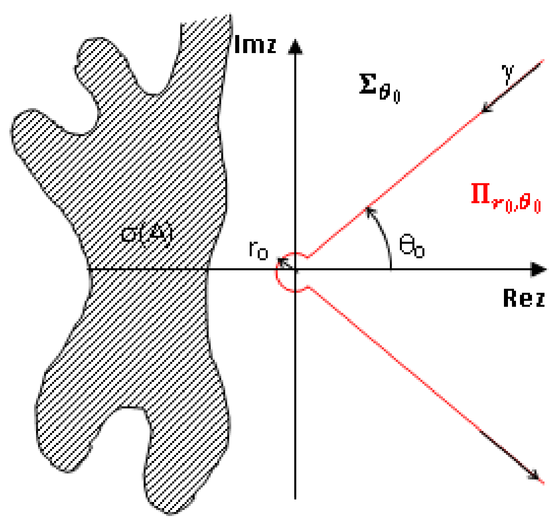

Figure 1

et pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$,

$$\begin{cases} \Delta_z^-(x,\delta) = \cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\delta - p\sinh\sqrt{-z}x\sinh\sqrt{-z}\delta \\ \text{pour } x \in [-1,0]\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_z^+(x,\delta) = \sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z} + p\cosh\sqrt{-z}x\sinh\sqrt{-z} \\ \text{pour } x \in [0,\delta], \end{cases}$$

où p est un nombre positif fixé,

$$H_{z,+}^{\delta}(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} \begin{cases} \Delta_z^+(\tau,\delta)\cosh\sqrt{-z}(\delta-x) & \text{si } 0 \leq \tau \leq x \\ \Delta_z^+(x,\delta)\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau) & \text{si } x \leq \tau \leq \delta, \end{cases}$$

$$K_{z,-}^{\delta}(x,\tau) = \frac{-1}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} \begin{cases} \Delta_z^-(x,\delta)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1) & \text{si } -1 \leq \tau \leq x \\ \Delta_z^-(\tau,\delta)\sinh\sqrt{-z}(x+1) & \text{si } x \leq \tau \leq 0. \end{cases}$$

Ici $\sqrt{-z}$ est la détermination principale de la racine carrée définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et vérifiant

$$\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0.$$

Remarque 2.1 *Pour $z \in \gamma$, $|z| > r_0$, $\delta > 0$ et $x \in \,]-1,0[\,\cup\,]0,\delta[$, on a*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\sqrt{-z}\delta) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(\sqrt{-z}\,|x|) > 0, \\ \left|\arg(\sqrt{-z}\delta)\right| = \left|\arg(\sqrt{-z}x)\right| = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) > 0, \\ \operatorname{Re}(\sqrt{-z}\delta) = \delta\,|z|^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) = \delta\,|z|^{1/2}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right). \end{cases}$$

Alors on a les lemmes suivants :

Lemme 2.1 *Soient $w, z \in \mathbb{C}^*$. Alors on a*

$$|w+z| \geq (|w|+|z|)\left|\cos\frac{\arg w - \arg z}{2}\right|.$$

Preuve. On pose $\alpha = \arg w$ et $\beta = \arg z$. On a

$$\begin{aligned} |w+z|^2 &= \left||w|\,e^{i\alpha} + |z|\,e^{i\beta}\right|^2 \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2\,|w|\,|z|\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2\,|w|\,|z|\cos(\alpha-\beta) \\ &= \left(|w|^2 + |z|^2\right)\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) \\ &\quad +2\,|w|\,|z|\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) \\ &= \left(|w|^2 + |z|^2 + 2\,|w|\,|z|\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &\quad + \left(|w|^2 + |z|^2 - 2\,|w|\,|z|\right)\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &= (|w|+|z|)^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + (|w|-|z|)^2\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &\geq (|w|+|z|)^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$|w+z| \geq (|w|+|z|)\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|,$$

d'où le résultat. ■

Lemme 2.2 *Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|\arg z| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors on a*

$$\left|\arg(1-e^{-z}) - \arg(1+e^{-z})\right| \leq \theta.$$

Preuve. Si z est un nombre complexe non nul et tel que $|\arg z| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, alors

$$\left|e^{-z}\right| = e^{-\operatorname{Re} z} < 1,$$

et

$$\left|e^{-z}\right|^2 = \left(\operatorname{Re}\left(e^{-z}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\left(e^{-z}\right)\right)^2 < 1,$$

donc $|\operatorname{Re}(e^{-z})| < 1$.

Ainsi

$$\operatorname{Re}(1-e^{-z}) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(1+e^{-z}) > 0,$$

et par conséquent

$$\arg(1-e^{-z}) - \arg(1+e^{-z}) = \arg\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}} &= \frac{(1-e^{-z})(1+e^{-\bar{z}})}{(1+e^{-z})(1+e^{-\bar{z}})} \\
&= \frac{1-e^{-z}+e^{-\bar{z}}-e^{-z-\bar{z}}}{|1+e^{-z}|^2} \\
&= \frac{1+2ie^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)-e^{-2\operatorname{Re} z}}{|1+e^{-z}|^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\arg\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right) = \arctan\frac{2e^{-\operatorname{Re} z}\sin(\operatorname{Im} z)}{1-e^{-2\operatorname{Re} z}} = \arctan\frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\sin x \leq x \text{ et } \sinh x \geq x,$$

donc

$$\left|\frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)}\right| = \frac{|\sin(\operatorname{Im} z)|}{\sinh(\operatorname{Re} z)} \leq \frac{|\operatorname{Im} z|}{\operatorname{Re} z} \leq \tan\theta,$$

d'où

$$\left|\arg(1-e^{-z}) - \arg(1+e^{-z})\right| = \left|\arctan\frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)}\right| \leq \theta.$$

■

Lemme 2.3 *Il existe une constante $C_{\theta_0} > 0$ telle que pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$ et $\delta > 0$, on a*

$$\left|1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0}.$$

Preuve. Si $z \in \gamma$ avec $|z| = r_0$ et r_0 est assez petit, alors

$$\left|1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq 1 - e^{-2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}} = 1 - e^{-2\delta r_0^{1/2}\cos(\arg\sqrt{-z})} \geq 1 - e^{-2\delta r_0^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)},$$

car $\arg\sqrt{-z} \in \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right]$.

Si $z \in \gamma$ avec $|z| > r_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right|^2 &= \left|1 + e^{-2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z} - i2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}}\right|^2 \\
&= \left|e^{-2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}}\left(e^{2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}} + e^{-i2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}}\right)\right|^2 \\
&= e^{-4\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}}\left[\left(e^{2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}} + \cos\left(2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right)\right)^2\right] \\
&= e^{-4\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}}\left(e^{4\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}} + 2e^{2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}}\cos\left(2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right) + 1\right) \\
&= \left(1 + e^{-4\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right) + 2e^{-2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}}\cos\left(2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right).
\end{aligned}$$

Si $2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z} \geq \pi/\left(2\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)\right)$, alors

$$\left|2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right| = 2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \geq \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\cos\left(2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right) \leq 0,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\left|1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right|^2 &\geq 1 + e^{-4\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}} - 2e^{-2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}} = \left(1 - e^{-2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right)^2 \\
&\geq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Si $2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z} \leq \pi/\left(2\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)\right)$, alors

$$\left|2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right| = 2\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2},$$

et

$$\cos\left(2\delta \operatorname{Im}\sqrt{-z}\right) \geq 0.$$

Dans ce cas

$$\left|1+e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq 1.$$

De ce qui précède on déduit que

$$\left|1+e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0},$$

où

$$C_{\theta_0} = \min\left(1-e^{-\frac{\pi}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}}, 1-e^{-2\delta r_0^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}\right) > 0.$$

On procède de la même manière pour les points intérieurs $z \in \Sigma_{\theta_0}$ avec $\arg(z) = \theta \in]\theta_0, 2\pi - \theta_0[$. ■

Lemme 2.4 *Il existe une constante $C'_{\theta_0} > 0$ telle que pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$ et $\delta > 0$, on a*

$$\left|1-e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq C'_{\theta_0}.$$

Preuve. Si $z \in \gamma$ avec $|z| = r_0$, alors

$$\left|1-e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq 1-e^{-2\delta\operatorname{Re}\sqrt{-z}} = 1-e^{-2\delta r_0^{1/2}\cos(\arg\sqrt{-z})} \geq 1-e^{-2\delta r_0^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)},$$

car $\arg\sqrt{-z} \in \left[-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right]$.

Soit $z \in \gamma$ avec $|z| > r_0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$e^x \geq 1+x,$$

donc

$$e^{-x} \leq 1/(1+x) \quad \text{et} \quad 1-e^{-x} \geq \frac{x}{1+x}.$$

Ainsi

$$\left|1-e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq 1-e^{-2\delta\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \geq \frac{2\delta\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{1+2\delta\operatorname{Re}\sqrt{-z}},$$

or

$$\begin{aligned} |z|^{1/2} &= \sqrt{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\sqrt{-z}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2} \\ &= \frac{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}, \end{aligned}$$

donc

$$\left|1-e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq \frac{2\delta\,|z|^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}{1+2\delta\,|z|^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)},$$

d'où

$$\left|1-e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq C'_{\theta_0},$$

où

$$C'_{\theta_0} = \min\left(1-e^{-2\delta r_0^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}, \frac{2\delta\left|z\right|^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}{1+2\delta\left|z\right|^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}\right) > 0.$$

Par la même méthode on montre que cette minoration est aussi vérifiée pour les points intérieurs $z \in \Sigma_{\theta_0}$ avec $\arg(z) = \theta \in]\theta_0, 2\pi - \theta_0[$. ■

Lemme 2.5 *Pour tout $\delta > 0$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$ on a*

$$\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right| \geq \frac{(C_{\theta_0})^2}{4}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}.$$

Preuve. Soient $\delta > 0$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$. On a

$$\Delta_z^-(-1,\delta) = \frac{e^{\sqrt{-z}(\delta+1)}}{4}\left[\left(1+e^{-2\sqrt{-z}}\right)\left(1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)+p\left(1-e^{-2\sqrt{-z}}\right)\left(1-e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)\right].$$

En utilisant le lemme 2.1, on a

$$\begin{aligned}
& 4\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right| \\
\geq\ & e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}\left|\left(1+e^{-2\sqrt{-z}}\right)\right|\left|\left(1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)\right|+p\left|\left(1-e^{-2\sqrt{-z}}\right)\right|\left|\left(1-e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)\right| \\
& \times\left|\cos\frac{\arg\left(1+e^{-2\sqrt{-z}}\right)+\arg\left(1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)-\arg\left(1-e^{-2\sqrt{-z}}\right)-\arg\left(1-e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)}{2}\right|,
\end{aligned}$$

d'autre part, par le lemme 2.2

$$\begin{aligned}
& \left|\arg\left(1+e^{-2\sqrt{-z}}\right)+\arg\left(1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)-\arg\left(1-e^{-2\sqrt{-z}}\right)-\arg\left(1-e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)\right| \\
\leq\ & \left|\arg\left(1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)-\arg\left(1-e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)\right|+\left|\arg\left(1+e^{-2\sqrt{-z}}\right)-\arg(1-e^{-2\sqrt{-z}})\right| \\
\leq\ & 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right),
\end{aligned}$$

par conséquent et en utilisant le lemme 2.3

$$\begin{aligned}
& 4\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right| \\
\geq\ & e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}\left(\left|1+e^{-2\sqrt{-z}}\right|\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|+p\left|1-e^{-2\sqrt{-z}}\right|\left|1-e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right) \\
\geq\ & e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}}\right|\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\
\geq\ & (C_{\theta_0})^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2 *$\Delta_z^-(-1,\delta)$ vérifie aussi la minoration*

$$\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right| \geq \frac{p\left(C'_{\theta_0}\right)^2}{4}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)} > 0. \tag{2.1}$$

Lemme 2.6 *Pour chaque $z \in \gamma$ et $h_+^\delta \in C([0,\delta];E)$, il existe une constante $K = K(\theta_0)$ telle que*

$$\sup_{x\in[0,\delta]}\left\|\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)h_+^\delta(\tau)\,d\tau\ \right\|_E \leq \frac{K}{|z|}\left\|h_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}.$$

Preuve. On a

$$\left\|\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)h_+^\delta(\tau)\,d\tau\right\|_E \leq \left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_0^\delta\left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right|d\tau\right)\left\|h_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)},$$

avec

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta\left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right|d\tau \\
= \ &\int_0^x\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\Delta_z^+(\tau,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\right|d\tau + \int_x^\delta\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\right|d\tau \\
\leq \ &\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|}\int_0^x\left|\Delta_z^+(\tau,\delta)\right|d\tau \\
&+\frac{\left|\Delta_z^+(x,\delta)\right|}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|}\int_x^\delta\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

ensuite en utilisant le lemme 2.5 et la majoration

$$\left|\Delta_z^+(x,\delta)\right| \leq (1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)},$$

on trouve que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta\left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right|d\tau \\
\leq \ &\frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\int_0^x e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)}d\tau \\
&+\frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\int_x^\delta e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)}d\tau \\
\leq \ &\frac{K}{|z|^{1/2}}\int_0^x e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau-x)}d\tau + \frac{K}{|z|^{1/2}}\int_x^\delta e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}d\tau \\
\leq \ &K\frac{1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2}\operatorname{Re}\sqrt{-z}} + K\frac{1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \\
\leq \ &K\frac{1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} + K\frac{1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \\
\leq \ &\frac{K}{|z|}\left(1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\right) + \frac{K}{|z|}\left(1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}\right) \leq \frac{K}{|z|}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.7 *Pour chaque $z \in \gamma$ et $h_- \in C([-1,0]; E)$, il existe une constante $K = K(\theta_0)$ telle que*

$$\sup_{x\in[-1,0]} \left\| \int_{-1}^{0} K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)\ h_-(\tau)\, d\tau \right\|_E \leq \frac{K}{|z|} \|h_-\|_{C([-1,0];E)}.$$

Preuve. On a

$$\left\| \int_{-1}^{0} K_{z,-}^{\delta}(x,\tau) h_-(\tau) d\tau \right\|_E \leq \left(\sup_{x\in[-1,0]} \int_{-1}^{0} \left| K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)\right| d\tau \right) \|h_-\|_{C([-1,0];E)}.$$

De plus

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{0} \left| K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)\right| d\tau \\
= \ & \int_{-1}^{x} \left| \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau+1)\Delta_z^-(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} \right| d\tau + \int_{x}^{0} \left| \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)\Delta_z^-(\tau,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} \right| d\tau \\
\leq \ & \frac{|\Delta_z^-(x,\delta)|}{|z|^{1/2}|\Delta_z^-(-1,\delta)|} \int_{-1}^{x} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1) d\tau \\
& + \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{1/2}|\Delta_z^-(-1,\delta)|} \int_{x}^{0} \left|\Delta_z^-(\tau,\delta)\right| d\tau
\end{aligned}$$

et puisque

$$\left|\Delta_z^-(x,\delta)\right| \leq (1+p) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)},$$

on aura

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{0} \left| K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)\right| d\tau \\
\leq \ & \frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \int_{-1}^{x} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)} d\tau \\
& + \frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \int_{x}^{0} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)} d\tau \\
\leq \ & \frac{K}{|z|^{1/2}} \int_{-1}^{x} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau-x)} d\tau + \frac{K}{|z|^{1/2}} \int_{x}^{0} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)} d\tau \\
\leq \ & \frac{K}{|z|}\left(1 - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}\right) + \frac{K}{|z|}\left(1 - e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\right) \leq \frac{K}{|z|}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.8 *Pour tout $z \in \gamma$ et $\alpha > 0$, on a*

$$\sup_{x\in[0,\delta]} \int_{0}^{\delta} \left| H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)\right| |x-\tau|^{\alpha} d\tau \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha/2}}.$$

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\delta \left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right| |x-\tau|^\alpha \, d\tau \\
= \;& \frac{\left|\cosh \sqrt{-z}\,(\delta - x)\right|}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|} \int_0^x \left|\Delta_z^+(\tau,\delta)\right| (x-\tau)^\alpha \, d\tau \\
& + \frac{\left|\Delta_z^+(x,\delta)\right|}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|} \int_x^\delta \left|\cosh \sqrt{-z}\,(\delta-\tau)\right| (\tau - x)^\alpha \, d\tau \\
\leq \;& \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|} \int_0^x \left|\Delta_z^+(\tau,\delta)\right| (x-\tau)^\alpha \, d\tau \\
& + \frac{\left|\Delta_z^+(x,\delta)\right|}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|} \int_x^\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\delta-\tau)\, (\tau - x)^\alpha \, d\tau \\
\leq \;& K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \int_0^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau\, (x-\tau)^\alpha \, d\tau \\
& + K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \int_x^\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\delta-\tau)\,(\tau-x)^\alpha \, d\tau.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on a

$$
\begin{aligned}
& \int_0^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau\,(x-\tau)^\alpha \, d\tau \\
\leq \;& \left(\int_0^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau d\tau\right)^{1-\alpha} \left(\int_0^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau\,(x-\tau)\, d\tau\right)^\alpha \\
\leq \;& \left[\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right]^{1-\alpha} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x - 1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2}\right]^\alpha \\
\leq \;& \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{1+\alpha}} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x - 1}{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\right]^\alpha \\
\leq \;& K\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{|z|^{(\alpha+1)/2}},
\end{aligned}
$$

car pour $\operatorname{Re}\sqrt{-z}x \geq 0$

$$
\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x - 1}{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \leq 1.
$$

De même

$$
\begin{aligned}
& \int_x^\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)(\tau-x)^\alpha d\tau \\
\leq \;& \left(\int_x^\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\delta-\tau)\, d\tau\right)^{1-\alpha} \left(\int_x^\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\delta-\tau)\,(\tau-x)\, d\tau\right)^\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right]^{1-\alpha}\left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)-1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{2}}\right]^{\alpha}\\
&\leq \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{1+\alpha}}\left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)-1}{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}\right]^{\alpha}\\
&\leq K\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{(\alpha+1)/2}},
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta \left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right| |x-\tau|^\alpha\, d\tau\\
\leq\ & K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\\
&+K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\\
\leq\ & K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\\
\leq\ & K\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha/2}}.
\end{aligned}
$$

■

Lemme 2.9 *Pour tout $z \in \gamma$ et $\alpha > 0$, on a*

$$
\sup_{x\in[-1,0]}\int_{-1}^0 \left|K_{z,-}^\delta(x,\tau)\right| |x-\tau|^\alpha\, d\tau \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha/2}}.
$$

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^0 \left|K_{z,-}^\delta(x,\tau)\right| |x-\tau|^\alpha\, d\tau\\
=\ & \frac{\left|\Delta_z^-(x,\delta)\right|}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|}\int_{-1}^x \left|\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)\right|(x-\tau)^\alpha\, d\tau\\
&+\frac{\left|\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)\right|}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|}\int_x^0 \left|\Delta_z^-(\tau,\delta)\right|(\tau-x)^\alpha\, d\tau\\
\leq\ & \frac{\left|\Delta_z^-(x,\delta)\right|}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|}\int_{-1}^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\tau+1)\,(x-\tau)^\alpha\, d\tau\\
&+\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(x+1)}{|z|^{1/2}\left|\Delta_z^-(-1,\delta)\right|}\int_x^0 \left|\Delta_z^-(\tau,\delta)\right|(\tau-x)^\alpha\, d\tau\\
\leq\ & K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{|z|^{1/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\int_{-1}^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\tau+1)\,(x-\tau)^\alpha\, d\tau\\
&+K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}{|z|^{1/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\int_x^0 \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau\,(\tau-x)^\alpha\, d\tau.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{x} \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)(x-\tau)^{\alpha} d\tau \\
\leq\ & \left(\int_{-1}^{x} \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\tau+1)\, d\tau\right)^{1-\alpha} \left(\int_{-1}^{x} \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\tau+1)\,(x-\tau)\, d\tau\right)^{\alpha} \\
\leq\ & \left[\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right]^{1-\alpha} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)-1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{2}}\right]^{\alpha} \\
\leq\ & \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{1+\alpha}} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)-1}{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}\right]^{\alpha} \\
\leq\ & K\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{(1+\alpha)/2}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{x}^{0} \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau\,(\tau-x)^{\alpha}\, d\tau \\
\leq\ & \left(\int_{x}^{0} \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau d\tau\right)^{1-\alpha} \left(\int_{x}^{0} \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau\,(\tau-x)\, d\tau\right)^{\alpha} \\
\leq\ & \left[-\frac{\sinh \operatorname{Re}\left(\sqrt{-z}\right)x}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right]^{1-\alpha} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x-1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{2}}\right]^{\alpha} \\
\leq\ & \frac{\sinh \operatorname{Re}\left(-\sqrt{-z}\right)x}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{1+\alpha}} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re}\left(-\sqrt{-z}x\right)-1}{\sinh \operatorname{Re}\left(-\sqrt{-z}x\right)}\right]^{\alpha} \\
\leq\ & K\frac{\sinh \operatorname{Re}\left(-\sqrt{-z}x\right)}{|z|^{(1+\alpha)/2}},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} \left|K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)\right| |x-\tau|^{\alpha_i}\, d\tau \\
\leq\ & K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x \sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
& -K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1) \sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}x}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
\leq\ & K\frac{(p+1)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta \sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
\leq\ & K\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha/2}}.
\end{aligned}$$

■

On aura aussi besoin des lemmes suivants ([24], lemmes 6.1 et 6.2, p. 564).

Lemme 2.10 *Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $z \in \gamma$ et $r > 0$, on a*

$$|z + r| \geq K\left(|z| \vee r\right), \quad |z - r| \geq K\left(|z| \vee r\right).$$

Lemme 2.11 *Il existe une constante $K > 0$ dépendant uniquement de γ telle que*

$$\forall \lambda > 0,\ \forall \nu \in \left]0, 1\right[, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{|z \pm \lambda|\, |z|^\nu} \leq \frac{K}{\lambda^\nu}.$$

(Pour la preuve des deux lemmes précédents voir [7]).

Lemme 2.12 *Il existe une constante $K > 0$ dépendant uniquement de γ telle que*

$$\forall \lambda, \alpha, \mu > 0 \text{ avec } \frac{\alpha}{2} + \mu - 1 > 0, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{|z + \lambda|^\mu\, |z|^{\alpha/2}} \leq \frac{K}{\lambda^{\alpha/2+\mu-1}}.$$

Preuve. On pose

$$\gamma_+^\lambda = \left\{z \in \gamma : \ |z| \geq \lambda\right\}, \quad \gamma_-^\lambda = \left\{z \in \gamma : |z| \leq \lambda\right\},$$

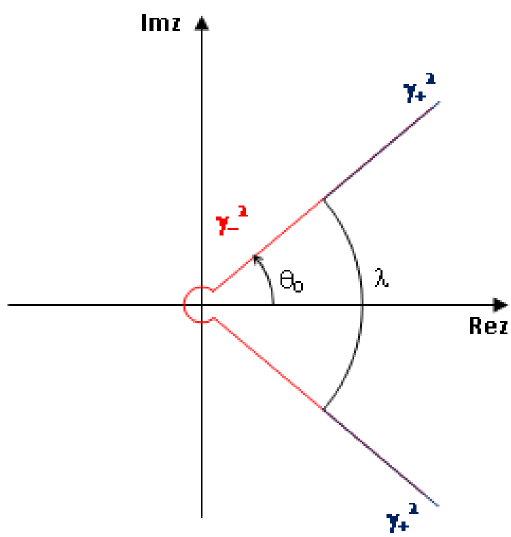

Figure 2

donc

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z + \lambda|^\mu\, |z|^{\alpha/2}} = \int_{\gamma_+^\lambda} \frac{|dz|}{|z + \lambda|^\mu\, |z|^{\alpha/2}} + \int_{\gamma_-^\lambda} \frac{|dz|}{|z + \lambda|^\mu\, |z|^{\alpha/2}}.$$

D'aprés le lemme 2.10

$$\int_{\gamma_+^\lambda} \frac{|dz|}{|z + \lambda|^\mu\, |z|^{\alpha/2}} \leq K \int_\lambda^{+\infty} \frac{d\,|z|}{|z|^{\alpha/2+\mu}} \leq K \int_\lambda^{+\infty} \frac{ds}{s^{\alpha/2+\mu}} \leq \frac{K}{\lambda^{\alpha/2+\mu-1}}.$$

Pour la deuxième intégrale, on a

$$\int_{\gamma_-^\lambda} \frac{|dz|}{|z|^{\alpha/2}\,|z+\lambda|^{\mu}} \leq \frac{K}{\lambda^{\mu}} \int_{\gamma_-^\lambda} \frac{|dz|}{|z|^{\alpha/2}}.$$

En posant $z = \lambda z'$, on aura

$$\int_{\gamma_-^\lambda} \frac{|dz|}{|z|^{\alpha/2}} \leq \frac{1}{\lambda^{\alpha/2-1}} \int_{\lambda z' \in \gamma,\ |z'| \leq 1} \frac{|dz'|}{|z'|^{\alpha/2}},$$

ainsi

$$\int_{\gamma_-^\lambda} \frac{|dz|}{|z|^{\alpha/2}\,|z+\lambda|^{\mu}} \leq \frac{K}{\lambda^{\alpha/2+\mu-1}} \left(2 \int\limits_{r_0/\lambda}^{1} \frac{ds}{s^{\alpha/2}} + \int\limits_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} \frac{\frac{r_0}{\lambda}}{\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{\alpha/2}} d\theta \right) \leq \frac{K}{\lambda^{\alpha/2+\mu-1}},$$

d'où le résultat. ■

Chapitre 3

Construction de la solution stricte

On considère le problème aux limites et de transmission

$$(P_\delta)\begin{cases}(u^\delta)''(x)+\mathbf{A}(x)\,u^\delta(x)-\lambda u^\delta(x)=g^\delta(x) \quad \text{sur} \quad]-1,0[\,\cup\,]0,\delta[\,,\\ u^\delta(-1)=f_-, \quad (u^\delta)'(\delta)=f_+^\delta,\\ u^\delta(0^-)=u^\delta(0^+)\,, \quad p_-(u^\delta)'(0^-)=p_+(u^\delta)'(0^+)\,,\end{cases}$$

où $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(\mathbf{A}(x))$ non nécessairement denses dans un espace de Banach complexe E. δ un paramètre dans $]0,1]$ destiné à tendre vers 0, $\lambda>0$ et $\left(f_-,f_+^\delta\right)$ sont des constantes données dans E. p_+,p_- sont les coefficients de conductivité positifs non nuls et qui peuvent dépendre de δ. Le second membre $g^\delta\in C\left([-1,0[\,\cup\,]0,\delta]\,;E\right)$ est tel que

$$\begin{cases} g^\delta|_{[-1,0]}=g_-\in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\,;E\right)\\ g^\delta|_{[0,\delta]}=g_+^\delta\in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,;E\right),\end{cases}$$

avec $0<2\alpha_0<1$.

Remarque 3.1 *La fonction g^δ est höldérienne sur tout l'intervalle $[-1,\delta]$ si et seulement si $g_-(0)=g_+^\delta(0)$.*

En effet, pour $-1\le x<0<x'\le\delta$, on a

$$\begin{aligned}\left\|g^\delta(x)-g^\delta(x')\right\|_E &= \left\|g^\delta(x)-g_-(0)+g_+^\delta(0)-g^\delta(x')\right\|_E\\ &\le \left\|g_-(x)-g_-(0)\right\|_E+\left\|g_+^\delta(0)-g_+^\delta(x')\right\|_E\\ &\le C\left[(-x)^{2\alpha_0}+(x')^{2\alpha_0}\right]\\ &\le C(x'-x)^{2\alpha_0}.\end{aligned}$$

On suppose que la famille d'opérateurs $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ vérifie les deux hypothèses fondamentales suivantes :

- $\exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0 : \forall x \in [-1, \delta], \forall z \geq \lambda_0$, $(\mathbf{A}(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et
$$\left\| (\mathbf{A}(x) - zI)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{z} \tag{H.1}$$
- $\exists m \in \mathbb{N}^*, C, \alpha_i, \mu_i > 0,\ i = 1, ..., m : \forall x, \tau \in [-1, \delta], \forall z \geq \lambda_0$
$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{A}(x) - \lambda_0 I)(\mathbf{A}(x) - zI)^{-1} \left[(\mathbf{A}(x) - \lambda_0 I)^{-1} - (\mathbf{A}(\tau) - \lambda_0 I)^{-1} \right] \right\|_{L(E)} \\ \leq & \quad C \sum_{i=1}^{m} \frac{|x - \tau|^{\alpha_i}}{z^{\mu_i}} \end{aligned} \tag{H.2}$$
avec $\alpha_i + 2\mu_i - 2 > 0,\ i = 1, ..., m$.

Remarque 3.2 *L'hypothèse (H.1) implique que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, les racines carrées*
$$-\left(-\left(\mathbf{A}(x) - \lambda I\right)\right)^{1/2}, \quad x \in [-1, \delta],$$
sont bien définies et qu'ils génèrent des semi-groupes analytiques non fortement continus en zéro.

(Voir [6] pour les domaines denses et [29] pour les domaines non denses).

Remarque 3.3 *Par un calcul simple on peut montrer que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$*
$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}(x) - \lambda I)(\mathbf{A}(x) - zI)^{-1} \left[(\mathbf{A}(x) - \lambda I)^{-1} - (\mathbf{A}(\tau) - \lambda I)^{-1} \right] \\ = \ & (\mathbf{A}(x) - \lambda_0 I)(\mathbf{A}(x) - zI)^{-1} \left[(\mathbf{A}(x) - \lambda_0 I)^{-1} - (\mathbf{A}(\tau) - \lambda_0 I)^{-1} \right] \\ & \times (\mathbf{A}(\tau) - \lambda_0 I)(\mathbf{A}(\tau) - \lambda I)^{-1}, \end{aligned}$$
avec
$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{A}(\tau) - \lambda_0 I)(\mathbf{A}(\tau) - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \\ = \ & \left\| I + (\lambda - \lambda_0) \left(\mathbf{A}(\tau) - \lambda I \right)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \left(1 + K \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} \right). \end{aligned}$$
Par conséquent l'hypothèse (H.2) est satisfaite pour tout $\lambda \geq \lambda_0$.

On pose
$$u^\delta = \begin{cases} u_-^\delta & \text{sur} \quad (-1, 0) \\ u_+^\delta & \text{sur} \quad (0, \delta), \end{cases}$$
et, pour tout $x \in [-1, \delta]$,
$$Q(x) = (\mathbf{A}(x) - \lambda I), \quad \lambda \geq \lambda_0.$$
Alors le problème (P_δ) peut s'écrire sous la forme
$$(P_\delta) \quad \begin{cases} \left(u_-^\delta\right)''(x) + Q(x) u_-^\delta(x) = g_-(x) & \text{sur} \quad (-1, 0), \\ \left(u_+^\delta\right)''(x) + Q(x) u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur} \quad (0, \delta), \\ u_-^\delta(-1) = f_-, \quad \left(u_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta, \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0), \quad \left(u_-^\delta\right)'(0) = p \left(u_+^\delta\right)'(0), \end{cases}$$

où $p = p_+/p_- > 0$.

Les deux hypothèses (H.1) et (H.2) restent aussi vérifiées pour la famille $(Q(x))_{x\in[-1,\delta]}$ dans un certain secteur Π_{θ_0,r_0} défini par

$$\Pi_{\theta_0,r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_0\};$$

où $\theta_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $r_0 > 0$. Elles s'écrivent donc sous la forme

1. $\forall x \in [-1,\delta], \forall z \in \Pi_{\theta_0,r_0}$, $(Q(x) - zI)^{-1} \in L(E)$ et
$$\left\|(Q(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{C}{|z+\lambda|}.$$
2. $\forall x, \tau \in [-1,\delta]$, $\forall z \in \Pi_{\theta_0,r_0}$
$$\left\|Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1} - Q(\tau)^{-1}\right]\right\|_{L(E)} \leq C\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z+\lambda|^{\mu_i}}.$$

On note γ le bord du secteur Π_{θ_0,r_0} orienté de $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$.

Dans ce chapitre on obtient une représentation formelle de la solution en utilisant un raisonnement heuristique, qui consiste à supposer l'existence de la solution stricte $\left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$ du problème (P_δ), celle qui vérifie

$$\begin{array}{rcl}
\forall x & \in & [0,\delta],\ u_+^\delta(x) \in D(Q(x));\ u_+^\delta \in C^2([0,\delta];E) \text{ et} \\
\\
x & \longmapsto & Q(x)u_+^\delta(x) \in C([0,\delta];E), \\
\\
\forall x & \in & [-1,0],\ u_-^\delta(x) \in D(Q(x));\ u_-^\delta \in C^2([-1,0];E) \text{ et} \\
\\
x & \longmapsto & Q(x)u_-^\delta(x) \in C([-1,0];E),
\end{array}$$

et on démontre cette existence par la suite.

Tout d'abord on donne des conditions nécessaires dites de compatibilité sur les données et le second membre pour avoir une solution stricte.

3.1 Conditions nécessaires

Proposition 3.1 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $f_+^\delta \in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$, $f_- \in D(Q(-1))$, $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$ *et* $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0];E)$ *avec* $0 < 2\alpha_0 < 1$. *Si* $\left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$ *est une solution stricte du problème* (P_δ), *alors on a nécessairement*

$$\begin{cases}
g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(Q(0))}, \\
(-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(Q(\delta))}, \\
Q(-1)f_- - g_-(-1) \in \overline{D(Q(-1))}.
\end{cases}$$

Preuve. 1. On a

$$\left(u_+^\delta\right)''(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{u_+^\delta(2x) - 2u_+^\delta(x) + u_+^\delta(0)}{x^2} = g_+^\delta(0) - Q(0)u_+^\delta(0),$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
&\frac{u_+^\delta(2x) - 2u_+^\delta(x) + u_+^\delta(0)}{x^2} \\
= \; & -\left[\frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} - \frac{1}{x^2}\left(Q(0) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\right]\left(\frac{u_+^\delta(2x) - 2u_+^\delta(x) + u_+^\delta(0)}{x^2}\right) \\
& -\frac{1}{x^2}\left(Q(0) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left[\frac{u_+^\delta(2x) - 2u_+^\delta(x) + u_+^\delta(0)}{x^2} - \left(g_+^\delta(0) - Q(0)u_+^\delta(0)\right)\right] \\
& -\frac{1}{x^2}\left(Q(0) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(g_+^\delta(0) - Q(0)u_+^\delta(0)\right) \\
& +\frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(\frac{u_+^\delta(0) - u_+^\delta(x)}{x^2}\right) + \frac{u_+^\delta(0) - u_+^\delta(x)}{x^2} \\
& +\frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(\frac{u_+^\delta(2x) - u_+^\delta(x)}{x^2}\right) + \frac{u_+^\delta(2x) - u_+^\delta(x)}{x^2} \\
= \; & a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2,
\end{aligned}$$

b_1 peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(\frac{u_+^\delta(0) - u_+^\delta(x)}{x^2}\right) + \frac{u_+^\delta(0) - u_+^\delta(x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}Q(x)\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} u_+^\delta(0) - \frac{1}{x^2}Q(x)\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} u_+^\delta(x) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(Q(0)u_+^\delta(0) - Q(x)u_+^\delta(x)\right) \\
&\quad -\frac{1}{x^2}Q(x)\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(Q(x)^{-1} - Q(0)^{-1}\right)Q(0)u_+^\delta(0) \\
&= a_4 + a_5.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(\frac{u_+^\delta(2x) - u_+^\delta(x)}{x^2}\right) + \frac{u_+^\delta(2x) - u_+^\delta(x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(Q(2x)u_+^\delta(2x) - Q(x)u_+^\delta(x)\right) \\
&\quad -\frac{1}{x^2}Q(x)\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(Q(x)^{-1} - Q(2x)^{-1}\right)Q(2x)u_+^\delta(2x) \\
&= a_6 + a_7.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{u_+^\delta(2x) - 2u_+^\delta(x) + u_+^\delta(0)}{x^2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{7} a_i \\
= \quad & a_3 = -\frac{1}{x^2}\left(Q(0) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(g_+^\delta(0) - Q(0)u_+^\delta(0)\right) \in D(Q(0)),
\end{aligned}$$

de plus, $a_i\,(i \neq 3) \to 0$, quand $x \to 0^+$.

En effet, pour a_1 il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} - \frac{1}{x^2}\left(Q(0) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} \\
= \quad & \frac{1}{x^2}Q(x)\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left[Q(x)^{-1} - Q(0)^{-1}\right]Q(0)\left(Q(0) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

et d'utiliser les hypothèses (H.1) et (H.2) pour déduire que

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{x^2}\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} - \frac{1}{x^2}\left(Q(0) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\right\|_{L(E)} \\
\leq \quad & \frac{C}{x^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{x^{\alpha_i}}{\left(\frac{1}{x^2} + \lambda\right)^{\mu_i}} \leq C\sum_{i=1}^{m}x^{\alpha_i + 2\mu_i - 2} \to 0, \ x \to 0^+.
\end{aligned}$$

Pour a_2, a_4 et a_6 le calcul est immédiat.

a_5 et a_7 se traitent de la même manière en utilisant l'hypothèse (H.2) et par analogie avec a_1. Pour a_5 par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\|a_5\|_E \quad &= \quad \left\|\frac{1}{x^2}Q(x)\left(Q(x) - \frac{1}{x^2}\right)^{-1}\left(Q(x)^{-1} - Q(0)^{-1}\right)Q(0)u_+^\delta(0)\right\|_E \\
&\leq \quad \frac{C}{x^2}\sum_{i=1}^{m}x^{\alpha_i + 2\mu_i}\left\|Q(0)u_+^\delta(0)\right\|_E \\
&\leq \quad C\sum_{i=1}^{m}x^{\alpha_i + 2\mu_i - 2}\left\|Q(0)u_+^\delta(0)\right\|_E \to 0, \ x \to 0^+.
\end{aligned}$$

Donc de tout ce qui précède on a

$$g_+^\delta(0) - Q(0)u_+^\delta(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{u_+^\delta(2x) - 2u_+^\delta(x) + u_+^\delta(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} a_3 \in \overline{D(Q(0))}.$$

De même on montre que

$$\left(u_-^\delta\right)''(0) = g_-(0) - Q(0)u_-^\delta(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{u_-^\delta(2x) - 2u_-^\delta(x) + u_-^\delta(0)}{x^2} \in \overline{D(Q(0))},$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(u_{+}^{\delta}\right)''(0)-\left(u_{-}^{\delta}\right)''(0) &= g_{+}^{\delta}(0)-Q(0)u_{+}^{\delta}(0)-g_{-}(0)+Q(0)u_{-}^{\delta}(0)\\ &= g_{+}^{\delta}(0)-g_{-}(0)\in\overline{D(Q(0))}.\end{aligned}$$

2. Soit $f_{+}^{\delta}\in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$. On a d'après la remarque 3.2

$$-\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}f_{+}^{\delta}=\lim_{t\to0^{+}}\frac{e^{-(-Q(\delta))^{1/2}t}f_{+}^{\delta}-f_{+}^{\delta}}{t}\in\overline{D((-Q(\delta))^{1/2})}=\overline{D(Q(\delta))},$$

car $e^{-(-Q(\delta))^{1/2}t}f_{+}^{\delta}\in D((-Q(\delta))^{1/2})$ (voir [33]).
Pour la dernière égalité voir [21].

3. Se démontre comme le premier point en remarquant que

$$\left(u_{-}^{\delta}\right)''(-1)=\lim_{x\to-1^{+}}\frac{u_{-}^{\delta}(2x+1)-2u_{-}^{\delta}(x)+u_{-}^{\delta}(-1)}{(x+1)^{2}}=g_{-}(-1)-Q(-1)f_{-}.$$

■

3.2 Cas scalaire et passage au cas abstrait

Pour la résolution du problème abstrait (P_δ) on considère le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} \left(v_-^\delta\right)''(x) + zv_-^\delta(x) = g_-(x) & \text{sur } (-1,0)\,, \\ \left(v_+^\delta\right)''(x) + zv_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur } (0,\delta)\,, \\ v_-^\delta(-1) = f_-, \quad \left(v_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta, \\ v_-^\delta(0) = v_+^\delta(0)\,, \quad \left(v_-^\delta\right)'(0) = p\left(v_+^\delta\right)'(0)\,, \end{cases}$$

où $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Ce dernier peut s'écrire sous forme de deux problèmes $(P_\delta)_+$ et $(P_\delta)_-$ tels que

$$(P_\delta)_+ \quad \begin{cases} \left(v_+^\delta\right)''(x) + zv_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur } (0,\delta)\,, \\ v_+^\delta(0) = \psi, \\ \left(v_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

où ψ est un paramètre à déterminer dans E et

$$(P_\delta)_- \quad \begin{cases} \left(v_-^\delta\right)''(x) + zv_-^\delta(x) = g_-(x) & \text{sur } (-1,0)\,, \\ v_-^\delta(-1) = f_-, \quad v_-^\delta(0) = \psi, \\ \left(v_-^\delta\right)'(0) = p\left(v_+^\delta\right)'(0)\,. \end{cases}$$

Dans un premier temps on résout le problème $(P_\delta)_+$ en fonction de la donnée ψ, celui ci admet la solution suivante

$$\begin{aligned} v_+^\delta(x) &= \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi + \frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_+^\delta \\ &\quad - \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x,\tau)\; g_+^\delta(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$K_{z,+}^\delta(x,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{-z}\tau\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} & \text{si } 0 \le \tau \le x \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} & \text{si } x \le \tau \le \delta, \end{cases}$$

où $\sqrt{-z}$ est la détermination analytique de la racine carrée donnée par $\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$.
Ensuite on passe à la résolution du problème $(P_\delta)_-$ et qui admet comme solution

$$\begin{aligned} v_-^\delta(x) &= \frac{p\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}f_+^\delta + \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}f_- \\ &\quad - \int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}g_+^\delta(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)\; g_-(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$\begin{cases} \Delta_z^-(\xi,\delta) = \cosh\sqrt{-z}\xi\cosh\sqrt{-z}\delta - p\sinh\sqrt{-z}\xi\sinh\sqrt{-z}\delta \\ \text{pour } \xi \in [-1,0] \end{cases}$$

et

$$K_{z,-}^{\delta}(x,\tau) = \frac{-1}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\begin{cases} \Delta_z^-(x,\delta)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1) & \text{si} \quad -1 \le \tau \le x \\ \Delta_z^-(\tau,\delta)\sinh\sqrt{-z}\,(x+1) & \text{si} \quad x \le \tau \le 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

À partir de (3.2) on peut directement obtenir la valeur du paramètre

$$\psi = v_+^{\delta}(0) = v_-^{\delta}(0),$$

et qui vaut

$$\begin{aligned} v_-^{\delta}(0) &= \frac{p\sinh\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}f_+^{\delta} + \frac{\cosh\sqrt{-z}\delta}{\Delta_z^-(-1,\delta)}f_- \\ &\quad - \int_0^{\delta}\frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}g_+^{\delta}(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_{-1}^{0}\frac{\cosh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\;g_-(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

ainsi, en remplaçant l'expression de ψ dans (3.1) on déduit l'expression complète de $v_+^{\delta}(x)$ donnée par

$$\begin{aligned} v_+^{\delta}(x) &= \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}f_+^{\delta} + \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}f_- \\ &\quad - \int_0^{\delta} H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)\; g_+^{\delta}(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_{-1}^{0}\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}g_-(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.4}$$

où

$$\begin{cases} \Delta_z^+(x,\delta) = \sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z} + p\cosh\sqrt{-z}x\sinh\sqrt{-z}, \\ \text{pour } x \in [0,\delta], \end{cases}$$

et

$$H_{z,+}^{\delta}(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\begin{cases} \Delta_z^+(\tau,\delta)\cosh\sqrt{-z}(\delta-x) & \text{si} \quad 0 \le \tau \le x \\ \Delta_z^+(x,\delta)\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau) & \text{si} \quad x \le \tau \le \delta. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour le passage au cas abstrait on pose

$$\begin{cases} v_+^{\delta}(x) = L_{z,+}^{\delta}(f_+^{\delta}, f_-, g_+^{\delta}, g_-)(x), \\ v_-^{\delta}(x) = L_{z,-}^{\delta}(f_+^{\delta}, f_-, g_+^{\delta}, g_-)(x). \end{cases}$$

En écrivant que

$$\begin{aligned}
& L^{\delta}_{z,+}(f^{\delta}_{+}, f_{-}, g^{\delta}_{+}, g_{-})(x) \\
= \; & L^{\delta}_{z,+}(f^{\delta}_{+}, f_{-}, \left(u^{\delta}_{+}\right)''(.) + Q(.)u^{\delta}_{+}(.)\,, \left(u^{\delta}_{-}\right)''(.) + Q(.)u^{\delta}_{-}(.))(x),
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
& L^{\delta}_{z,-}(f^{\delta}_{+}, f_{-}, g^{\delta}_{+}, g_{-})(x) \\
= \; & L^{\delta}_{z,-}(f^{\delta}_{+}, f_{-}, \left(u^{\delta}_{+}\right)''(.) + Q(.)u^{\delta}_{+}(.)\,, \left(u^{\delta}_{-}\right)''(.) + Q(.)u^{\delta}_{-}(.))(x),
\end{aligned}$$

on aura alors

$$\begin{aligned}
L^{\delta}_{z,+}(f^{\delta}_{+}, f_{-}, g^{\delta}_{+}, g_{-})(x) \; = \; & \frac{\Delta^{+}_{z}(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} f^{\delta}_{+} + \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} f_{-} \\
& - \int_0^{\delta} H^{\delta}_{z,+}(x,\tau)\left(u^{\delta}_{+}\right)''(\tau)\, d\tau \\
& - \int_0^{\delta} H^{\delta}_{z,+}(x,\tau) Q(\tau) u^{\delta}_{+}(\tau)\, d\tau \\
& - \int_{-1}^{0} \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} \left(u^{\delta}_{-}\right)''(\tau) d\tau \\
& - \int_{-1}^{0} \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} Q(\tau) u^{\delta}_{-}(\tau)\, d\tau
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} H^{\delta}_{z,+}(x,\tau)\left(u^{\delta}_{+}\right)''(\tau)\, d\tau \; = \; & -u^{\delta}_{+}(x) - z\int_0^{\delta} H^{\delta}_{z,+}(x,\tau) u^{\delta}_{+}(\tau)\, d\tau \\
& + \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} u^{\delta}_{+}(0) \\
& - p\frac{\sinh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z}\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} \left(u^{\delta}_{+}\right)'(0) \\
& + \frac{\Delta^{+}_{z}(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} f^{\delta}_{+},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{0} \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} \left(u^{\delta}_{-}\right)''(\tau) d\tau \\
= \; & \sqrt{-z}\int_{-1}^{0} \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} u^{\delta}_{-}(\tau) d\tau \\
& - \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} u^{\delta}_{-}(0) \\
& + \frac{\sinh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z}\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} \left(u^{\delta}_{-}\right)'(0) \\
& + \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta^{-}_{z}(-1,\delta)} f_{-},
\end{aligned}$$

et ceci en faisant une double intégration par parties.

En remplaçant ces nouvelles expressions dans l'équation (3.6) et en utilisant les conditions de transmission

$$u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0), \quad \left(u_-^\delta\right)'(0) = p\left(u_+^\delta\right)'(0),$$

on trouve que

$$\begin{aligned}
L_{z,+}^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) &= u_+^\delta(x) + z\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)u_+^\delta(\tau)\,d\tau \\
&\quad -\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(\tau)u_+^\delta(\tau)\,d\tau \\
&\quad -\sqrt{-z}\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}u_-^\delta(\tau)d\tau \\
&\quad -\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(\tau)u_-^\delta(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

En identifiant cette dernière expression avec la formule (3.4), on obtient l'équation

$$\begin{aligned}
& u_+^\delta(x) + z\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)u_+^\delta(\tau)\,d\tau - \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(\tau)u_+^\delta(\tau)\,d\tau \\
= & \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}f_+^\delta + \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}f_- - \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)\; g_+^\delta(\tau)d\tau \\
& -\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}g_-(\tau)d\tau \\
& +\sqrt{-z}\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}u_-^\delta(\tau)d\tau \\
& +\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}\,(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(\tau)u_-^\delta(\tau)\,d\tau
\end{aligned} \tag{3.7}$$

pour tout $x \in \left]0,\delta\right[$.

En faisant de même pour $L_{z,-}^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x)$, on trouve pour $x \in \left]-1,0\right[$ l'équation

$$\begin{aligned}
& u_-^\delta(x) - z\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)\; u_-^\delta(\tau)\,d\tau + \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)Q(\tau)u_-^\delta(\tau)\,d\tau \\
= & \frac{p\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}f_+^\delta + \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}f_- \\
& -\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}g_+^\delta(\tau)d\tau + \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)\; g_-(\tau)d\tau \\
& +\sqrt{-z}\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}u_+^\delta(\tau)d\tau \\
& +\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(\tau)u_+^\delta(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

En appliquant l'opérateur $(Q(x)-zI)^{-1}$ aux équations (3.7) et (3.8) suivant les valeurs de x, en utilisant le calcul de Dunford et l'identité algébrique

$$\begin{aligned}&\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-(Q(x)-zI)^{-1}Q(\tau)\right]u_{\pm}^{\delta}(\tau)\\ =\;& Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{\pm}^{\delta}(\tau),\end{aligned}$$

on trouve les deux équations intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}&u_{+}^{\delta}(x)+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)z(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz\\ =\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\Delta_{z}^{+}(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}f_{+}^{\delta}dz\\ &+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}f_{-}dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_{-}(\tau)d\tau dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}z(Q(x)-zI)^{-1}\\ &\times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{-}^{\delta}(\tau)d\tau dz\end{aligned}\tag{3.9}$$

pour tout $x\in\,]0,\delta[$ et

$$\begin{aligned}&u_{-}^{\delta}(x)-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)z(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{-}^{\delta}(\tau)d\tau dz\\ =\;&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{p\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}f_{+}^{\delta}dz\\ &+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\Delta_{z}^{-}(x,\delta)}{\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}f_{-}dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}\frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz\\ &+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_{-}(\tau)d\tau dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}\frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}z(Q(x)-zI)^{-1}\\ &\times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz\end{aligned}\tag{3.10}$$

pour tout $x\in\,]-1,0[$.

Ces deux équations peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& u_+^\delta(x) + I_+^\delta(x, Q(.)u_+^\delta(.)) + J_+^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) \\
= \ & n_+^\delta(x, Q(x))f_+^\delta + d_+^\delta(x, Q(x))f_- + \vartheta_+^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) + \varpi_+^\delta(x, Q(x), g_-) \\
: \ & = l_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x), \\
& u_-^\delta(x) + I_-^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) + J_-^\delta(x, Q(.)u_+^\delta(.)) \\
= \ & n_-^\delta(x, Q(x))f_+^\delta + d_-^\delta(x, Q(x))f_- + \vartheta_-^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) + \varpi_-^\delta(x, Q(x), g_-) \\
: \ & = l_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I_+^\delta(x, Q(.)u_+^\delta(.)) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau) z(Q(x) - zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1} - Q(x)^{-1}\right] Q(\tau)u_+^\delta(\tau)d\tau dz, \\
n_+^\delta(x, Q(x))f_+^\delta &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x) - zI)^{-1} f_+^\delta dz, \\
d_+^\delta(x, Q(x))f_- &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x) - zI)^{-1} f_- dz, \\
\vartheta_+^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)(Q(x) - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau)d\tau dz, \\
\varpi_+^\delta(x, Q(x), g_-) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}(\tau + 1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x) - zI)^{-1} g_-(\tau)d\tau dz, \\
J_+^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}(\tau + 1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} z(Q(x) - zI)^{-1} \\
&\quad \times \left[Q(\tau)^{-1} - Q(x)^{-1}\right] Q(\tau)u_-^\delta(\tau)d\tau dz,
\end{aligned}$$

pour tout $x \in]0, \delta[$ et

$$\begin{aligned}
I_-^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau) z(Q(x) - zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1} - Q(x)^{-1}\right] Q(\tau)u_-^\delta(\tau)d\tau dz, \\
n_-^\delta(x, Q(x))f_+^\delta &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p\sinh\sqrt{-z}(x + 1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x) - zI)^{-1} f_+^\delta dz, \\
d_-^\delta(x, Q(x))f_- &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x) - zI)^{-1} f_- dz, \\
\vartheta_-^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta - \tau)\sinh\sqrt{-z}(x + 1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x) - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau)d\tau dz,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varpi_{-}^{\delta}(x,Q(x),g_{-}) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0} K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_{-}(\tau)d\tau dz,\\
J_{-}^{\delta}(x,Q(.)u_{+}^{\delta}(.)) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta} \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)} z(Q(x)-zI)^{-1}\\
&\quad\times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz,
\end{aligned}
$$

pour tout $x\in\left]-1,0\right[$.

Ainsi on obtient le système que vérifie la solution stricte $\left(u_{+}^{\delta},u_{-}^{\delta}\right)$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_{+}^{\delta}(x)+I_{+}^{\delta}(x,Q(.)u_{+}^{\delta}(.))+J_{+}^{\delta}(x,Q(.)u_{-}^{\delta}(.))=l_{+}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(x)\\
u_{-}^{\delta}(x)+I_{-}^{\delta}(x,Q(.)u_{-}^{\delta}(.))+J_{-}^{\delta}(x,Q(.)u_{+}^{\delta}(.))=l_{-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(x)
\end{array}
\right. . \tag{3.11}
$$

Pour montrer que ce système est solvable et obtenir la solution voulu du problème (P_{δ}), on doit justifier la convergence absolue et la régularité des intégrales figurants dans les deux équations (3.9) et (3.10).

3.3 Convergence et régularité des termes avec intégrales

Dans ce paragraphe le paramètre λ est considéré fixé.
La régularité des intégrales est donnée par les propositions suivantes :

Proposition 3.2 *1. Il existe une constante $K>0$ ne dépendant que de γ telle que pour tout $z\in\gamma$ et $x\in[0,\delta]$, on a*

$$
\left\|I_{+}^{\delta}(x,Q(.)u_{+}^{\delta}(.))\right\|_{E}\leq K\ \left\|Q(.)u_{+}^{\delta}(.)\right\|_{C([0,\delta];E)}.
$$

2. $I_{+}^{\delta}(x,Q(.)u_{+}^{\delta}(.))\in D\left(Q(x)\right),\forall x\in[0,\delta]$.

Preuve. 1. Soit $x\in[0,\delta]$. On a

$$
\begin{aligned}
&\left\|I_{+}^{\delta}(x,Q(.)u_{+}^{\delta}(.))\right\|_{E}\\
&= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)z(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz\right\|_{E}\\
&= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(\tau)^{-1}-Q(x)^{-1}\right]Q(\tau)u_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz\right\|_{E}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma}\left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_{0}^{\delta}\left|H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)\right||x-\tau|^{\alpha_i}\,d\tau\right)\frac{|dz|}{|z+\lambda|^{\mu_i}}\left\|Q(.)u_{+}^{\delta}(.)\right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}
$$

grâce à l'hypothèse (H.2). On utilise ensuite les lemmes 2.8 et 2.10, pour obtenir que

$$\begin{aligned}
&\left\| I_+^\delta(x, Q(.)u_+^\delta(.)) \right\|_E \\
\leq\ & K \sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{\frac{\alpha_i}{2}+\mu_i+1}} \left\| Q(.)u_+^\delta(.) \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
\leq\ & K \left\| Q(.)u_+^\delta(.) \right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

car $\frac{\alpha_i}{2} + \mu_i > 1$, pour tout $i = 1, ..., m$.

2. Découle directement de 1. En effet

$$\begin{aligned}
&\left\| Q(x)I_+^\delta(x, Q(.)u_+^\delta(.)) \right\|_E \\
=\ & \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau) zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1} \left[Q(\tau)^{-1} - Q(x)^{-1} \right] Q(\tau)u_+^\delta(\tau) d\tau dz \right\|_E \\
\leq\ & K \sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{\frac{\alpha_i}{2}+\mu_i}} \left\| Q(.)u_+^\delta(.) \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
\leq\ & K \left\| Q(.)u_+^\delta(.) \right\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.3 *1. Il existe une constante K indépendante de δ telle que pour tout $x \in [0,\delta]$ et $f_+^\delta \in E$, on a*

$$\left\| n_+^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \right\|_E \leq K \ \left\| f_+^\delta \right\|_E$$

et

$$x \mapsto n_+^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in C\left([0,\delta]; E\right).$$

2. Si $f_+^\delta \in D_{Q(\delta)}\left(1/2 + \alpha_0, +\infty\right)$, alors pour tout $x \in [0,\delta]$, $n_+^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in D\left(Q(x)\right)$ et

$$x \mapsto Q(x) n_+^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in C\left([0,\delta]; E\right).$$

3. Soit $f_+^\delta \in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$. Alors $n_+^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in D\left(Q(x)\right)$ et

$$x \mapsto Q(x) n_+^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in C\left([0,\delta]; E\right),$$

si et seulement si

$$(-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(Q(\delta))},$$

$x \mapsto Q(\delta) n_+^\delta(x, Q(\delta)) f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]; E\right)$ si et seulement si

$$(-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-Q(\delta)}}\left(2\alpha_0, +\infty\right) = D_{Q(\delta)}\left(\alpha_0, +\infty\right).$$

Preuve. 1. Soient $x \in [0,\delta]$ et $f_+^\delta \in E$.

En utilisant le lemme 2.5, l'hypothèse (H.1) et l'estimation

$$\left| \Delta_z^+(x,\delta) \right| \leq (1+p) e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}(x+1)}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|n_+^\delta(x,Q(x))f_+^\delta\right\|_E &\leq \int_\gamma \frac{4(1+p)e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{3/2}\,C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\,|dz|\,\left\|f_+^\delta\right\|_E \\
&\leq K\int_\gamma \frac{e^{-\mathrm{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}}\,|dz|\,\left\|f_+^\delta\right\|_E \\
&\leq K\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{3/2}}\left\|f_+^\delta\right\|_E \\
&\leq K\left\|f_+^\delta\right\|_E,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Soient $x\in[0,\delta[$ et $f_+^\delta\in D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)$. Alors

$$\begin{aligned}
& Q(x)n_+^\delta(x,Q(x))\,f_+^\delta \\
= & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
= & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}\right]f_+^\delta dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
= & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}C_\lambda[z,x,\delta]\,Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
= & N_+(x)+Q(\delta)n_+^\delta(x,Q(\delta))\,f_+^\delta,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité suivante

$$\begin{aligned}
& Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1} \\
= & zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\delta)^{-1}\right]Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1} \\
= & C_\lambda[z,x,\delta]\,Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1},
\end{aligned}$$

avec

$$C_\lambda[z,x,\delta]=zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\delta)^{-1}\right].$$

On pose

$$N_+(x)=N_+^+(x)+N_+^-(x),$$

où $N_+^+(x)$ et $N_+^-(x)$ sont les intégrales sur les deux parties

$$\gamma_+=\left\{z\in\gamma:\ |z|\geq 1/(\delta-x)^2\right\},\quad \gamma_-=\left\{z\in\gamma:|z|\leq 1/(\delta-x)^2\right\},$$

de la courbe γ respectivement (voir Figure 3).

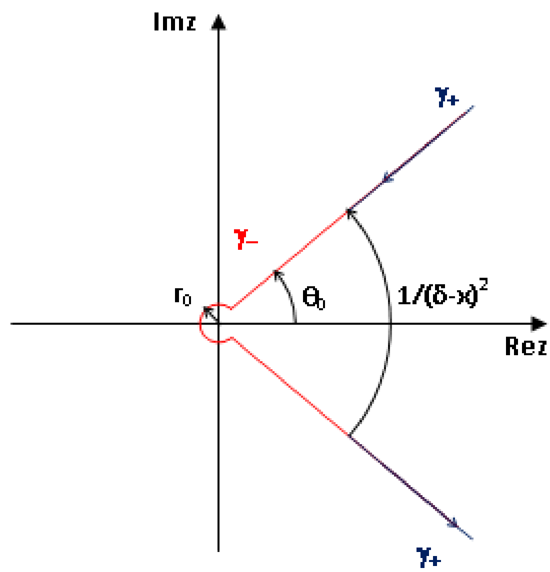

Figure 3

Pour $N_+^+(x)$ et par l'hypothèse (H.2) on a

$$\begin{aligned}
&\left\|N_+^+(x)\right\|_E \\
\leq\quad & K\int_{\gamma^+}\frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}\,C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\,|z|\sum_{i=1}^m\frac{(\delta-x)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}}\frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\quad & K\sum_{i=1}^m\int_{\gamma^+}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\mu_i+\alpha_0}}(\delta-x)^{\alpha_i}\,|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\quad & K\sum_{i=1}^m\int_1^{+\infty}(\delta-x)^{\alpha_i}\frac{e^{-\sigma\sin(\theta_0/2)}}{\left(\dfrac{\sigma^2}{(\delta-x)^2}\right)^{\mu_i+\alpha_0}}\frac{\sigma d\sigma}{(\delta-x)^2}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\quad & K\sum_{i=1}^m(\delta-x)^{\alpha_i+2\mu_i-2+2\alpha_0}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\quad & K(\delta-x)^{\sigma+2\alpha_0}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\quad & K\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)},
\end{aligned}$$

où

$$\sigma=\min_{i=1,\ \ldots,\ m}(\alpha_i+2\mu_i-2)>0.$$

Pour $N_+^-(x)$, en utilisant les mêmes estimations, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\left\|N_+^-(x)\right\|_E \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma^-}\frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}|z|\frac{(\delta-x)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}}\frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i}\int_{\gamma^-}\frac{1}{|z|^{\mu_i+\alpha_0}}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i}\int_{r_0}^{1/(\delta-x)^2}\frac{1}{|z|^{\mu_i+\alpha_0}}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i+2\mu_i-2+2\alpha_0}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & K(\delta-x)^{\sigma+2\alpha_0}\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)}\leq K\left\|f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)}.
\end{aligned}$$

On remarque que pour la convergence de $N_+(x)$ il suffit que $f_+^\delta\in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$ car dans ce cas on aura

$$\begin{aligned}
N_+(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}C_\lambda[z,x,\delta] \\
&\quad\times(-Q(\delta))^{1/2}(Q(\delta)-zI)^{-1}(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta dz,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\|N_+(x)\right\|_E \\
\leq\ & \int_\gamma\frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}|z|\sum_{i=1}^{m}\frac{(\delta-x)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}}\frac{|dz|}{|z|^{1/2}}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\mu_i}}(\delta-x)^{\alpha_i}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
\leq\ & K(\delta-x)^{\sigma}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
\leq\ & K\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)},
\end{aligned}$$

et ceci en utilisant le fait que

$$\left\|(-Q(\delta))^{1/2}(Q(\delta)-zI)^{-1}\right\|_{L(E)}\leq\frac{K}{|z|^{1/2}}.$$

(Pour cette inégalité voir [36] corollaire p. 39).

Pour $Q(\delta)n_+^\delta(x,Q(\delta))f_+^\delta$ on a

$$\begin{aligned}
&Q(\delta)n_+^\delta(x,Q(\delta))f_+^\delta \\
=\ & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}(-Q(\delta))^{1/2}(Q(\delta)-zI)^{-1}(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta dz,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\| Q(\delta) n_+^\delta \left(x, Q(\delta)\right) f_+^\delta \right\|_E \\
\leq\ & K \int_\gamma \frac{4(1+p) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \left\| f_+^\delta \right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \left\| f_+^\delta \right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & K(\delta-x)^{2\alpha_0} \left\| f_+^\delta \right\|_{D_{Q(\delta)}(1/2+\alpha_0,+\infty)},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de $Q(x) n_+^\delta \left(x, Q(x)\right) f_+^\delta$ sur $[0,\delta]$.

3. On rappelle ici que

$$D_{Q(\delta)}\left(1/2+\alpha_0,+\infty\right) \subset D_{Q(\delta)}\left(1/2,1\right) \subset D\left(\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}\right),$$

(voir [20]), donc si $f_+^\delta \in D_{Q(\delta)}\left(1/2+\alpha_0,+\infty\right)$, alors $f_+^\delta \in D\left(\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}\right)$.
Soit $f_+^\delta \in D\left(\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}\right)$. D'après la remarque du point précédent, il suffit de montrer le résultat pour $Q(\delta) n_+^\delta(x, Q(\delta)) f_+^\delta$.
En utilisant le calcul de Dunford on peut écrire le terme $n_+^\delta(x, Q(\delta)) f_+^\delta$ sous la forme

$$n_+^\delta \left(x, Q(\delta)\right) f_+^\delta = T\left(\delta, Q(\delta)\right)^{-1} H\left(x, Q(\delta)\right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-Q(\delta)}} (-Q(\delta))^{-1/2} f_+^\delta,$$

où

$$\begin{aligned}
T\left(\delta, Q(\delta)\right) &= \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-Q(\delta)}}\right)\left(I + e^{-2\sqrt{-Q(\delta)}}\right) \\
&\quad + p\left(I - e^{-2\delta\sqrt{-Q(\delta)}}\right)\left(I - e^{-2\sqrt{-Q(\delta)}}\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
H\left(x, Q(\delta)\right) &= \left(I - e^{-2x\sqrt{-Q(\delta)}}\right)\left(I + e^{-2\sqrt{-Q(\delta)}}\right) \\
&\quad + p\left(I + e^{-2x\sqrt{-Q(\delta)}}\right)\left(I - e^{-2\sqrt{-Q(\delta)}}\right).
\end{aligned}$$

On montre donc l'inversibilité de l'opérateur $T\left(\delta, Q(\delta)\right)$ (on peut le faire aussi pour $H\left(x, Q(\delta)\right)$) et on trouve son inverse en se basant sur les techniques de Lunardi [28].

On a

$$\begin{aligned}
T\left(\delta, Q(\delta)\right) &= \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-Q(\delta)}}\right)\left(I + e^{-2\sqrt{-Q(\delta)}}\right) + p\left(I - e^{-2\delta\sqrt{-Q(\delta)}}\right)\left(I - e^{-2\sqrt{-Q(\delta)}}\right) \\
&= (1+p)\left[I + \epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-Q(\delta)}} + e^{-2\sqrt{-Q(\delta)}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-Q(\delta)}}\right] \\
&= (1+p)\left[I + \Pi\right],
\end{aligned}$$

où

$$\epsilon = \frac{1-p}{1+p},$$

donc

$$\begin{aligned} T\left(\delta, Q(\delta)\right)^{-1} &= (1+p)^{-1}\left[I+\Pi\right]^{-1} \\ &= (1+p)^{-1}\left(I-\Psi\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}}+e^{-2\sqrt{-z}}\right)+e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right](Q(\delta)-z)^{-1}dz, \\ \Psi &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}}+e^{-2\sqrt{-\eta}}\right)+e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}}+e^{-2\sqrt{-\eta}}\right)+e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}(Q(\delta)-\eta)^{-1}d\eta, \end{aligned}$$

où γ_1 et γ_2 sont deux courbes homotopes (Figure 4).

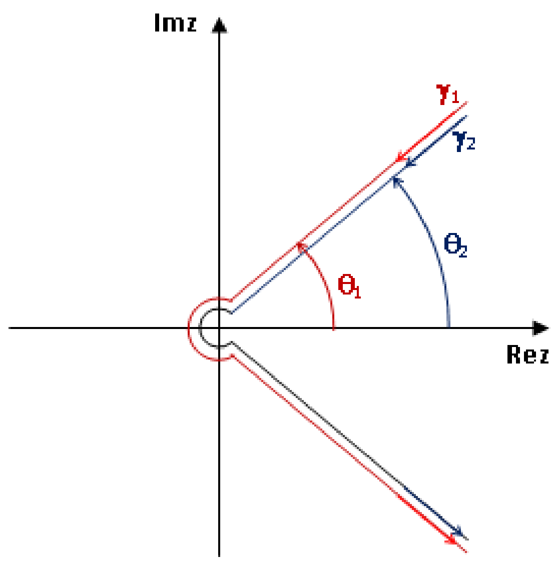

Figure 4

Ces deux intégrales sont absolument convergentes. En effet

$$\|\Pi\|_{L(E)} \le K\int_{\gamma_1}\left(e^{-2\delta\,\mathrm{Re}\sqrt{-z}}+e^{-2\,\mathrm{Re}\sqrt{-z}}\right)\frac{|dz|}{|z|} \le K.$$

Pour Ψ, on écrit

$$\Psi = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}}+e^{-2\sqrt{-\eta}}\right)+e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{4\Delta_\eta^-\left(-1,\delta\right)e^{-(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}(Q(\delta)-\eta)^{-1}d\eta,$$

et grâce au lemme 2.5, on aura

$$\|\Psi\|_{L(E)} \le K\int_{\gamma_2}\left(e^{-2\delta\,\mathrm{Re}\sqrt{-\eta}}+e^{-2\,\mathrm{Re}\sqrt{-\eta}}\right)\frac{|d\eta|}{|\eta|} \le K.$$

On a

$$(I+\Pi)^{-1} = I - \Psi,$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \Pi\Psi = \Pi - \Psi \\ \Psi\Pi = \Pi - \Psi. \end{cases}$$

Pour montrer cela, on considère le découpage suivant de $\gamma_i (i = 1, 2)$,

$$\begin{cases} \gamma_i^{(+)} = \{z \in \gamma_i : |z| \geq R\ \} \\ \gamma_i^{(-)} = \{z \in \gamma_i : |z| \leq R\}, \end{cases}$$

où $R > 0$ fixé. Soit aussi

$$\Gamma_i^{(R)} = \{z : |\arg(z)| \leq \theta_i \text{ et } |z| = R\}.$$

On pose

$$\begin{aligned} I_1(\eta) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right]\frac{(Q(\delta)-z)^{-1}}{z-\eta}dz, \\ I_2(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}\frac{(Q(\delta)-\eta)^{-1}}{\eta - z}d\eta. \end{aligned}$$

Pour $I_1(\eta)$ on a

$$\begin{aligned} I_1(\eta) &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^{(-)}}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right]\frac{(Q(\delta)-z)^{-1}}{z-\eta}dz \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^{(-)}\cup\Gamma_1^{(R)}}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right]\frac{(Q(\delta)-z)^{-1}}{z-\eta}dz \\ &\quad - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1^{(R)}}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right]\frac{(Q(\delta)-z)^{-1}}{z-\eta}dz. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des résidus, on obtient que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1^{(-)}\cup\Gamma_1^{(R)}}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right]\frac{(Q(\delta)-z)^{-1}}{z-\eta}dz \\ = &\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}\right](Q(\delta)-\eta)^{-1}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de $I_1(\eta)$ est nul car

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1^{(R)}}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right]\frac{(Q(\delta)-z)^{-1}}{z-\eta}dz\right\|_{L(E)} \\ \leq\ & K\int_{\Gamma_1^{(R)}}\frac{|dz|}{|z-\eta|\,|z+\lambda|} \\ \leq\ & K\frac{2\theta_1}{R} \to 0, R\to\infty, \end{aligned}$$

donc
$$I_1(\eta) = \left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}\right](Q(\delta)-\eta)^{-1}.$$
Pour $I_2(z)$ on a
$$\begin{aligned} I_2(z) &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^{(-)}}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}\frac{(Q(\delta)-\eta)^{-1}}{\eta - z}d\eta \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^{(-)}\cup\Gamma_2^{(R)}}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}\frac{(Q(\delta)-\eta)^{-1}}{\eta - z}d\eta \\ &\quad -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_2^{(R)}}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}\frac{(Q(\delta)-\eta)^{-1}}{\eta - z}d\eta, \end{aligned}$$
et
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2^{(-)}\cup\Gamma_2^{(R)}}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}\frac{(Q(\delta)-\eta)^{-1}}{\eta - z}d\eta = 0,$$
en tenant compte du fait que la fonction à intégrer est analytique ($z \in \gamma_1$ est extérieur à la courbe $\gamma_2^{(-)}\cup\Gamma_2^{(R)}$),
La deuxième intégrale est nulle pour le même argument que l'intégrale sur $\Gamma_1^{(R)}$. Ainsi
$$I_2(z) = 0.$$
Donc
$$\begin{aligned} \Pi\Psi &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}} \\ &\quad\times\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right](Q(\delta)-\eta)^{-1}(Q(\delta)-z)^{-1}d\eta dz, \end{aligned}$$
en utilisant l'identité de la résolvante
$$(Q(\delta)-\eta)^{-1}(Q(\delta)-z)^{-1} = \frac{1}{\eta - z}\left[(Q(\delta)-\eta)^{-1} - (Q(\delta)-z)^{-1}\right],$$
on peut écrire que
$$\begin{aligned} \Pi\Psi &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-z}}\right]I_2(z)\,dz \\ &\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}I_1(\eta)\,d\eta, \end{aligned}$$
en remplaçant $I_1(\eta)$ et $I_2(z)$ par leurs valeurs, on obtient
$$\begin{aligned} \Pi\Psi &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}\right]^2}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}\left(Q(\delta)-\eta I\right)^{-1}d\eta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\left[\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}\right](Q(\delta)-\eta)^{-1}d\eta \\ &\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}{1+\epsilon\left(e^{-2\delta\sqrt{-\eta}} + e^{-2\sqrt{-\eta}}\right) + e^{-2(\delta+1)\sqrt{-\eta}}}(Q(\delta)-\eta)^{-1}d\eta \\ &= \Pi - \Psi. \end{aligned}$$

On montre de même que $\Psi\Pi = \Pi - \Psi$.

Ainsi, puisque pour tout $\xi \in E$, $e^{-(\delta-x)\sqrt{-Q(\delta)}}\xi \in D\left(Q(\delta)\right)$ (voir [16]), on aura

$$\begin{aligned}
& \left(-Q(\delta)\right) n_+^\delta \left(x, Q(\delta)\right) f_+^\delta \\
= \ & \left(-Q(\delta)\right) T\left(\delta, Q(\delta)\right)^{-1} H\left(x, Q(\delta)\right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-Q(\delta)}} (-Q(\delta))^{-1/2} f_+^\delta \\
= \ & T\left(\delta, Q(\delta)\right)^{-1} H\left(x, Q(\delta)\right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-Q(\delta)}} (-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de Sinestrari [33], proposition 1.2, p.20 et théorème 3.1, p.39, on déduit que

$$Q(\delta) n_+^\delta \left(x, Q(\delta)\right) f_+^\delta \in C\left([0,\delta]\,; E\right),$$

si et seulement si

$$\left(-Q(\delta)\right)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D\left(-(-Q(\delta))^{1/2}\right)} = \overline{D(Q(\delta))},$$

(pour cette égalité, qui résulte des propriétés des puissances fractionnaires d'opérateurs sectoriels, voir Haase [21]) et

$$Q(\delta) n_+^\delta (x, Q(\delta)) f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,; E\right),$$

si et seulement si

$$\left(-Q(\delta)\right)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-Q(\delta)}}\left(2\alpha_0, +\infty\right) = D_{Q(\delta)}\left(\alpha_0, +\infty\right).$$

(Cette dernière égalité est dûe à la propriété de réitération de Lions [27]). ■

Proposition 3.4 *1. Il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que $\forall x \in [0,\delta], \forall f_- \in E$*

$$\left\| d_+^\delta (x, Q(x)) f_- \right\|_E \leq K \ \left\| f_- \right\|_E.$$

2. Il existe une constante K ne dépendant que de γ tel que pour tout $x \in [0,\delta]$ et $f_- \in E$, $d_+^\delta (x, Q(x)) f_- \in D\left(Q(x)\right)$ et

$$\left\| Q(x) d_+^\delta (x, Q(x)) f_- \right\|_E \leq K \ \left\| f_- \right\|_E.$$

Preuve. 1. En utilisant l'hypothèse (H.1) et le lemme 2.5, on a pour tout x dans $[0,\delta]$,

$$\begin{aligned}
& \left\| d_+^\delta (x, Q(x)) f_- \right\|_E \\
\leq \ & K \int_\gamma \frac{4 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{\left|z+\lambda\right| C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \left|dz\right| \left\| f_- \right\|_E \\
\leq \ & K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{\left|z\right|} \left|dz\right| \left\| f_- \right\|_E \leq K \left\| f_- \right\|_E.
\end{aligned}$$

2. Soient $x \in [0,\delta]$ et $f_- \in E$. Alors

$$\left\| Q(x) d_+^\delta (x, Q(x)) f_- \right\|_E \leq K \int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)} \left|dz\right| \left\| f_- \right\|_E \leq K \left\| f_- \right\|_E.$$

■

Proposition 3.5 *1. Soit $g_+^\delta \in C([0,\delta]; E)$. Alors il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que pour chaque $z \in \gamma$ et $x \in [0,\delta]$ on a*

$$\left\| \vartheta_+^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) \right\|_E \leq K \ \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)}.$$

2. Pour tout $x \in]0,\delta]$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; E)$, on a $\vartheta_+^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) \in D(Q(x))$ et

$$\begin{aligned} & Q(x)\vartheta_+^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) \\ = \ & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\ & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz \\ & +g_+^\delta(x). \end{aligned}$$

Preuve. 1. Soient $x \in [0,\delta]$ et $g_+^\delta \in C([0,\delta]; E)$. En utilisant l'hypothèse (H.1) et le lemme 2.6, on obtient

$$\left\| \vartheta_+^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) \right\|_E \leq K \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^2} \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \leq K \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)}.$$

2. Soient $x \in]0,\delta]$, $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; E)$. Alors

$$\begin{aligned} \vartheta_+^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(\tau)d\tau dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right]d\tau dz \\ & \quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)d\tau dz, \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)d\tau dz \\ = \ & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left(\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)d\tau\right)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz, \end{aligned}$$

avec

$$\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)d\tau = \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)} - \frac{1}{z},$$

donc

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)d\tau dz \\ = \ & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(Q(x)-zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x)dz \\
= \quad & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz \\
&+Q(x)^{-1}g_+^\delta(x),
\end{aligned}
$$

par conséquent

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_+^\delta(x,Q(x),g_+^\delta) \\
= \quad & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right]d\tau dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz + Q(x)^{-1}g_+^\delta(x),
\end{aligned}
$$

de plus

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right]d\tau dz\right\|_E \\
\leq \quad & K\int_\gamma\int_0^\delta \left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right| |x-\tau|^{2\alpha_0}\,d\tau\,|dz|\,\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}
$$

et puisque

$$
\int_0^\delta \left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right| |x-\tau|^{2\alpha_0}\,d\tau \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha_0}},
$$

donc

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right]d\tau dz\right\|_E \\
\leq \quad & K\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha_0}}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}
$$

Aussi on a pour le deuxième terme

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz\right\|_E \\
\leq \quad & K\int_\gamma \frac{4e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\frac{|dz|}{|z|}\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
\leq \quad & K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \leq K\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}
$$

En conclusion on a pour tout $x\in\left]0,\delta\right]$, $\vartheta_+^\delta(x,Q(x),g_+^\delta)\in D\left(Q(x)\right)$ et

$$
\begin{aligned}
&Q(x)\vartheta_+(x,Q(x),g_+^\delta) \\
= \quad & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz + g_+^\delta(x).
\end{aligned}
$$

■

Proposition 3.6 *1. Il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que pour tout $x \in [0, \delta]$ et $g_- \in C([-1,0]; E)$, on a*

$$\left\| \varpi_+^\delta(x, Q(x), g_-) \right\|_E \leq K \|g_-\|_{C([-1,0];E)} .$$

2. $\forall x \in]0, \delta], \forall g_- \in C([-1,0]; E), \varpi_+^\delta(x, Q(x), g_-) \in D(Q(x)).$

Preuve. 1. Soient $x \in [0, \delta]$ et $g_- \in C([-1,0]; E)$. Alors

$$\begin{aligned}
&\left\| \varpi_+^\delta(x, Q(x), g_-) \right\|_E \\
= & \left\| -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z^-(-1, \delta)} (Q(x) - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \right\|_E \\
\leq & K \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{4 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{3/2} C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} d\tau \, |dz| \, \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq & K \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{3/2}} d\tau \, |dz| \, \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq & K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^2} |dz| \, \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq & K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}(1 - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}})}{|z|^2} |dz| \, \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq & K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^2} |dz| \, \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq & K \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^2} \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \leq K \|g_-\|_{C([-1,0];E)} .
\end{aligned}$$

2. Se déduit de 1. En effet

$$\begin{aligned}
&\left\| Q(x) \varpi_+^\delta(x, Q(x), g_-) \right\|_E \\
\leq & K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|} |dz| \, \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq & K \|g_-\|_{C([-1,0];E)}, \forall x \in]0, \delta] .
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.7 *1. Il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que pour tout $x \in [0, \delta]$ on a*

$$\left\| J_+^\delta(x, Q(.) u_-^\delta(.)) \right\|_E \leq K \left\| Q(.) u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} .$$

2. $\forall x \in [0, \delta], J_+^\delta(x, Q(.) u_-^\delta(.)) \in D(Q(x)).$

Preuve. 1. Soit $x \in [0, \delta]$. On a

$$\begin{aligned}
&\left\| J_+^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) \right\|_E \\
\leq\ & K \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{4\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
&\times \sum_{i=1}^m \frac{(x-\tau)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}} d\tau\, |dz| \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq\ & K \sum_{i=1}^m \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)}{|z|^{\mu_i+1/2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
&\times (x-\tau)^{\alpha_i} d\tau\, |dz| \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq\ & K \sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}{|z|^{\mu_i+1/2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
&\times \left(\int_{-1}^0 \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)(x-\tau)^{\alpha_i} d\tau \right) |dz| \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq\ & K \sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}{|z|^{\mu_i+1/2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
&\times \left(\int_{-1}^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)(x-\tau)^{\alpha_i} d\tau \right) |dz| \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

on a aussi pour tout $i = 1, ..., m$ et par l'inégalité de Hölder

$$\int_{-1}^x \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)(x-\tau)^{\alpha_i} d\tau \leq K \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{(\alpha_i+1)/2}},$$

(voir p.32 lemme 2.9), donc

$$\begin{aligned}
&\left\| J_+^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) \right\|_E \\
\leq\ & K \sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}{|z|^{\mu_i+1/2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{(\alpha_i+1)/2}} |dz| \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq\ & K \sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{\alpha_i/2+\mu_i+1}} \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} \\
\leq\ & K \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

2. Découle de 1. ■

Proposition 3.8 *1. Il existe une constante $K > 0$ ne dépendant que de γ telle que pour tout $z \in \gamma$ et $x \in [-1, 0]$, on a*

$$\left\| I_-^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) \right\|_E \leq K \ \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)},$$

2. $I_-^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) \in D(Q(x)), \forall x \in [-1, 0]$.

Preuve. 1. Soit $x \in [-1,0]$. Par l'hypothèse (H.2) et les deux lemmes 2.9, 2.10 et en suivant la même méthode que dans la preuve de la proposition 3.2, on trouve que

$$\begin{aligned} & \left\| I_-^\delta(x, Q(.)u_-^\delta(.)) \right\|_E \\ \leq \; & K \sum_{i=1}^{m} \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{\alpha_i/2+\mu_i+1}} \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} \\ \leq \; & K \left\| Q(.)u_-^\delta(.) \right\|_{C([-1,0];E)} . \end{aligned}$$

2. Se déduit de 1. ■

Proposition 3.9 *1. Il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que pour tout $x \in [-1,0]$ et $f_+^\delta \in E$, on a*

$$\left\| n_-^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \right\|_E \leq K \ \left\| f_+^\delta \right\|_E$$

et

$$x \mapsto n_-^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in C\left([-1,0]\,; E\right).$$

2. Si $f_+^\delta \in D_{Q(\delta)}\left(1/2+\alpha_0, +\infty\right),$ alors pour tout $x \in [-1,0]$, on a $n_-^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in D\left(Q(x)\right)$ et

$$x \mapsto Q(x) n_-^\delta(x, Q(x)) f_+^\delta \in C\left([-1,0]\,; E\right).$$

Preuve. La démonstration est analogue à celle des deux premiers points de la proposition 3.3. ■

Proposition 3.10 *1. $\exists$ K ne dépendant que de γ tel que $\forall f_- \in E, \forall x \in \left]-1,0\right],$*

$$\left\| d_-^\delta(x, Q(x)) f_- \right\|_E \leq K \ \left\| f_- \right\|_E .$$

2. $\exists$ K ne dépendant que de γ tel que

$$\forall f_- \in D(Q(-1)),\ \forall x \in \left]-1,0\right], d_-^\delta(x, Q(x)) f_- \in D(Q(x))$$

et

$$\left\| Q(x) d_-^\delta(x, Q(x)) f_- \right\|_E \leq K \ \left\| Q(-1) f_- \right\|_E .$$

3. $d_-^\delta(x, Q(x)) f_- - f_- \to 0$ quand $x \to -1^+$ si et seulement si $f_- \in \overline{D(Q(-1))}$.

4. $d_-^\delta(., Q(-1)) f_- \in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\,; E\right)$ si et seulement si $f_- \in D_{Q(-1)}\left(\alpha_0, +\infty\right)$.

Preuve. 1. Soient $f_- \in E$, $x \in \left]-1,0\right]$. On a

$$\begin{aligned} d_-^\delta(x, Q(x)) f_- &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} \left[(Q(x) - zI)^{-1} - (Q(-1) - zI)^{-1} \right] f_- dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \\ &= D_-(x) + d_-^\delta(x, Q(-1)) f_-. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$\begin{aligned} & \left[(Q(x)-zI)^{-1}-(Q(-1)-zI)^{-1}\right]f_- \\ = \ & Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(-1)^{-1}\right]Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-, \end{aligned}$$

on peut écrire $D_-(x)$ sous la forme

$$D_-(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}C_\lambda\left[z,x,-1\right]Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz,$$

grâce à l'hypothèse (H.2), le lemme 2.5 et l'estimation

$$\left|\Delta_z^-(x,\delta)\right|\leq(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|D_-(x)\|_E \ & \leq \ K\int_\gamma \frac{4(1+p)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\sum_{i=1}^m\frac{(x+1)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}}\,|dz|\,\|f_-\|_E \\ & \leq \ K\sum_{i=1}^m(x+1)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\mu_i}}\,|dz|\,\|f_-\|_E \\ & \leq \ K\sum_{i=1}^m(x+1)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\,\|f_-\|_E \\ & \leq \ K(x+1)^\sigma\,\|f_-\|_E\,. \end{aligned}$$

Pour le terme $d_-^\delta(x,Q(-1))f_-$, on pose

$$\begin{aligned} & d_-^\delta(x,Q(-1))f_- \\ = \ & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_+}\frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz \\ & +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_-}\frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz, \end{aligned}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_+=\left\{z\in\gamma:|z|\geq 1/(1+x)^2\right\} \\ \gamma_-=\left\{z\in\gamma:|z|\leq 1/(1+x)^2\right\}, \end{array}\right.$$

on considère aussi

$$\Gamma=\left\{z:|\arg(z)|\leq\theta_0 \text{ et } |z|=1/(1+x)^2\right\},$$

orienté positivement.

Donc $d_-^\delta(x,Q(-1))f_-$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
& d_-^\delta(x, Q(-1)) f_- \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z^-(x,\delta) - \Delta_z^-(-1,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (Q(-1) - zI)^{-1} f_- \, dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \\
= & \sum_{i=1}^{4} I_i,
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E & \leq K \int_{\gamma_+} \frac{|\Delta_z^-(x,\delta)|}{|z| \, |\Delta_z^-(-1,\delta)|} \|f_-\|_E \, |dz| \\
& \leq K \int_{\gamma_+} \frac{(1+p)\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}}{|z| \, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} |dz| \, \|f_-\|_E \\
& \leq K (1+p) \int_{|z| \geq \frac{1}{(1+x)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1+x)}}{|z|} |dz| \, \|f_-\|_E \\
& \leq K (1+p) \int_1^\infty \frac{2 e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \, \|f_-\|_E \leq K \|f_-\|_E \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E & = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z^-(x,\delta) - \Delta_z^-(-1,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\
& = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^{x} \frac{\partial_\tau \Delta_z^-(\tau,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} (Q(-1) - zI)^{-1} f_- d\tau dz \right\|_E \\
& \leq K \int_{\gamma_-} \int_{-1}^{x} \frac{|\partial_\tau \Delta_z^-(\tau,\delta)|}{|\Delta_z^-(-1,\delta)| \, |z|} d\tau \, |dz| \, \|f_-\|_E \\
& \leq K \int_{\gamma_-} \int_{-1}^{x} \frac{(1+p)\, |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)}}{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)} \, |z|} d\tau \, |dz| \, \|f_-\|_E \\
& \leq K \int_{\gamma_-} \int_{-1}^{x} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1+\tau)}}{|z|^{1/2}} d\tau \, |dz| \, \|f_-\|_E \\
& \leq K \int_{\gamma_-} \frac{(1+x)}{|z|^{1/2}} |dz| \, \|f_-\|_E \\
& \leq K \int_{r_0}^{1/(1+x)^2} \frac{(1+x)}{\zeta^{1/2}} d\zeta \, \|f_-\|_E \\
& \leq K \left(1 - (1+x)\sqrt{r_0}\right) \|f_-\|_E \leq K \|f_-\|_E \,,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'estimation

$$\left| \partial_\tau \Delta_z^-(\tau,\delta) \right| \leq (1+p)\, |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)}.$$

I_3 est nulle puisque la fonction à intégrer est analytique et

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\
&\leq K \int_\Gamma \frac{1}{|z|} \; |dz| \, \|f_-\|_E \\
&\leq K \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\frac{1}{(1+x)^2}} \frac{1}{(1+x)^2} \, d\theta \;\; \|f_-\|_E \leq K \|f_-\|_E \, .
\end{aligned}$$

2. Se démontre comme pour le premier point en utilisant l'écriture de $Q(x) d_-^\delta(x, Q(x)) f_-$ sous la forme

$$\begin{aligned}
& Q(x) d_-^\delta(x, Q(x)) f_- \\
= \; & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} C_\lambda \left[z, x, -1\right] Q(-1) (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} Q(-1) (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} C_\lambda \left[z, x, -1\right] (Q(-1) - zI)^{-1} Q(-1) f_- dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} (Q(-1) - zI)^{-1} Q(-1) f_- dz.
\end{aligned}$$

3. On rappelle que

$$d_-^\delta(x, Q(x)) f_- = D_-(x) + d_-^\delta(x, Q(-1)) f_-,$$

où

$$D_-(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{z \Delta_z^-(-1,\delta)} C_\lambda \left[z, x, -1\right] Q(-1) (Q(-1) - zI)^{-1} f_- dz,$$

avec

$$\|D_-(x)\|_E \leq K \sum_{i=1}^m (x+1)^{\alpha_i + 2\mu_i - 2} \|f_-\|_E \leq K (x+1)^\sigma \|f_-\|_E \, ,$$

ce qui montre que $D_-(x) \to 0$ quand $x \to -1^+$.

Pour $d_-^\delta(x, Q(-1)) f_-$, par le calcul de Dunford, on peut l'écrire

$$d_-^\delta(x, Q(-1)) f_- = T\left(\delta, Q(-1)\right)^{-1} G\left(\delta, x, Q(-1)\right) e^{-(x+1)\sqrt{-Q(-1)}} f_- \tag{3.13}$$

où $T\left(\delta, Q(-1)\right)$ est l'opérateur inversible (pour l'inversibilité voir la preuve de la proposition 3.3) donné par

$$\begin{aligned}
T\left(\delta, Q(-1)\right) &= \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-Q(-1)}}\right) \left(I + e^{-2\sqrt{-Q(-1)}}\right) \\
&\quad + p \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-Q(-1)}}\right) \left(I - e^{-2\sqrt{-Q(-1)}}\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G\left(\delta, x, Q(-1)\right) &= \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-Q(-1)}}\right)\left(I + e^{2x\sqrt{-Q(-1)}}\right) \\ &\quad + p\left(I - e^{-2\delta\sqrt{-Q(-1)}}\right)\left(I - e^{2x\sqrt{-Q(-1)}}\right). \end{aligned}$$

Par Sinestrari [33], proposition 1.2, p.20, on déduit que

$$d_-^\delta(x, Q(-1))f_- \to f_-, \quad \text{quand } x \to -1^+,$$

si et seulement si $f_- \in \overline{D((-Q(-1))^{1/2})} = \overline{D(Q(-1))}$.

Ainsi $d_-^\delta(x, Q(x))f_- - f_- \to 0$ quand $x \to -1^+$ si et seulement si $f_- \in \overline{D(Q(-1))}$.

4. Le résultat s'obtient directement en appliquant le théorème 3.1, p.39 [33] à la formule (3.13). ■

Proposition 3.11 *1. Soit $g_+^\delta \in C\left([0,\delta]; E\right)$. Il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que, pour chaque $z \in \gamma$ et $x \in [-1,0]$*

$$\left\|\vartheta_-^\delta(x, Q(x), g_+^\delta)\right\|_E \leq K \ \left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}.$$

2. $\forall x \in [-1,0[, \forall g_+^\delta \in C\left([0,\delta]; E\right), \ \vartheta_-^\delta(x, Q(x), g_+^\delta) \in D\left(Q(x)\right)$.

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 3.6. ■

Proposition 3.12 *1. Soit $g_- \in C\left([-1,0]; E\right)$. Alors il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que, pour tout $z \in \gamma$ et $x \in [-1,0]$ on a*

$$\left\|\varpi_-^\delta(x, Q(x), g_-)\right\|_E \leq K \ \left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}.$$

2. Pour tout $x \in [-1,0[$ et $g_- \in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]; E\right)$, on a $\varpi_-^\delta(x, Q(x), g_-) \in D\left(Q(x)\right)$ et

$$\begin{aligned} & Q(x)\varpi_-^\delta(x, Q(x), g_-) \\ = \ & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau) - g_-(x)\right]d\tau dz - d_-^\delta(x, Q(x))g_-(x) \\ & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz \\ & +g_-(x). \end{aligned}$$

Preuve. 1. Soient $x \in [-1,0]$ et $g_- \in C\left([-1,0]; E\right)$. On a

$$\left\|\varpi_-^\delta(x, Q(x), g_-)\right\|_E \leq K\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^2}\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)} \leq K\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)},$$

et ceci en utilisant le lemme 2.7.

2. Soient $x \in \left]-1,0\right[$, $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0];E)$. Alors

$$\begin{aligned}
\varpi_-^\delta(x,Q(x),g_-) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)d\tau dz,
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)d\tau dz \\
=\ &\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left(\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)d\tau\right)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz,
\end{aligned}$$

avec

$$\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)d\tau = -\frac{\Delta_z^-(x,\delta)+p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}+\frac{1}{z},$$

donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)d\tau dz \\
=\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\Delta_z^-(x,\delta)+p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{(Q(x)-zI)^{-1}}{z}g_-(x)dz \\
=\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\Delta_z^-(x,\delta)+p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz \\
&+Q(x)^{-1}g_-(x),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\varpi_-^\delta(x,Q(x),g_-) \\
=\ &\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\Delta_z^-(x,\delta)+p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz \\
&+Q(x)^{-1}g_-(x),
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz\right\|_E \\
\leq\ & K\int_\gamma\int_{-1}^0\left|K_{z,-}^\delta(x,\tau)\right||x-\tau|^{2\alpha_0}d\tau\,|dz|\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\int_{-1}^{0}\left|K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)\right|\left|x-\tau\right|^{2\alpha_0}d\tau\leq\frac{K}{\left|z\right|^{1+\alpha_0}},$$

donc

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz\right\|_E\\ \leq\ & K\int_{\gamma}\frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha_0}}\left\|g_-\right\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}\\ \leq\ & K\left\|g_-\right\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale on a

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\Delta_z^-(x,\delta)+p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz\\ =\ & -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz\\ =\ & -d_-^{\delta}(x,Q(x))g_-(x)\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz,\end{aligned}$$

et on a $\forall x\in\,]-1,0]$

$$\left\|d_-^{\delta}(x,Q(x))g_-(x)\right\|_E\leq K\ \left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)},$$

d'aprés le premier point de la proposition 3.10.

Pour le deuxième terme, on a pour tout $x\in[-1,0[$

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz\right\|_E\\ \leq\ & K\int_{\gamma}\frac{4pe^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}\delta}e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{C_{\theta_0}^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\frac{|dz|}{|z|}\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}\\ \leq\ & K\int_{\gamma}\frac{e^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}|dz|\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}\leq K\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}.\end{aligned}$$

On remarque qu'au point $x=-1$ le noyau $K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)$ s'annule.

Finalement on conclut que pour tout $x\in\,]-1,0[$, $\varpi_-^{\delta}(x,Q(x),g_-)\in D\left(Q(x)\right)$ et

$$\begin{aligned}&Q(x)\varpi_-^{\delta}(x,Q(x),g_-)\\ =\ & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz-d_-^{\delta}(x,Q(x))g_-(x)\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{p\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{z\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz+g_-(x).\end{aligned}$$

Proposition 3.13 *1. Il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que pour tout $x \in [-1,0]$, on a*

$$\left\| J_-^\delta(x, Q(.)u_+^\delta(.)) \right\|_E \leq K \left\| Q(.)u_+^\delta(.) \right\|_{C([0,\delta];E)}.$$

2. $\forall x \in [-1,0]\,, J_-^\delta(x, Q(.)u_+^\delta(.)) \in D\left(Q(x)\right).$

Preuve. On montre ce résultat de la même manière que celle dans la preuve de la proposition 3.7. ■

3.4 Étude du système obtenu

On considère de nouveau le système (3.11) et on applique l'opérateur $Q(x)$ à ses deux équations [$x \in]0,\delta[$ pour la première et $x \in]-1,0[$ pour la deuxième]. Ainsi on obtient le nouveau système

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_+^\delta(x) + P_{\lambda,+}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x) = F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) - G_{\lambda,+}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x), & x \in]0,\delta[\,, \\ w_-^\delta(x) + P_{\lambda,-}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x) = F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) - G_{\lambda,-}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x), & x \in]-1,0[\,, \end{array} \right. \tag{3.14}$$

où

$$w_+^\delta(.) = Q(.)u_+^\delta(.), \quad w_-^\delta(.) = Q(.)u_-^\delta(.),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\lambda,+}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau) C_\lambda\left[z,x,\tau\right] w_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ P_{\lambda,-}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau) C_\lambda\left[z,x,\tau\right] w_-^\delta(\tau) d\tau dz \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\lambda,+}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} C_\lambda\left[z,x,\tau\right] w_-^\delta(\tau) d\tau dz, \\ G_{\lambda,-}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta - \tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} C_\lambda\left[z,x,\tau\right] w_+^\delta(\tau) d\tau dz, \end{array} \right.$$

avec

$$C_\lambda\left[z,x,\tau\right] = zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1} - Q(\tau)^{-1}\right],$$

et

$$
\begin{aligned}
F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \;=\;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f_- dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} \\
&\times Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz,
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \;=\;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f_- dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} \\
&\times Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Le système (3.14) peut s'écrire sous la forme abstraite comme suit

$$
\begin{pmatrix} I+P_{\lambda,+}^\delta & G_{\lambda,+}^\delta \\ G_{\lambda,-}^\delta & I+P_{\lambda,-}^\delta \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} w_+^\delta \\ w_-^\delta \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \\ F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \end{pmatrix},
$$

qu'on note

$$
\left(I+\Pi_\lambda^\delta\right) W^\delta = F^\delta,
$$

où

$$
W^\delta = \begin{pmatrix} w_+^\delta \\ w_-^\delta \end{pmatrix}, \qquad F^\delta = \begin{pmatrix} F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \\ F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \end{pmatrix},
$$

et Π_λ^δ est l'opérateur défini de $C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E)$ dans lui même par

$$
\Pi_\lambda^\delta\left(w_+^\delta, w_-^\delta\right) = \begin{pmatrix} P_{\lambda,+}^\delta & G_{\lambda,+}^\delta \\ G_{\lambda,-}^\delta & P_{\lambda,-}^\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_+^\delta \\ w_-^\delta \end{pmatrix}.
$$

La résolution du système (3.14) revient donc à inverser l'opérateur $I+\Pi_\lambda^\delta$ dans un espace normé adéquat.

On prend la norme suivante :

$$\begin{aligned}
&\left\|\Pi_\lambda^\delta\right\|_{L(C([0,\delta];E)\times C([-1,0];E))}\\
&= \max\begin{pmatrix} \left\|P_{\lambda,+}^\delta\right\|_{L(C([0,\delta];E))}, & \left\|G_{\lambda,+}^\delta\right\|_{L(C([-1,0];E),C([0,\delta];E))} \\ \left\|G_{\lambda,-}^\delta\right\|_{L(C([0,\delta];E),C([-1,0];E))}, & \left\|P_{\lambda,-}^\delta\right\|_{L(C([-1,0];E))} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (H.2) permet d'écrire que pour tout $x,\tau\in[-1,\delta]$

$$\|C_\lambda[z,x,\tau]\|_{L(E)}\leq C\sum_{i=1}^m \frac{|z|\,|x-\tau|^{\alpha_i}}{|z+\lambda|^{\mu_i}},$$

donc pour tout x dans $[0,\delta]$ et d'après le lemme 2.8,

$$\begin{aligned}
&\left\|P_{\lambda,+}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x)\right\|_E\\
=\;&\left\|-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)C_\lambda[z,x,\tau]\,w_+^\delta(\tau)d\tau dz,\right\|_E\\
\leq\;& K\sum_{i=1}^m\int_\gamma |z|\left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_0^\delta\left|H_{z,+}^\delta(x,\tau)\right||x-\tau|^{\alpha_i}\,d\tau\right)\frac{|dz|}{|\lambda+z|^{\mu_i}}\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
\leq\;& K\sum_{i=1}^m\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{\alpha_i/2}\,|\lambda+z|^{\mu_i}}\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

ainsi en utilisant le lemme 2.12, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\left\|P_{\lambda,+}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x)\right\|_E\\
\leq\;& K\sum_{i=1}^m\frac{1}{\lambda^{\alpha_i/2+\mu_i-1}}\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}\leq\frac{K}{\lambda^{\sigma/2}}\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

où

$$\sigma=\min_{i=1,\,\ldots,\,m}(\alpha_i+2\mu_i-2)>0.$$

Pour $G_{\lambda,+}^\delta$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|G_{\lambda,+}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x)\right\|_E\\
\leq\;& K\sum_{i=1}^m\int_\gamma |z|\left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_{-1}^0\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\right||x-\tau|^{\alpha_i}\,d\tau\right)\\
&\times\frac{|dz|}{|\lambda+z|^{\mu_i}}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0}\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\right||x-\tau|^{\alpha_i}\,d\tau\\
\leq\ & K\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{1/2}\,e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\int_{-1}^{0}\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)\,(x-\tau)^{\alpha_i}\,d\tau\\
\leq\ & K\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{1/2}\,e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\int_{-1}^{x}\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)\,(x-\tau)^{\alpha_i}\,d\tau\\
\leq\ & K\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{1/2}\,e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{(\alpha_i+1)/2}}\\
\leq\ & \frac{K}{|z|^{1+\alpha_i/2}},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|G_{\lambda,+}^{\delta}\left(w_-^{\delta}\right)(x)\right\|_E &\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_\gamma\frac{|dz|}{|z|^{\alpha_i/2}\,|\lambda+z|^{\mu_i}}\left\|w_-^{\delta}\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\lambda^{\alpha_i/2+\mu_i-1}}\left\|w_-^{\delta}\right\|_{C([-1,0];E)}\leq\frac{K}{\lambda^{\sigma/2}}\left\|w_-^{\delta}\right\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

De même pour tout x dans $[-1,0]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|P_{\lambda,-}^{\delta}\left(w_-^{\delta}\right)(x)\right\|_E\\
=\ &\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^{0}K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)C_\lambda[z,x,\tau]\,w_-^{\delta}(\tau)d\tau dz\right\|_E\\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}\int_\gamma|z|\left(\sup_{x\in[-1,0]}\int_{-1}^{0}\left|K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)\right||x-\tau|^{\alpha_i}\,d\tau\right)\frac{|dz|}{|\lambda+z|^{\mu_i}}\left\|w_-^{\delta}\right\|_{C([-1,0];E)}\\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}\int_\gamma\frac{|dz|}{|z|^{\alpha_i/2}\,|\lambda+z|^{\mu_i}}\left\|w_-^{\delta}\right\|_{C([-1,0];E)}\\
\leq\ & K\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\lambda^{\alpha_i/2+\mu_i-1}}\left\|w_-^{\delta}\right\|_{C([-1,0];E)}\leq\frac{K}{\lambda^{\sigma/2}}\left\|w_-^{\delta}\right\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Pour $G_{\lambda,-}^{\delta}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|G_{\lambda,-}^{\delta}\left(w_+^{\delta}\right)(x)\right\|_E\\
\leq\ & Kp\sum_{i=1}^{m}\int_\gamma|z|\sup_{x\in[-1,0]}\int_{0}^{\delta}\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\right||x-\tau|^{\alpha_i}\,d\tau\\
&\times\frac{|dz|}{|\lambda+z|^{\mu_i}}\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta \left| \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} \right| |x-\tau|^{\alpha_i}\, d\tau \\
\leq\ & K\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{1/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \int_0^\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)\,(\tau-x)^{\alpha_i}\, d\tau \\
\leq\ & K\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{1/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \int_x^\delta \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)\,(\tau-x)^{\alpha_i}\, d\tau \\
\leq\ & K\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{1/2}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{(\alpha_i+1)/2}} \\
\leq\ & \frac{K}{|z|^{1+\alpha_i/2}},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\| G^\delta_{\lambda,-}\left(w^\delta_+\right)(x)\right\|_E &\leq K\sum_{i=1}^m \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{\alpha_i/2}\,|\lambda+z|^{\mu_i}} \left\|w^\delta_+\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda^{\alpha_i/2+\mu_i-1}} \left\|w^\delta_+\right\|_{C([0,\delta];E)} \leq \frac{K}{\lambda^{\sigma/2}} \left\|w^\delta_+\right\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Des estimations précédentes on déduit l'existence d'un certain $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, $\left\|\Pi^\delta_\lambda\right\| \leq 1/2$, ce qui permet l'inversibilité de l'opérateur $I+\Pi^\delta_\lambda$ pour tout $\lambda \geq \lambda^*$.

Afin d'inverser $I+\Pi^\delta_\lambda$ dans l'espace $C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E)$ pour avoir l'expression de la solution stricte, il est nécessaire d'étudier la continuité du second membre F^δ et à l'occasion sa régularité maximale. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

3.5 Régularité du second membre F^δ

Proposition 3.14 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $f^\delta_+ \in D\left(\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}\right)$, $f_- \in D(Q(-1))$, $g^\delta_+ \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]\,;E)$ *et* $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0]\,;E)$ *avec* $0 < 2\alpha_0 < 1$*. Alors on a*

1. $F^\delta \in C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} g^\delta_+(0) - g_-(0) \in \overline{D(Q(0))}, \\ \left(-Q(\delta)\right)^{1/2} f^\delta_+ \in \overline{D(Q(\delta))}, \\ Q(-1)f_- - g_-(-1) \in \overline{D(Q(-1))}. \end{cases}$$

2. $F^\delta \in C^\beta([0,\delta]\,;E)\times C^\beta([-1,0]\,;E)$, *où* $\beta \in \left]0,\min(2\alpha_0,\sigma)\right]$ *et* $\sigma = \min\limits_{i=1,\,\ldots,\,m}(\alpha_i+2\mu_i-2)$, *si et seulement si*

$$\begin{cases} g^\delta_+(0) - g_-(0) \in D_{Q(0)}(\alpha_0,+\infty), \\ \left(-Q(\delta)\right)^{1/2} f^\delta_+ \in D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty), \\ Q(-1)f_- - g_-(-1) \in D_{Q(-1)}(\alpha_0,+\infty). \end{cases}$$

Preuve.

On rappelle que

$$F^\delta = \begin{pmatrix} F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \\ F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \end{pmatrix}.$$

On doit donc étudier la régularité des deux composantes $F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)$ et $F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)$.

♦ **Régularité de** $F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)$:

Pour tout $x \in [0, \delta]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$, on pose

$$c_z^+(x) = \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}, \qquad s_z^+(x) = \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}, \tag{3.17}$$

donc

$$\left|c_z^+(x)\right| \leq K e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}, \qquad \left|s_z^+(x)\right| \leq K e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}.$$

On a

$$\begin{array}{rl} & F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \\ = & \displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ & \displaystyle + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x) Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} f_- dz \\ & \displaystyle - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau) Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ & \displaystyle - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz, \end{array}$$

qui peut s'écrire en utilisant la proposition 3.5 sous la forme

$$\begin{array}{rl} & F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \\ = & \displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ & \displaystyle + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x) Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} f_- dz \\ & \displaystyle - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau) Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} \left(g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)\right) d\tau dz \\ & \displaystyle + g_+^\delta(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z} \cosh\sqrt{-z} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ & \displaystyle - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz. \end{array} \tag{3.18}$$

La régularité du premier terme est donnée par la proposition 3.3. Pour le deuxième, la continuité est donnée par la proposition 3.4.

Pour l'höldérianité, on considère $0 \leq \xi < x \leq \delta$ et on écrit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_-dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(\xi)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}f_-dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\right]f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(c_z^+(x)-c_z^+(\xi)\right)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}f_-dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(c_z^+(x)-c_z^+(\xi)\right)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}f_-dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]\left[Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}-Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\right]f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(c_z^+(x)-c_z^+(\xi)\right)\left[Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}-Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\right]f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(c_z^+(x)-c_z^+(\xi)\right)Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]C_\lambda\left[z,\xi,-1\right](Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)C_\lambda\left[z,x,\xi\right](Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(c_z^+(x)-c_z^+(\xi)\right)C_\lambda\left[z,\xi,-1\right](Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(c_z^+(x)-c_z^+(\xi)\right)(Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dz \\
= \; & \sum_{i=1}^4 I_i,
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\left\|I_1\right\|_E & \leq K\int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}\sum_{i=1}^m\frac{(x-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\sum_{i=1}^m\frac{(\xi+1)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\frac{|dz|}{|z|}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E \\
& \leq K\sum_{i,j=1}^m(x-\xi)^{\alpha_i}(\xi+1)^{\alpha_j}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\mu_i+\mu_j-1}}|dz|\left\|Q(-1)f_-\right\|_E \\
& \leq K\sum_{i,j=1}^m(x-\xi)^{\alpha_i}(\xi+1)^{\alpha_j}(x+1)^{2\mu_i+2\mu_j-4}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+\alpha_j+2\mu_i+2\mu_j-4}\left[(x-\xi)^{4-\alpha_j-2\mu_i-2\mu_j}(\xi+1)^{\alpha_j}(x+1)^{2\mu_i+2\mu_j-4}\right]\\
&\quad\times\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\left(\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\right)^2\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K(x-\xi)^{\sigma}\|Q(-1)f_-\|_E\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\leq K\int_{\gamma}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}\sum_{i=1}^{m}\frac{(x-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i}(x+1)^{2\mu_i-2}\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left[(x-\xi)^{2-2\mu_i}x^{2\mu_i-2}\right]\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K(x-\xi)^{\sigma}\|Q(-1)f_-\|_E\,.
\end{aligned}$$

Pour I_3 on écrit

$$I_3=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{\xi}^{x}\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\Delta_z^{-}(-1,\delta)}C_{\lambda}\left[z,\xi,-1\right](Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dsdz,$$

donc

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq K\int_{\xi}^{x}\int_{\gamma}|z|^{1/2}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)}\sum_{i=1}^{m}\frac{(\xi+1)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\,ds\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(\xi+1)^{\alpha_i}\int_{\xi}^{x}\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}|dz|\,ds\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(\xi+1)^{\alpha_i}\int_{\xi}^{x}(s+1)^{2\mu_i-3}ds\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{\xi}^{x}(s+1)^{\alpha_i}(s+1)^{2\mu_i-3}ds\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{\xi}^{x}(s+1)^{\alpha_i+2\mu_i-3}ds\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\left[(x+1)^{\alpha_i+2\mu_i-2}-(\xi+1)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\right]\|Q(-1)f_-\|_E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E\\
&\leq K\left(x-\xi\right)^{\sigma}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E.
\end{aligned}$$

De même

$$I_4=-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}(Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dsdz,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|I_4\right\|_E &\leq K\int_\xi^x\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{1/2}}\left|dz\right|ds\left\|Q(-1)f_-\right\|_E\\
&\leq K\int_\xi^x\frac{ds}{s+1}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E\\
&\leq K\int_\xi^x ds\left\|Q(-1)f_-\right\|_E\\
&\leq K\left(x-\xi\right)\left\|Q(-1)f_-\right\|_E\\
&\leq K\left(x-\xi\right)^{\sigma}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E.
\end{aligned}$$

Pour le troisième terme de (3.18), on pose

$$t^+(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz.$$

La convergence absolus est donnée par la proposition 3.5. Pour la régularité on écrit que

$$\begin{aligned}
t^+(x)-t^+(\xi) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz\\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(\xi,\tau)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz\\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^x\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz\\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^\delta\frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(x,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz\\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi\frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz\\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^\delta\frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz\\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^x\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz\\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi\frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(x,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz \\
= \;& t_1^+-t_2^++t_3^+-t_4^+,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
t_1^+-t_2^+ = \;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz,
\end{aligned}
$$

cette différence peut s'écrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
t_1^+-t_2^+ = \;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz \\
= \;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\xi)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
= \;& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\right] \\
& \times\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right]d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\xi)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^{\xi}\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\xi\right] \\
&\quad \times Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^{\delta}(\tau)-g_+^{\delta}(\xi)\right)d\tau dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^{\xi}\frac{c_z^+(x)-c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^{\delta}(\tau)-g_+^{\delta}(\xi)\right)d\tau dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^{\xi}\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^{\delta}(\xi)-g_+^{\delta}(x)\right)d\tau dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{\xi}^{x}\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^{\delta}(\tau)-g_+^{\delta}(x)\right)d\tau dz \\
&= \sum_{i=1}^{4} I_i,
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\leq K\int_{\gamma}\int_0^{\xi}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{1/2}}\sum_{i=1}^{m}\frac{(x-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i}}(\xi-\tau)^{2\alpha_0}d\tau\,|dz|\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}(x-\xi)^{\alpha_i}(\xi-\tau)^{2\alpha_0}\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}|dz|\,d\tau\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}(x-\xi)^{\alpha_i}(\xi-\tau)^{2\alpha_0}(x-\tau)^{2\mu_i-3}d\tau\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}(x-\tau)^{\alpha_i}(x-\tau)^{2\alpha_0}(x-\tau)^{2\mu_i-3}d\tau\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}(x-\tau)^{2\alpha_0+\alpha_i+2\mu_i-3}d\tau\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\left[x^{2\alpha_0+\alpha_i+2\mu_i-2}-(x-\xi)^{2\alpha_0+\alpha_i+2\mu_i-2}\right]\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{2\alpha_0+\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K(x-\xi)^{2\alpha_0+\sigma}\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

On écrit I_2 sous la forme

$$I_2=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_0^{\xi}\int_{\xi}^{x}\frac{\sinh\sqrt{-z}(\delta-s)\Delta_z^+(\tau,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^{\delta}(\tau)-g_+^{\delta}(\xi)\right)ds\,d\tau\,dz,$$

donc

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\leq K\int_0^{\xi}\int_{\xi}^{x}\int_{\gamma}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-\tau)}(\xi-\tau)^{2\alpha_0}|dz|\,ds\,d\tau\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\int_0^{\xi}(\xi-\tau)^{2\alpha_0}\int_{\xi}^{x}\frac{ds}{(s-\tau)^2}d\tau\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\int_0^{\xi}(\xi-\tau)^{2\alpha_0}\frac{(x-\xi)}{(x-\tau)(\xi-\tau)}d\tau\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K(x-\xi)\int_0^{\xi}\frac{(\xi-\tau)^{2\alpha_0-1}}{x-\tau}d\tau\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

en posant

$$y=\frac{x-\tau}{\xi-\tau},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\leq K(x-\xi)^{2\alpha_0}\int_{x/\xi}^{+\infty}\frac{dy}{y(y-1)^{2\alpha_0}}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K(x-\xi)^{2\alpha_0}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Pour I_3 et I_4 on a

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq K\int_\gamma\int_0^{\xi}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{1/2}}(x-\xi)^{2\alpha_0}d\tau\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\int_0^{\xi}(x-\tau)^{2\alpha_0}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{1/2}}|dz|\,d\tau\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\int_0^{\xi}(x-\tau)^{2\alpha_0}\frac{d\tau}{x-\tau}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\int_0^{\xi}(x-\tau)^{2\alpha_0-1}d\tau\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\left[x^{2\alpha_0}-(x-\xi)^{2\alpha_0}\right]\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K(x-\xi)^{2\alpha_0}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &\leq K\int_\gamma\int_\xi^{x}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{1/2}}(x-\tau)^{2\alpha_0}d\tau\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\int_\xi^{x}(x-\tau)^{2\alpha_0}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{1/2}}|dz|\,d\tau\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\int_\xi^{x}(x-\tau)^{2\alpha_0}\frac{d\tau}{x-\tau}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\int_\xi^{x}(x-\tau)^{2\alpha_0-1}d\tau\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K(x-\xi)^{2\alpha_0}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on traite la différence $t_3^+-t_4^+$ donnée par

$$\begin{aligned}
t_3^+-t_4^+ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^{\delta}\frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)C_\lambda[z,x,\xi]\,Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz\\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^{\delta}\frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\left(\Delta_z^+(x,\delta)-\Delta_z^+(\xi,\delta)\right)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(x)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(\xi)\right)d\tau dz.
\end{aligned}
$$

Pour les deux derniers termes de (3.18) on écrit

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\right]g_+^\delta(x)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(x)-g_+^\delta(0)\right]dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(0)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\right]\\
&\times g_-(\tau)d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(0)\right]d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(0)d\tau dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}C_\lambda\left[z,x,0\right]g_+^\delta(x)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(x)-g_+^\delta(0)\right]dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)C_\lambda\left[z,x,0\right]g_-(\tau)d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(0)\right]d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(0)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(0)-g_-(0)\right]dz\\
=\;&\sum_{i=1}^6 I_i,
\end{aligned}
$$

et on a

$$\begin{aligned}\|I_1\|_E &\leq K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|}\sum_{i=1}^m \frac{x^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}\\ &\leq K\sum_{i=1}^m x^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}\\ &\leq K\sum_{i=1}^m x^{\alpha_i}x^{2\mu_i-2}\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}\leq K\sum_{i=1}^m x^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}\\ &\leq Kx^\sigma\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|I_2\|_E &\leq K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}x^{2\alpha_0}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\ &\leq Kx^{2\alpha_0}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|I_3\|_E\\ &\leq K\sum_{i=1}^m x^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}\left(\int_{-1}^0 \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)d\tau\right)|dz|\,\|g_-\|_{C([-1,0];E)},\end{aligned}$$

comme

$$\int_{-1}^0 \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)d\tau=\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}},$$

et

$$\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\leq K\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}},$$

on aura

$$\begin{aligned}&\|I_3\|_E\\ &\leq K\sum_{i=1}^m x^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\,\|g_-\|_{C([-1,0];E)}\leq K\sum_{i=1}^m x^{\alpha_i+2\mu_i-2}\|g_-\|_{C([-1,0];E)}\\ &\leq Kx^\sigma\|g_-\|_{C([-1,0];E)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|I_4\|_E\\ &\leq K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}}\left(\int_{-1}^0 \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)(-\tau)^{2\alpha_0}d\tau\right)|dz|\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^0 \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)(-\tau)^{2\alpha_0}d\tau\\ &\leq \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{2\alpha_0+1}}\leq K\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\alpha_0+1/2}},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &\leq K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\alpha_0+1}} |dz| \, \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq Kx^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

$$\|I_5\|_E \leq K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|} |dz| \, \|g_-(0)\|_E \leq K \|g_-(0)\|_E .$$

De plus

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{c_z^+(x) - c_z^+(\xi)}{z} Q(0)(Q(0) - zI)^{-1} g_-(0) dz \right\|_E \\
= & \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)} Q(0)(Q(0) - zI)^{-1} g_-(0) ds dz \right\|_E \\
\leq & \; K \int_\xi^x \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{1/2}} |dz| \, ds \, \|g_-(0)\|_E \leq K \int_\xi^x \frac{ds}{s+1} \|g_-(0)\|_E \\
\leq & \; K(x-\xi) \|g_-(0)\|_E .
\end{aligned}$$

Pour I_6, on montre que l'application

$$x \mapsto I_+(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z^+(x) \cosh\sqrt{-z} (Q(0) - zI)^{-1} \left[g_+^\delta(0) - g_-(0) \right] dz \tag{3.19}$$

appartient à $C\left([0,\delta]\,; E\right)$ si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(Q(0))},$$

et appartient à $C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,; E\right)$ si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_{Q(0)}\left(\alpha_0, +\infty\right),$$

par les mêmes techniques utilisées dans la preuve de la proposition 3.3, en utilisant l'écriture de $I_+(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
I_+(x) &= T\left(\delta, Q(0)\right)^{-1} \left(I + e^{-2(\delta - x)(-Q(0))^{1/2}} \right) \left(I + e^{-2(-Q(0))^{1/2}} \right) \\
&\quad \times e^{-x(-Q(0))^{1/2}} \left(g_+^\delta(0) - g_-(0) \right).
\end{aligned}$$

Donc en conclusion pour $F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)$ on a

1. $F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \in C\left([0,\delta]\,; E\right)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \left(-Q(\delta)\right)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(Q(\delta))}, \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(Q(0))}. \end{cases}$$

2. $F^\delta_+(f^\delta_+, f_-, g^\delta_+, g_-) \in C^\beta\left([0,\delta]\,; E\right)$, où $\beta \in \left]0, \min(2\alpha_0, \sigma)\right]$ et $\sigma = \min\limits_{i=1,\,\ldots,\,m}(\alpha_i + 2\mu_i - 2)$, si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{l} (-Q(\delta))^{1/2} f^\delta_+ \in D_{Q(\delta)}(\alpha_0, +\infty), \\ g^\delta_+(0) - g_-(0) \in D_{Q(0)}\left(\alpha_0, +\infty\right). \end{array}\right.$$

♦ **Régularité de** $F^\delta_-(f^\delta_+, f_-, g^\delta_+, g_-)$:

Pour tout $x \in [-1, 0]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$, on pose
$$c^-_z(x) = \frac{\Delta^-_z(x,\delta)}{\Delta^-_z(-1,\delta)}, \qquad s^-_z(x) = \frac{\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\Delta^-_z(-1,\delta)}, \tag{3.20}$$
donc
$$\left|c^-_z(x)\right| \leq K e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}, \qquad \left|s^-_z(x)\right| \leq K e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}.$$
De (3.16) et en utilisant la proposition 3.12, on peut écrire que
$$\begin{aligned} & F^\delta_-(f^\delta_+, f_-, g^\delta_+, g_-)(x) \\ = \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p s^-_z(x)}{\sqrt{-z}} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f^\delta_+ dz \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c^-_z(x) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f_- dz \\ & - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p s^-_z(x)}{\sqrt{-z}} \cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g^\delta_+(\tau) d\tau dz \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K^\delta_{z,-}(x,\tau) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau) - g_-(x)\right] d\tau dz \\ & + g_-(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c^-_z(x)}{z} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_-(x) dz \\ & - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p s^-_z(x)}{z} \sinh\sqrt{-z}\delta Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_-(x) dz. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Pour la convergence de la première intégrale, on utilise le résultat de la proposition 3.9. Pour la régularité on prend $-1 \leq \xi < x \leq 0$ et on écrit que
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p s^-_z(x)}{\sqrt{-z}} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f^\delta_+ dz \\ & - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p s^-_z(\xi)}{\sqrt{-z}} Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1} f^\delta_+ dz \\ = \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p s^-_z(\xi)}{\sqrt{-z}} C_\lambda\left[z, x, \xi\right] C_\lambda\left[z, \xi, \delta\right] Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1} f^\delta_+ dz \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p s^-_z(\xi)}{\sqrt{-z}} C_\lambda\left[z, x, \xi\right] Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1} f^\delta_+ dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma p\frac{s_z^-(x)-s_z^-(\xi)}{\sqrt{-z}}C_\lambda\left[z,x,\delta\right]Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma p\frac{s_z^-(x)-s_z^-(\xi)}{\sqrt{-z}}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\
=\;&\sum_{i=1}^{4}I_i,
\end{aligned}
$$

on procède alors comme pour la régularité du deuxième terme de (3.18). Par exemple pour I_1 on a

$$
\begin{aligned}
\left\|I_1\right\|_E &\leq K\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\xi)}}{|z|^{1/2}}\sum_{i=1}^{m}\frac{(x-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\sum_{i=1}^{m}\frac{(\delta-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\frac{|dz|}{|z|^{1/2}}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i}(\delta-\xi)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\xi)}}{|z|^{\mu_i+\mu_j-1}}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i}(\delta-\xi)^{\alpha_j}(\delta-\xi)^{2\mu_i+2\mu_j-4}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)}\\
&\leq K(x-\xi)^\sigma\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)}.
\end{aligned}
$$

On revient à l'expression (3.21) et on regroupe le deuxième terme avec le sixième, donc on aura

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_-dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{c_z^-(x)}{z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\right]f_-dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{c_z^-(x)}{z}\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\right]g_-(x)dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{c_z^-(x)}{z}Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\left[g_-(x)-g_-(-1)\right]dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{c_z^-(x)}{z}Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}g_-(-1)dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)C_\lambda\left[z,x,-1\right]Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)(Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dz
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^-(x)}{z} C_\lambda\left[z,x,-1\right] Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1} g_-(x)dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^-(x)}{z} Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\left[g_-(x)-g_-(-1)\right] dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)(Q(-1)-zI)^{-1} g_-(-1)dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x) C_\lambda\left[z,x,-1\right](Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_- dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)(Q(-1)-zI)^{-1}\left[Q(-1)f_- - g_-(-1)\right] dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^-(x)}{z} C_\lambda\left[z,x,-1\right] Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1} g_-(x)dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^-(x)}{z} Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\left[g_-(x)-g_-(-1)\right] dz \\
= \; & \sum_{i=1}^{4} I_i,
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\left\|I_1\right\|_E & \leq K\int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)} \sum_{i=1}^{m} \frac{(x+1)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\frac{|dz|}{|z|}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E \\
& \leq K\sum_{i=1}^{m}(x+1)^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\left\|Q(-1)f_-\right\|_E \\
& \leq K\sum_{i=1}^{m}(x+1)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E \\
& \leq K(x+1)^{\sigma}\left\|Q(-1)f_-\right\|_E .
\end{aligned}$$

Pour I_2 on écrit que

$$I_2 = d_-^\delta(x,Q(-1))\left[Q(-1)f_- - g_-(-1)\right],$$

donc d'après le résultat de la proposition 3.10, $I_2 \in C\left([-1,0]\,;E\right)$ ssi

$$Q(-1)f_- - g_-(-1) \in \overline{D(Q(-1))}$$

et $I_2 \in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\,;E\right)$ ssi

$$Q(-1)f_- - g_-(-1) \in D_{Q(-1)}\left(\alpha_0,+\infty\right).$$

Pour I_3 et I_4 on a

$$\begin{aligned}
\left\|I_3\right\|_E & \leq K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|} \sum_{i=1}^{m} \frac{(x+1)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}|dz|\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq K\sum_{i=1}^{m}(x+1)^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad K\sum_{i=1}^{m}(x+1)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq \quad K(x+1)^{\sigma}\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|I_4\right\|_E &\leq K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|}(x+1)^{2\alpha_0}\,|dz|\left\|g_-\right\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}\\
&\leq K(x+1)^{2\alpha_0}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|}\,|dz|\left\|g_-\right\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}\\
&\leq K(x+1)^{2\alpha_0}\left\|g_-\right\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}
$$

En regroupant le troisième terme de (3.21) avec le septième, donc on aura

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(\tau)d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\right]\\
&\times g_+^\delta(\tau)d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(0)\right]d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(0)d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\right]g_-(x)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_-(x)-g_-(0)\right]dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(0)dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(\tau)d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(0)\right]d\tau dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(0)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(x)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_-(x)-g_-(0)\right]dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(0)dz \\
= &\sum_{i=1}^{6} I_i,
\end{aligned}
$$

pour I_1 on a

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\leq K\int_\gamma\int_0^\delta p\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}}\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sum_{i=1}^{m}\frac{(-x)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}d\tau\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}\left(\int_0^\delta\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)d\tau\right)|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}}{|z|^{1/2}}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(-x)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}\leq K(-x)^\sigma\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\leq K\int_\gamma\int_0^\delta p\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}}\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)\tau^{2\alpha_0}d\tau\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}}\left(\int_0^\delta\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)\tau^{2\alpha_0}d\tau\right)|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}
$$

l'inégalité de Hölder donne

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)\tau^{2\alpha_0}d\tau \\
\leq\ &\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{2\alpha_0+1}}\leq K\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}}{|z|^{\alpha_0+1/2}},
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\leq K\int_\gamma\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{1+\alpha_0}}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K(-x)^{2\alpha_0}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &\leq K\int_\gamma p\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}}{|z|}\sum_{i=1}^m\frac{(-x)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}|dz|\,\|g_-\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^m(-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\mu_i}}|dz|\,\|g_-\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^m(-x)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\,\|g_-\|_{C([-1,0];E)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_5\|_E &\leq K\int_\gamma p\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}}{|z|}(-x)^{2\alpha_0}|dz|\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}\\
&\leq K(-x)^{2\alpha_0}\int_\gamma\frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|}|dz|\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}\\
&\leq K(-x)^{2\alpha_0}\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}\,.
\end{aligned}$$

Pour I_3 et I_6 on a

$$I_3+I_6=-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{ps_z^-(x)}{z}\sinh\sqrt{-z}\delta Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(0)-g_-(0)\right]dz,$$

comme pour $I_+(x)$ on montre que l'application

$$x\mapsto I_-(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma ps_z^-(x)\sinh\sqrt{-z}\delta(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(0)-g_-(0)\right]dz \tag{3.22}$$

appartient à $C([-1,0];E)$ si et seulement si

$$g_+^\delta(0)-g_-(0)\in\overline{D(Q(0))}$$

et appartient à $C^{2\alpha_0}([-1,0];E)$ si et seulement si

$$g_+^\delta(0)-g_-(0)\in D_{Q(0)}(\alpha_0,+\infty)\,,$$

en utilisant son écriture sous la forme

$$\begin{aligned}
I_-(x) &= pT(\delta,Q(0))^{-1}\left(I-e^{-2(x+1)(-Q(0))^{1/2}}\right)\left(I-e^{-2\delta(-Q(0))^{1/2}}\right)\\
&\quad\times e^{x(-Q(0))^{1/2}}\left(g_+^\delta(0)-g_-(0)\right),
\end{aligned}$$

et les techniques de Sinestrari [33].
Pour la quatrième intégrale de (3.21), on pose

$$t^-(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0K_{z,-}^\delta(x,\tau)Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz,$$

et on suit les mêmes étapes que pour $t^+(x)$.

Donc pour la régularité de $F_-^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)$ on a

1. $F_{-}^{\delta}(f_{+}^{\delta}, f_{-}, g_{+}^{\delta}, g_{-}) \in C\left([-1,0]\,;E\right)$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{l} Q(-1)f_{-} - g_{-}(-1) \in \overline{D(Q(-1))}, \\ g_{+}^{\delta}(0) - g_{-}(0) \in \overline{D(Q(0))}. \end{array}\right.$$
2. $F_{-}^{\delta}(f_{+}^{\delta}, f_{-}, g_{+}^{\delta}, g_{-}) \in C^{\beta}\left([-1,0]\,;E\right)$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{l} Q(-1)f_{-} - g_{-}(-1) \in D_{Q(-1)}(\alpha_0, +\infty), \\ g_{+}^{\delta}(0) - g_{-}(0) \in D_{Q(0)}\left(\alpha_0, +\infty\right). \end{array}\right.$$

Finalement en regroupant les conditions obtenues pour $F_{+}^{\delta}(f_{+}^{\delta}, f_{-}, g_{+}^{\delta}, g_{-})$ et $F_{-}^{\delta}(f_{+}^{\delta}, f_{-}, g_{+}^{\delta}, g_{-})$ on trouve le résultat. ■

Le résultat de continuité du second membre F^{δ} permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $f_{+}^{\delta} \in D\left(\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}\right)$, $f_{-} \in D(Q(-1))$, $g_{+}^{\delta} \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,;E\right)$ *et* $g_{-} \in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\,;E\right)$ *avec* $0 < 2\alpha_0 < 1$ *tels que*
$$\left\{\begin{array}{l} g_{+}^{\delta}(0) - g_{-}(0) \in \overline{D(Q(0))}, \\ \left(-Q(\delta)\right)^{1/2} f_{+}^{\delta} \in \overline{D(Q(\delta))}, \\ Q(-1)f_{-} - g_{-}(-1) \in \overline{D(Q(-1))}. \end{array}\right.$$
Alors il existe $\lambda^{*} > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geq \lambda^{*}$, *le système (3.14) admet une solution unique* $\left(w_{+}^{\delta}, w_{-}^{\delta}\right) \in C([0,\delta]\,;E) \times C([-1,0]\,;E)$.
Cette solution est donnée pour tout $\lambda \geq \lambda^{*}$, $\xi \in [0,\delta]$ *et* $\eta \in [-1,0]$ *par*
$$\begin{pmatrix} u_{+}^{\delta}(\xi) \\ u_{-}^{\delta}(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\xi)^{-1} & 0 \\ 0 & Q(\eta)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{+}^{\delta}(\xi) \\ w_{-}^{\delta}(\eta) \end{pmatrix} \tag{3.23}$$
où
$$\begin{pmatrix} w_{+}^{\delta} \\ w_{-}^{\delta} \end{pmatrix} = \left(I + \Pi_{\lambda}^{\delta}\right)^{-1} \begin{pmatrix} F_{+}^{\delta}(f_{+}^{\delta}, f_{-}, g_{+}^{\delta}, g_{-}) \\ F_{-}^{\delta}(f_{+}^{\delta}, f_{-}, g_{+}^{\delta}, g_{-}) \end{pmatrix}.$$

On peut ainsi énoncer le premier résultat important qui affirme que la solution éventuelle $u^{\delta} = \left(u_{+}^{\delta}, u_{-}^{\delta}\right)$ du problème (P_{δ}) donnée par l'expression (3.23) est stricte. Ce dernier montre aussi que les conditions nécessaires trouvées auparavant sont en fait suffisantes pour avoir une telle solution.

Théorème 3.2 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $f_{+}^{\delta} \in D\left(\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}\right)$, $f_{-} \in D(Q(-1))$, $g_{+}^{\delta} \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,;E\right)$, *et* $g_{-} \in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\,;E\right)$ *tels que*
$$\left\{\begin{array}{l} g_{+}^{\delta}(0) - g_{-}(0) \in \overline{D(Q(0))}, \\ \left(-Q(\delta)\right)^{1/2} f_{+}^{\delta} \in \overline{D(Q(\delta))}, \\ Q(-1)f_{-} - g_{-}(-1) \in \overline{D(Q(-1))}. \end{array}\right.$$
Alors il existe $\lambda^{*} > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \geq \lambda^{*}$, *le couple* $\left(u_{+}^{\delta}, u_{-}^{\delta}\right)$ *donné par (3.23) est une solution stricte du problème* (P_{δ}).

Preuve. On a

$$\begin{pmatrix} w_+^{\delta} \\ w_-^{\delta} \end{pmatrix} = \left(I + \Pi_\lambda^{\delta}\right)^{-1} \begin{pmatrix} F_+^{\delta}(f_+^{\delta}, f_-, g_+^{\delta}, g_-) \\ F_-^{\delta}(f_+^{\delta}, f_-, g_+^{\delta}, g_-) \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

où

$$\left(w_+^{\delta}(.), w_-^{\delta}(.)\right) = \left(Q(.)u_+^{\delta}(.), Q(.)u_-^{\delta}(.)\right).$$

D'après le premier point de la proposition 3.14 et en utilisant l'inversibilité de l'opérateur $I + \Pi_\lambda^{\delta}$,

$$w_+^{\delta} \in C\left([0,\delta]\,; E\right), \qquad w_-^{\delta} \in C\left([-1,0]\,; E\right),$$

de plus

$$\begin{aligned} \left(u_+^{\delta}\right)''(.) &= g_+^{\delta}(.) - w_+^{\delta}(.) \in C\left([0,\delta]\,; E\right) \\ \left(u_-^{\delta}\right)''(.) &= g_-^{\delta}(.) - w_-^{\delta}(.) \in C\left([-1,0]\,; E\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Chapitre 4

Le problème approché

On a montré, par un raisonnement heuristique, au chapitre précédent que l'existence d'une solution stricte du problème (P_δ) implique sa représentation par la formule (3.23) à partir d'un certain $\lambda \geq \lambda^*$. Maintenant et pour montrer cette existence on considère la famille de problèmes approchés suivante :

$$\begin{cases} (u_n^\delta)''(x) + \mathbf{A}_n(x)\, u_n^\delta(x) - \lambda u_n^\delta(x) = g^\delta(x) \quad \text{sur} \quad]-1, 0[\, \cup\,]0, \delta[\,, \\ u_n^\delta(-1) = f_-, \quad (u_n^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \\ u_n^\delta(0^-) = u_n^\delta(0^+)\,, \quad p_-(u_n^\delta)'(0^-) = p_+(u_n^\delta)'(0^+)\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $(\mathbf{A}_n(x))_{x\in[-1,\delta]}$ est la famille des approchants de Yosida de $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ définie par

$$\mathbf{A}_n(x) = -n\mathbf{A}(x)\,(\mathbf{A}(x) - nI)^{-1}\,,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Lemme 4.1 *La famille $(\mathbf{A}_n(x))_{x\in[-1,\delta]}$ vérifie aussi l'hypothèse (H.2) uniformément par rapport à n :*
$\forall x, \tau \in [-1, \delta]\,, \forall\lambda \geq \lambda_0,\ \forall z \geq \lambda$

$$\begin{aligned} &\left\|(\mathbf{A}_n(x) - \lambda I)(\mathbf{A}_n(x) - zI)^{-1}\left[(\mathbf{A}_n(x) - \lambda I)^{-1} - (\mathbf{A}_n(\tau) - \lambda I)^{-1}\right]\right\|_{L(E)} \\ \leq\ & C\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{z^{\mu_i}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Preuve.
En utilisant les identités suivantes :

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_n(x) - \lambda I) = -(n+\lambda)\left(\mathbf{A}(x) - \dfrac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)(\mathbf{A}(x) - nI)^{-1}\,, \\ (\mathbf{A}_n(x) - \lambda I)^{-1} = \dfrac{n^2}{(\lambda+n)^2}\left(\mathbf{A}(x) - \dfrac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)^{-1} - \dfrac{I}{\lambda+n}, \\ (\mathbf{A}_n(x) - zI)^{-1} = -\dfrac{1}{n+z}(\mathbf{A}(x) - nI)\left(\mathbf{A}(x) - \dfrac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\,, \end{cases} \tag{4.3}$$

on peut écrire que

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{A}_n(x)-\lambda I)(\mathbf{A}_n(x)-zI)^{-1}\left[(\mathbf{A}_n(x)-\lambda I)^{-1}-(\mathbf{A}_n(\tau)-\lambda I)^{-1}\right] \\
= & (n+\lambda)\left(\mathbf{A}(x)-\frac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)(\mathbf{A}(x)-nI)^{-1}\frac{1}{n+z}(\mathbf{A}(x)-nI)\left(\mathbf{A}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} \\
& \times\left[\frac{n^2}{(\lambda+n)^2}\left(\mathbf{A}(x)-\frac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)^{-1}-\frac{I}{\lambda+n}-\frac{n^2}{(\lambda+n)^2}\left(\mathbf{A}(\tau)-\frac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)^{-1}+\frac{I}{\lambda+n}\right] \\
= & \frac{n^2}{(\lambda+n)(n+z)}\left(\mathbf{A}(x)-\frac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)\left(\mathbf{A}(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} \\
& \times\left[\left(\mathbf{A}(x)-\frac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)^{-1}-\left(\mathbf{A}(\tau)-\frac{\lambda n}{\lambda+n}I\right)^{-1}\right],
\end{aligned}$$

ainsi, par l'hypothèse (H.2) sur $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ on a

$$\begin{aligned}
& \left\|(\mathbf{A}_n(x)-\lambda I)(\mathbf{A}_n(x)-zI)^{-1}\left[(\mathbf{A}_n(x)-\lambda I)^{-1}-(\mathbf{A}_n(\tau)-\lambda I)^{-1}\right]\right\|_{L(E)} \\
\leq & C\frac{n^2}{(\lambda+n)(n+z)}\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{\left(\dfrac{nz}{n+z}\right)^{\mu_i}} \\
\leq & C\sum_{i=1}^{m}\frac{|x-\tau|^{\alpha_i}}{z^{\mu_i}}.
\end{aligned}$$

■

On considère maintenant l'écriture du problème (4.1) sous la forme

$$(P_{\delta;n})\quad\begin{cases}
(u_{n-}^{\delta})''(x)-\lambda u_{n-}^{\delta}(x)=g_-(x)-\mathbf{A}_n(x)u_{n-}^{\delta}(x) & \text{sur}\quad(-1,0)\,,\\
(u_{n+}^{\delta})''(x)-\lambda u_{n+}^{\delta}(x)=g_+^{\delta}(x)-\mathbf{A}_n(x)u_{n+}^{\delta}(x) & \text{sur}\quad(0,\delta)\,,\\
u_{n-}^{\delta}(-1)=f_-,\quad(u_{n+}^{\delta})'(\delta)=f_+^{\delta}, & \\
u_{n-}^{\delta}(0)=u_{n+}^{\delta}(0)\,,\quad(u_{n-}^{\delta})'(0)=p(u_{n+}^{\delta})'(0)\,, &
\end{cases}$$

où

$$u_n^{\delta}=\begin{cases}u_{n-}^{\delta} & \text{sur}\quad(-1,0)\\ u_{n+}^{\delta} & \text{sur}\quad(0,\delta)\,.\end{cases}$$

Alors on a

Lemme 4.2 *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $\lambda(n)>0$ tel que pour tout $\lambda\geq\lambda(n)$, le problème approché $(P_{\delta;n})$ admet une solution unique $\left(u_{n+}^{\delta},u_{n-}^{\delta}\right)\in C^2([0,\delta]\,;E)\times C^2([-1,0]\,;E)$.*

Preuve. Par analogie avec la résolution du problème (P_δ) dans le cas scalaire (voir (3.2) et (3.4)), le couple $\left(u_{n+}^{\delta}(x)\,,u_{n-}^{\delta}(x)\right)$ vérifie les deux équations intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
& u_{n+}^{\delta}(x) - \int_0^{\delta} H_{-\lambda,+}^{\delta}(x,\tau)\mathbf{A}_n(\tau)u_{n+}^{\delta}(\tau)\,d\tau \\
= \;& \frac{\Delta_{-\lambda}^{+}(x,\delta)}{\sqrt{\lambda}\Delta_{-\lambda}^{-}(-1,\delta)} f_{+}^{\delta} + \frac{\cosh\sqrt{\lambda}(\delta - x)}{\Delta_{-\lambda}^{-}(-1,\delta)} f_{-} \\
& - \int_0^{\delta} H_{-\lambda,+}^{\delta}(x,\tau) g_{+}^{\delta}(\tau)\,d\tau \\
& - \int_{-1}^{0} \frac{\cosh\sqrt{\lambda}(\delta - x)\sinh\sqrt{\lambda}(\tau+1)}{\sqrt{\lambda}\Delta_{-\lambda}^{-}(-1,\delta)} g_{-}(\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
& u_{n-}^{\delta}(x) + \int_{-1}^{0} K_{-\lambda,-}^{\delta}(x,\tau)\mathbf{A}_n(\tau)u_{n-}^{\delta}(\tau)\,d\tau \\
= \;& \frac{p\sinh\sqrt{\lambda}(x+1)}{\sqrt{\lambda}\Delta_{-\lambda}^{-}(-1,\delta)} f_{+}^{\delta} + \frac{\Delta_{-\lambda}^{-}(x,\delta)}{\Delta_{-\lambda}^{-}(-1,\delta)} f_{-} \\
& - \int_0^{\delta} \frac{p\cosh\sqrt{\lambda}(\delta - \tau)\sinh\sqrt{\lambda}(x+1)}{\sqrt{\lambda}\Delta_{-\lambda}^{-}(-1,\delta)} g_{+}^{\delta}(\tau)d\tau \\
& + \int_{-1}^{0} K_{-\lambda,-}^{\delta}(x,\tau) g_{-}(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}_n(\tau)\|_{L(E)} &= \left\| n\mathbf{A}(\tau)(\mathbf{A}(\tau) - nI)^{-1} \right\|_{L(E)} \\
&\leq n \left\| I + n(\mathbf{A}(\tau) - nI)^{-1} \right\|_{L(E)} \\
&\leq n(1+K) \leq Kn,
\end{aligned}$$

par l'hypothèse (H.1). Ainsi en utilisant les deux lemmes 2.6 et 2.7, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^{\delta} H_{-\lambda,+}^{\delta}(x,\tau)\mathbf{A}_n(\tau)u_{n+}^{\delta}(\tau)\,d\tau \right\|_E \\
\leq \;& Kn \left(\sup_{x\in[0,\delta]} \int_0^{\delta} \left| H_{-\lambda,+}^{\delta}(x,\tau) \right| d\tau \right) \sup_{\tau\in[0,\delta]} \left\| u_{n+}^{\delta}(\tau) \right\|_E \\
\leq \;& K\frac{n}{\lambda} \sup_{\tau\in[0,\delta]} \left\| u_{n+}^{\delta}(\tau) \right\|_E,
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{-1}^{0} K_{-\lambda,-}^{\delta}(x,\tau)\mathbf{A}_n(\tau)u_{n-}^{\delta}(\tau)\,d\tau \right\|_E \\
\leq \;& Kn \left(\sup_{x\in[-1,0]} \int_{-1}^{0} \left| K_{-\lambda,-}^{\delta}(x,\tau) \right| d\tau \right) \sup_{\tau\in[-1,0]} \|u_{n-}(\tau)\|_E \\
\leq \;& K\frac{n}{\lambda} \sup_{\tau\in[-1,0]} \left\| u_{n-}^{\delta}(\tau) \right\|_E,
\end{aligned}$$

ce qui permet l'inversibilité des équations (4.4) et (4.5) pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ si $\lambda = \lambda(n) > nK$, dans ce cas $\left(u^\delta_{n+}, u^\delta_{n-}\right) \in C([0,\delta]\,;E) \times C([-1,0]\,;E)$.

La famille $\left(\mathbf{A}_n(x)\right)_{x\in[-1,\delta]}$ est bornée, de plus

$$\begin{cases} \left(u^\delta_{n+}\right)''(x) = g^\delta_+(x) - \mathbf{A}_n(x)u^\delta_{n+}(x) + \lambda u^\delta_{n+}(x)\,, \\ \left(u^\delta_{n-}\right)''(x) = g_-(x) - \mathbf{A}_n(x)u^\delta_{n-}(x) + \lambda u^\delta_{n-}(x)\,, \end{cases}$$

Donc pour tout $\lambda \geq \lambda(n)$, le problème $(P_{\delta;n})$ admet une solution unique

$$\left(u^\delta_{n+}, u^\delta_{n-}\right) \in C^2([0,\delta]\,;E) \times C^2([-1,0]\,;E),$$

d'où le résultat. ■

Lemme 4.3 *Il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda^*$ et $n \in \mathbb{N}^*, \exists K(n) > 0$:*

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} u^\delta_{n+} \\ u^\delta_{n-} \end{pmatrix} \right\|_{C([0,\delta];E)\times C([-1,0];E)} &= \left\|u^\delta_{n+}\right\|_{C([0,\delta];E)} + \left\|u^\delta_{n-}\right\|_{C([-1,0];E)} \qquad (4.6) \\ \leq \frac{K(n)}{\lambda} &\left(\left\|f^\delta_+\right\|_E + \|f_-\|_E + \left\|g^\delta_+\right\|_{C([0,\delta];E)} + \|g_-\|_{C([-1,0];E)}\right), \end{aligned}$$

pour tout $\left(u^\delta_{n+}, u^\delta_{n-}\right) \in C^2([0,\delta]\,;E) \times C^2([-1,0]\,;E)$ solution de $(P_{\delta;n})$.

Preuve. En faisant le même raisonnement que pour le problème (P_δ), on peut montrer que la solution $\left(u^\delta_{n+}, u^\delta_{n-}\right)$ vérifie le système

$$\begin{cases} w^\delta_{n+}(x) + P^\delta_{\lambda;n,+}\left(w^\delta_{n+}\right)(x) = F^\delta_{n,+}(f^\delta_+, f_-, g^\delta_+, g_-)(x) - G^\delta_{\lambda;n,+}\left(w^\delta_{n-}\right)(x), \quad x \in \,]0,\delta[\,, \\ w^\delta_{n-}(x) + P^\delta_{\lambda;n,-}\left(w^\delta_{-}\right)(x) = F^\delta_{n,-}(f^\delta_+, f_-, g^\delta_+, g_-)(x) - G^\delta_{\lambda;n,-}\left(w^\delta_{n+}\right)(x), \quad x \in \,]-1,0[\,, \end{cases} \tag{4.7}$$

où

$$w^\delta_{n+}(.) = Q_n(.)u^\delta_{n+}(.), \quad w^\delta_{n-}(.) = Q_n(.)u^\delta_{n-}(.), \quad Q_n(.) = (\mathbf{A}_n(.) - \lambda I),$$

$$\begin{cases} P^\delta_{\lambda;n,+}\left(w^\delta_{n+}\right)(x) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma\int_0^\delta H^\delta_{z,+}(x,\tau)C^n_\lambda\left[z,x,\tau\right]w^\delta_{n+}(\tau)d\tau dz, \\ P^\delta_{\lambda;n,-}\left(w^\delta_{n-}\right)(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma\int_{-1}^0 K^\delta_{z,-}(x,\tau)C^n_\lambda\left[z,x,\tau\right]w^\delta_{n-}(\tau)d\tau dz, \end{cases}$$

$$\begin{cases} G^\delta_{\lambda;n,+}\left(w^\delta_{n-}\right)(x) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta^-_z(-1,\delta)}C^n_\lambda\left[z,x,\tau\right]w^\delta_{n-}(\tau)d\tau dz, \\ G^\delta_{\lambda;n,-}\left(w^\delta_{n+}\right)(x) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta^-_z(-1,\delta)}C^n_\lambda\left[z,x,\tau\right]w^\delta_{n+}(\tau)d\tau dz, \end{cases}$$

avec

$$C_\lambda^n\left[z,x,\tau\right] = zQ_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}\left[Q_n(x)^{-1}-Q_n(\tau)^{-1}\right],$$

et

$$\begin{aligned}F_{n,+}^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\ &+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}f_-dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(\tau)d\tau dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\\ &\times Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz,\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}F_{n,-}^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{p\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\ &+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\Delta_z^-(x,\delta)}{\Delta_z^-(-1,\delta)}Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}f_-dz\\ &-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z^-(-1,\delta)}\\ &\times Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(\tau)d\tau dz\\ &+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz.\end{aligned}\tag{4.9}$$

On a pour tout $x\in[-1,\delta]$ et $z\in\gamma$,

$$\begin{aligned}&\left\|Q_n(x)(Q_n(x)-zI)^{-1}\right\|_{L(E)}\\ &= \left\|\frac{n}{n+z}Q\left(x\right)\left(Q\left(x\right)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{K(n)}{|z|}.\end{aligned}$$

ce qui permet de montrer la continuité de $F_{n,+}^\delta$ et $F_{n,-}^\delta$.

En effet, pour tout $x\in[0,\delta]$ et en utilisant les mêmes techniques que pour la continuité de F_+^δ on a

$$\begin{aligned}&\left\|F_{n,+}^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x)\right\|_E\\ \leq\ & K(n)\left(\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}}\left|dz\right|\left\|f_+^\delta\right\|_E+\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|}\left|dz\right|\left\|f_-\right\|_E\right.\\ &\left.+\int_\gamma\frac{1}{|z|^2}\left|dz\right|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}+\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^2}\left|dz\right|\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}\right)\\ \leq\ & K(n)\left(\left\|f_+^\delta\right\|_E+\left\|f_-\right\|_E+\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}+\left\|g_-\right\|_{C([-1,0];E)}\right).\end{aligned}$$

Pour $F_{n,-}^{\delta}$, il suffit d'écrire pour tout $x \in [-1,0]$,

$$\begin{aligned}
F_{n,-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{p\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}Q_{n}(x)(Q_{n}(x)-zI)^{-1}f_{+}^{\delta}dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\Delta_{z}^{-}(x,\delta)}{\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}C_{\lambda}^{n}\left[z,x,-1\right]Q_{n}(-1)(Q_{n}(-1)-zI)^{-1}f_{-}dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\Delta_{z}^{-}(x,\delta)}{z\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)}Q_{n}(-1)(Q_{n}(-1)-zI)^{-1}Q_{n}(-1)f_{-}dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}\frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_{z}^{-}(-1,\delta)} \\
&\times Q_{n}(x)(Q_{n}(x)-zI)^{-1}g_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}K_{z,-}^{\delta}(x,\tau)Q_{n}(x)(Q_{n}(x)-zI)^{-1}g_{-}(\tau)d\tau dz,
\end{aligned}$$

pour déduire que

$$\begin{aligned}
&\left\|F_{n,-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(x)\right\|_{E} \\
\leq\ & K(n)\left(\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}}|dz|\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{E}+\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{2}}|dz|\left\|f_{-}\right\|_{E}\right. \\
&+\sum_{i=1}^{m}(x+1)^{\alpha_{i}}\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\mu_{i}}}|dz|\left\|Q_{n}(-1)f_{-}\right\|_{E} \\
&\left.+\int_{\gamma}\frac{1}{|z|^{2}}|dz|\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}+\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{2}}|dz|\left\|g_{-}\right\|_{C([-1,0];E)}\right) \\
\leq\ & K(n)\left(\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{E}+\left\|f_{-}\right\|_{E}+\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}+\left\|g_{-}\right\|_{C([-1,0];E)}\right).
\end{aligned}$$

En se basant sur l'hypothèse (4.2) et de la même manière qu'au chapitre 3, on montre qu'il existe $\lambda^{*}>0$ tel que pour tout $\lambda\geq\lambda^{*}$ et $n\in\mathbb{N}^{*}$, l'opérateur

$$\begin{pmatrix} I+P_{\lambda;n,+}^{\delta} & G_{\lambda;n,+}^{\delta} \\ G_{\lambda;n,-}^{\delta} & I+P_{\lambda;n,-}^{\delta}\end{pmatrix},$$

est inversible, par conséquent

$$\begin{pmatrix} w_{n+}^{\delta} \\ w_{n-}^{\delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I+P_{\lambda;n,+}^{\delta} & G_{\lambda;n,+}^{\delta} \\ G_{\lambda;n,-}^{\delta} & I+P_{\lambda;n,-}^{\delta}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_{n,+}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-}) \\ F_{n,-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})\end{pmatrix},$$

et qui peut se mettre sous la forme

$$W_{n}^{\delta}=\left(I+\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right)^{-1}F_{n}^{\delta},$$

où

$$\Pi_{\lambda;n}^{\delta}=\begin{pmatrix} P_{\lambda;n,+}^{\delta} & G_{\lambda;n,+}^{\delta} \\ G_{\lambda;n,-}^{\delta} & P_{\lambda;n,-}^{\delta} \end{pmatrix}, \qquad F_{n}^{\delta}=\begin{pmatrix} F_{n,+}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-}) \\ F_{n,-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-}) \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution $\left(u_{n+}^{\delta},u_{n-}^{\delta}\right)$ est donnée pour $\lambda\geq\lambda^{*}$, $\xi\in[0,\delta]$ et $\eta\in[-1,0]$ par

$$\begin{pmatrix} u_{n+}^{\delta}(\xi) \\ u_{n-}^{\delta}(\eta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_{n}(\xi)^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{n}(\eta)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{n+}^{\delta}(\xi) \\ w_{n-}^{\delta}(\eta) \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

De plus

$$\begin{aligned} &\left\|\begin{pmatrix} F_{n,+}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(\xi) \\ F_{n,-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(\eta) \end{pmatrix}\right\|_{E\times E} \\ = &\left\|F_{n,+}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(\xi)\right\|_{E}+\left\|F_{n,-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})(\eta)\right\|_{E} \\ \leq &\ K(n)\left(\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{E}+\left\|f_{-}\right\|_{E}+\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}+\left\|g_{-}\right\|_{C([-1,0];E)}\right), \end{aligned}$$

d'où l'estimation 4.6. ■

De ce qui précède découle la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Il existe $\lambda^{*}>0$ tel que pour tout $\lambda\geq\lambda^{*}$ et $n\in\mathbb{N}^{*}$, le problème approché $(P_{\delta;n})$ admet une solution unique $\left(u_{n+}^{\delta},u_{n-}^{\delta}\right)\in C^{2}([0,\delta];E)\times C^{2}([-1,0];E)$ donnée par l'expression (4.10).*

Preuve. Soit λ^{*} le nombre cité au lemme 4.3. D'aprés le lemme 4.2, pour chaque $n\in\mathbb{N}^{*}$ il existe $\left(u_{n+}^{\delta},u_{n-}^{\delta}\right)\in C^{2}([0,\delta];E)\times C^{2}([-1,0];E)$ solution unique de $(P_{\delta;n})$ pour $\lambda\geq\lambda(n)$. De plus, il existe $K(n)>0$ tel que

$$\begin{aligned} &\left\|\begin{pmatrix} u_{n+}^{\delta} \\ u_{n-}^{\delta} \end{pmatrix}\right\|_{C([0,\delta];E)\times C([-1,0];E)} \\ \leq &\ \frac{K(n)}{\lambda(n)}\left(\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{E}+\left\|f_{-}\right\|_{E}+\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}+\left\|g_{-}\right\|_{C([-1,0];E)}\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

D'après un lemme de Dunford-Schwartz [17], p.566, cette estimation montre que $\left(u_{n+}^{\delta},u_{n-}^{\delta}\right)$ est solution de $(P_{\delta;n})$ pour tout $\lambda\in\left[\lambda(n)\left(1-1\backslash K(n)\right),\lambda(n)\left(1+1\backslash K(n)\right)\right]$ et (4.11) est vérifiée pour tous ces λ. Il suffit donc de réitérer ce raisonnement pour avoir

$$\lambda\in\left[\lambda(n)\left(1-1\backslash K(n)\right)^{k},\lambda(n)\left(1+1\backslash K(n)\right)^{k}\right], \quad \forall k\geq 1,$$

donc

$$\lambda\in\left[\sup\left(\lambda^{*},\lambda(n)\left(1-1\backslash K(n)\right)^{k}\right),\lambda(n)\left(1+1\backslash K(n)\right)^{k}\right], \quad \forall k\geq 1,$$

d'où le résultat pour tout $\lambda\geq\lambda^{*}$. ■

Maintenant on doit étudier la convergence des opérateurs F_{n}^{δ} et $\Pi_{\lambda;n}^{\delta}$ quand $n\to\infty$. On aura besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 4.4 *Pour tout $x \in [-1, \delta], z \in \gamma$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned} & Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1} - Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} \\ = \quad & -\frac{z}{n+z} Q(x) \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}, \end{aligned}$$

où $(Q_n(x))_{x\in[-1,\delta]}$ est la famille des approchants de Yosida de $(Q(x))_{x\in[-1,\delta]}$

Preuve. Soient $x \in [-1, \delta], z \in \gamma$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$\begin{aligned} & Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1} - Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} \\ = \; & z \left[(Q_n(x) - zI)^{-1} - (Q(x) - zI)^{-1} \right] \\ = \; & -z \left[\frac{1}{n+z} (Q(x) - nI) \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} + (Q(x) - zI)^{-1} \right] \\ = \; & -\frac{z}{n+z} \left[(Q(x) - nI) \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} + (n+z)(Q(x) - zI)^{-1} \right] \\ = \; & -\frac{z}{n+z} \left[n \left((Q(x) - zI)^{-1} - \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} \right) + I \right. \\ & \left. + z(Q(x) - zI)^{-1} + \frac{nz}{n+z} \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} \right] \\ = \; & -\frac{z}{n+z} \left[\frac{nz^2}{n+z} \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} (Q(x) - zI)^{-1} + I \right. \\ & \left. + z(Q(x) - zI)^{-1} + \frac{nz}{n+z} \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} \right] \\ = \; & -\frac{z}{n+z} \left[\left(I + \frac{nz}{n+z} \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} \right) \left(I + z(Q(x) - zI)^{-1} \right) \right] \\ = \; & -\frac{z}{n+z} \left[\left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right) \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} + \frac{nz}{n+z} \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} \right] \\ & \times \left[(Q(x) - zI)(Q(x) - zI)^{-1} + z(Q(x) - zI)^{-1} \right] \\ = \; & -\frac{z}{n+z} Q(x) \left(Q(x) - \frac{nz}{n+z} I \right)^{-1} Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}. \end{aligned}$$

■

Lemme 4.5 *Pour tout $x \in [-1, \delta]$ et $z \in \gamma$, on a*

$$Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1} \to Q(x)(Q(x) - zI)^{-1},$$

quand $n \to \infty$.

Preuve. Soit $x \in [-1, \delta]$. Comme

$$\begin{cases} Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1} = I + z(Q_n(x) - zI)^{-1}, \\ Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} = I + z(Q(x) - zI)^{-1}, \end{cases}$$

il suffit de montrer que

$$(Q_n(x) - zI)^{-1} \to (Q(x) - zI)^{-1},$$

quand $n \to \infty$.

On a

$$\begin{aligned} (Q_n(x) - zI)^{-1} &= -\frac{1}{n+z}(Q(x) - nI)\left(Q(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{n+z}I + \frac{n^2}{(n+z)^2}\left(Q(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}, \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned} &\left\|\left(Q(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} - (Q(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \\ = &\left\|\frac{-z^2}{n+z}\left(Q(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}(Q(x) - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \\ \leq &\frac{K|z|^2}{|n+z|}\frac{|n+z|}{n|z|}\frac{1}{|z|} \leq \frac{K}{n} \to 0,\ n \to \infty, \end{aligned}$$

donc

$$\left(Q(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} \to (Q(x) - zI)^{-1},\ n \to \infty,$$

d'où le résultat. ■

Proposition 4.2 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $f_+^\delta \in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$, $f_- \in D(Q(-1))$, $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; E)$ *et* $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0]; E)$ *avec* $0 < 2\alpha_0 < 1$. *Alors pour*

$$\begin{cases} g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(Q(0))}, \\ (-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(Q(\delta))}, \\ Q(-1)f_- - g_-(-1) \in \overline{D(Q(-1))}, \end{cases}$$

on a $F_n^\delta \to F^\delta$ *quand* $n \to \infty$ *dans* $C([0,\delta]; E) \times C([-1,0]; E)$.

Preuve. Pour tout $x \in [0, \delta]$ et en utilisant l'identité

$$\begin{aligned} &Q_n(x)(Q_n(x) - zI)^{-1} - Q(x)(Q(x) - zI)^{-1} \\ = &-\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x) - \frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x) - zI)^{-1}, \end{aligned}$$

on peut écrire que

$$\begin{aligned}
& F^{\delta}_{n,+}(f^{\delta}_{+}, f_{-}, g^{\delta}_{+}, g_{-})(x) - F^{\delta}_{+}(f^{\delta}_{+}, f_{-}, g^{\delta}_{+}, g_{-})(x) \\
= & -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{s^{+}_{z}(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f^{\delta}_{+}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}c^{+}_{z}(x)\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_{-}dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}H^{\delta}_{z,+}(x,\tau)\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} \\
& \times\left(g^{\delta}_{+}(\tau)-g^{\delta}_{+}(x)\right)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}c^{+}_{z}(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g^{\delta}_{+}(x)dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}\frac{c^{+}_{z}(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} \\
& \times g_{-}(\tau)d\tau dz \\
= & \sum_{i=1}^{5}I_{i},
\end{aligned}$$

où $c^{+}_{z}(x)$ et $s^{+}_{z}(x)$ sont données par (3.17).

Pour I_3 et par le lemme 2.8, on a

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E & \leq K\int_{\gamma}\frac{|z|}{|n+z|}\left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_{0}^{\delta}\left|H^{\delta}_{z,+}(x,\tau)\right||x-\tau|^{2\alpha_0}d\tau\right)|dz|\left\|g^{\delta}_{+}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq K\int_{\gamma}\frac{|z|}{|n+z|\,|z|^{1+\alpha_0}}|dz|\left\|g^{\delta}_{+}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq K\int_{\gamma}\frac{|dz|}{|n+z|\,|z|^{\alpha_0}}\left\|g^{\delta}_{+}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq \frac{K}{n^{\alpha_0}}\left\|g^{\delta}_{+}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 2.11, ceci montre que $I_3 \to 0$, quand $n \to \infty$.

Pour les autres termes on montre la convergence absolue en faisant le même découpage que celui utilisé pour la continuité du second membre F^{δ}_{+} (voir la preuve de la proposition 3.14), ensuite on applique le théorème de la convergence dominée. Par exemple pour le premier terme on écrit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{s^{+}_{z}(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f^{\delta}_{+}dz \\
= & \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{s^{+}_{z}(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}C_{\lambda}\left[z,x,\delta\right]Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f^{\delta}_{+}dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{s^{+}_{z}(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f^{\delta}_{+}dz.
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale on utilise le lemme 2.10 et les techniques précédentes pour avoir

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1} C_\lambda\left[z,x,\delta\right]Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta \right\|_E \\
\leq\ & K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}}\frac{|z|}{|z|}\sum_{i=1}^m \frac{(\delta-x)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\frac{|dz|}{|z|^{1/2}}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^m(\delta-x)^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\mu_i}}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
\leq\ & K\sum_{i=1}^m(\delta-x)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale on utilise un résultat analogue à celui de la proposition 3.3 pour déduire sa convergence absolue si et seulement si

$$(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta \in \overline{D(Q(\delta))}.$$

Ainsi on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour déduire que ces deux intégrales tendent vers zéro quand n tend vers l'infini.

De même, pour tout $x\in[-1,0]$, on écrit que

$$\begin{aligned}
&F_{n,-}^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x)-F_-^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x) \\
=\ & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_-dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} \\
& \times g_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)\frac{z}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} \\
& \times\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)\frac{1}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma ps_z^-(x)\sinh\sqrt{-z}\delta\frac{1}{n+z}Q(x)\left(Q(x)-\frac{nz}{n+z}I\right)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(x)dz \\
=\ & \sum_{i=1}^6 I_i,
\end{aligned}$$

($c_z^-(x)$ et $s_z^-(x)$ sont données par (3.20)) et on suit la même méthode que pour la différence

$$F_{n,+}^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x)-F_+^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x).$$

■

Proposition 4.3 *Pour tout* $\lambda \geq \lambda^*$, *on a*

1. $\Pi^{\delta}_{\lambda;n} \in L\left(C([0,\delta]\,;E) \times C([-1,0]\,;E)\right)$ *et*
$$\left\|\Pi^{\delta}_{\lambda;n}\right\|_{L(C([0,\delta];E)\times C([-1,0];E))} \leq 1/2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. $\Pi^{\delta}_{\lambda;n}\begin{pmatrix} v^{\delta}_{+} \\ v^{\delta}_{-}\end{pmatrix} \rightarrow \Pi^{\delta}_{\lambda}\begin{pmatrix} v^{\delta}_{+} \\ v^{\delta}_{-}\end{pmatrix}$ *dans* $C([0,\delta]\,;E) \times C([-1,0]\,;E)$, *quand* $n \rightarrow \infty$.

3. $\left(I + \Pi^{\delta}_{\lambda;n}\right)^{-1} \in L\left(C([0,\delta]\,;E) \times C([-1,0]\,;E)\right)$ *et*
$$\exists C > 0 : \left\|\left(I + \Pi^{\delta}_{\lambda;n}\right)^{-1}\right\|_{L(C([0,\delta];E)\times C([-1,0];E))} \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

4. $\left(I + \Pi^{\delta}_{\lambda;n}\right)^{-1}\begin{pmatrix} v^{\delta}_{+} \\ v^{\delta}_{-}\end{pmatrix} \rightarrow \left(I + \Pi^{\delta}_{\lambda}\right)^{-1}\begin{pmatrix} v^{\delta}_{+} \\ v^{\delta}_{-}\end{pmatrix}$,
pour tout $\left(v^{\delta}_{+}, v^{\delta}_{-}\right) \in C([0,\delta]\,;E) \times C([-1,0]\,;E)$, *quand* $n \rightarrow \infty$.

Preuve. 1. Même raisonnement que pour l'opérateur Π^{δ}_{λ}.

2. On montre que
$$\begin{cases} P^{\delta}_{\lambda;n,+} \rightarrow P^{\delta}_{\lambda,+}, & G^{\delta}_{\lambda;n,+} \rightarrow G^{\delta}_{\lambda,+} \\ G^{\delta}_{\lambda;n,-} \rightarrow G^{\delta}_{\lambda,-}, & P^{\delta}_{\lambda;n,-} \rightarrow P^{\delta}_{\lambda,-} \end{cases}$$
quand $n \rightarrow \infty$.
On procède de la même manière pour ces quatre opérateurs, par exemple pour le premier et pour tout $x \in [0,\delta]$ et $w^{\delta}_{+} \in C([0,\delta]\,;E)$, on a
$$\begin{aligned} & \left\|\int_0^{\delta} H^{\delta}_{z,+}(x,\tau) C^n_{\lambda}\left[z,x,\tau\right] w^{\delta}_{+}(\tau) d\tau\right\|_E \\ \leq\ & K \sum_{i=1}^{m} |z| \left(\sup_{x\in[0,\delta]} \int_0^{\delta} \left|H^{\delta}_{z,+}(x,\tau)\right| |x-\tau|^{\alpha_i}\, d\tau\right) \frac{1}{|\lambda + z|^{\mu_i}} \left\|w^{\delta}_{+}\right\|_{C([0,\delta];E)} \\ \leq\ & K \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|z|^{\frac{\alpha_i}{2}+\mu_i}} \left\|w^{\delta}_{+}\right\|_{C([0,\delta];E)}, \end{aligned}$$
aussi pour tout $i = 1, \ldots, m$
$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{\alpha_i}{2}+\mu_i}} \left\|w^{\delta}_{+}\right\|_{C([0,\delta];E)} \\ \leq\ & K \left\|w^{\delta}_{+}\right\|_{C([0,\delta];E)}, \end{aligned}$$
en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et le fait que
$$C^n_{\lambda}\left[z,x,\tau\right] \rightarrow C_{\lambda}\left[z,x,\tau\right], \qquad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty,$$
on obtient le résultat.

3. C'est une conséquence directe de 1.

4. Soit $\left(v_{+}^{\delta}, v_{-}^{\delta}\right) \in C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E)$. On a

$$\begin{aligned}
&\left[\left(I+\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right)^{-1}-\left(I+\Pi_{\lambda}^{\delta}\right)^{-1}\right]\begin{pmatrix} v_{+}^{\delta} \\ v_{-}^{\delta}\end{pmatrix}\\
= \quad & \left(I+\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right)^{-1}\left[I-\left(I+\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right)\left(I+\Pi_{\lambda}^{\delta}\right)^{-1}\right]\begin{pmatrix} v_{+}^{\delta} \\ v_{-}^{\delta}\end{pmatrix}\\
= \quad & \left(I+\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right)^{-1}\left[\left(I+\Pi_{\lambda}^{\delta}\right)-\left(I+\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right)\right]\left(I+\Pi_{\lambda}^{\delta}\right)^{-1}\begin{pmatrix} v_{+}^{\delta} \\ v_{-}^{\delta}\end{pmatrix}\\
= \quad & \left(I+\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right)^{-1}\left[\Pi_{\lambda}^{\delta}-\Pi_{\lambda;n}^{\delta}\right]\left(I+\Pi_{\lambda}^{\delta}\right)^{-1}\begin{pmatrix} v_{+}^{\delta} \\ v_{-}^{\delta}\end{pmatrix}\to 0,\ \text{quand } n\to\infty,
\end{aligned}$$

d'après le deuxième point. ■

Des résultats précédents découle le théorème d'existence et d'unicité de la solution stricte du problème (P_δ) :

Théorème 4.1 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient $f_{+}^{\delta}\in D\left(\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}\right)$, $f_{-}\in D(Q(-1))$, $g_{+}^{\delta}\in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,;E\right)$ et $g_{-}\in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\,;E\right)$ avec $0<2\alpha_0<1$. Alors pour*

$$\begin{cases}
g_{+}^{\delta}(0)-g_{-}(0)\in\overline{D(Q(0))},\\
\left(-Q(\delta)\right)^{1/2}f_{+}^{\delta}\in\overline{D(Q(\delta))},\\
Q(-1)f_{-}-g_{-}(-1)\in\overline{D(Q(-1))},
\end{cases}$$

il existe $\lambda^{*}>0$ tel que pour tout $\lambda\geq\lambda^{*}$, le couple $\left(u_{+}^{\delta},u_{-}^{\delta}\right)$ donné par (3.23) est l'unique solution stricte du problème (P_δ).

Preuve. Soit λ^{*} le nombre défini dans la proposition 4.1.
Pour $\lambda\geq\lambda^{*}$, on pose

$$\begin{pmatrix} w_{+}^{\delta} \\ w_{-}^{\delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I+P_{\lambda,+}^{\delta} & G_{\lambda,+}^{\delta} \\ G_{\lambda,-}^{\delta} & I+P_{\lambda,-}^{\delta}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_{+}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-}) \\ F_{-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})\end{pmatrix},$$

et soit

$$\begin{pmatrix} w_{n+}^{\delta} \\ w_{n-}^{\delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I+P_{\lambda;n,+}^{\delta} & G_{\lambda;n,+}^{\delta} \\ G_{\lambda;n,-}^{\delta} & I+P_{\lambda;n,-}^{\delta}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_{n,+}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-}) \\ F_{n,-}^{\delta}(f_{+}^{\delta},f_{-},g_{+}^{\delta},g_{-})\end{pmatrix}.$$

D'aprés les propositions 4.2 et 4.3 on a

$$\left(w_{n+}^{\delta},w_{n-}^{\delta}\right)\to\left(w_{+}^{\delta},w_{-}^{\delta}\right),\quad \text{quand}\quad n\to\infty,$$

dans l'espace $C\left([0,\delta]\,;E\right)\times C\left([-1,0]\,;E\right)$, donc

$$\left(u_{n+}^{\delta},u_{n-}^{\delta}\right)\to\left(u_{+}^{\delta},u_{-}^{\delta}\right),\quad \text{quand}\quad n\to\infty.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} (u^{\delta}_{n+})''(.) \\ (u^{\delta}_{n-})''(.) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g^{\delta}_{+}(.) \\ g_{-}(.) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^{\delta}_{n+}(.) \\ w^{\delta}_{n-}(.) \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} g^{\delta}_{+}(.) \\ g_{-}(.) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^{\delta}_{+}(.) \\ w^{\delta}_{-}(.) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, d'où

$$\begin{pmatrix} (u^{\delta}_{+})''(.) \\ (u^{\delta}_{-})''(.) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{\delta}_{+}(.) \\ g^{\delta}_{-}(.) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q(.)u^{\delta}_{+}(.) \\ Q(.)u^{\delta}_{-}(.) \end{pmatrix},$$

ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 5

Régularité maximale de la solution

Dans ce chapitre on étudie la régularité maximale de la solution du problème (P_δ) donnée par l'expression (3.23).

5.1 Régularité de l'opérateur intégral Π_λ^δ

On rappelle que Π_λ^δ est défini sur l'espace $C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E)$ par

$$\Pi_\lambda^\delta=\begin{pmatrix} P_{\lambda,+}^\delta & G_{\lambda,+}^\delta \\ G_{\lambda,-}^\delta & P_{\lambda,-}^\delta \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} P_{\lambda,+}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz,\\ G_{\lambda,+}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_-^\delta(\tau)d\tau dz, \end{aligned}$$

pour $x\in[0,\delta]$ et

$$\begin{aligned} G_{\lambda,-}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz,\\ P_{\lambda,-}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_-^\delta(\tau)d\tau dz, \end{aligned}$$

pour $x\in[-1,0]$, avec

$$C_\lambda\left[z,x,\tau\right]=zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[Q(x)^{-1}-Q(\tau)^{-1}\right],$$

$$c_z^+(x)=\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z^-(-1,\delta)},\qquad s_z^-(x)=\frac{\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\Delta_z^-(-1,\delta)},$$

les noyaux $H_{z,+}^\delta(x,\tau)$ et $K_{z,-}^\delta(x,\tau)$ sont données par (3.5) et (3.3).

La régularité de l'opérateur Π_λ^δ résulte de la régularité de ses composantes. On commence d'abord par celles qui agissent sur l'intervalle $[0,\delta]$.

Proposition 5.1 *Sous les hypothèses (H.1) et (H.2) on a*

1. $P_{\lambda,+}^\delta \in L\left(C([0,\delta]\,;E); C^\sigma([0,\delta]\,;E)\right),$
2. $P_{\lambda,+}^\delta \in L\left(C([0,\delta]\,;E); C([0,\delta]\,;E) \cap B\left([0,\delta]\,; D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right)\right),$
3. $G_{\lambda,+}^\delta \in L\left(C([-1,0]\,;E); C^\sigma([0,\delta]\,;E)\right),$
4. $G_{\lambda,+}^\delta \in L\left(C([-1,0]\,;E); C([0,\delta]\,;E) \cap B\left([0,\delta]\,; D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right)\right),$

   où $\alpha \in \left]0,\sigma\right]$ *avec* $\sigma = \min\limits_{i=1,\,\ldots,\,m}\left(\alpha_i + 2\mu_i - 2\right).$

Preuve.

♦ **Régularité de** $P_{\lambda,+}^\delta$:

1. Soient $0 \leq \xi < x \leq \delta$ et $w_+^\delta \in C([0,\delta]\,;E)$. Alors

$$\begin{aligned}
& P_{\lambda,+}^\delta\left(w_+^\delta\right)(x) - P_{\lambda,+}^\delta\left(w_+^\delta\right)(\xi) \\
= & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(\xi,\tau)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
= & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(x,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
= & \; A^+ - B^+ + C^+ - D^+.
\end{aligned}$$

On majore $A^+ - B^+$. On a

$$\begin{aligned}
A^+ - B^+ = & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
= & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)zQ(x)(Q(x)-zI)^{-1} \\
&\quad \times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(\xi)^{-1}\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)z\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\right] \\
&\quad \times\left[Q(\tau)^{-1}-Q(\xi)^{-1}\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)-c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\xi \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\xi\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\tau,\delta)C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&= \sum_{i=1}^4 I_i.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\leq K\int_\gamma\int_0^\xi \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)} \\
&\quad \times\sum_{i=1}^m \frac{(x-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\sum_{i=1}^m \frac{(\xi-\tau)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}d\tau\,|dz|\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i,j=1}^m\int_0^\xi (x-\xi)^{\alpha_i}(\xi-\tau)^{\alpha_j}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{\mu_i+\mu_j-3/2}}|dz|\,d\tau\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^{\xi}(x-\xi)^{\alpha_i}(\xi-\tau)^{\alpha_j}(x-\tau)^{2\mu_i+2\mu_j-5}\,d\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^{\xi}(x-\tau)^{\alpha_i+\alpha_j+2\mu_i+2\mu_j-5}\,d\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2+\alpha_J+2\mu_j-2}\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\left(\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\right)^2\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K(x-\xi)^{\sigma}\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

$$I_2=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^{\xi}\int_\xi^{x}s_z^{+}(\tau)\sinh\sqrt{-z}(\delta-s)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_+^{\delta}(\tau)dsd\tau dz,$$

où

$$s_z^{+}(\tau)=\frac{\Delta_z^{+}(\tau,\delta)}{\Delta_z^{-}(-1,\delta)},$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|I_2\right\|_E &\leq K\int_0^{\xi}\int_\xi^{x}\int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}\\
&\quad\times\sum_{i=1}^{m}\frac{(\xi-\tau)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\,|dz|\,dsd\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}\int_\xi^{x}\int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-\tau)}\frac{(\xi-\tau)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\,|dz|\,dsd\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}\int_\xi^{x}(\xi-\tau)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-\tau)}}{|z|^{\mu_i-1}}\,|dz|\,dsd\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}\int_\xi^{x}(\xi-\tau)^{\alpha_i}(s-\tau)^{2\mu_i-4}dsd\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}\int_\xi^{x}(s-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-4}dsd\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\xi}(x-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-3}d\tau\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K(x-\xi)^{\sigma}\left\|w_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq K\int_\gamma\int_0^\xi \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)} \\
&\quad\times\sum_{i=1}^m \frac{(x-\xi)^{\alpha i}}{|z|^{\mu_i-1}}d\tau\,|dz|\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m\int_0^\xi (x-\xi)^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}\,|dz|\,d\tau\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m\int_0^\xi (x-\tau)^{\alpha_i}(x-\tau)^{2\mu_i-3}\,d\tau\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m\int_0^\xi (x-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-3}\,d\tau\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K(x-\xi)^\sigma\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|I_4\|_E &\leq K\int_\gamma\int_\xi^x \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)} \\
&\quad\times\sum_{i=1}^m \frac{(x-\tau)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}d\tau\,|dz|\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m\int_\xi^x (x-\tau)^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}\,|dz|\,d\tau\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m\int_\xi^x (x-\tau)^{\alpha_i}(x-\tau)^{2\mu_i-3}\,d\tau\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m\int_\xi^x (x-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-3}d\tau\,\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K(x-\xi)^\sigma\left\|w_+^\delta\right\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}
$$

De la même manière on traite la différence $C^+ - D^+$, réécrite sous la forme

$$
\begin{aligned}
C^+ - D^+ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)C_\lambda[z,\xi,x]\,C_\lambda[z,x,\tau]\,w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\left(\Delta_z^+(x,\delta)-\Delta_z^+(\xi,\delta)\right)C_\lambda[z,x,\tau]\,w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)C_\lambda[z,\xi,x]\,w_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
&\quad+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{c_z^+(\tau)}{\sqrt{-z}}\Delta_z^+(\xi,\delta)C_\lambda[z,\xi,\tau]\,w_+^\delta(\tau)d\tau dz.
\end{aligned}
$$

Finalement on déduit que

$$\left\|P_{\lambda,+}^{\delta}\left(w_{+}^{\delta}\right)(x)-P_{\lambda,+}^{\delta}\left(w_{+}^{\delta}\right)(\xi)\right\|_{E}\leq K\left(x-\xi\right)^{\sigma}\left\|w_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)},$$

d'où $P_{\lambda,+}^{\delta}\in L\left(C([0,\delta]\,;E);C^{\sigma}([0,\delta]\,;E)\right)$.

2. Pour montrer que $P_{\lambda,+}^{\delta}\in L\left(C([0,\delta]\,;E);C([0,\delta]\,;E)\cap B\left([0,\delta]\,;D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right)\right)$ on doit prouver que pour tout $x\in[0,\delta]$ et $w_{+}^{\delta}\in C([0,\delta]\,;E)$

$$\sup_{r>0}\left\|r^{\alpha/2}Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}P_{\lambda,+}^{\delta}\left(w_{+}^{\delta}\right)(x)\right\|_{E}\leq K\left\|w_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}.$$

On pose

$$\Delta_{P}^{+}(x)=r^{\alpha/2}Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}P_{\lambda,+}^{\delta}\left(w_{+}^{\delta}\right)(x).$$

En utilisant l'identité

$$\begin{aligned}
&Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\\
=\;&\left(Q(x)-rI+rI\right)(Q(x)-rI)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\\
=\;&Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}+r(Q(x)-rI)^{-1}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\\
=\;&Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}+\frac{r}{r-z}Q(x)\left[(Q(x)-rI)^{-1}-(Q(x)-zI)^{-1}\right]\\
=\;&-\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}+\frac{r}{r-z}Q(x)(Q(x)-rI)^{-1},
\end{aligned}$$

et en tenant compte que l' intégrale en $Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}$ est nulle, on a

$$\Delta_{P}^{+}(x)=\frac{r^{\alpha/2}}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)\frac{z}{r-z}C_{\lambda}\left[z,x,\tau\right]w_{+}^{\delta}(\tau)d\tau dz,$$

ainsi et d'après les lemmes 2.8 et 2.11

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{P}^{+}(x)\right\|_{E}\\
\leq\;&Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma}\frac{|z|}{|r-z|\,|z|^{\mu_i-1}}\left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_{0}^{\delta}\left|H_{z,+}^{\delta}(x,\tau)\right||x-\tau|^{\alpha_i}\,d\tau\right)|dz|\left\|w_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
\leq\;&Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma}\frac{|z|}{|r-z|\,|z|^{\mu_i-1}}\frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha_i/2}}\left\|w_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
\leq\;&Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma}\frac{|dz|}{|r-z|\,|z|^{\alpha_i/2+\mu_i-1}}\left\|w_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
\leq\;&Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{r^{\frac{\alpha_i}{2}+\mu_i-1}}\left\|w_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)},\\
\leq\;&Kr^{(\alpha-\sigma)/2}\left\|w_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

♦ **Régularité de $G^\delta_{\lambda,+}$:**

3. Soient $0 \leq \xi < x \leq \delta$ et $w^\delta_- \in C([-1,0];E)$. Alors

$$
\begin{aligned}
& G^\delta_{\lambda,+}\left(w^\delta_-\right)(x) - G^\delta_{\lambda,+}\left(w^\delta_-\right)(\xi) \\
= \; & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,x,\tau]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,\xi,\tau]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) z Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} \\
& \times \left[Q(\tau)^{-1} - Q(\xi)^{-1}\right] w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,x,\xi]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,\xi,\tau]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) z \left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} - Q(\xi)(Q(\xi)-zI)^{-1}\right] \\
& \times \left[Q(\tau)^{-1} - Q(\xi)^{-1}\right] w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,\xi,\tau]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,x,\xi]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,\xi,\tau]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
= \; & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,x,\xi]\, C_\lambda[z,\xi,\tau]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x) - c_z^+(\xi)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,\xi,\tau]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}} \sinh\sqrt{-z}(\tau+1) C_\lambda[z,x,\xi]\, w^\delta_-(\tau) d\tau dz \\
= \; & \sum_{i=1}^3 I_i.
\end{aligned}
$$

Pour I_1 on a

$$
\|I_1\|_E \leq K \int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)} \sum_{i=1}^m \frac{(x-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i - 1}} \sum_{i=1}^m \frac{(\xi-\tau)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i - 1}} d\tau\, |dz|\, \left\|w^\delta_-\right\|_{C([-1,0];E)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}\int_{-1}^{0}(x-\xi)^{\alpha_i}(\xi-\tau)^{\alpha_j}\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{\mu_i+\mu_j-3/2}}|dz|\,d\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}\int_{-1}^{0}(x-\xi)^{\alpha_i}(\xi-\tau)^{\alpha_j}(x-\tau)^{2\mu_i+2\mu_j-5}\,d\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}\int_{-1}^{0}(x-\tau)^{\alpha_i}(x-\tau)^{\alpha_j}(x-\tau)^{2\mu_i+2\mu_j-5}\,d\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}\int_{-1}^{0}(x-\tau)^{\alpha_i+\alpha_j+2\mu_i+2\mu_j-5}\,d\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}\int_{-1}^{\xi}(x-\tau)^{\alpha_i+\alpha_j+2\mu_i+2\mu_j-5}\,d\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i,j=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+\alpha_j+2\mu_i+2\mu_j-4}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\leq K(x-\xi)^{\sigma}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}
$$

I_2 peut s'écrire sous la forme

$$
I_2=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}\int_{\xi}^{x}s_z^-(\tau)\sinh\sqrt{-z}(\delta-s)C_\lambda\left[z,\xi,\tau\right]w_-^\delta(\tau)dsd\tau dz,
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\left\|I_2\right\|_E &\leq K\int_{\gamma}\int_{-1}^{0}\int_{\xi}^{x}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-\tau)}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}\sum_{i=1}^{m}\frac{(\xi-\tau)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}dsd\tau\,|dz|\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\int_{\xi}^{x}(\xi-\tau)^{\alpha_i}\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-\tau)}}{|z|^{\mu_i-1}}|dz|\,dsd\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\int_{\xi}^{x}(\xi-\tau)^{\alpha_i}(s-\tau)^{2\mu_i-4}\,dsd\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\int_{\xi}^{x}(s-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-4}\,dsd\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}(x-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-3}\,d\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{\xi}(x-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-3}\,d\tau\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^{m}(x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}\leq K(x-\xi)^{\sigma}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}
$$

Pour I_3 on a

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq K\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)} \sum_{i=1}^m \frac{(x-\xi)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}} d\tau\,|dz|\,\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m \int_{-1}^0 (x-\xi)^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{\mu_i-1/2}}\,|dz|\,d\tau\,\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m \int_{-1}^0 (x-\xi)^{\alpha_i}(x-\tau)^{2\mu_i-3}\,d\tau\,\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m \int_{-1}^0 (x-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-3}\,d\tau\,\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m \int_{-1}^\xi (x-\tau)^{\alpha_i+2\mu_i-3}\,d\tau\,\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x-\xi)^{\alpha_i+2\mu_i-2}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K(x-\xi)^\sigma\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Donc $G_{\lambda,+}^\delta \in L\left(C([-1,0]\,;E);C^\sigma([0,\delta]\,;E)\right)$.

4. On pose pour tout $x\in[0,\delta]$ et $w_-^\delta \in C([-1,0]\,;E)$,

$$\Delta_G^+(x) = r^{\alpha/2}Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}G_{\lambda,+}^\delta\left(w_-^\delta\right)(x).$$

Alors

$$\Delta_G^+(x) = \frac{r^{\alpha/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,\tau\right]w_-^\delta(\tau)d\tau dz,$$

avec

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_G^+(x)\right\|_E &\leq Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^m\int_\gamma \frac{|z|}{|r-z|\,|z|^{\mu_i-1}}\left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_{-1}^0\left|\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\right|(x-\tau)^{\alpha_i}\,d\tau\right) \\
&\quad\times|dz|\,\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^m\int_\gamma \frac{|z|}{|r-z|\,|z|^{\mu_{i-1}}}\frac{|dz|}{|z|^{1+\frac{\alpha_i}{2}}}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^m\int_\gamma \frac{|dz|}{|r-z|\,|z|^{\frac{\alpha_i}{2}+\mu_i-1}}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq Kr^{\alpha/2}\sum_{i=1}^m \frac{1}{r^{\frac{\alpha_i}{2}+\mu_i-1}}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq Kr^{(\alpha-\sigma)/2}\left\|w_-^\delta\right\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

d'où $G_{\lambda,+}^\delta \in L\left(C([-1,0]\,;E);C([0,\delta]\,;E)\cap B\left([0,\delta]\,;D_{Q(.)}(\alpha/2,+\infty)\right)\right)$. ■

On a aussi un résultat similaire sur $[-1,0]$:

Proposition 5.2 *Sous les hypothèses (H.1) et (H.2) on a*

1. $G_{\lambda,-}^\delta \in L\left(C([0,\delta]\,;E);C^\sigma([-1,0]\,;E)\right)$,
2. $G_{\lambda,-}^\delta \in L\left(C([0,\delta]\,;E);C([-1,0]\,;E)\cap B\left([-1,0]\,;D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right)\right)$,
3. $P_{\lambda,-}^\delta \in L\left(C([-1,0]\,;E);C^\sigma([-1,0]\,;E)\right)$,
4. $P_{\lambda,-}^\delta \in L\left(C([-1,0]\,;E);C([-1,0]\,;E)\cap B\left([-1,0]\,;D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right)\right)$.

Preuve. On procède comme dans la preuve de la proposition précédente. ■

Corollaire 5.1 *Sous les hypothèses (H.1) et (H.2) on a*

1. $\Pi_\lambda^\delta \in L\left(C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E);C^\sigma([0,\delta]\,;E)\times C^\sigma([-1,0]\,;E)\right)$,
2. $\Pi_\lambda^\delta \in L\Big(C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E);B_{\alpha/2}^*([0,\delta])\times B_{\alpha/2}^*([-1,0])\Big)$,

   où
$$\left\{\begin{array}{l} B_{\alpha/2}^*([0,\delta]) = B\left([0,\delta]\,;D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right), \\ B_{\alpha/2}^*([-1,0]) = B\left([-1,0]\,;D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right). \end{array}\right.$$

5.2 Régularité de l'opérateur $\left(I+\Pi_\lambda^\delta\right)^{-1}$

Proposition 5.3 *Sous les hypothèses (H.1) et (H.2) et pour tout $\lambda \geq \lambda^*$ (voir définition de λ^* page 70), on a*

1. $\left(I+\Pi_\lambda^\delta\right)^{-1} \in L\left(C([0,\delta]\,;E)\times C([-1,0]\,;E)\right)$,
2. $\left(I+\Pi_\lambda^\delta\right)^{-1} \in L\left(C^\sigma([0,\delta]\,;E)\times C^\sigma([-1,0]\,;E)\right)$,
3. $\left(I+\Pi_\lambda^\delta\right)^{-1} \in L\left(B\left([0,\delta]\,;D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right)\times B\left([-1,0]\,;D_{Q(.)}\left(\alpha/2,+\infty\right)\right)\right)$.

Preuve. 1. Se déduit de l'inversibilité de l'opérateur $I+\Pi_\lambda^\delta$.

2. Soient $\left(Y_+^\delta, Y_-^\delta\right) \in C^\sigma([0,\delta]\,;E)\times C^\sigma([-1,0]\,;E)$ et

$$\begin{pmatrix} X_+^\delta \\ X_-^\delta \end{pmatrix} = \left(I+\Pi_\lambda^\delta\right)^{-1}\begin{pmatrix} Y_+^\delta \\ Y_-^\delta \end{pmatrix}.$$

Alors il suffit d'écrire que

$$\begin{pmatrix} X_+^\delta \\ X_-^\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_+^\delta \\ Y_-^\delta \end{pmatrix} - \Pi_\lambda^\delta \begin{pmatrix} X_+^\delta \\ X_-^\delta \end{pmatrix},$$

et d'utiliser le corollaire précédent.

3. Même raisonnement que celui du deuxième point. ■

5.3 Résultat de régularité sur le second membre

On donne ici un résultat de régularité, par rapport à la variable cachée, utilisé souvent pour déduire la régularité croisée de la solution.

Proposition 5.4 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $f_+^\delta \in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$, $f_- \in D(Q(-1))$, $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,;E\right)$ *et* $g_- \in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\,;E\right)$. *Soit aussi*

$$\beta \in \left]0, \min(2\alpha_0,\sigma)\right], \quad \sigma = \min_{i=1,\ \dots,\ m}(\alpha_i + 2\mu_i - 2)\,.$$

Alors on a

1. $F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(.) - g_+^\delta(.) \in B\left([0,\delta]\,; D_{Q(.)}\left(\beta/2,+\infty\right)\right)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} (-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty), \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_{Q(0)}\left(\alpha_0,+\infty\right). \end{cases}$$

2. $F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(.) - g_-(.) \in B\left([-1,0]\,; D_{Q(.)}\left(\beta/2,+\infty\right)\right)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} (-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty), \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_{Q(0)}\left(\alpha_0,+\infty\right), \\ Q(-1)f_- - g_-(-1) \in D_{Q(-1)}\left(\alpha_0,+\infty\right). \end{cases}$$

Preuve.

1. On a pour tout $x \in \left]0,\delta\right[$

$$\begin{aligned} & F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) \\ = \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}} Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} f_- dz \\ & - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)\right) d\tau dz \\ & - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{c_z^+(x)}{z}\cosh\sqrt{-z}\, Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz + g_+^\delta(x) \\ & - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1) Q(x)(Q(x)-zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz. \end{aligned}$$

On doit montrer que

$$\sup_{r>0}\left\| r^{\beta/2} Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}\left\{F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) - g_+^\delta(x)\right\}\right\|_E \le K.$$

On a

$$\begin{aligned}
&Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}\left\{F_+^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x)-g_+^\delta(x)\right\}\\
=\;& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}f_-dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz.
\end{aligned}$$

On développe ces intégrales afin d'utiliser l'hypothèse (H.2), donc on aura

$$\begin{aligned}
&r^{\beta/2}Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}\left\{F_+^\delta(f_+^\delta,f_-,g_+^\delta,g_-)(x)-g_+^\delta(x)\right\}\\
=\;& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}\right]f_+^\delta dz\\
&-\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\
&-\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{z}{r-z}\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\right]f_-dz\\
&-\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{z}{r-z}Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz\\
&+\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz\\
&+\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\right]g_+^\delta(x)dz\\
&+\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz\\
&+\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}\\
&\times\left[Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}-Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\right]g_-(\tau)d\tau dz\\
&+\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 \frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz\\
=\;& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,\delta\right]Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\
&-\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,-1\right]Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{z}{r-z}Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}f_-dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(x)-g_+^\delta(0)\right]dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(0)dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(0)\right]d\tau dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(0)d\tau dz \\
= & -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,\delta\right]Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\frac{s_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,-1\right](Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{z}{r-z}(Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_-dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x,\tau)\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(x)\right)d\tau dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(x)dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(x)-g_+^\delta(0)\right]dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(0)dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0\frac{c_z^+(x)}{\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}(\tau+1)\frac{z}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(0)\right]d\tau dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\cosh\sqrt{-z}\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(0)dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^+(x)\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(0)dz \\
= & \sum_{i=1}^{12} I_i,
\end{aligned}
$$

et on a

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_E & \leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}}\frac{|z|}{|r-z|}\sum_{i=1}^{m}\frac{(\delta-x)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\frac{|dz|}{|z|^{1/2}}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
& \leq Kr^{\beta/2}\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|r-z|\,|z|^{\mu_i-1}}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
& \leq Kr^{\beta/2}\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|r-z|^{\beta/2}\,|r-z|^{1-\beta/2}\,|z|^{\mu_i-1}}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
& \leq Kr^{\beta/2}\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{r^{\beta/2}\,|z|^{1-\beta/2}\,|z|^{\mu_i-1}}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
& \leq K\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\mu_i-\beta/2}}|dz|\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)},
\end{aligned}
$$

ceci en utilisant le lemme 2.10. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_E & \leq K\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i}(\delta-x)^{2\mu_i-2-\beta}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
& \leq K\sum_{i=1}^{m}(\delta-x)^{\alpha_i+2\mu_i-2-\beta}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
& \leq K(\delta-x)^{\sigma-\beta}\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)} \\
& \leq K\left\|f_+^\delta\right\|_{D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|I_2\|_E & \leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2}}\frac{|z|}{|r-z|}\frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}}\left\|(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty)} \\
& \leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|r-z|^{\beta/2}\,|r-z|^{1-\beta/2}\,|z|^{\alpha_0}}|dz|\left\|(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty)} \\
& \leq K\int_\gamma\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\alpha_0+1-\beta/2}}|dz|\left\|(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty)} \\
& \leq K(\delta-x)^{2\alpha_0-\beta}\left\|(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty)} \\
& \leq K\left\|(-Q(\delta))^{1/2}f_+^\delta\right\|_{D_{Q(\delta)}(\alpha_0,+\infty)},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}\frac{|z|}{|r-z|}\sum_{i=1}^m\frac{(x+1)^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\frac{|dz|}{|z|}\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x+1)^{\alpha_i}\,r^{\beta/2}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|r-z|^{\beta/2}\,|r-z|^{1-\beta/2}\,|z|^{\mu_i-1}}\,|dz|\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x+1)^{\alpha_i}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\mu_i-\beta/2}}\,|dz|\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x+1)^{\alpha_i}\,(x+1)^{2\mu_i-2-\beta}\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\sum_{i=1}^m (x+1)^{\alpha_i+2\mu_i-2-\beta}\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\,(x+1)^{\sigma-\beta}\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\,\|Q(-1)f_-\|_E\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}\frac{|z|}{|r-z|}\frac{|dz|}{|z|}\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|r-z|^{\beta/2}\,|r-z|^{1-\beta/2}}\,|dz|\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1-\beta/2}}\,|dz|\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K(x+1)^{-\beta}\,\|Q(-1)f_-\|_E\\
&\leq K\,\|Q(-1)f_-\|_E\,.
\end{aligned}$$

Pour I_5 on utilise les lemmes 2.8 et 2.11 pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|I_5\|_E &\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma \frac{|z|}{|r-z|}\left(\sup_{x\in[0,\delta]}\int_0^\delta \left|H^\delta_{z,+}(x,\tau)\right|\,|x-\tau|^{2\alpha_0}\,d\tau\right)|dz|\,\left\|g^\delta_+\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma \frac{|dz|}{|r-z|\,|z|^{\alpha_0}}\left\|g^\delta_+\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\frac{r^{\beta/2}}{r^{\alpha_0}}\left\|g^\delta_+\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq Kr^{(\beta-2\alpha_0)/2}\left\|g^\delta_+\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\\
&\leq K\left\|g^\delta_+\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_6\|_E &\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\frac{1}{|r-z|}\sum_{i=1}^m\frac{x^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i-1}}\,|dz|\,\left\|g^\delta_+\right\|_{C([0,\delta];E)}\\
&\leq K\sum_{i=1}^m x^{\alpha_i}r^{\beta/2}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|r-z|\,|z|^{\mu_i-1}}\,|dz|\,\left\|g^\delta_+\right\|_{C([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i} x^{2\mu_i - 2 - \beta} \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i + 2\mu_i - 2 - \beta} \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq K x^{\sigma - \beta} \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \leq K \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\| I_7 \right\|_E &\leq K r^{\beta/2} \int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \frac{1}{|r-z|} x^{2\alpha_0} |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K x^{2\alpha_0} r^{\beta/2} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|r-z|} |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K x^{2\alpha_0} x^{-\beta} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq K x^{2\alpha_0 - \beta} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq K \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} .
\end{aligned}
$$

En regroupant I_8 et I_{11}, on obtient

$$
I_8 + I_{11} = \frac{r^{\beta/2}}{2i\pi} \int_\gamma c_z^+(x) \cosh\sqrt{-z} \frac{1}{r-z} Q(0)(Q(0) - zI)^{-1} \left[g_+^\delta(0) - g_-(0) \right] dz
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\left\| I_8 + I_{11} \right\|_E &\leq K r^{\beta/2} \int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \frac{1}{|r-z|} \frac{|dz|}{|z|^{\alpha_0}} \left\| g_+^\delta(0) - g_-(0) \right\|_{D_{Q(0)}(\alpha_0,+\infty)} \\
&\leq K r^{\beta/2} \int_\gamma \frac{|dz|}{|r-z|\,|z|^{\alpha_0}} \left\| g_+^\delta(0) - g_-(0) \right\|_{D_{Q(0)}(\alpha_0,+\infty)} \\
&\leq K r^{(\beta - 2\alpha_0)/2} \left\| g_+^\delta(0) - g_-(0) \right\|_{D_{Q(0)}(\alpha_0,+\infty)} \\
&\leq K \left\| g_+^\delta(0) - g_-(0) \right\|_{D_{Q(0)}(\alpha_0,+\infty)} .
\end{aligned}
$$

Pour I_9 et I_{10} on a

$$
\begin{aligned}
\left\| I_9 \right\|_E &\leq K r^{\beta/2} \int_\gamma \int_{-1}^{0} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{1/2}} \frac{|z|}{|r-z|} \sum_{i=1}^{m} \frac{x^{\alpha_i}}{|z|^{\mu_i - 1}} d\tau\, |dz| \left\| g_- \right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i} r^{\beta/2} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|r-z|\,|z|^{\mu_i - 1}} |dz| \left\| g_- \right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i} x^{2\mu_i - 2 - \beta} \left\| g_- \right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K \sum_{i=1}^{m} x^{\alpha_i + 2\mu_i - 2 - \beta} \left\| g_- \right\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq K x^{\sigma - \beta} \left\| g_- \right\|_{C([-1,0];E)} \leq K \left\| g_- \right\|_{C([-1,0];E)} ,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|I_{10}\|_E &\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1/2}}\frac{|z|}{|r-z|}\left(\int_{-1}^0 \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)\,(-\tau)^{2\alpha_0}\,d\tau\right) \\
&\quad \times |dz|\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|r-z|\,|z|^{\alpha_0}}\,|dz|\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq Kr^{\beta/2}\int_\gamma \frac{|dz|}{|r-z|\,|z|^{\alpha_0}}\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq Kr^{(\beta-2\alpha_0)/2}\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq K\,\|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}\,.
\end{aligned}$$

I_{12} se traite de la même manière que I_4 et on a

$$\|I_{12}\|_E \leq K(x+1)^{-\beta}\,\|g_-(0)\|_E \leq K\,\|g_-(0)\|_E\,.$$

2. On fait de même pour $F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)$, donc pour tout $x \in [-1,0]$, on écrit que

$$\begin{aligned}
&r^{\beta/2}Q(x)(Q(x)-rI)^{-1}\left\{F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) - g_-(x)\right\} \\
= & -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,\delta\right]Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\frac{z}{r-z}Q(\delta)(Q(\delta)-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,-1\right](Q(-1)-zI)^{-1}Q(-1)f_- dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)\frac{z}{r-z}(Q(-1)-zI)^{-1}\left[Q(-1)f_- - g_-(-1)\right]dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\frac{z}{r-z}C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_+^\delta(\tau)d\tau dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{ps_z^-(x)}{\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(\delta-\tau)\frac{z}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\tau)-g_+^\delta(0)\right]d\tau dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma ps_z^-(x)\sinh\sqrt{-z}\delta\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(0)-g_-(0)\right]dz \\
& -\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma\int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,\tau)\frac{z}{r-z}Q(x)(Q(x)-zI)^{-1}\left[g_-(\tau)-g_-(x)\right]d\tau dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)\frac{1}{r-z}C_\lambda\left[z,x,-1\right]Q(-1)(Q(-1)-z)^{-1}g_-(x)dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma c_z^-(x)\frac{1}{r-z}Q(-1)(Q(-1)-zI)^{-1}\left[g_-(x)-g_-(-1)\right]dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma ps_z^-(x)\sinh\sqrt{-z}\delta\frac{1}{r-z}C_\lambda\left[z,x,0\right]Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}g_-(x)dz \\
& +\frac{r^{\beta/2}}{2i\pi}\int_\gamma ps_z^-(x)\sinh\sqrt{-z}\delta\frac{1}{r-z}Q(0)(Q(0)-zI)^{-1}\left[g_-(x)-g_-(0)\right]dz.
\end{aligned}$$

D'une manière analogue on montre que

$$\sup_{r>0} \left\| r^{\beta/2} Q(x)(Q(x)-rI)^{-1} \left\{ F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-)(x) - g_-(x) \right\} \right\|_E \leq K,$$

d'où le résultat. ■

5.4 Théorème de régularité maximale

On donne maintenant le théorème de régularité maximale qui englobe toutes les propositions précédentes.

Théorème 5.1 *On suppose (H.1) et (H.2). Soient* $f_+^\delta \in D\left((-Q(\delta))^{1/2}\right)$*,* $f_- \in D(Q(-1))$*,* $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]\,;E)$ *et* $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0]\,;E)$ *tels que*

$$\begin{cases} g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_{Q(0)}(\alpha_0, +\infty), \\ (-Q(\delta))^{1/2} f_+^\delta \in D_{Q(\delta)}(\alpha_0, +\infty), \\ Q(-1)f_- - g_-(-1) \in D_{Q(-1)}(\alpha_0, +\infty). \end{cases}$$

Soit $\beta \in \left]0, \min(2\alpha_0, \sigma)\right]$*, où* $\sigma = \min\limits_{i=1,\,\ldots,\,m} (\alpha_i + 2\mu_i - 2)$*. Alors la solution* $\left(u_+^\delta, u_-^\delta\right)$ *du problème* (P_δ) *donnée par (3.23) vérifie*

1. $u_+^\delta(.) \in C^\beta([0,\delta]\,;D(Q(.)))$, $u_-^\delta(.) \in C^\beta([-1,0]\,;D(Q(.)))$,
2. $\left(u_+^\delta\right)''(.) \in C^\beta([0,\delta]\,;E)$, $\left(u_-^\delta\right)''(.) \in C^\beta([-1,0]\,;E)$,
3. $\left(u_+^\delta\right)''(.) \in B\left([0,\delta]\,;D_{Q(.)}(\beta/2,+\infty)\right)$, $\left(u_-^\delta\right)''(.) \in B\left([-1,0]\,;D_{Q(.)}(\beta/2,+\infty)\right)$.

Preuve. 1 et 2 se démontrent de la même manière que dans la preuve du théorème 3.2 en utilisant les inclusions

$$\begin{array}{rcl} g_+^\delta & \in & C^{2\alpha_0}([0,\delta]\,;E) \subset C^\beta([0,\delta]\,;E), \\ g_- & \in & C^{2\alpha_0}([-1,0]\,;E) \subset C^\beta([-1,0]\,;E), \end{array}$$

et les résultats des propositions 3.14 et 5.3.

3. L'égalité (3.24) implique

$$\begin{pmatrix} w_+^\delta \\ w_-^\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \\ F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \end{pmatrix} - \Pi_\lambda^\delta \begin{pmatrix} w_+^\delta \\ w_-^\delta \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \left(u_+^\delta\right)'' \\ \left(u_-^\delta\right)'' \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} g_+^\delta \\ g_- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_+^\delta \\ w_-^\delta \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} g_+^\delta - F_+^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \\ g_- - F_-^\delta(f_+^\delta, f_-, g_+^\delta, g_-) \end{pmatrix} + \Pi_\lambda^\delta \begin{pmatrix} w_+^\delta \\ w_-^\delta \end{pmatrix}, \end{array}$$

en utilisant ensuite le corollaire 5.1 et la proposition 5.4, on obtient le résultat. ■

Chapitre 6

Exemples d'application

Afin d'illustrer la totalité des résultats obtenus, on donne dans ce chapitre deux exemples concrets en considérant un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients variables en $(x, y) \in [-1, \delta] \times \overline{\Omega}$ pour les deux cas $E = L^r(\Omega)$, $1 < r < +\infty$ et $E = C\left(\overline{\Omega}\right)$, où Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$.

6.1 Cas $E = L^r(\Omega)$, $1 < r < +\infty$

Soit $E = L^r(\Omega)$, $1 < r < +\infty$, où Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2.

Pour la fonction régulière

$$\begin{array}{lll} \varphi: & \Omega & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & y = (y_1, y_2, ...y_n) & \mapsto \varphi(y_1, y_2, ...y_n), \end{array}$$

on pose

$$\begin{cases} E(x, y, D)\varphi(y) \\ = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, y) D_{ij}\varphi(y) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x, y) D_i\varphi(y) + c(x, y)\varphi(y), \quad (x, y) \in]-1, \delta[\times \Omega, \\ \Gamma(x, s, D)\varphi \\ = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x, s) D_i\varphi + e(x, s)\varphi, \quad (x, s) \in]-1, \delta[\times \partial\Omega, \end{cases}$$

où les coefficients

$$\begin{array}{rcl} a_{ij}, b_i, c & : & [-1, \delta] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C} \\ d_i, e & : & [-1, \delta] \times \partial\Omega \to \mathbb{C} \end{array}$$

vérifient les hypothèses suivantes :

1. $\exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in [-1,\delta] \times \overline{\Omega}$, $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\operatorname{Re} a_{ij}(x,y)\xi_i\xi_j \geq \eta \left|\xi\right|^2 = \eta \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2\right),$$

2. $\forall (x,s) \in [-1,\delta] \times \partial\Omega$,
$$\begin{cases} \operatorname{Im} d_i(x,s) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x,s)v_i(s) \neq 0, \end{cases}$$
où $v(s) = (v_1(s), v_2(s), ..., v_n(s))$ est le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$ au point s,

3. $a_{ij}(x,.), b_i(x,.), c(x,.) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ uniformément par rapport à $x \in [-1,\delta]$, et $d_i(x,.), e(x,.) \in C^1(\partial\Omega)$ uniformément par rapport à $x \in [-1,\delta]$,

4. il existe ρ, $K > 0$ tels que pour tout $x_1, x_2 \in [-1,\delta]$, $y \in \Omega$ et $s \in \partial\Omega$,
$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x_1,y) - a_{ij}(x_2,y)| + \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i(x_1,y) - b_i(x_2,y)| + |c(x_1,y) - c(x_2,y)| \\ \leq K\left|x_1 - x_2\right|^{\rho}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} |d_i(x_1,s) - d_i(x_2,s)| + |e(x_1,s) - e(x_2,s)| \leq K\left|x_1 - x_2\right|, \\ \sum\limits_{i,k=1}^{n} |D_k d_i(x_1,s)| + \sum\limits_{k=1}^{n} |D_k e(x_1,s)| \leq K. \end{cases}$$

On considère alors le problème concret suivant :

$$(PC)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_-^\delta}{\partial x^2}(x,y) + E(x,y,D)U_-^\delta(x,y) - \lambda U_-^\delta(x,y) = G_-(x,y), \quad \text{sur }]-1,0[\times \Omega, \\ \dfrac{\partial^2 U_+^\delta}{\partial x^2}(x,y) + E(x,y,D)U_+^\delta(x,y) - \lambda U_+^\delta(x,y) = G_+^\delta(x,y), \quad \text{sur }]0,\delta[\times \Omega, \\ \Gamma(x,s,D)U_-^\delta(x,s) = 0, \quad \text{sur }]-1,0[\times\partial\Omega, \\ \Gamma(x,s,D)U_+^\delta(x,s) = 0, \quad \text{sur }]0,\delta[\times\partial\Omega, \\ U_-^\delta(-1,y) = 0, \quad \dfrac{\partial U_+^\delta}{\partial x}(\delta,y) = 0, \quad \text{sur } \Omega, \\ U_-^\delta(0,y) = U_+^\delta(0,y), \quad \text{sur } \Omega, \\ \dfrac{\partial U_-^\delta}{\partial x}(0,y) = \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial U_+^\delta}{\partial x}(0,y), \quad \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ et
$$\begin{cases} G_- \in C^{2\alpha_0}([-1,0]\,; L^r(\Omega)), \\ G_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]\,; L^r(\Omega)) \text{ avec } 0 < 2\alpha_0 < 1. \end{cases}$$

On définit la famille $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ par

$$\begin{cases} D(\mathbf{A}(x)) = \{\varphi \in W^{2,r}(\Omega) : \ \Gamma(x,s,D)\varphi = 0, \ s \in \partial\Omega \ \} \\ (\mathbf{A}(x)\varphi)(y) = (E(x,y,D)\varphi)(y). \end{cases}$$

Remarque 6.1 *Les conditions aux limites montrent que les domaines $D(\mathbf{A}(x))$ sont variables et dépendent effectivement de x.*

Théorème 6.1 $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ *est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines denses dans E vérifiant les deux hypothèses (H.1) et (H.2).*

Preuve. On peut facilement vérifier que $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines denses dans E.
Pour (H.1), on utilise le résultat d'Agmon suivant :

Proposition 6.1 *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, il existe $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $\omega = \omega(r) > 0$ tels que pour tout $z \in \Sigma_{\varphi,\omega} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \varphi, \ \ |z| \geq \omega\}$ et $x \in \left]-1, \delta\right[$, le problème*

$$\begin{cases} E(x,.,D)\,u - zu = f \in L^r(\Omega) \\ \Gamma(x,.,D)\,u = g \in W^{1-1/r,r}(\partial\Omega) \end{cases}, \quad r \in \left]1, +\infty\right[,$$

admet une unique solution $u(x,.) \in W^{2,r}(\Omega)$. De plus il existe $C(r) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\left(|z|\,\|u\|_{L^r(\Omega)} + |z|^{1/2}\,\|Du\|_{L^r(\Omega)} + \left\|D^2u\right\|_{L^r(\Omega)}\right) \\ \leq \ & C(r)\left\{\|f\|_{L^r(\Omega)} + \inf_{w\in W^{1,r}(\Omega)}\left\{|z|^{1/2}\,\|w\|_{L^r(\Omega)} + \|Dw\|_{L^r(\Omega)}\right\}\right\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $w = g$ sur $\partial\Omega$.
(Voir Tanabe [36], page 83, lemme 3.8.1 et page 88, théorème 3.8.2).

Donc on déduit que la famille $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ verifie (H.1) avec $\lambda_0 = \omega$, $C = C(r)$ et $\theta_0 = \varphi$.

Pour la preuve de (H.2), on fixe x_1 et x_2 tels que

$$-1 \leq x_1 < x_2 \leq \delta.$$

On écrit que

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}(x_1) - \omega I)(\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1}\left[(\mathbf{A}(x_1) - \omega I)^{-1} - (\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1}\right] \\ &= (\mathbf{A}(x_1) - \omega I)(\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1}\left[(\mathbf{A}(x_1) - \omega I)^{-1}(\mathbf{A}(x_2) - \omega I) - I\right](\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} \\ &= (\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1}(\mathbf{A}(x_2) - \omega I)(\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} \\ &- (\mathbf{A}(x_1) - \omega I)(\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1}(\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1} (\mathbf{A}(x_2) - zI + zI - \omega I) (\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} \\
&- (\mathbf{A}(x_1) - zI + zI - \omega I) (\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1} (\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} \\
&= (\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1} (\mathbf{A}(x_2) - zI) (\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} \\
&- (\mathbf{A}(x_1) - zI) (\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1} (\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} \\
&= \left[(\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1} (\mathbf{A}(x_2) - zI) - I\right] (\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Soit $f \in L^r(\Omega)$. On pose

$$
v = (\mathbf{A}(x_2) - \omega I)^{-1} f, \qquad u = (\mathbf{A}(x_1) - zI)^{-1} (\mathbf{A}(x_2) - zI) v.
$$

On doit donc estimer $\|u - v\|_{L^r(\Omega)}$.

v et u sont des solutions des systèmes

$$
\begin{cases} E(x_2, y, D) v - \omega v = f, & y \in \Omega \\ \Gamma(x_2, s, D) v = 0, & s \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.2}
$$

et

$$
\begin{cases} E(x_1, y, D) u - zu = E(x_2, y, D) v - zv, & y \in \Omega \\ \Gamma(x_1, s, D) u = 0, & s \in \partial\Omega, \end{cases}
$$

respectivement, par conséquent $u - v$ est solution du problème

$$
\begin{cases} E(x_1, y, D)[u - v] - z[u - v] = E(x_2, y, D) v - E(x_1, y, D) v, & y \in \Omega \\ \Gamma(x_1, s, D)[u - v] = [\Gamma(x_2, s, D) - \Gamma(x_1, s, D)] v = g, & s \in \partial\Omega. \end{cases}
$$

Maintenant soit $\Phi_{x_1,x_2}(.) \in D(\Omega)$ satisfaisant

$$
\begin{cases} \Phi_{x_1,x_2}(y) = 1 & \text{si } d(y, \partial\Omega) \le (x_2 - x_1)/2 \\ \Phi_{x_1,x_2}(y) = 0 & \text{si } d(y, \partial\Omega) \ge x_2 - x_1 \\ \left| \dfrac{\partial \Phi_{x_1,x_2}}{\partial y_k}(y) \right| \le \dfrac{C}{x_2 - x_1}, & k = 1, 2, \ldots n. \end{cases}
$$

En appliquant le résultat de la proposition précédente sur le dernier système et pour

$$
w = \Phi_{x_1,x_2}(.) g,
$$

(et qui vérifie $w = g$ sur $\partial\Omega$ par construction), on obtient l'estimation

$$
\begin{aligned}
& |z| \, \|u - v\|_{L^r(\Omega)} \\
\le \; & C(r) \Big(\|[E(x_2, y, D) - E(x_1, y, D)] v\|_{L^r(\Omega)} \\
& + |z|^{1/2} \|\Phi_{x_1,x_2}(.) g\|_{L^r(\Omega)} + \|D(\Phi_{x_1,x_2}(.) g)\|_{L^r(\Omega)} \Big).
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

D'après l'hypothèse 4, on a

$$\begin{aligned} & \|[E(x_2, y, D) - E(x_1, y, D)]v\|_{L^r(\Omega)} \le K(x_2 - x_1)^\rho \|v\|_{W^{2,r}(\Omega)} \\ \le \; & K(x_2 - x_1)^\rho \|f\|_{L^r(\Omega)}, \end{aligned}$$

et ceci en utilisant la proposition 6.1 pour le système (6.2).
Pour majorer les deux derniers termes dans (6.3) on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 6.1 *On suppose que $r > n$. Soit*

$$\Omega_{x_2 - x_1} = \{y \in \Omega : d(y, \partial\Omega) < x_2 - x_1\}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{x_2-x_1}} |v(y)|^r \, dy & \le C(x_2 - x_1) \|v\|^r_{W^{2,r}(\Omega)} \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_{x_2-x_1}} |D_i v(y)|^r \, dy & \le C(x_2 - x_1) \|v\|^r_{W^{2,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Preuve. Comme $r > n$, on a $W^{1,r}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ (voir [11], page 168), donc on peut déduire que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_{x_2-x_1}} |D_i v(y)|^r \, dy \\ \le \; & (x_2 - x_1)(mes\partial\Omega) \sum_{i=1}^n \left(\max_\Omega |D_i v(y)| \right)^r \\ \le \; & C(x_2 - x_1) \|v\|^r_{W^{2,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

On fait de même pour le premier terme. ■

En revenant à (6.3), on a

$$\begin{aligned} & |z|^{1/2} \|\Phi_{x_1,x_2}(.)g\|_{L^r(\Omega)} \\ \le \; & |z|^{1/2} \|[\Gamma(x_2, s, D) - \Gamma(x_1, s, D)]v\|_{L^r(\Omega)} \\ \le \; & |z|^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_{x_2-x_1}} |d_i(x_2, s) - d_i(x_1, s)|^r |D_i v(y)|^r \, dy \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_{x_2-x_1}} |e(x_2, s) - e(x, s)|^r |v(y)|^r \, dy \right\}^{1/r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad K\left|z\right|^{1/2}(x_2-x_1)\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega_{x_2-x_1}}\left|D_iv(y)\right|^r dy+\int\limits_{\Omega_{x_2-x_1}}\left|v(y)\right|^r dy\right)^{1/r}\\
&\leq \quad K\left|z\right|^{1/2}(x_2-x_1)^{1+1/r}\left\|v\right\|_{W^{2,r}(\Omega)}\\
&\leq \quad K\left|z\right|^{1/2}(x_2-x_1)^{1+1/r}\left\|f\right\|_{L^r(\Omega)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\|D(\Phi_{x_1,x_2}(.)g)\right\|_{L^r(\Omega)}=\left\|D\left[\Phi_{x_1,x_2}(.)\left(\Gamma(x_2,s,D)-\Gamma(x_1,s,D)\right)v\right]\right\|_{L^r(\Omega)}\\
\leq\ &\left\|D\left[\Phi_{x_1,x_2}(.)\sum_{i=1}^{n}\left[d_i(x_2,s)-d_i(x_1,s)\right]D_iv\right]\right\|_{L^r(\Omega)}\\
&+\left\|D\left[\Phi_{x_1,x_2}(.)\left[e(x_2,s)-e(x_1,s)\right]v\right]\right\|_{L^r(\Omega)}\\
\leq\ &\sum_{k,i=1}^{n}\left\|D_k\Phi_{x_1,x_2}(.)\left[d_i(x_2,s)-d_i(x_1,s)\right]D_iv\right\|_{L^r(\Omega)}\\
&+\sum_{k=1}^{n}\left\|D_k\Phi_{x_1,x_2}(.)\left[e(x_2,s)-e(x_1,s)\right]v\right\|_{L^r(\Omega)}\\
&+\sum_{k,i=1}^{n}\left\|\Phi_{x_1,x_2}(.)D_k\left[d_i(x_2,s)-d_i(x_1,s)\right]D_iv\right\|_{L^r(\Omega)}\\
&+\sum_{k=1}^{n}\left\|\Phi_{x_1,x_2}(.)D_k\left[e(x_2,s)-e(x_1,s)\right]v\right\|_{L^r(\Omega)}\\
&+\sum_{k,i=1}^{n}\left\|\Phi_{x_1,x_2}(.)\left[d_i(x_2,s)-d_i(x_1,s)\right]D_kD_iv\right\|_{L^r(\Omega)}\\
&+\sum_{k=1}^{n}\left\|\Phi_{x_1,x_2}(.)\left[e(x_2,s)-e(x_1,s)\right]D_kv\right\|_{L^r(\Omega)},
\end{aligned}$$

en utilisant les hypothèses et le lemme précédent on déduit que

$$\begin{aligned}
&\left\|D(\Phi_{x_1,x_2}(.)g)\right\|_{L^r(\Omega)}\\
\leq\ \ &K\left(\frac{C}{x_2-x_1}(x_2-x_1)+K\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega_{x_2-x_1}}\left|D_iv(y)\right|^r dy+\int\limits_{\Omega_{x_2-x_1}}\left|v(y)\right|^r dy\right)^{1/r}\\
&+K(x_2-x_1)\left\|v\right\|_{W^{2,r}(\Omega)}\\
\leq\ \ &K(x_2-x_1)^{1/r}\left\|v\right\|_{W^{2,r}(\Omega)}\\
\leq\ \ &K(x_2-x_1)^{1/r}\left\|f\right\|_{L^r(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|u-v\right\|_{L^r(\Omega)}\leq\frac{K}{|z|}\left\{(x_2-x_1)^{\rho}+|z|^{1/2}(x_2-x_1)^{1+1/r}+(x_2-x_1)^{1/r}\right\}\left\|f\right\|_{L^r(\Omega)}.$$

Alors l'hypothèse (H.2) est vérifiée pour $\lambda_0 = \omega = \omega(r)$ et $(\alpha_1, \mu_1) = (\rho, 1)$, $(\alpha_2, \mu_2) = (1 + 1/r, 1/2)$, $(\alpha_3, \mu_3) = (1/r, 1)$. $\blacksquare$

Remarque 6.2 *Quand $r \leq n$, on peut démontrer (H.2), en utilisant un lemme analogue au lemme 6.1, avec $(\alpha_1, \mu_1) = (\rho, 1)$, $(\alpha_2, \mu_2) = (1 + 1/n, 1/2)$, $(\alpha_3, \mu_3) = (1/n, 1)$ si $r < n$, $(\alpha_1, \mu_1) = (\rho, 1)$, $(\alpha_2, \mu_2) = (1 + 2v, 1/2)$, $(\alpha_3, \mu_3) = (2v, 1)$ si $r = n$ et $v < 1/2n$.*

Ainsi on peut appliquer tous les résultats des chapitres précédents pour (PC).
En utilisant les notations suivantes :

$$\begin{cases} U^\delta(x,y) := u^\delta(x)(y) & \text{pour } (x,y) \in]-1, \delta[\times\Omega, \\ G^\delta(x,y) := g^\delta(x)(y) & \text{pour } (x,y) \in]-1, \delta[\times\Omega, \end{cases}$$

le problème (PC) peut s'écrire sous la forme abstraite suivante :

$$(P_\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + \mathbf{A}(x)\, u^\delta(x) - \lambda u^\delta(x) = g^\delta(x) \quad \text{sur} \quad]-1, 0[\, \cup\,]0, \delta[\,, \\ u^\delta(-1) = 0, \quad (u^\delta)'(\delta) = 0, \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+)\,, \quad (u^\delta)'(0^-) = \dfrac{1}{\delta}(u^\delta)'(0^+)\,. \end{cases}$$

Dans ce cas $f_+^\delta = f_- = 0$ et

$$D_{\mathbf{A}(x)}(\alpha_0, +\infty) = (D(\mathbf{A}(x)), L^r(\Omega))_{1-\alpha_0,+\infty} \subset B^{2\alpha_0}_{r,+\infty}(\Omega)\,.$$

(Pour plus de détails sur l'espace de Nikolski $B^{2\alpha_0}_{r,+\infty}(\Omega)$ et la caractérisation de l'espace d'interpolation $D_{\mathbf{A}(x)}(\alpha_0, +\infty)$ voir [20], [37]).
Ces espaces pour $0 < 2\alpha_0 < 1$, ne préservent pas toujours les conditions aux limites sur le bord. Voir à ce titre le cas traité en une variable avec les conditions de Dirichlet [20], p. 708.

On obtient donc les deux théorèmes suivants correspondants aux théorèmes 3.2 et 5.1.

Théorème 6.2 *On suppose que*

$$\begin{cases} G_+^\delta(.,.) \in C_x([0,\delta]\,; L_y^r(\Omega)) \text{ et } G_+^\delta(.,y) \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega, \\ G_-(.,.) \in C_x([-1,0]\,; L_y^r(\Omega)) \text{ et } G_-(.,y) \in C^{2\alpha_0}([-1,0]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega. \end{cases}$$

Alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, le problème (PC) admet une solution unique $\left(U_+^\delta, U_-^\delta\right)$ vérifiant

1. $$U_+^\delta(.,.) \in C_x([0,\delta]\,; L_y^r(\Omega)) \text{ et } U_+^\delta(.,y) \in C^2([0,\delta]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega,$$

2. $$U_+^\delta(x,.) \in W^{2,r}(\Omega)\,, \Gamma(x,s,D)U_+^\delta(x,.) = 0, \quad s \in \partial\Omega$$

   uniformément par rapport à $x \in [0,\delta]$ et

   $$x \mapsto E(x,y,D)U_+^\delta(x,y) \in C([0,\delta]) \text{ pour p.p.} y \in \Omega,$$

3.
$$U_-^\delta(.,.) \in C_x([-1,0]\,; L_y^r(\Omega)) \text{ et } U_-^\delta(.,y) \in C^2([-1,0]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega,$$

4.
$$U_-^\delta(x,.) \in W^{2,r}(\Omega)\,, \Gamma(x,s,D)U_-^\delta(x,.) = 0, \quad s \in \partial\Omega$$

uniformément par rapport à $x \in [-1,0]$ et

$$x \mapsto E(x,y,D)U_-^\delta(x,y) \in C([-1,0]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega.$$

Théorème 6.3 *Soient*

$$\begin{cases} G_+^\delta(.,.) \in C_x([0,\delta]\,; L_y^r(\Omega)) \text{ et } G_+^\delta(.,y) \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]) \text{ pour p.p.} y \in \Omega, \\ G_-(.,.) \in C_x([-1,0]\,; L_y^r(\Omega)) \text{ et } G_-(.,y) \in C^{2\alpha_0}([-1,0]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega, \end{cases}$$

tels que

$$\begin{cases} y \mapsto G_+^\delta(0,y) - G_-(0,y) \in D_{\mathbf{A}(0)}(\alpha_0, +\infty)\,, \\ y \mapsto G_-(-1,y) \in D_{\mathbf{A}(-1)}(\alpha_0, +\infty)\,. \end{cases}$$

Alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, l'unique solution $\left(U_+^\delta, U_-^\delta\right)$ du problème (PC) vérifie

$$\begin{cases} x \mapsto E(x,y,D)U_+^\delta(x,y) \in C^\beta([0,\delta]) \text{ pour p.p.} y \in \Omega, \\ x \mapsto \dfrac{\partial^2 U_+^\delta}{\partial x^2}(x,y) \in C^\beta([0,\delta]) \text{ pour } \ \text{p.p.} y \in \Omega, \\ \dfrac{\partial^2 U_+^\delta}{\partial x^2}(x,.) \in D_{\mathbf{A}(x)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right), \\ x \mapsto E(x,y,D)U_-^\delta(x,y) \in C^\beta([-1,0]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega, \\ x \mapsto \dfrac{\partial^2 U_-^\delta}{\partial x^2}(x,y) \in C^\beta([-1,0]) \text{ pour p.p. } y \in \Omega, \\ \dfrac{\partial^2 U_-^\delta}{\partial x^2}(x,.) \in D_{\mathbf{A}(x)}\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right), \end{cases}$$

où

$$\beta \in \left]0, \min(2\alpha_0, \sigma)\right], \quad \sigma = \min(\rho, 1/r).$$

6.2 Cas $E = C\left(\overline{\Omega}\right)$

Soit $E = C\left(\overline{\Omega}\right)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert régulier et borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2. On garde les mêmes notations et les trois premières hypothèses de l'exemple précédent avec l'hypothèse supplémentaire suivante :

$a_{ij}(.,y)\,, b_i(.,y)\,, c(.,y)$ sont höldériens d'exposant ρ uniformément par rapport à $y \in \overline{\Omega}$, et $\exists\, \nu > 0 : d_i(.,s)\,, e(.,s) \in C^{1,\nu}([-1,\delta])$ uniformément par rapport à $s \in \partial\Omega$.

Dans ce cas on a

$$D\left(\mathbf{A}(x)\right) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{2,q}(\Omega) \text{ pour un certain } q > n,\ E(x,y,D)\varphi \in C\left(\overline{\Omega}\right) \\ \text{et } \Gamma(x,s,D)\varphi = 0,\ s \in \partial\Omega, \end{array} \right\},$$

par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{D\left(\mathbf{A}(x)\right)} = \left\{\varphi \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{2,q}(\Omega) : \Gamma(x,s,D)\varphi = 0,\ s \in \partial\Omega\right\} \neq C\left(\overline{\Omega}\right), \\ D_{\mathbf{A}(x)}\left(\alpha_0, +\infty\right) = \left(D\left(\mathbf{A}(x)\right), C\left(\overline{\Omega}\right)\right)_{1-\alpha_0,+\infty} \subset C^{2\alpha_0}\left(\overline{\Omega}\right), \end{array} \right.$$

(pour cet espace d'interpolation voir [4]).

Théorème 6.4 $\left(\mathbf{A}(x)\right)_{x\in[-1,\delta]}$ *est une famille d'opérateurs linéaires fermés vérifiant les deux hypothèses (H.1) et (H.2).*

Comme au premier exemple, on utilise la proposition suivante pour montrer l'hypothèse (H.1).

Proposition 6.2 *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, il existe* $\varphi_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, ω_0, r_0, $C_0 > 0$ *tels que pour tout* $z \in \Sigma_{\varphi_0,\omega_0} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \varphi_0,\ \ |z| \geq \omega_0\}$ *et* $x \in \left]-1, \delta\right[$, *le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} E\left(x,.,D\right)u - zu = f \in C\left(\overline{\Omega}\right) \\ \Gamma\left(x,.,D\right)u = g \in C^1\left(\partial\Omega\right), \end{array} \right.$$

admet une unique solution $u\left(x,.\right) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{2,q}(\Omega)$ *vérifiant pour tout* K *assez grand et* $r \leq r_z = \dfrac{Kr_0}{2\left|z\right|^{1/2}}$

$$\begin{aligned} &\left(|z|\left\|u\right\|_{C(\overline{\Omega})} + |z|^{1/2}\left\|Du\right\|_{C(\overline{\Omega})} + |z|^{n/2q}\sup_{y_0\in\overline{\Omega}}\left\|D^2u\right\|_{L^q\left(\Omega_{r,y_0}\right)}\right) \\ \leq\ & C_0\left|z\right|^{n/2q}\left\{\sup_{y_0\in\overline{\Omega}}\left\|f\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} + \sup_{y_0\in\overline{\Omega}}\inf_{w}\left(\left\|w\psi_{2r,y_0}\right\|_{W^{1,q}\left(\Omega_{2r,y_0}\right)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{6.4}$$

où pour chaque $r > 0$ *et* $y_0 \in \overline{\Omega}$,

$$\Omega_{r,y_0} = B(y_0,r) \cap \Omega, \qquad \psi_{r,y_0}(y) = \psi\left(\frac{y-y_0}{r}\right),$$

ψ *est une fonction de* $D(\mathbb{R}^n)$ *à support dans* $B(0,1)$ *telle que*

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} 1 \textit{ sur } B(0,1/2) \\ 0 \textit{ sinon,} \end{array} \right.$$

et $w = g$ *sur* $\partial\Omega$.

Preuve. Pour la démonstration de cette proposition voir Stewart [35].
De cette proposition on déduit que la famille $(\mathbf{A}(x))_{x\in[-1,\delta]}$ vérifie (H.1) avec $\lambda_0 = \omega_0$, $C = C_0$ et $\theta_0 = \varphi_0$.

Pour démontrer l'hypothèse (H.2), on fixe x_1 et x_2 tels que

$$-1 \leq x_1 < x_2 \leq \delta,$$

et pour $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, on pose

$$v = \left(\mathbf{A}(x_2) - \omega_0 I\right)^{-1} f, \quad u = \left(\mathbf{A}(x_1) - zI\right)^{-1}\left(\mathbf{A}(x_2) - zI\right) v.$$

$u - v$ est solution du problème

$$\begin{cases} E\left(x_1, y, D\right)[u-v] - z[u-v] = E\left(x_2, y, D\right) v - E\left(x_1, y, D\right) v, & y \in \Omega \\ \Gamma\left(x_1, s, D\right)[u-v] = [\Gamma\left(x_2, s, D\right) - \Gamma\left(x_1, s, D\right)] v = g, & s \in \partial\Omega. \end{cases}$$

En appliquant le résultat de la proposition précédente pour ce dernier on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} & |z| \left\|u - v\right\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \\ \leq\ & C_0 \left|z\right|^{n/2q} \left(\sup_{y_0\in\overline{\Omega}} \left\|\left(E\left(x_2, y, D\right) - E\left(x_1, y, D\right)\right) v\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \right. \\ & \left. + \sup_{y_0\in\overline{\Omega}} \inf_{v} \left\|\left(\Gamma\left(x_2, s, D\right) - \Gamma\left(x_1, s, D\right)\right) v\psi_{2r,y_0}\right\|_{W^{1,q}\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

et on a

$$\begin{aligned} & \left\|[E\left(x_2, y, D\right) - E\left(x_1, y, D\right)] v\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \\ \leq\ & \left\{ K(x_2 - x_1)^{\rho q} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_{2r,y_0}} \left|D_{ij} v(y)\right|^q dy \right. \\ & \left. + K(x_2 - x_1)^{\rho q} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_{2r,y_0}} \left|D_i v(y)\right|^q dy + K(x_2 - x_1)^{\rho q} \int_{\Omega_{2r,y_0}} \left|v(y)\right|^q dy \right\}^{1/q} \\ \leq\ & \left(K(x_2 - x_1)^{\rho q} \left\|f\right\|^q_{C\left(\overline{\Omega}\right)} + K \frac{(x_2 - x_1)^{\rho q}}{|z|^{n/2}} \left\|f\right\|^q_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

ceci en utilisant l'höldérianité des coefficients, en appliquant le résultat de la proposition 6.2 au problème

$$\begin{cases} E\left(x_2, y, D\right) v - \omega_0 v = f, & y \in \overline{\Omega} \\ \Gamma\left(x_2, s, D\right) v = 0, & s \in \partial\Omega, \end{cases}$$

et aussi le résultat suivant similaire au lemme 6.1 :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_{2r,y_0}} |v(y)|^q\,dy &\leq mes\left(\Omega_{2r,y_0}\right)\|v\|^q_{W^{2,q}(\Omega)} \leq (2r)^n\,\|v\|^q_{W^{2,q}(\Omega)}\\ &\leq \frac{C}{|z|^{n/2}}\,\|v\|^q_{W^{2,q}(\Omega)}\\ \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega_{2r,y_0}} |D_i v(y)|^q\,dy &\leq (2r)^n\,\|v\|^q_{W^{2,q}(\Omega)} \leq \frac{C}{|z|^{n/2}}\,\|v\|^q_{W^{2,q}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\sup_{y_0\in\overline{\Omega}}\left\|\left(E\left(x_2,y,D\right)-E\left(x_1,y,D\right)\right)v\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)}\\ \leq\ & K\left((x_2-x_1)^\rho+\frac{(x_2-x_1)^\rho}{|z|^{n/2q}}\right)\|f\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)}.\end{aligned}$$

Maintenant on majore

$$\left\|\left(\Gamma\left(x_2,s,D\right)-\Gamma\left(x_1,s,D\right)\right)v\psi_{2r,y_0}\right\|_{W^{1,q}\left(\Omega_{2r,y_0}\right)},$$

pour cela on doit estimer

$$\left\|\left(\Gamma\left(x_2,s,D\right)-\Gamma\left(x_1,s,D\right)\right)v\psi_{2r,y_0}\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)},$$

et

$$\left\|D_k\left[\left(\Gamma\left(x_2,s,D\right)-\Gamma\left(x_1,s,D\right)\right)v\psi_{2r,y_0}\right]\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)}, \qquad k=\overline{1,n}.$$

On a

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\Gamma\left(x_2,s,D\right)-\Gamma\left(x_1,s,D\right)\right)v\psi_{2r,y_0}\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)}\\ \leq\ & K(x_2-x_1)\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega_{2r,y_0}}|D_i v(y)|^q\,dy+\int\limits_{\Omega_{2r,y_0}}|v(y)|^q\,dy\right)^{1/q}\\ \leq\ & K\frac{(x_2-x_1)}{|z|^{n/2q}}\,\|f\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)},\end{aligned}$$

et on a aussi pour tout $k=\overline{1,n}$

$$\left\|D_k\left[\left(\Gamma\left(x_2,s,D\right)-\Gamma\left(x_1,s,D\right)\right)v\psi_{2r,y_0}\right]\right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} D_k \left[d_i(x_2,y) - d_i(x_1,y)\right] D_i\left(\psi v\right) \right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \\
&\quad + \left\| \sum_{i=1}^{n} \left[d_i(x_2,y) - d_i(x_1,y)\right] D_k D_i\left(\psi v\right) \right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \\
&\quad + \left\| D_k \left[e(x_2,y) - e(x_1,y)\right] v \right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \\
&\quad + \left\| \left(e(x_2,y) - e(x_1,y)\right) D_k v \right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \\
&\leq K \frac{(x_2-x_1)^\nu}{|z|^{n/2q}} \|f\|_{C(\overline{\Omega})} + K(x_2-x_1)\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \\
&\quad + K \frac{(x_2-x_1)^\nu}{|z|^{n/2q}} \|f\|_{C(\overline{\Omega})} + K \frac{(x_2-x_1)}{|z|^{n/2q}} \|f\|_{C(\overline{\Omega})},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&\left\| D_k \left[\left(\Gamma\left(x_2,s,D\right) - \Gamma\left(x_1,s,D\right)\right) v\psi_{2r,y_0}\right] \right\|_{L^q\left(\Omega_{2r,y_0}\right)} \\
&\leq K \left(\frac{(x_2-x_1)^\nu}{|z|^{n/2q}} + (x_2-x_1) \right) \|f\|_{C(\overline{\Omega})}.
\end{aligned}
$$

En remplaçant ces résultats dans l'estimation (6.5), on obtient

$$
\begin{aligned}
|z| \, \|u-v\|_{C(\overline{\Omega})} &\leq C_0 |z|^{n/2q} \left\{ K\left((x_2-x_1)^\rho + \frac{(x_2-x_1)^\rho}{|z|^{n/2q}} \right) + K \frac{(x_2-x_1)}{|z|^{n/2q}} \right. \\
&\qquad \left. + K \frac{(x_2-x_1)^\nu}{|z|^{n/2q}} + K(x_2-x_1) \right\} \|f\|_{C(\overline{\Omega})} \\
&\leq K |z|^{n/2q} \left[(x_2-x_1)^\rho + \frac{(x_2-x_1)^\rho}{|z|^{n/2q}} + \frac{(x_2-x_1)^\nu}{|z|^{n/2q}} \right],
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\|u-v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq K \left[\frac{(x_2-x_1)^\rho}{|z|^{1-n/2q}} + \frac{(x_2-x_1)^\rho}{|z|} + \frac{(x_2-x_1)^\nu}{|z|} \right] \|f\|_{C(\overline{\Omega})}.
$$

Ainsi l'hypothèse (H.2) est vérifiée pour $\lambda_0 = \omega_0$ et $(\alpha_1, \mu_1) = (\rho, 1 - n/2q)$, $(\alpha_2, \mu_2) = (\rho, 1)$, $(\alpha_3, \mu_3) = (\nu, 1)$ pour q assez grand. ■

On peut donc aussi énoncer les deux théorèmes correspondants aux théorèmes 3.2 et 5.1 dans ce cas

Théorème 6.5 *Soient*

$$
\begin{cases}
G_+^\delta \in C([0,\delta] \times \overline{\Omega}) \text{ et } G_+^\delta(.,y) \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\right) \text{ uniformément par rapport à } y \in \overline{\Omega}, \\
G_- \in C([-1,0] \times \overline{\Omega}) \text{ et } G_-(.,y) \in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\right) \text{ uniformément par rapport à } y \in \overline{\Omega}, \\
y \mapsto G_+^\delta(0,y) - G_-(0,y) \in \overline{D(\mathbf{A}(0))}, \ y \mapsto G_-(-1,y) \in \overline{D(\mathbf{A}(-1))}.
\end{cases}
$$

Alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, le problème (PC) admet une solution unique $\left(U_+^\delta, U_-^\delta\right)$ telle que

1. $U_+^\delta(.,.)$ *est continue dans* $[0,\delta]\times\overline{\Omega}$,

2. $U_+^\delta(.,y)\in C^2\left([0,\delta]\right)$ *uniformément par rapport à* $y\in\overline{\Omega}$,

3. $U_+^\delta(x,.)\in D(\mathbf{A}(x))$ *uniformément par rapport à* $x\in[0,\delta]$ *et*
$$x\mapsto E(x,y,D)U_+^\delta(x,y)\in C([0,\delta]),$$
uniformément par rapport à $y\in\overline{\Omega}$,

4. $U_-^\delta(.,.)$ *est continue dans* $[-1,0]\times\overline{\Omega}$,

5. $U_-^\delta(.,y)\in C^2\left([-1,0]\right)$ *uniformément par rapport à* $y\in\overline{\Omega}$,

6. $U_-^\delta(x,.)\in D(\mathbf{A}(x))$ *uniformément par rapport à* $x\in[-1,0]$ *et*
$$x\mapsto E(x,y,D)U_-^\delta(x,y)\in C([-1,0]),$$
uniformément par rapport à $y\in\overline{\Omega}$.

Théorème 6.6 *Soient*

$$\begin{cases} G_+^\delta\in C([0,\delta]\times\overline{\Omega}) \text{ et } G_+^\delta(.,y)\in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\right) \text{ uniformément par rapport à } y\in\overline{\Omega},\\ G_-\in C([-1,0]\times\overline{\Omega}) \text{ et } G_-(.,y)\in C^{2\alpha_0}\left([-1,0]\right) \text{ uniformément par rapport à } y\in\overline{\Omega},\\ y\mapsto G_+^\delta(0,y)-G_-(0,y)\in D_{\mathbf{A}(0)}\left(\alpha_0,+\infty\right),\ y\mapsto G_-(-1,y)\in D_{\mathbf{A}(-1)}\left(\alpha_0,+\infty\right). \end{cases}$$

Alors il existe $\lambda^*>0$ *tel que pour tout* $\lambda\geq\lambda^*$, *l'unique solution* $\left(U_+^\delta,U_-^\delta\right)$ *du problème* (PC) *vérifie*

$$\begin{cases} x\mapsto E(x,y,D)U_+^\delta(x,y)\in C^\beta([0,\delta]) \text{ uniformément par rapport à } y\in\overline{\Omega},\\ x\mapsto \dfrac{\partial^2U_+^\delta}{\partial x^2}(x,y)\in C^\beta([0,\delta]) \text{ uniformément par rapport à } y\in\overline{\Omega},\\ \dfrac{\partial^2U_+^\delta}{\partial x^2}(x,.)\in D_{\mathbf{A}(x)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right) \text{ uniformément par rapport à } x\in[0,\delta],\\ x\mapsto E(x,y,D)U_-^\delta(x,y)\in C^\beta([-1,0]) \text{ uniformément par rapport à } y\in\overline{\Omega},\\ x\mapsto \dfrac{\partial^2U_-^\delta}{\partial x^2}(x,y)\in C^\beta([-1,0]) \text{ uniformément par rapport à } y\in\overline{\Omega},\\ \dfrac{\partial^2U_-^\delta}{\partial x^2}(x,.)\in D_{\mathbf{A}(x)}\left(\frac{\beta}{2},+\infty\right) \text{ uniformément par rapport à } x\in[-1,0], \end{cases}$$

où
$$\beta\in\left]0,\min(2\alpha_0,\sigma)\right],\quad \sigma=\min(\rho-n/q,\rho,\nu).$$

Bibliographie

[1] **Acquistapace P. and Terreni B. :** *Some Existence and Regularity Results for Abstract Non-Autonomous Parabolic Equations,* J. Math. Anal. Appl., Vol. 99, No 1, (1984), pp. 9-64.

[2] **Acquistapace P. and Terreni B. :** *Une méthode unifiée pour l'étude des équations linéaires non autonomes paraboliques dans les espaces de Banach,* C. R. Acad. Sci. Paris., Vol. 301, (1985), pp. 107-110.

[3] **Acquistapace P. and Terreni B. :** *A unified approach to abstract linear non autonomous parabolic equations,* Rend. Sem. Math. Univ. Padova., Vol. 78, (1987), pp. 47-107.

[4] **Acquistapace P. and Terreni B. :** *Hölder classes with boundary conditions as interpolation spaces,* Math. Z., 195, (1987), pp. 451-471.

[5] **Agmon S, Douglis A. and Niremberg L. :** *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 12, (1959), pp. 623-727.

[6] **Balakrishnan A.V. :** *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by Them,* Pacif. J. Math., Vol 10, (1960), pp. 419-437.

[7] **Belhamiti O. :** *Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince,* Thèse de Doctorat, cotutelle Université du Havre, Université de Mostaganem 2008.

[8] **Belhamiti O., Labbas R., Lemrabet K. and Medeghri A. :** *Study of Boundary Value and Transmission Problems in the Hölder Spaces*, Applied Mathematics and Computation, 202, (2008), pp. 608-619.

[9] **Belhamiti O., Labbas R., Lemrabet K. and Medeghri A. :** *Transmission Problems in a thin layer set in the framework of the Hölder Spaces* : resolution and impedance concept, J. Math. Anal. App. 358, (2009), pp. 457-484.

[10] **Bouziani F., Favini A., Labbas R. and Medeghri A. :** *Study of boundary value and transmission problems governed by a class of variable operators verifying the Labbas-Terreni non commutativity assumption,* Rev. Mat. Complut. 24, (2011), pp. 131-168.

[11] **Brézis H. :** *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[12] **Butzer P. L., Berens H. :** *Semi-groups of Operators and Approximation,* Springer-Verlag, 1967.

[13] **Caloz G., Costabel M., Dauge M. and Vial G. :** *Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer.* Asymptotic Analysis, Vol. 50, n° 1/2, pp 121-173, 2006.

[14] **Da Prato G. et Grisvard P. :** *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles.* J. Math. Pures Appl. IX Ser., 54, (1975), pp. 305-387.

[15] **Dore G., Favini A., Labbas R. and Lemrabet K. :** *An abstract transmission problem in a thin layer, **I** : Sharp estimates,* Journal of Functional Analysis. 261, (2011), pp. *1865-1922.*

[16] **Dore G., Yakubov S :** *Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems,* Semigroup Forum. 60, (2000), pp. *93-121.*

[17] **Dunford N., Schwartz J. T. :** *Linear Operators, General Theory, part **I**,* Interscience Publications, New York, 1958.

[18] **Favini A., Labbas R., Lemrabet K. and Maingot S. :** *Study of The Limit of Transmission Problems in a Thin Layer by The Sum Theory of Linear Operators*, Rev. Mat. Complut. 18 ; Num 1, (2005), pp. 143-176.

[19] **Favini A., Labbas R., Lemrabet K. and Sadallah B-K. :** *Study of a Complete Abstract Differential Equation of Elliptic Type with Variable Operator Coefficients, I,* Rev. Mat. Complut. 21 ; Num 1, (2008), pp. 89-133.

[20] **Grisvard P. :** *Spazi di Tracce e Applicazioni*, Rendiconti di Matematica, 4, Vol. 5, série VI, (1972), pp. 657-729.

[21] **Haase M. :** *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 169*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[22] **Krein S. G. :** *Linear differential equations in Banach spaces*, Moscou, 1967.

[23] **Labbas R. :** *Problèmes aux Limites pour Une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

[24] **Labbas R., Terreni B. :** *Sommes d'Opérateurs de Type Elliptique et Parabolique*, 1ère Partie. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7), (1987), pp. 545-569.

[25] **Labbas R., Terreni B. :** *Sommes d'Opérateurs Linéaires de Type Elliptique et Parabolique*, 2ème Partie. Boll. Un. Math. Ital. 2-B (7), (1988), pp. 141-162.

[26] **Lemrabet K. :** *Étude globale d'un problème de transmission dans un polygone ou un polyèdre*, Thèse 3ème cycle, Université de Nice, 1976.

[27] **Lions J. L., Peetre J. :** *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sc. Publ. Math., Vol. 19, (1964), pp. 5-68.

[28] **Lunardi A. :** *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,* Birkhäuser, Basel, 1995.

[29] **Martinez C., Sanz M. :** *The Theory of Fractional Powers of operators*, North-Holland, Mathematics studies 187, 2001.

[30] **Mercier D. :** *Problèmes de transmission sur des réseaux polygonaux pour des systèmes d'EDP*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, $6^{ème}$ série, tome 10, n°1, (2001), pp. 107-162.

[31] **Pazy A. :** *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1983.

[32] **Rakotoson J. E. et Rakotoson J. M. :** *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Presses Universitaires De France, 1999.

[33] **Sinestrari E. :** *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions*, J. Math. Anal. App. 66, (1985), pp. 16-66.

[34] **Stewart H. B.** : *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 199, (1974), pp. 141-162.

[35] **Stewart H. B.** : *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 259, (1980), pp. 299-310.

[36] **Tanabe H. :** *Equations of Evolution,* Monographs and Studies in Mathematics 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.

[37] **Triebel H. :** *Interpolation Theory , Function Spaces, Differential Operators,* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[38] **Vrabie I. I. :** C_0-*Semigroups and Applications,* North-Holland, Mathematics Studies, Vol. 191, Elsevier, 2003.

[39] **Zuily Cl., Queffelec H. :** *Eléments d'analyse pour l'Agrégation*, Masson, Paris, 1995.

Résumé :
On considère une famille $(P_\delta)_{\delta>0}$ de problèmes aux limites et de transmission régis par des équations différentielles opérationnelles, de type elliptique à coefficients opérateurs variables dans le cadre des espaces de Hölder. L'étude se situe dans une continuité d'amélioration des travaux effectués par O. Belhamiti, R. Labbas, K. Lemrabet et A. Medeghri (cadre où les opérateurs sont constants) et par A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et B-K. Sadallah (cadre variable avec des hypothèses de différentiabilité des résolvantes). *Ici l'hypothèse fondamentale traduit une certaine höldérianité des résolvantes des opérateurs variables, cette dernière est inspirée par celle de R. Labbas. On se base sur le calcul fonctionnel de Dunford, la théorie des semi-groupes, les espaces d'interpolation, certains résultats de E. Sinestrari et des techniques similaires à celles utilisées dans la thèse de R. Labbas dans le but de montrer l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte du problème pour un δ fixé.*

Mots clés : *Equations différentielles abstraites de type elliptique, Problèmes de transmission, Espaces de Hölder, Espaces d'interpolation, Semi-groupes, Régularité maximale, Calcul fonctionnel de Dunford.*

Abstract :
We consider a family $(P_\delta)_{\delta>0}$ of boundary value and transmission problems, which is represented as an abstract second order differential equation of elliptic type with variable operator coefficients, in the framework of Hölder spaces, improving the work given by Belhamiti, O., Labbas, R., Lemrabet, K. and Medeghri, A (constant case) and also the study given by Favini, A., Labbas, R., Lemrabet, K. et Sadallah, B-K (variable case with differentiability conditions on the resolvants). Here our essential hypothesis is inspired by these of Labbas, R. We use Dunford calculus, interpolation spaces, semigroups theory and some techniques develloped by Favini, A and Labbas, R in order to obtain existence, uniqueness and maximal regularity results for the strict solution of the problem for a fixed δ.

Key words : *Abstract differential equation of elliptic type, Transmission problems, Hölder spaces, Interpolation spaces, Semigroups, Maximal regularity, Dunford operational calculus.*