RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Thèse

Présentée par

M. Ould Melha Khellaf

Pour l'obtention du titre de

Doctorat Es-Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Equations Différentielles Opérationnelles Complètes du Second Ordre de Type Elliptique Régies par deux Opérateurs L et M avec Condition de Robin : Cadre non Commutatif entre L et M dans Divers Espaces

Soutenue : le 30-10-2017.

Devant le jury :

M. Belaidi Benharrat	**Pr**	**Université de Mostaganem**	**Président**
M. Labbas Rabah	**Pr**	**Université du Havre**	**Examinateur**
M. Medeghri Ahmed	**Pr**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
M. Dahmani Zoubir	**Pr**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
M. Benharrat Mohamed	**MCA**	**ENP d'Oran**	**Invité**
M. Cheggag Mustapha	**Pr**	**ENP d'Oran**	**Directeur de thèse**
M. Maingot Stéphane	**Pr**	**Université du Havre**	**Co-directeur de thèse**

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Monsieur **Mustapha Cheggag,** Professeur à l'ENP d'Oran, pour ses conseils précieux, sa fructueuse contribution dans la réalisation de cette thèse, ainsi que pour sa patience tout au long de mon encadrement en magister et par la suite, en doctorat. Qu'il trouve ici ma profonde et respectueuse gratitude.

Mes sincères remerciements vont à mon co-directeur de thèse, Monsieur **Stéphane Maingot,** Professeur à l'université du Havre, France d'avoir aimablement accepté de me co-encadrer. Ses conseils et sa gentillesse m'ont été très utiles et ont largement contribué à la réalisation de ce travail de recherche.

Mes plus humbles remerciements et mon profond respect vont à Monsieur **Rabah Labbas,** Professeur à l'université du Havre, France qui m'a été d'un grand soutien scientifique et moral. Je lui témoigne ma vive reconnaissance pour ses conseils très précieux, ses encouragements ainsi que son accueil chaleureux lors de mes stages au Havre.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement Monsieur **Belaidi Benharrat,** Professeur à l'université de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur **Ahmed Medeghri**, Professeur à l'université de Mostaganem d'avoir eu l'amabilité d'examiner cette thèse ainsi que pour ses conseils et ses orientations appréciés, je voudrais l'assurer de ma profonde considération.

Aussi, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Zoubir Dahmani,** Professeur à l'université de Mostaganem et Monsieur **Mohamed Benharrat,** Maître de Conférences à l'ENP d'Oran pour l'honneur qu'ils me font d'accepter de faire partie du jury et d'examiner ce travail.

Je voudrais également remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées de l'université de Mostaganem (**LMPA**).

Mes sincères remerciements au Professeur **Aziz Alaoui,** directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (**LMAH**), à tous les membres du laboratoire en particulier **Alexandre Thorel** pour leur accueil chaleureux et sympathique durant mes stages scientifiques au Havre.

Je souhaite tout particulièrement exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents, mes soeurs et frères et tous les membres de ma grande famille.

Enfin, je dédie ce travail à ma chère épouse pour son soutien et mes très très chers enfants.

Introduction

0.1 Objectif principal de la thèse

On considère, dans un espace de Banach complexe X, le problème abstrait de type Robin généralisé gouverné par une équation différentielle opérationnelle d'ordre deux de type elliptique dans un cadre non commutatif.
On entend ici par équations différentielles opérationnelles ou abstraites (en abrégé EDA), des équations différentielles à coefficients opérateurs linéaires (en général non bornés) sur l'espace X.
Le problème de Robin que l'on se propose d'étudier ici, consiste en l'équation différentielle

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u\left(x\right) = f(x), \qquad x \in \left(0,1\right), \tag{0.1.1}$$

sous les conditions aux limites de type Robin généralisé

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{array} \right. \tag{0.1.2}$$

où A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X, vérifiant certaines hypothèses qu'on précisera par la suite, d_0, u_1 sont des éléments donnés dans l'espace X et ω est un paramètre spectral strictement positif. Notre étude se fera dans deux espaces de Banach, lorsque le second membre f appartient à l'une des deux classes de géométrie différente

$$L^p\left(0,1;X\right) \text{ avec } 1 < p < \infty,$$

et

$$C^\theta\left(\left[0,1\right];X\right) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

S'inspirant des travaux de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner (voir [16], [17]), on étudiera à la place de (0.1.1)-(0.1.2), l'équation différentielle

$$u''(x) + \left(L_\omega - M_\omega\right) u'(x) - \frac{1}{2}\left(M_\omega L_\omega + L_\omega M_\omega\right) u(x) = f(x), \qquad x \in \left(0,1\right), \tag{0.1.3}$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{array} \right. \tag{0.1.4}$$

où les opérateurs M_ω et L_ω vérifient notamment

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\omega - M_\omega \subset 2B, \\ -\dfrac{1}{2}\left(M_\omega L_\omega + L_\omega M_\omega\right) \subset A - \omega I. \end{array} \right.$$

On pensera, en particulier, au cas où

$$L_\omega = B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{\frac{1}{2}}, \; M_\omega = -B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{\frac{1}{2}},$$

sous l'hypothèse qui permet de définir $(B^2 - A + \omega I)^{\frac{1}{2}}$, par exemple lorsque $A - \omega I - B^2$ est elliptique au sens de Krein.
On s'intéressera à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique pour le problème (0.1.3)-(0.1.4) sous des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité des données d_0, u_1 et f.
L'originalité de ce travail réside particulièrement dans le fait que l'étude du problème (0.1.3)-(0.1.4) est faite dans un cadre non commutatif. Plus précisément on supposera

$$M_\omega L_\omega \neq L_\omega M_\omega,$$

et on ne fera pas d'hypothèse de commutativité entre L_ω et H ou entre M_ω et H.
On définira alors le commutateur de deux opérateurs P et Q sur X par

$$\begin{cases} D\left([P;Q]\right) = D\left(PQ\right) \cap D\left(QP\right), \\ \left[P;Q\right]\xi = PQ\xi - QP\xi, \xi \in D\left([P;Q]\right). \end{cases}$$

Ce cadre non commutatif est décrit respectivement par les deux hypothèses essentielles (0.4.9) et (0.4.8). La première a été utilisée pour la première fois dans le travail [16] , mais pour l'équation (0.1.3) avec des conditions aux limites de type de Dirichlet.
Ce commutateur exprime, dans un certain sens, que l'opérateur $[M_\omega; L_\omega]$ est assez petit pour ω assez grand. La deuxième exprime le fait que l'inverse du "déterminant du problème" est régularisant dans un certain sens.

0.2 Aperçu historique

0.2.1 Cadre commutatif

Dans une série d'articles, les auteurs Favini, Labbas, Maingot, Tanabe et Yagi (voir [18], [19] et [20]) se sont intéressés à l'équation différentielle opérationnelle

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \qquad x \in (0,1)\,, \tag{0.2.1}$$

sous des conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \tag{0.2.2}$$

où A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X vérifiant l'ellipticité de Krein pour l'opérateur $A - B^2$ et certaines hypothèses de commutativité. Deux cadres ont été développés : $f \in L^p\left(0,1;X\right)$ avec $1 < p < \infty$ et $f \in C^\theta\left([0,1];X\right)$ avec $\theta \in]0,1[$.
Par la suite, les auteurs Cheggag, Favini, Labbas, Maingot et Medeghri (voir [5], [6], [7] et [8]), ont étudié l'équation (0.2.1) mais cette fois-ci avec des conditions aux limites de type Robin généralisé

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{0.2.3}$$

où H est un opérateur linéaire fermé sur X.
Ici aussi, l'étude a été réalisée dans les espaces $L^p\left(0,1;X\right)$, $1 < p < \infty$ et $C^\theta\left([0,1];X\right)$ avec $\theta \in]0,1[$. Les auteurs ont considéré les cas où B génère un groupe fortement continu sur X et celui où $L := B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ et $M := -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ génèrent des semi-groupes analytiques sur X, commutent entre eux et leurs résolvantes commutent avec H.

0.2.2 Cadre non commutatif

Dans les deux articles [16], [17], les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et M. Meisner ont étudié les deux problèmes

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1. \end{cases}$$

Pour cela, ils les ont réécrit sous forme

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) u(x) = f(x), \ x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \end{cases}$$

avec $L_\omega M_\omega \neq M_\omega L_\omega$, les opérateurs L_ω, M_ω vérifiant, entre autres,

$$\begin{cases} L_\omega - M_\omega \subset 2B \\ \frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset A - \omega I, \end{cases}$$

et une hypothèse sur le commutateur décrite dans (0.4.9).

0.3 Outils et méthodes de travail

Cette thèse utilise beaucoup d'outils d'analyse fonctionnelle, en particulier la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs, la théorie de l'interpolation et le calcul fonctionnel de Dunford.
Les techniques utilisées s'inspirent de beaucoup de travaux ayant trait à l'étude des équations différentielles opérationnelles posées dans des espaces de Banach. On cite, à titre indicatif, les travaux récents développés dans [5], [6], [8], [16] et [17].

0.4 Description des chapitres et résultats principaux

Cette thèse comporte trois chapitres.
Le premier chapitre est consacré à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce mémoire tels que :

1. les opérateurs linéaires fermés,
2. les espaces de Sobolev,
3. les espaces de Hölder,

4. les espaces d'interpolation
5. la théorie des semi-groupes, etc....

Le deuxième chapitre contient deux études :
1) La première a fait l'objet d'un article [9] et concerne le problème (0.1.3)-(0.1.4) dans le cadre $L^p(0,1;X)$, $1 < p < +\infty$. Cette partie comporte quatre étapes :
La première est consacrée à la construction d'une formule de représentation de la solution grâce à un raisonnement heuristique : en supposant l'existence d'une solution vérifiant la régularité optimale, on déduit une équation intégrale qu'on inverse pour avoir la formule de représentation.
La deuxième étape concerne la régularité maximale de la formule de représentation trouvée ainsi que l'unicité de la solution du problème.
La troisième étape est une comparaison entre notre travail et celui du cas commutatif traité dans le récent papier [8].
Finalement, dans la quatrième étape, on donne un exemple concret en équations aux dérivées partielles illustrant notre problème (0.1.3)-(0.1.4).
Plus précisément, on suppose que

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{0.4.1}$$

et qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que

$$\begin{cases} \exists C_0 > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0,]0,+\infty[\subset \rho(L_\omega) \cap \rho(M_\omega), \\ \ker(L_\omega) = \ker(M_\omega) = \{0\}, \ \overline{\operatorname{Im}(L_\omega)} = \overline{\operatorname{Im}(M_\omega)} = X, \\ \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda (L_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0, \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda (M_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0, \end{cases} \tag{0.4.2}$$

$$\begin{cases} \exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[, \exists C \geqslant 1, \forall \omega \geqslant \omega_0, \forall s \in \mathbb{R}. \\ (-L_\omega)^{is}, (-M_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X); \\ \left\| (-L_\omega)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{\theta_L |s|}, \left\| (-M_\omega)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{\theta_M |s|}, \end{cases} \tag{0.4.3}$$

$$D(L_\omega) = D(M_\omega), \tag{0.4.4}$$

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((M_\omega - L_\omega)^2), \tag{0.4.5}$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{0.4.6}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0, \Lambda_\omega = (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{0.4.7}$$

et

$$\forall \omega \geqslant \omega_0, \forall \xi \in D(L_\omega), \ \Lambda_\omega^{-1} \xi \in D((L_\omega + M_\omega)^2). \tag{0.4.8}$$

On fera l'hypothèse de non commutativité suivante

$$\forall \omega \geqslant \omega_0, \| C_{L_\omega, M_\omega} \|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi(\omega); \tag{0.4.9}$$

où C_{L_ω,M_ω} est le commutateur donné par

$$\begin{array}{rcl} C_{L_\omega,M_\omega} & = & \left(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega\right)\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2} \\ & = & \left[M_\omega; L_\omega\right]\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}, \end{array}$$

avec

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{\omega\to+\infty} \chi(\omega) = 0.$$

On verra que dans de nombreux cas concrets, pour $\alpha > 0$, on a

$$\chi(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^\alpha}\right).$$

Pour avoir une représentation de la solution, on utilise celle du cas commutatif (voir Cheggag *et* al. dans [8], p. 63). On suppose qu'il existe une solution u au problème (0.1.3)-(0.1.4) et on remplace la fonction f dans la solution du cas commutatif par

$$u'' + (L_\omega - M_\omega)\, u' - \frac{1}{2}\left(M_\omega L_\omega + L_\omega M_\omega\right) u.$$

En effectuant des intégrations par parties, on obtient une équation intégrale vérifiée par $v := (L_\omega + M_\omega)^2\, u$ écrite sous la forme

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + \Gamma_\omega,$$

où R_ω est un opérateur dépendant du commutateur C_{L_ω,M_ω} et Γ_ω dépend des données d_0 et u_1. On déduit, pour ω assez grand, la représentation suivante :

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left\{(I + R_\omega)^{-1}\left(F_\omega(f) + \Gamma_\omega\right)\right\}.$$

Le résultat principal obtenu dans ce chapitre est le suivant

Théorème 0.4.1 *On suppose (0.4.1)∼(0.4.9). Soit* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. *Alors, il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
1. Le problème (0.1.3)-(0.1.4) admet une unique solution classique u *c'est-à-dire*

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega)), \\ u' \in L^p(0,1;D(L_\omega - M_\omega)), \end{array}\right.$$

$u(0) \in D(H)$ *et* u *vérifiant le problème (0.1.3)-(0.1.4).*
2.

$$u_1, \Lambda_\omega^{-1} d_0 \in \left(X,\ D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Pour plus de commodité, on notera

$$A_\omega = A - \omega I.$$

2) La deuxième étude concerne le problème (0.1.1)-(0.1.2) dans le cadre $L^p(0,1;X)$, $1 < p < +\infty$.

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs A_ω et B vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho\left(B^2 - A_{\omega_0}\right), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0,\ \left\|\left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda| + 1}, \end{array}\right. \tag{0.4.10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} D\left(\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(B), \\ D(B^2 - A_\omega) \subset D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} B), \end{array}\right. \tag{0.4.11}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\|\left[B; (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right] (B^2 - A_\omega)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi(\omega), \tag{0.4.12}$$

où

$$\chi : \ [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0. \tag{0.4.13}$$

On suppose que les opérateurs

$$\left\{\begin{array}{l} L_\omega := B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega := -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \end{array}\right.$$

vérifient, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, les hypothèses suivantes

$$\left\{\begin{array}{l}]0, +\infty[\subset \rho(L_\omega) \cap \rho(M_\omega), \\ \ker(L_\omega) = \ker(M_\omega) = \{0\},\ \overline{\mathrm{Im}(L_\omega)} = \overline{\mathrm{Im}(M_\omega)} = X, \\ \exists C_0 > 0, \sup\limits_{\lambda > 0} \left\|\lambda (L_\omega - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0, \sup\limits_{\lambda > 0} \left\|\lambda (M_\omega - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0, \end{array}\right. \tag{0.4.14}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall s \in \mathbb{R}, (-L_\omega)^{is}, (-M_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X); \\ \exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[, \exists C \geqslant 1, \forall s \in \mathbb{R}, \\ \left\|(-L_\omega)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta_L |s|}, \left\|(-M_\omega)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta_M |s|}, \end{array}\right. \tag{0.4.15}$$

l'opérateur

$$\Lambda_\omega = (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{0.4.16}$$

et

$$\forall \xi \in D(L_\omega),\ \Lambda_\omega^{-1} \xi \in D((L_\omega + M_\omega)^2). \tag{0.4.17}$$

On obtient alors le résultat optimal suivant :

Théorème 0.4.2 *On suppose (0.4.10)∼(0.4.17). Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
1. Le problème (0.1.1)-(0.1.2) admet une unique solution classique u c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A_\omega)), \\ u' \in L^p(0,1;D(B)), \end{array}\right.$$

$u(0) \in D(H)$ et u vérifiant le problème (0.1.1)-(0.1.2) ;
2.

$$u_1, \Lambda_\omega^{-1} d_0 \in \left(X, D((B^2 - A))\right)_{1 - \frac{1}{2p}, p}.$$

Le troisième chapitre, comporte deux études :
1) la première concerne le problème (0.1.3)-(0.1.4) dans le cadre höldérien $C^{\theta}([0,1];X)$ avec $0<\theta<1$. On étudie la régularité et la régularité maximale de la représentation de la solution trouvée dans le cadre L^p du problème (0.1.3)-(0.1.4). On donnera par la suite un exemple concret lié aux équations aux dérivées partielles.
Les hypothèses considérées dans cette partie sont les suivantes :
Il existe un réel positif fixé ω_0 tel que, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on suppose

$$\left\{\begin{array}{l}\exists\delta>0,\ \exists C>0:\ \ S_\delta\subset\rho\left(L_\omega\right),S_\delta\subset\rho\left(M_\omega\right),\\ \left\|\left(L_\omega-zI\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C}{|z|},\left\|\left(M_\omega-zI\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C}{|z|},\ z\in S_\delta,\end{array}\right. \tag{0.4.18}$$

où $S_\delta:=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}:|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}+\delta\right\}$,

$$D(L_\omega)=D(M_\omega), \tag{0.4.19}$$

$$D((L_\omega+M_\omega)^2)\subseteq D((M_\omega-L_\omega)^2), \tag{0.4.20}$$

$$L_\omega+M_\omega \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{0.4.21}$$

$$(X,D(L_\omega))_{1+\theta,\infty}=(X,D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}\,, \tag{0.4.22}$$

$$\Lambda_\omega=(M_\omega-H)+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\ \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{0.4.23}$$

$$\forall\xi\in D(L_\omega),\ \Lambda_\omega^{-1}\xi\in D((L_\omega+M_\omega)^2),\ \ \left(L_\omega+M_\omega\right)^2\Lambda^{-1}\xi\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,, \tag{0.4.24}$$

et l'hypothèse de non commutativité

$$\forall\omega\geqslant\omega_0,\|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\chi\left(\omega\right); \tag{0.4.25}$$

où C_{L_ω,M_ω} est le commutateur défini par

$$\begin{array}{rcl}C_{L_\omega,M_\omega}&=&\left(M_\omega L_\omega-L_\omega M_\omega\right)\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-2}\\ &=&\left[M_\omega;L_\omega\right]\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-2},\end{array}$$

et

$$\chi:[\omega_0,+\infty[\rightarrow\mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega\to+\infty}\chi\left(\omega\right)=0.$$

Dans ce cas, on obtient une équation intégrale vérifiée par $v:=\left(L_\omega+M_\omega\right)^2u$ et écrite sous la forme

$$v+R_\omega(v)=F_\omega(f)+S_\omega,$$

où R_ω dépend de C_{L_ω,M_ω} et S_ω dépend des données d_0, u_1. Pour résoudre cette équation intégrale, on se place dans l'espace de Banach complexe :

$$\begin{array}{l}C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1];X\right)\\ =\{v\in C^{\theta}\left([0,1];X\right):\ \ \left(L_\omega-M_\omega\right)\left(L_\omega-I\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,,\\ \left(L_\omega-M_\omega\right)\left(M_\omega-I\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(1)\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty}\}.\end{array}$$

On déduit alors, pour ω assez grand, la représentation suivante :

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2} \left\{ (I + R_\omega)^{-1} (F_\omega(f) + S_\omega) \right\}.$$

L'étude de cette représentation permet d'obtenir un résultat d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution dans le cas où le second membre est dans un espace höldérien.
On obtient alors le résultat optimal suivant

Théorème 0.4.3 *On suppose (0.4.18)∼(0.4.25) et soit $\theta \in]0,1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (0.1.3)-(0.1.4) admet une unique solution classique u satisfaisant*

$$\left\{ \begin{array}{l} u'', (L_\omega - M_\omega)u', (L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\, u \in C^\theta([0,1]\,; X), \\ (L_\omega + M_\omega)^2\, u \in C^\theta_{L_\omega, M_\omega}([0,1]\,; X), \end{array} \right.$$

2. *$f \in C^\theta([0,1]\,; X)$ et*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_\omega^{-1} d_0, u_1 \in D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega) \\ (M_\omega - I)\,(L_\omega + M_\omega)\,\Lambda_\omega^{-1} d_0 + (L_\omega + M_\omega)\,(L_\omega - I)^{-1} f(0) \in (X, D\,(L_\omega))_{\theta,\infty}\,, \\ L_\omega\,(L_\omega + M_\omega)\,u_1 + (L_\omega + M_\omega)\,(M_\omega - I)^{-1} f(1) \in (X, D\,(L_\omega))_{\theta,\infty}\,, \\ (L_\omega - M_\omega)\,(L_\omega - I)^{-1}\, C_{L_\omega, M_\omega}\,(L_\omega + M_\omega)^2\,\Lambda_\omega^{-1} d_0 \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,, \\ (L_\omega - M_\omega)\,(M_\omega - I)^{-1}\, C_{L_\omega, M_\omega}\,(L_\omega + M_\omega)^2\, u_1 \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,. \end{array} \right.$$

2) La deuxième étude concerne le problème (0.1.1)-(0.1.2) dans le cadre höldérien $C^\theta\,([0,1]\,; X)$ avec $0 < \theta < 1$.
On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs A et B vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho\,(B^2 - A_{\omega_0})\,, \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0,\ \left\| (B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{1 + |\lambda|}, \end{array} \right. \tag{0.4.26}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \right) \subset D(B), \\ D(B^2 - A_\omega) \subset D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} B), \end{array} \right. \tag{0.4.27}$$

$$\left(X, D(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) \right)_{1+\theta,\infty} = \left(X, D(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) \right)_{1+\theta,\infty}, \tag{0.4.28}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \left\| \left[B; (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \right] (B^2 - A_\omega)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi\,(\omega)\,, \tag{0.4.29}$$

où

$$\chi :\ [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi\,(\omega) = 0.$$

On suppose que les opérateurs

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\omega := B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega := -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

vérifient les hypothèses suivantes

$$\left\{\begin{array}{c}\exists\delta>0,\ \exists C>0:\ \forall\omega\geqslant\omega_0,\ S_\delta\subset\rho\left(L_\omega\right),S_\delta\subset\rho\left(M_\omega\right),\\ \left\|(L_\omega-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C}{|z|},\left\|(M_\omega-zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C}{|z|},\ z\in S_\delta,\end{array}\right.\tag{0.4.30}$$

où $S_\delta:=\left\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}+\delta\right\}$.
Pour tout $\omega\geqslant\omega_0$, l'opérateur

$$\Lambda_\omega=(M_\omega-H)+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\ \text{est inversible dans }\mathcal{L}(X),\tag{0.4.31}$$

et

$$\forall\xi\in D(L_\omega),\ \Lambda_\omega^{-1}\xi\in D((L_\omega+M_\omega)^2)\ \text{et}\ \left(L_\omega+M_\omega\right)^2\Lambda_\omega^{-1}\xi\in\left(X,D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty}.\tag{0.4.32}$$

Le résultat principal de cette partie est le suivant

Théorème 0.4.4 *On suppose (0.4.26)∼(0.4.32) et soit $\theta\in]0,1[$. Alors, il existe $\omega^*\geqslant\omega_0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega^*$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Le problème (0.1.1)-(0.1.2) admet une unique solution u satisfaisant*

$$\left\{\begin{array}{l}u\in C^2([0,1];X)\cap C([0,1];D(A)),\\ u'\in C([0,1];D(B)),\\ \forall x\in[0,1],u(x)\in D(B^2-A),\\ \forall x\in[0,1],u'(x)\in D((B^2-A)^{\frac{1}{2}}),\end{array}\right.$$

et la propriété de régularité maximale

$$\left\{\begin{array}{l}u'',\ Bu',\ Au,\ B^2u\in C^\theta([0,1];X),\\ (B^2-A_\omega)u\in C^\theta_{A,B,\omega}([0,1];X).\end{array}\right.$$

2. *$f\in C^\theta([0,1];X)$, $\Lambda_\omega^{-1}d_0\in D(A_\omega)$, $u_1\in D(A_\omega)$ et*

$$\begin{array}{l}\left(-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I\right)(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\Lambda_\omega^{-1}d_0+(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\left(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I\right)^{-1}f(0),\\ \left(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}u_1+(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\left(-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I\right)^{-1}f(1),\\ B\left(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I\right)^{-1}\left[B;(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right]\Lambda_\omega^{-1}d_0,\\ B\left(-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I\right)^{-1}\left[B;(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right]u_1,\end{array}$$

appartiennent à $(X,D(B^2-A_\omega))_{\frac{\theta}{2},\infty}$.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Opérateurs linéaires

Dans tout ce qui suit, $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach complexe.

1.1.1 Opérateurs fermés et opérateurs fermables

On rappelle ci-dessous quelques définitions de base.
Soit A est un opérateur linéaire sur X de domaine $D(A) \subset X$.

Définition 1.1.1

1. *On dit que A est à **domaine dense** (ou densément défini) si $\overline{D(A)} = X$, i.e. si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*
2. *On appelle **noyau** de A le sous-espace de X, noté $\ker(A)$, défini par :*
$$\ker(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}.$$
3. *On appelle **graphe** de A le sous espace de $X \times X$, noté $G(A)$, défini par :*
$$G(A) = \{(x, Ax) \in X \times X : x \in D(A)\}.$$
4. *A est dit **borné** si*
$$D(A) = X \quad \text{et} \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_X < +\infty,$$
et on écrit $A \in \mathcal{L}(X)$.
5. *A est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que*
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \\ \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in D(A), \\ Ax = y. \end{cases}$$
6. *A est dit **fermé** si $G(A)$ est un fermé de $X \times X$.*

7. *A est dit* ***fermable*** *s'il existe* $\overline{A}$, *un opérateur linéaire sur* X, *tel que*

$$\overline{G(A)} = G\left(\overline{A}\right),$$

dans ce cas $\overline{A}$ *est uniquement déterminé, c'est un opérateur fermé appelé la* ***fermeture*** *de* A.
Si A *et* B *sont deux opérateurs linéaires dans* X, *de domaines respectifs* $D(A)$ *et* $D(B)$, *on écrira* $A \subset B$ *pour signifier que* B *est un prolongement de* A, *c'est-à-dire*

$$D(A) \subset D(B) \text{ et } Bx = Ax \text{ si } x \in D(A).$$

Noter que si A *est fermable,* $\overline{A}$ *est la plus petite extension fermée de* A *(inclusion des domaines).*

8. *Si* A *est injectif, on peut définir l'inverse de* A, *noté* A^{-1}, *par*

$$\begin{array}{rccc} A^{-1}: & A(D(A)) & \to & D(A) \\ & y & \to & A^{-1}y = x. \end{array} \tag{1.1.1}$$

9. A *étant un opérateur linéaire fermé sur* X, *on définit l'****ensemble résolvant*** $\rho(A)$ *de* A *par*

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\},$$

et le ***spectre*** *de* A *par*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \diagdown \rho(A).$$

Définition 1.1.2 *Soient* $A : D(A) \subset X \to X$ *et* $B : D(B) \subset X \to X$ *deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur* BA *:*

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A) : Ax \in D(B)\} \\ (BA)\,x = B(Ax), \ x \in D(BA). \end{cases}$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n *la n-ième puissance de* A, *par :*

$$\begin{cases} D\left(A^0\right) = X \text{ et } A^0 = I, \\ D\left(A^1\right) = D(A) \text{ et } A^1 = A, \\ \forall n \geqslant 2, D\left(A^n\right) = \left\{x \in D\left(A^{n-1}\right) : A^{n-1}x \in D(A)\right\} \text{ et } A^n = AA^{n-1}. \end{cases}$$

Proposition 1.1.1 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* X. *Alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} R: & \rho(A) & \to & \mathcal{L}(X) \\ & \lambda & \to & R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \end{array}$$

est analytique sur $\rho(A)$.

Proposition 1.1.2 *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire.*

1. *Si* A *est un opérateur fermé, alors pour tout* $B \in \mathcal{L}(X)$, *l'opérateur*

$$A + B : D(A) \subset X \to X$$

est fermé.

2. *Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.*
3. *Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X.*
4. *Si A est un opérateur continu de $D(A)$ dans X alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.*
5. *Si $\rho(A) \neq \varnothing$ alors A est fermé.*

Preuve

– Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A+B) = D(A)$ et $x, y \in X$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n\to\infty} (A+B)\, x_n = y.$$

Comme $B \in \mathcal{L}(X)$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} Bx_n = Bx$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y - Bx$.
Puisque A est fermé alors

$$x \in D(A) = D(A+B) \text{ et } Ax = y - Bx,$$

i.e $(A+B)\, x = Ax + Bx = y$ et donc $A+B$ est un opérateur fermé.
– Pour la deuxième assertion, on utilise la définition de la fermeture d'un opérateur et (1.1.1) (Pour plus de détails, voir [25]).
– Pour la troisième et la quatrième assertion, vu que l'opérateur A est fermé alors, il en est de même pour son graphe $G(A)$ et donc il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé.
– Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ et $x, y \in X$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$ et montrons que

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

Comme $\rho(A) \neq \varnothing$ alors il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $(A - \lambda_0 I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ d'où

$$\begin{aligned} x_n &= (A - \lambda_0 I)^{-1} (A - \lambda_0 I)\, x_n \\ &= (A - \lambda_0 I)^{-1} Ax_n - \lambda_0 (A - \lambda_0 I)^{-1} x_n, \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \left((A - \lambda_0 I)^{-1} Ax_n - \lambda_0 (A - \lambda_0 I)^{-1} x_n \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (A - \lambda_0 I)^{-1} Ax_n - \lim_{n\to\infty} \lambda_0 (A - \lambda_0 I)^{-1} x_n \\ &= (A - \lambda_0 I)^{-1} y - \lambda_0 (A - \lambda_0 I)^{-1} x \\ &= (A - \lambda_0 I)^{-1} (y - \lambda_0 x)\,, \end{aligned}$$

vu l'unicité et puisque, pour tout $\xi \in X$, $(A - \lambda_0 I)^{-1} \xi \in D(A)$, on déduit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (A - \lambda_0 I)^{-1} (y - \lambda_0 x) = x \in D(A),$$

d'où

$$y - \lambda_0 x = (A - \lambda_0 I)\, x = Ax - \lambda_0 x,$$

c'est-à-dire $y = Ax$ et donc A est un opérateur fermé.

Proposition 1.1.3 *Si $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire fermé et $D(A)$ est muni de la norme du graphe $\|\cdot\|_{D(A)}$ définie par*

$$\forall \varphi \in D(A), \quad \|\varphi\|_{D(A)} = \|A\varphi\|_X + \|\varphi\|_X ,$$

alors $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.

La proposition suivante est un résultat qui sera beaucoup utilisé dans les chapitres suivants pour justifier que certains opérateurs utilisés sont bornés.

Proposition 1.1.4 *Soient $B \in \mathcal{L}(X)$ et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tels que $\mathrm{Im}(B) \subset D(A)$. Alors $AB \in \mathcal{L}(X)$.*

Preuve. Il est clair que AB est défini sur X. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de X telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \to x \text{ dans } X, \\ (AB)\, x_n \to y \text{ dans } X. \end{array} \right.$$

Alors comme $\mathrm{Im}(B) \subset D(A)$. $(Bx_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $D(A)$ et comme $B \in \mathcal{L}(X)$ on a

$$\left\{ \begin{array}{l} Bx_n \to Bx \text{ dans } X, \\ A\,(Bx_n) \to y \text{ dans } X. \end{array} \right.$$

A étant fermé on a $Bx \in D(A)$ et $A(Bx) = y$. Ainsi $x \in D(AB)$ et $(AB)x = y$. AB est donc un opérateur fermé et défini sur X. D'après la Proposition 1.1.2. point 3., on obtient AB borné sur X, i.e. $AB \in \mathcal{L}(X)$. $\square$

1.1.2 Opérateur sectoriel

Il est important de préciser qu'il existe de nombreuses définitions équivalentes pour les opérateurs sectoriels. On utilisera ici celle donnée dans Haase [24], page 19.

Soit $\phi \in [0, \pi]$, on définit le secteur S_ϕ du plan complexe par

$$S_\phi = \left\{ \begin{array}{ll} \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \phi\} & \text{si } \phi \in]0, \pi], \\ ]0, \infty[& \text{si } \phi = 0. \end{array} \right.$$

Définition 1.1.3 *Un opérateur A est dit sectoriel d'angle ϕ, si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

1. $\sigma(A) \subset \overline{S_\phi}$,
2. $\forall \varphi \in]\phi, \pi[$, $M(A, \varphi) := \sup\limits_{\lambda \notin \overline{S_\varphi}} \left\|\lambda (A - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$

On note $sect(\phi)$ l'ensemble des opérateurs linéaires sur X qui sont sectoriels d'angle ϕ.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Les espaces de Hölder

Comme il a été énoncé en introduction, on va travailler dans les espaces de Hölder $C^\theta([0,1];X)$ pour $0<\theta<1$.

Définition 1.2.1 *Soient X un espace de Banach complexe et $C([0,1];X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans X muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_X$$

L'ensemble des fonctions θ-höldériennes de $[0,1]$ dans X est défini par

$$C^\theta([0,1];X) = \left\{ f\in C([0,1];X) / \sup_{t-s\neq 0; t,s\in[0,1]} \frac{\|f(t)-f(s)\|_X}{|t-s|^\theta} < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $\theta \in]0,1[$. Alors*

$$C^\theta([0,1];X) \subset C([0,1];X).$$

Proposition 1.2.2 *$C^\theta([0,1];X)$ avec $\theta\in]0,1[$ est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_{C^\theta([0,1];X)}$ définie par*

$$\|f\|_{C^\theta([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{t-s\neq 0; t,s\in[0,1]} \frac{\|f(t)-f(s)\|_X}{|t-s|^\theta}.$$

1.2.2 Les espaces de Sobolev

Définition 1.2.2 *Soient $a<b$ finis ou infinis, $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $p\in[1,+\infty]$.*

1. *On définit pour $p\in[1,+\infty[$*

$$L^p((a,b);X) = \left\{ f \text{ mesurable de } (a,b) \text{ vers } X \text{ avec } \int_a^b |f(x)|^p\,dx < \infty \right\}$$

et pour $p=+\infty$

$$\begin{aligned} &L^p((a,b);X) \\ = &\left\{ f \text{ mesurable de } (a,b) \text{ vers } X \text{ et } \exists C\geqslant 0 : \sup_{x\in(a,b)} |f(x)| \leqslant C \text{ p.p sur } (a,b) \right\}. \end{aligned}$$

2. *On définit les espaces de Sobolev*

$$W^{k,p}((a,b);X) = \left\{ f\in L^p((a,b);X), [f]^{(j)} \in L^p((a,b);X),\ j=0,1,....,k \right\}$$

où, pour $j=0,1,....,k$, $[f]^{(j)}$ est la dérivée $j^{\text{ème}}$ au sens des distributions de f et $[f]^{(j)}\in L^p((a,b);X)$ signifie qu'il existe $g_i\in L^p((a,b);X)$ tel que $[f]^{(j)}=[g_i]$.

Proposition 1.2.3 *Soient $a < b$ finis ou infinis, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [1, +\infty]$.*

1. *$L^p((a,b);X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_{L^p((a,b);X)}$ définie par*

$$\|f\|_{L^p((a,b);X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & si \ p \in [1, +\infty[, \\ \inf \{C \ \ tq \ \ |f(x)| \leq C \ \ p.p \ sur \ \ (a,b)\} & si \ p = +\infty. \end{cases}$$

2. *$W^{k,p}((a,b);X)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_{W^{k,p}((a,b);X)}$ définit par*

$$\|f\|_{W^{k,p}((a,b);X)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^k \left\|[f]^{(j)}\right\|_{L^p((a,b);X)}^p\right)^{\frac{1}{p}} & si \ p \in [1, +\infty[, \\ \max\limits_{j=0,1,..,k} \left\|[f]^{(j)}\right\|_{L^p((a,b);X)}^p & si \ p = +\infty. \end{cases}$$

1.3 Calcul fonctionnel

1.3.1 Calcul fonctionnel de Dunford

Dans le cadre des opérateurs non bornés, on pourra consulter le livre de N. Dunford et J. Schwartz [14] pour l'étude des premiers développements du calcul fonctionnel. Ici, on s'est inspiré du livre de Haase [24].

Formule de Cauchy

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K, la formule de Cauchy est donnée comme suit

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K.

Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(A)$ où A est un opérateur linéaire borné et f est une fonction holomorphe.
Plus précisément, si $A \in \mathcal{L}(X)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(A)$ (spectre de A) alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma(A)$ et contenu dans U.
L'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & H(U) & \rightarrow & \mathcal{L}(X) \\ & f & \rightarrow & f(A) \end{array}$$

est un homomorphisme d'algèbre qui vérifie entre autre

$$(z^n)(A) = A^n \text{ si } n \in \mathbb{N}.$$

Sous certaines conditions, ce calcul fonctionnel peut être étendu aux opérateurs sectoriels.

Calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels

Définition 1.3.1 *Soit* $\varphi \in]0, \pi[$.

1. *$\mathcal{DR}\ (S_\varphi)$ est l'espace des fonctions f de $H(S_\varphi)$ qui sont bornées sur S_φ et vérifiant*

$$\exists C \geqslant 0,\ \exists s > 0/\forall z \in S_\varphi,\ \ |f(z)| \leqslant C \min\left(|z|^s, |z|^{-s}\right).$$

2. *$\mathcal{DR}_0\ (S_\varphi)$ est l'espace des fonctions f de $H(S_\varphi)$ qui sont bornées sur S_φ, qui admettent un prolongement holomorphe sur un voisinage de 0 et qui vérifient*

$$\exists S > 0/\ \ |f(z)| \leqslant O\left(|z|^{-s}\right)\ \ (\textit{quand}\ |z| \to +\infty).$$

La notation $\mathcal{DR}$ est mise pour Dunford-Riesz.

On considère ici $\omega \in]0, \pi[$ et $A \in Sect\,(\omega)$.

Définition 1.3.2 *Soit $f \in \mathcal{DR}\ (S_\varphi) \cup \mathcal{DR}_0\ (S_\varphi)$ où $\varphi \in]\omega, \pi[$. On pose alors*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

où la courbe Γ est définie comme suit

1. *Si $f \in \mathcal{DR}\ (S_\varphi)$, on fixe $\omega' \in]\omega, \varphi[$ et on prend pour Γ, le bord orienté positivement de $S_{\omega'}$.*
2. *Si $f \in \mathcal{DR}_0\ (S_\varphi)$, on fixe $\omega' \in]\omega, \varphi[$ et on prend pour Γ, le bord orienté positivement de $S_{\omega'} \cup B(0, \delta)$. (où δ est un réel strictement positif, choisi de sorte que f soit holomorphe au voisinage de $B(0, \delta)$).*

$f(A)$ ainsi défini ne dépend pas du choix de ω' ou δ.

Définition 1.3.3 *Soit $f \in \mathcal{DR}\ (S_\varphi) + \mathcal{DR}_0\ (S_\varphi)$. On pose*

$$f(A) = g(A) + h(A),$$

où $f = g + h$ avec

$$g \in \mathcal{DR}(S_\varphi),\ h \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi).$$

Proposition 1.3.1 *Si $f, g \in \mathcal{DR}\ (S_\varphi) + \mathcal{DR}_0\ (S_\varphi)$ et $c, d \in \mathbb{C}$ alors*

1. *$f(A) \in \mathcal{L}(X)$.*
2. *$(cf + dg)(A) = c(f(A)) + d(g(A))$.*

Extension du calcul fonctionnel

On considère encore $\omega \in]0,\pi[$ et $A \in Sect\,(\omega)$.

Définition 1.3.4 *On pose, pour $\varphi \in]0,\pi[$,*

$$\mathcal{P}\,(S_\varphi) = \left\{ f \in H\,(S_\varphi) \,/ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{f(z)}{(1+z)^n} \in \mathcal{DR}\,(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0\,(S_\varphi) \right\}.$$

Notons que $\mathcal{P}\,(S_\varphi)$ contient $\mathcal{DR}\,(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0\,(S_\varphi)$ et aussi toutes les fonctions rationnelles qui ont leurs pôles hors de $\overline{S_\varphi}$ et en particulier les constantes.

Définition 1.3.5 *Pour tout $f \in \mathcal{P}\,(S_\varphi)$ où $\varphi \in]\omega,\pi[$, on définit $f\,(A)$ comme suit*

$$f\,(A) = (1+A)^n \left(\frac{f(z)}{(1+z)^n} \right)(A).$$

Les principales propriétés de ce calcul fonctionnel étendu sont données ci-dessous.

Proposition 1.3.2 *Si $f \in \mathcal{P}\,(S_\varphi)$ avec $\varphi \in]\omega,\pi[$, alors*

1. *$f\,(A)$ est un opérateur fermé sur X.*
2. *Si A est borné alors $f\,(A)$ est borné.*
3. *$1\,(A) = I$, $(z^n)\,(A) = A^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. *$\lambda \notin \overline{S_\varphi} \Rightarrow \left(\frac{f(z)}{\lambda - z} \right)(A) = f\,(A)\,(\lambda I - A)^{-1}$ et en particulier*

$$\left(\frac{1}{\lambda - z} \right)(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Dans le cas particulier où A est injectif et dans l'optique de définir A^α, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à une nouvelle classe de fonctions.

Définition 1.3.6

1. *Pour tout $\varphi \in]0,\pi[$, on pose*

$$\mathcal{B}\,(S_\varphi) = \left\{ f \in H\,(S_\varphi) \,/ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} \in \mathcal{DR}\,(S_\varphi) \right\}.$$

2. *Si $\mathcal{A}$ est injectif, pour tout $f \in \mathcal{B}\,(S_\varphi)\,, \varphi \in]\omega,\pi[$, on définit*

$$f\,(A) = \left((1+A)^2 A^{-1} \right)^n \left(\frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} \right)(A).$$

Proposition 1.3.3 *Si $f \in \mathcal{B}\,(S_\varphi)$ avec $\varphi \in]\omega,\pi[$, alors*

1. *$f\,(A)$ est un opérateur fermé sur X.*
2. *Si A est un opérateur borné et inversible alors $f\,(A)$ est borné.*

Notons enfin que si f est dans l'intersection de $\mathcal{P}\,(S_\varphi)$ et $\mathcal{B}\,(S_\varphi)$ alors $f\,(A)$ admet deux formules de définition et ces formules coïncident.

1.4 Puissances fractionnaires

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs, en particulier la racine carrée d'un opérateur.
Soit A un opérateur linéaire fermé dans X, tel que $\rho(A)$ contient $]0,+\infty[$. S'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$,

$$\left\|\lambda (A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C < +\infty,$$

alors, on définit pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ et $x \in D_A$, l'opérateur J^α par

$$J^\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (A-\lambda I)^{-1} (-A)\, x d\lambda$$

et pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 2$ et $x \in D_{A^2}$ par

$$\begin{aligned} J^\alpha x \quad = \quad & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \left((A-\lambda I)^{-1} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) (-A)\, x d\lambda \\ & + (-A)\, x \sin\left(\pi \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

(voir Balakrishnan [1]).

Lemme 1.4.1 *([1], p. 423) Les opérateurs J^α admettent des extensions fermées et $(-A)^\alpha$ est la plus petite extension fermée de J^α.*

Lemme 1.4.2 *([1], p. 432) Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que*

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \ \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \ \text{ et pour } \lambda \geqslant 0 \\ \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{1.4.1}$$

alors pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $-(-A)^\alpha$ défini précédemment génère un semi-groupe analytique $S_\alpha(t)$ défini par

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty (A-\lambda I)^{-1} g(\lambda, t; \alpha) d\lambda \quad \text{si } 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

où $g(\lambda, t; \alpha) = \dfrac{1}{\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \pi\alpha) \exp(-t\lambda^\alpha \cos \pi\alpha)$, est analytique.

Remarque 1.4.1 *Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ on obtient $S_{\frac{1}{2}}(t) = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (A-\lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda$.*

Puissances fractionnaires avec partie réelle positive

On considère ici $A \in sect(\phi)$, où $\phi \in]0, \pi[$ et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Il s'agit alors, sous certaines conditions, d'activer la formule

$$A^{\alpha} = (z^{\alpha})(A).$$

Ici z^{α} désigne la détermination principale de la fonction "puissance α" caractérisée par

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln r + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Proposition 1.4.1 *Soient A un opérateur linéaire fermé et α, $\beta \in \mathbb{C}$ avec* $\operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Alors*

1. *A^{α} est un opérateur fermé de X.*
2. *$A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha}$.*
3. $\operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\alpha$ *alors $D(A^{\beta}) \subset D(A^{\alpha})$ et en particulier*
$$\operatorname{Re}\alpha < 1 \Rightarrow D(A) \subset D(A^{\alpha})$$
4. *Si A est injectif alors A^{α} l'est aussi et*
$$\left(A^{-1}\right)^{\alpha} = (A^{\alpha})^{-1}.$$
5. *Si $0 \in \rho(A)$ alors $0 \in \rho(A^{\alpha})$.*
6. *$A \in \mathcal{L}(X)$ alors $A^{\alpha} \in \mathcal{L}(X)$.*

Définition 1.4.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X. On dit que $A \in BIP(\alpha, X)$, avec $\alpha \in]0, 1[$, si*

$$\begin{cases}]-\infty, 0[\subset \rho(A), \ \ker(A) = \{0\}, \ \overline{\operatorname{Im}(A)} = X \ \textit{et} \\ \exists C \geqslant 1,\ \forall \lambda > 0,\ \ \left\|(A + \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{\lambda}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ \exists c \geqslant 1,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant c e^{\alpha|s|}. \end{cases}$$

1.5 Les semi-groupes fortement continus

On trouve les démonstrations, de cette section, et d'autres propriétés dans [32] et [15].

Définition 1.5.1 *Soit X un espace de Banach. La famille d'opérateurs linéaires bornés $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est dite semi-groupe, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$S(0) = I$, (où I désigne l'opérateur identité).*
2. *$\forall t,\ s \geqslant 0,\ S(t+s) = S(t).S(s)$.*
Lorsque la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ et que la deuxième propriété est vérifiée pour tous t et s de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.5.2 *On dit qu'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \to S(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue, c'est à dire*

$$\forall x \in X;\ \lim_{t\to 0} \|S(t)x - x\|_X = 0.$$

On dit aussi que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Proposition 1.5.1 *Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0,\ \ \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}. \tag{1.5.1}$$

Définition 1.5.3 *On dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un*

1. *C_0 semi-groupe uniformément borné si on a la majoration (1.5.1) avec $M \geqslant 0$ et $\omega = 0$.*
2. *C_0 semi-groupe de contraction si on a la majoration (1.5.1) avec $M = 1$ et $\omega = 0$.*

Définition 1.5.4 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\} \\ \forall x \in D(A),\ Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

On dit aussi que l'opérateur A engendre le C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.5.1 *(Hille, Yosida, 1948)*
Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire sur X, un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) *A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction fortement continu .*

b) *A est un opérateur fermé à domaine dense dans X et pour tout $\lambda > 0$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\| \leqslant 1.$$

c) *A est un opérateur fermé à domaine dense dans X et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\lambda > 0$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

(Voir [15], p. 73).

Théorème 1.5.2 *(Feller, Miyadera, Phillips, 1952)*
Soient $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire sur X, un espace de Banach et $\omega \in \mathbb{R}, M \geqslant 1$ des constantes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) *A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geqslant 0}$ vérifiant*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \text{ pout tout } t \geqslant 0.$$

b) *A est un opérateur fermé à domaine dense dans X et pour tout $\lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\left\| \left[(\lambda-\omega)(A-\lambda I)^{-1} \right]^n \right\| \leqslant M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c) *A est un opérateur fermé à domaine dense dans X et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\left\|(A-\lambda I)^{-n}\right\| \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

(Voir [15], p. 77).

Définition 1.5.5 *On dit qu'un C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est différentiable si pour tout x de X, la fonction $t \to S(t)x$ est différentiable de $]0,+\infty[$ dans X.*

Proposition 1.5.2 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe différentiable de générateur infinitésimal A. Alors, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$:*

1. *$\forall t \in]0,+\infty[$, $S(t)x \in D(A^n)$.*
2. *$t \to S(t)x$ est n fois différentiable sur $]0,+\infty[$ et*

$$\forall t \in]0,+\infty[, \;\; S^{(n)}(t)x = A^n S(t)x.$$

3. *$\forall t \in]0,+\infty[$, $S^{(n)}(t) \in \mathcal{L}(X)$.*
4. *$t \to S^{(n)}(t)$ est différentiable (donc continu) de $]0,+\infty[$ dans $\mathcal{L}(X)$.*

1.6 Semi-groupe analytique

Soit X un espace de Banach complexe. Si on considère un secteur S_ϕ dans $\mathbb{C}$ et contenant $\mathbb{R}_+$, alors il sera possible de généraliser la notion de C_0 semi-groupe à celle de semi-groupe analytique. Dans toute la suite arg désigne la détermination principale de la fonction argument caractérisée par :

$$\arg(z) = \phi \text{ si } z = re^{i\phi}, \;\; r > 0, \;\; \phi \in]-\pi,\pi[.$$

Définition 1.6.1
Soit $0 < \phi < \pi$. On appelle semi-groupe analytique l'application S définie sur le secteur $\overline{S_\phi}$ avec

$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : \;\; |\arg(z)| < \phi\}$$

et à valeur dans $\mathcal{L}(X)$ telle que

1. *$z \to S(z)$ est analytique sur S_ϕ.*

2. $S(0) = I$ *et* $\forall x \in X, \lim\limits_{z \to 0, z \in \overline{S_\phi}} S(z)x = x.$
3. $\forall z_1, z_2 \in \overline{S_\phi}$, $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$.

Théorème 1.6.1 *(Kato [25]) Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est fermé,* $D(A)$ *est dense dans* X *et il existe* $C \geqslant 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}^* / \ \operatorname{Re} \lambda \geqslant 0\} \ \textit{et} \\ \forall \lambda \in \Pi, \ \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|}. \end{cases}$$

2. *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, uniformément borné* $(S(t))_{t \geq 0}$.
   On note en général $(S(t))_{t \geq 0}$ *par* $\left(e^{tA}\right)_{t \geq 0}$.

Théorème 1.6.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $(S(z))_{z \in \overline{S_\phi}}$ *uniformément borné sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe* $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *et* $C \geqslant 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\frac{\pi}{2}+\delta} \ \textit{et} \\ \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\delta}, \ \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda|}. \end{cases}$$

2. $(S(t))_{t \geq 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe différentiable et il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $t > 0$,

$$S(t) \in \mathcal{L}(X, D(A)) \ \textit{ et } \ \|AS(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{t}.$$

3. *Il existe* $\phi \in]0, \pi[$ *tel que* $(S(t))_{t \geq 0}$ *soit prolongeable en* $(S(z))_{z \in \overline{S_\phi}}$ *semi-groupe sur X, analytique dans* S_ϕ*, uniformément borné dans* $\overline{S_\phi}$.

Semi-groupe analytique généralisé

Soit A un opérateur linéaire fermé dans X de domaine non dense.

$$\begin{cases} \rho(A) \supset S_{\omega,\delta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{\omega\} / \ |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \in S_{\omega,\delta}} \left\| (\lambda - \omega)(\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
On dira dans ce cas que $\left(e^{xA}\right)_{x \geq 0}$ est un semi-groupe analytique généralisé de A et dans ce cas $\left(e^{xA}\right)_{x \geq 0}$ n'est pas supposé un semi-groupe fortement continu (voir A. Lunardi [29]).

Remarque 1.6.1 *En fixant* $r > 0$, $\delta_0 \in]0, \delta[$ *alors* $\left(e^{xA}\right)_{x \geq 0}$ *est défini par*

$$e^{xA} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{x\lambda} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \ \textit{si } x > 0 \\ I \ \ \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

où γ *est le bord de* $S_{\omega,\delta_0} \backslash B(0, r)$ *orienté négativement.*

1.7 Espaces d'interpolation

On donne ici certaines caractérisations des espaces d'interpolation dont on rappelle ci-dessous les principales (voir [27], [10] et [11]) .

Définition 1.7.1 *Soit X un espace de Banach.*
On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+;X)$ avec $p\in[1,+\infty]$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t\in\mathbb{R}_+$ et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty}\|f(t)\|_X^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}=\|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+;X)}<+\infty,$$

avec la modification habituelle pour $p=+\infty$.

Définition 1.7.2 *Soient $(X_0,\|.\|_0)$ et $(X_1,\|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé X.*
Pour $p\in[1,+\infty]$ et $\theta\in]0,1[$, on dit que $x\in(X_0,X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} i)\forall t>0,\exists u_0(t)\in X_0,\ \exists u_1(t)\in X_1 \text{ tel que } x=u_0(t)+u_1(t)\,,\\ ii)t^{-\theta}u_0\in L_*^p(\mathbb{R}_+;X_0)\,,\ t^{1-\theta}u_1\in L_*^p(\mathbb{R}_+;X_1)\,.\end{cases}$$

Proposition 1.7.1 *$\left(X_0\cap X_1,\|.\|_{X_0\cap X_1}\right)$, $\left(X_0+X_1,\|.\|_{X_0+X_1}\right)$ et $\left((X_0,X_1)_{\theta,p},\|.\|_{\theta,p}\right)$ sont des espaces de Banach pour les normes respectives*

$$\begin{cases}\|x\|_{X_0\cap X_1}=\|x\|_{X_0}+\|x\|_{X_1} \text{ si } x\in X_0\cap X_1\\ \|x\|_{X_0+X_1}=\inf\limits_{x_i\in X_i,x_0+x_1=x}\left(\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1}\right) \text{ si } x\in X_0+X_1.\end{cases}$$

et

$$\begin{cases}\|x\|_{\theta,p}=\inf\limits_{\substack{u_i:\mathbb{R}_+\to X_i,i=0,1\\ \forall t>0,x=u_0(t)+u_1(t)}}\left(\left\|t^{-\theta}u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+;X_0)}+\left\|t^{1-\theta}u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+;X_1)}\right)\\ \text{si } x\in(X_0,X_1)_{\theta,p}\,.\end{cases}$$

et de plus

$$X_0\cap X_1\subset(X_0,X_1)_{\theta,p}\subset X_0+X_1,$$

avec injections continues.
Notons que $(X_0,X_1)_{\theta,p}=(X_1,X_0)_{1-\theta,p}$.

1.7.1 Quelques espaces d'interpolation particuliers

Définition 1.7.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine*

$$D(A)\subset X,$$

muni de sa norme du graphe :

$$\forall\ x\in D(A),\ \ \|x\|_{D(A)}=\|x\|_X+\|Ax\|_X\,.$$

On pose alors, en suivant les notations de P. Grisvard

$$D_A(\theta,p)=(D(A),X)_{1-\theta,p}$$

où $p\in[1,+\infty]$ et $0<\theta<1$.

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta, p)$ comme suit :

Proposition 1.7.2 *soient* $p \in [1, +\infty]$, $0 < \theta < 1$ *et* A *un opérateur linéaire fermé sur* X *de domaine* $D(A)$.

1. *Supposons que* $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ *et qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*
$$\forall \lambda > 0, \ \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$
alors
$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : \ t^\theta A (A - \lambda I)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X) \right\},$$
Voir P. Grisvard [11].
2. *Si* A *génère un semi-groupe fortement continu et borné dans* X
$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : \ t^{-\theta} \left(e^{tA} - I \right) x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X) \right\}.$$
Voir Lions [28].
3. *Si maintenant* A *génère un semi-groupe analytique borné dans* X, *alors*
$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : \ t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X) \right\},$$
voir Butzer-Berens [4].

Notons que, D'après G. Da Prato et P. Grisvard [11], page 383, on a
$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p),$$
avec $m \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Définition 1.7.4 *Soient* $p \in [1, +\infty]$, $0 < \theta < 1$, $k \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$ *et* A *un opérateur linéaire fermé sur* X *de domaine* $D(A)$. *On définit alors*
$$D_A(\theta + k, p) := \left\{ \xi \in D(A^k) : \ A^k \xi \in D_A(\theta, p) \right\}.$$

Proposition 1.7.3 *Soient* $p \in [1, +\infty]$, $0 < \theta < 1$, $k \in \mathbb{N}$ *tels que* $k\theta \notin \mathbb{N}$ *et* A *un opérateur linéaire fermé sur* X *de domaine* $D(A)$, *alors*
$$D_A(\theta + k, p) = \left(D(A^k), D(A^{k+1}) \right)_{\theta, p},$$
voir [30], page 59.

1.7.2 Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplets d'espaces d'interpolation (X_0, X_1, X) et (Y_0, Y_1, Y) et un opérateur linéaire T de X dans Y. Alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.7.1 *On suppose que les restrictions de* T *aux espaces* X_i *à valeurs dans* Y_i *sont linéaires continues. Alors pour tous* $\theta \in]0, 1[$ *et* $p \in [1, +\infty]$ *l'opérateur* T *est linéaire continu de* $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ *dans* $(Y_0, Y_1)_{\theta, p}$ *et*
$$\|T\|_{\mathcal{L}\left((X_0, X_1)_{\theta, p}, (Y_0, Y_1)_{\theta, p}\right)} \leqslant C \|T\|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, Y_1)}^{\theta}.$$

1.7.3 Espaces de traces

Définition 1.7.5 *Soient α un paramètre réel, $p \in]1, +\infty[$, $\delta > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. On désigne par*

$$W^{m,p}(p, \alpha; X_0, X_1)$$

l'ensemble des fonctions u telles que

$$\begin{cases} i)\ t^{\alpha} u \in L^p(0, \delta; X_0), \\ ii)\ \ t^{\alpha} u^{(m)} \in L^p(0, \delta; X_1), \end{cases} \tag{1.7.1}$$

où $u^{(m)}$ désigne la dérivée d'ordre m de u au sens des distributions. Muni de la norme

$$\|u\|_{W^m} = \max\left(\|t^{\alpha} u\|_{L^p(X_0)}, \left\|t^{\alpha} u^{(m)}\right\|_{L^p(X_1)} \right),$$

$W^{m,p}(p, \alpha; X_0, X_1)$ est un espace de Banach.

Il est naturel, pour une fonction vérifiant (1.7.1), de se demander à quelle condition sur $j \in \mathbb{N}$ peut-on définir la trace de $u^{(j)}$ en 0 ? Dans l'affirmative, à quel espace appartient-elle ? La réponse est donnée par le théorème essentiel suivant

Théorème 1.7.2 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que*

$$0 < \alpha + \frac{1}{p} + j < m,$$

la trace de $u^{(j)}$ en 0 existe, de plus on a

$$u^{(j)}(0) \in (X_0, X_1)_{\theta,p},$$

où $\theta = \left(\alpha + \frac{1}{p} + j\right)/m$.

Lemme 1.7.1 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé où*

$$(0, +\infty) \subset \rho(A) \ \text{ et } \exists C > 0 : \ \forall \lambda > 0, \ \left\|\lambda (A - \lambda I)^{-1}\right\| \leqslant C.$$

Si $u \in L^p\left(a, b; D(A^k)\right) \cap W^{m,p}(a, b; X)$ avec $m, k \in \mathbb{N}^*$ et $1 < p < +\infty$. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ avec $0 < \frac{1}{p} + j < m$ et $t \in \{a, t, b\}$, on a

$$u^{(j)}(t) \in \left(D(A^k), X\right)_{\frac{1}{mp} + \frac{j}{m}, p}.$$

La preuve est effectuée dans Grisvard [21], page 678, Teorema 2'.

1.7.4 Espaces de Besov

Dans les applications, on doit souvent expliciter les espaces $D_A(\theta, p)$. Ceux-ci peuvent être par exemple, des espaces de Hölder, des espaces de sobolev, ... ou encore des espaces de Besov. On trouve dans Grisvard [21], [22] les définitions suivantes.

Définition 1.7.6 *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On définit l'espace de Besov*

$$B_p^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \quad (x,y) \to \frac{\varphi(x) + \varphi(y) - 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)}{|x-y|^{1+\frac{n}{p}}} \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \right\},$$

puis pour $s > 1$ entier

$$B_p^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in W^{s-1,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B_p^1(\mathbb{R}^n), |\alpha| = s-1 \right\},$$

et enfin pour s non entier

$$B_p^s(\mathbb{R}^n) := W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.7.7 *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit*

$$B_p^s(\Omega) := \left\{ \varphi = \psi_{/\Omega} : \psi \in B_p^s(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Définition 1.7.8 *Soient $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. On définit* ***l'espace de Besov***

$$B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \quad \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{+\infty} t^{-q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x + te_k) + \varphi(x - te_k) - 2\varphi(x)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

et pour $0 < s < 1$

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{+\infty} t^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x + te_k) - \varphi(x)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

puis

$$B_{p,q}^m(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B_{p,q}^1(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m-1 \right\},$$

et enfin pour $m < s < m+1$,

$$B_{p,q}^m(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi \in B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m \right\},$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.7.9 *Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit*

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi = \psi_{/\Omega} : \psi \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Dans le cas particulier $p = q$, on a le résultat suivant.

Définition 1.7.10 *Soient* $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *On a*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := B^s_p(\mathbb{R}^n),$$

et

$$B^s_{p,q}(\Omega) := B^s_p(\Omega).$$

Théorème 1.7.3 *([21] p. 681) Pour* $1 < p < +\infty$ *et* $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, *on a*

$$\left(W^{m,p}(\mathbb{R}^n); L^p(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,p} = B^{m(1-\theta)}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.7.4 *([21] p. 683) Soit* Ω *une variété différentielle de classe* C^m *de dimension* n *de bord de dimension* $n-1$ *contenu dans* $\mathbb{R}^n$, *alors pour* $1 < p < +\infty$ *et* $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, *on a*

$$\left(W^{m,p}(\Omega); L^p(\Omega)\right)_{\theta,p} = B^{m(1-\theta)}_{p,q}(\Omega).$$

1.8 Les espaces UMD

On considère un espace de Banach X.

Définition 1.8.1 *Pour* $\varepsilon \in]0,1[$ *et* $p \in]1,+\infty[$, *on définit l'opérateur*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X)),$$

par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}; X), \ \ (\mathcal{H}_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds, \ \ p.p. \ x \in \mathbb{R},$$

Définition 1.8.2 *X est appelé espace UMD (Unconditional Martingale Differences), s'il existe* $p \in]1,+\infty[$ *tel que*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}; X), \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f \ \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}; X). \tag{1.8.1}$$

Dans ce cas, l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}: & L^p(\mathbb{R}; X) & \rightarrow & L^p(\mathbb{R}; X) \\ & f & \rightarrow & \mathcal{H}\ f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f \end{array}$$

est un élément de $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X))$, *appelé la transformée de Hilbert sur* $L^p(\mathbb{R}; X)$.

Notons que si X est un espace UMD alors (1.8.1) est vraie pour tout $p \in]1,+\infty[$.
Il est bon d'avoir aussi une caractérisation géométrique des espaces UMD, à cette fin on introduit la notion de $\zeta-$convexité.

Définition 1.8.3 *X est dit $\zeta-$convexe si et seulement s'il existe une fonction*

$$\zeta : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

vérifiant $\zeta(0,0) > 0$ *et pour tout* x, y *de* X.

1. $\zeta(x,.)$ *et* $\zeta(.,y)$ *sont convexes sur* X.
2. $\zeta(x,y) \leqslant \|x+y\|$ *si* $\|x\| = \|y\| = 1$.

Le résultat fondamental de D.L. Burkhorder (voir [2] et [3]) est le suivant :

Théorème 1.8.1 *X est un espace UMD si et seulement si X est $\zeta-$convexe.*

Corollaire 1.8.1 *Un espace de Banach X est un espace UMD si est seulement si pour tout p $(1 < p < \infty)$, la transformation de Hilbert est continue de $L^p(\mathbb{R}; X)$ dans lui-même.*

Exemple 1.8.1 *Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD*

1. *Tout espace de Hilbert est UMD.*
2. *Tout espace isomorphe à un espace UMD est UMD.*
3. *Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est UMD.*
4. *Si les espaces X et Y sont U.M.D alors les espaces interpolés (cas réel $(X,Y)_{\theta,p}$ou complexe$[X,Y]_{\theta,p}$) sont espaces UMD si $1 < p < \infty$.*
5. *Tous les espaces construits sur $L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$, tel que X un espace de type UMD sont de type UMD.*

Chapitre 2

Equations différentielles opérationnelles avec des C-L de type Robin généralisé : cas non commutatif sur les espaces L^p

2.1 Introduction

Soient A, B et H des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X, $f \in L^P(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$; d_0, u_1 sont des éléments donnés dans X et ω est un réel positif assez grand.
Notre but dans ce chapitre est d'étudier, dans le cas où A et B **ne commutent pas** au sens des résolvantes, les équations différentielles opérationnelles elliptiques complètes du second ordre posées sur l'intervalle borné $(0,1)$, munies des conditions aux limites de type Robin généralisé. Plus précisément, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)\,, \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique du problème (2.1.1), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A))\,, \\ u' \in L^p(0,1;D(B))\,, \\ u(0) \in D(H)\,, \end{cases}$$

et u satisfait le problème (2.1.1).
Pour étudier le problème (2.1.1), on considère un cas plus général en supposant des opérateurs linéaires fermés non commutatifs L_ω, M_ω et on traite l'équation différentielle opérationnelles elliptique suivante :

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}\left(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega\right) u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)\,, \tag{2.1.2}$$

sous les conditions aux limites abstraites de type Robin

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

On cherche une solution classique de (2.1.2)-(2.1.3), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega)), \\ u' \in L^p(0,1;D(L_\omega - M_\omega)), \\ u(0) \in D(H), \end{cases}$$

qui satisfait le problème (2.1.2)-(2.1.3).
Pour atteindre le but de ce chapitre, on suit les étapes suivantes.
1. Donner, pour ω assez grand, des hypothèses naturelles sur L_ω, M_ω et H qui permettent de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les données d_0 et u_1 pour l'existence et l'unicité d'une solution classique du problème (2.1.2)-(2.1.3).
2. Trouver, à partir de l'étude du problème (2.1.2)-(2.1.3) avec L_ω et M_ω satisfaisant

$$L_\omega - M_\omega \subset 2B \text{ et } \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) \subset A - \omega I,$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème (2.1.1) admette une unique solution classique.

Remarque 2.1.1 *Si on suppose certaines conditions appropriées sur A et B, en posant*

$$\begin{cases} L_\omega = B - \sqrt{B^2 - A + \omega I}, \\ M_\omega = -B - \sqrt{B^2 - A + \omega I}, \end{cases}$$

alors la solution du problème (2.1.2)-(2.1.3) est à priori la solution du problème (2.1.1).

2.2 Hypothèses

En première étape, on étudie le problème (2.1.2)-(2.1.3) et pour cela, on suppose que

$$X \text{ est un espace U.M.D,} \tag{2.2.1}$$

et qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs linéaires fermés L_ω et M_ω vérifient

$$\begin{cases} \exists C_0 > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0,]0, +\infty[\subset \rho(L_\omega) \cap \rho(M_\omega), \\ \ker(L_\omega) = \ker(M_\omega) = \{0\}, \ \overline{\operatorname{Im}(L_\omega)} = \overline{\operatorname{Im}(M_\omega)} = X, \\ \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda (L_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0 \text{ et } \sup\limits_{\lambda>0} \left\| \lambda (M_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

et

$$\begin{cases} \exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[, \exists C \geqslant 1, \forall \omega \geqslant \omega_0, \forall s \in \mathbb{R}, \\ (-L_\omega)^{is}, (-M_\omega)^{is} \in \mathcal{L}(X); \\ \left\| (-L_\omega)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta_L |s|} \text{ et } \left\| (-M_\omega)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta_M |s|}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1 *Grâce aux hypothèses (2.2.2)-(2.2.3), pour $\omega \geqslant \omega_0$, L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques uniformément bornés dans X, respectivement $\left(e^{xL_\omega}\right)_{x\geq 0}$ et $\left(e^{xM_\omega}\right)_{x\geq 0}$ (voir [33], Définition 1, p. 431 et le Théorème 2, p.437).*

Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on suppose également

$$D(L_\omega) = D(M_\omega) \tag{2.2.4}$$

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((M_\omega - L_\omega)^2), \tag{2.2.5}$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{2.2.6}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0, \Lambda_\omega = (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{2.2.7}$$

et

$$\forall \omega \geqslant \omega_0, \forall \xi \in D(L_\omega),\ \Lambda_\omega^{-1}\xi \in D((L_\omega + M_\omega)^2). \tag{2.2.8}$$

L'hypothèse de non commutativité est

$$\forall \omega \geqslant \omega_0, \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi(\omega)\,; \tag{2.2.9}$$

où C_{L_ω,M_ω} est le commutateur donné par

$$\begin{aligned} C_{L_\omega,M_\omega} &= (M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-2} \\ &= [M_\omega; L_\omega](L_\omega + M_\omega)^{-2}, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

et

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0. \tag{2.2.11}$$

On verra que dans de nombreux cas concrets, on a

$$\chi(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^\alpha}\right) \text{ avec } \alpha > 0.$$

Remarque 2.2.2 *On suppose que les hypothèses (2.2.1)~(2.2.9) sont vérifiées. Si le problème (2.1.2)-(2.1.3) admet une solution classique, alors*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega)).$$

Or, d'après le Lemme 2.3.1, $D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega) = D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$, *on déduit alors, d'après [21]*

$$u(0),\ u(1) \in \left(D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p} = \left(X,\ D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

On note que

$$\begin{aligned}\left(X,\ D\left((L_\omega+M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} &= (X,\ D(L_\omega+M_\omega))_{2-\frac{1}{p},p} \\ &= (X,\ D(L_\omega))_{1+1-\frac{1}{p},p} \\ &= \left\{\phi\in D(L_\omega): L_\omega\phi\in (X,\ D(L_\omega))_{1-\frac{1}{p},p}\right\}.\end{aligned}$$

donc

$$u(0),\ u_1\in D(L_\omega).$$

Remarque 2.2.3 *Dans les calculs qui suivent, la dépendance en ω n'étant pas nécessaire, on notera $L_\omega = L$, $M_\omega = M$, $\Lambda_\omega = \Lambda$.....*

2.3 Lemmes techniques

Lemme 2.3.1 *([16]) On suppose (2.2.4)∼(2.2.6). Alors*

1. *$D(LM) = D(M^2)$ et $D(ML) = D(L^2)$.*
2. *$D((L+M)^2) = D(L^2)\cap D(M^2) = D(LM)\cap D(ML)$.*
3. *$D((L-M)^2-(L+M)^2) = D(LM)\cap D(ML) = D((L+M)^2)$.*

Preuve.

1. Soit $\phi\in D(LM)$, alors $\phi\in D(M)$ et
$$M\phi\in D(L)=D(M),$$
d'où $\phi\in D(M^2)$.
Inversement, si $\phi\in D(M^2)$ alors $\phi\in D(M)$ et
$$M\phi\in D(M)=D(L),$$
d'où $\phi\in D(LM)$. On obtient l'égalité $D(LM)=D(M^2)$.
En échangeant les rôles de L et M, on obtient $D(ML)=D(L^2)$.
2. Soit $\phi\in D((L+M)^2)$, alors il existe $\zeta\in X$ tel que
$$\phi=(L+M)^{-2}\zeta,$$
de plus $\phi\in D(L+M)=D(M)\cap D(L)=D(M)$ et
$$\begin{aligned}M\phi &= M(L+M)^{-2}\zeta \\ &= \frac{1}{2}\left(2M(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\zeta \\ &= \frac{1}{2}\left(I-(L+M-2M)(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\zeta \\ &= \frac{1}{2}\left(I-(L-M)(L+M)^{-1}\right)(L+M)^{-1}\zeta \\ &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1}\zeta-\frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-2}\zeta,\end{aligned}$$

mais $y = \dfrac{1}{2}(L+M)^{-1}\zeta \in D(M)$ et de (2.2.4) et (2.2.5), on a

$$z = \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-2}\zeta \in D(L-M) = D(M),$$

d'où $M\phi = y - z \in D(M)$ donc $\phi \in D(M^2)$. En échangeant les rôles de L et M, on obtient $\phi \in D(L^2)$ et ainsi

$$\phi \in D(M^2) \cap D(L^2).$$

Inversement, soit $\phi \in D(M^2) \cap D(L^2)$. Alors

$$L\phi \in D(L) = D(L+M) \text{ et } M\phi \in D(M) = D(L+M),$$

donc $L\phi + M\phi \in D(L+M)$, ainsi $\phi \in D((L+M)^2)$.

3. L'assertion 2 et l'hypothèse (2.2.5) permettent de déduire

$$D((L-M)^2 - (L+M)^2) = D((L+M)^2) = D(LM) \cap D(ML).$$

□

Pour montrer les lemmes 2.3.2 et 2.3.3, on s'inspire de la méthode utiliser dans [16].

Lemme 2.3.2 *Soient (2.2.1)∼(2.2.7) et (2.2.10). Alors pour tout opérateur* $S, \widetilde{S} \in \{L, M, L+M, L-M\}$, *on a*

1. $S(L-I)^{-1}$, $S(L+M)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$,
2. $S(L-M)(L+M)^{-2}$, $S\widetilde{S}(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$,
3. $(L+M)(L-M)(L+M)^{-2}$, $(L-M)^2(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$,
4. $(L+H)\Lambda^{-1}, (M+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$,
5. $C_{L,M} \in \mathcal{L}(X)$.

Preuve. Pour les assertions **1** et **2**, on utilise la proposition 1.1.4.
3) Grâce à l'assertion précédente 2, on obtient

$$\begin{cases} (L+M)(L-M)(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X), \\ (L-M)^2(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X). \end{cases}$$

4) Puisque $(L+H)$ est un opérateur fermé sur X et $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et

$$\Lambda^{-1}(X) \subset D(L+H),$$

alors $(L+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
5) On a

$$\begin{aligned} C_{L,M} &= [M;L](L+M)^{-2} \\ &= (ML-LM)(L+M)^{-2} \\ &= ML(L+M)^{-2} - LM(L+M)^{-2}, \end{aligned}$$

et d'après l'assertion 2, on a $LM(L+M)^{-2}$, $ML(L+M)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$, alors $C_{L,M} \in \mathcal{L}(X)$.
□

Lemme 2.3.3 *Soient (2.2.1)∼(2.2.7) et (2.2.10) . On a les assertions suivantes :*

1. $(L \pm M)^2 = L^2 \pm LM \pm ML + M^2$ *et pour* $\phi \in D((L+M)^2)$, *on a*
$$(L-M)^2 \phi = L^2\phi - LM\phi - ML\phi + M^2\phi.$$
2. $LM + ML = \frac{1}{2}\left((L+M)^2 - (L-M)^2\right)$.
3. $\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] = -2\left[M;(L+M)^{-1}\right] = 2\left[L;(L+M)^{-1}\right]$
4. $C_{L,M} = \frac{1}{2}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}$.
5. $(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L+H)\Lambda^{-1} - I$
6. $\begin{cases} (L+M)^{-1} M - (L+M)^{-1} C_{L,M} (L+M) = M (L+M)^{-1}, \\ (L+M)^{-1} L + (L+M)^{-1} C_{L,M} (L+M) = L (L+M)^{-1}. \end{cases}$
7. $\begin{cases} M (L+M)^{-1} M + \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1} C_{L,M} (L+M) = \\ \qquad \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(L-M) M (L+M)^{-1} \\ L (L+M)^{-1} L + \frac{1}{2}(L-M)(L+M)^{-1} C_{L,M} (L+M) = \\ \qquad \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(L-M) L (L+M)^{-1} \end{cases}$
8. $\begin{cases} M + (L-M) M (L+M)^{-1} - (LM+ML)(L+M)^{-1} = 0 \text{ dans } D(M), \\ L - (L-M) L (L+M)^{-1} - (LM+ML)(L+M)^{-1} = 0 \text{ dans } D(L). \end{cases}$

Preuve. 1- En vertu de l'assertion 2 du Lemme 2.3.2 , on a pour $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et pour $\phi \in D((L+M)^2) \subset D((L-M)^2)$
$$\begin{aligned} (L+\varepsilon M)^2 \phi &= (L+\varepsilon M)(L\phi + \varepsilon M\phi) \\ &= L(L\phi + \varepsilon M\phi) + \varepsilon M (L\phi + \varepsilon M\phi) \\ &= L^2\phi + \varepsilon LM\phi + \varepsilon ML\phi + M^2\phi. \end{aligned}$$
2- C'est une conséquence de l'assertion précédente et du Lemme 2.3.2 .
3- Soit $\phi \in D(M) = D(L)$, on a
$$\begin{array}{l} \left[(L-M);(L+M)^{-1}\right]\phi = \left[L;(L+M)^{-1}\right]\phi - \left[M;(L+M)^{-1}\right]\phi, \\ \left[L;(L+M)^{-1}\right]\phi + \left[M;(L+M)^{-1}\right]\phi = \left[(L+M);(L+M)^{-1}\right]\phi = 0. \end{array}$$
(voir assertion 3 du Lemme 2.1 dans [16]).
4- On a
$$\begin{aligned} C_{L,M} &= [M;L](L+M)^{-2} \\ &= (ML - LM)(L+M)^{-2} \end{aligned}$$
et puisque on a pour $\phi \in D((L+M)^2)$
$$\begin{cases} (L+M)(L-M)\phi = L^2\phi - LM\phi + ML\phi - M^2\phi, \\ (L-M)(L+M)\phi = L^2\phi + LM\phi - ML\phi - M^2\phi, \end{cases}$$

et ainsi
$$((L+M)(L-M)-(L-M)(L+M))\phi = 2(ML-LM)\phi$$
d'où
$$\begin{aligned}
C_{L,M} &= (ML-LM)(L+M)^{-2} \\
&= \frac{1}{2}((L+M)(L-M)-(L-M)(L+M))(L+M)^{-2} \\
&= \frac{1}{2}(L+M)\big((L-M)(L+M)^{-1}-(L+M)^{-1}(L-M)\big)(L+M)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}.
\end{aligned}$$

5) Puisque $\Lambda = (M-H) + e^L e^M (L+H)$, alors
$$\begin{aligned}
& (L+M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L+H)\Lambda^{-1} - I \\
= & \left[(L+M) + e^L e^M (L+H) - (M-H) - e^L e^M (L+H)\right]\Lambda^{-1} \\
= & (L+H)\Lambda^{-1}.
\end{aligned}$$

6) D'après l'assertion 3, on a
$$\begin{aligned}
& (L+M)^{-1} M - (L+M)^{-1} C_{L,M} (L+M) \\
= & (L+M)^{-1} M - \frac{1}{2}(L+M)^{-1}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}(L+M) \\
= & (L+M)^{-1} M - \frac{1}{2}\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] \\
= & (L+M)^{-1} M + \left[M;(L+M)^{-1}\right] \\
= & M(L+M)^{-1}.
\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}
& (L+M)^{-1} L + (L+M)^{-1} C_{L,M} (L+M) \\
= & (L+M)^{-1} L + \frac{1}{2}(L+M)^{-1}(L+M)\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right](L+M)^{-1}(L+M) \\
= & (L+M)^{-1} L + \frac{1}{2}\left[(L-M);(L+M)^{-1}\right] \\
= & (L+M)^{-1} L + \left[L;(L+M)^{-1}\right] \\
= & L(L+M)^{-1}.
\end{aligned}$$

7) D'après l'assertion 3, on a

$$\begin{aligned}
& M\left(L+M\right)^{-1}M+\frac{1}{2}\left(L-M\right)\left(L+M\right)^{-1}C_{L,M}\left(L+M\right) \\
= \; & M\left(L+M\right)^{-1}M \\
& +\frac{1}{4}\left(L-M\right)\left(L+M\right)^{-1}\left(L+M\right)\left[\left(L-M\right);\left(L+M\right)^{-1}\right]\left(L+M\right)^{-1}\left(L+M\right) \\
= \; & M\left(L+M\right)^{-1}M+\frac{1}{4}\left(L-M\right)\left[\left(L-M\right);\left(L+M\right)^{-1}\right] \\
= \; & M\left(L+M\right)^{-1}M-\frac{1}{2}\left(L-M\right)\left[M;\left(L+M\right)^{-1}\right] \\
= \; & M\left(L+M\right)^{-1}M-\frac{1}{2}\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}+\frac{1}{2}\left(L-M\right)\left(L+M\right)^{-1}M \\
= \; & M\left(L+M\right)^{-1}M-\frac{1}{2}\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}+\frac{1}{2}\left(L+M-2M\right)\left(L+M\right)^{-1}M \\
= \; & M\left(L+M\right)^{-1}M-\frac{1}{2}\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}+\frac{1}{2}M-M\left(L+M\right)^{-1}M \\
= \; & \frac{1}{2}M-\frac{1}{2}\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1},
\end{aligned}$$

de même, on obtient

$$L\left(L+M\right)^{-1}L+\frac{1}{2}\left(L-M\right)\left(L+M\right)^{-1}C_{L,M}\left(L+M\right)=\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}\left(L-M\right)L\left(L+M\right)^{-1}.$$

8) Dans le domaine $D(L)=D(M)$, on a d'après l'assertion 2,

$$\begin{aligned}
& M+\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}-\left(LM+ML\right)\left(L+M\right)^{-1} \\
= \; & M+\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}+\frac{1}{2}\left(\left(L-M\right)^2-\left(L+M\right)^2\right)\left(L+M\right)^{-1} \\
= \; & M+\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}+\frac{1}{2}\left(L-M\right)^2\left(L+M\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(L+M\right),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& M+\left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}-\left(LM+ML\right)\left(L+M\right)^{-1} \\
= \; & \left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}+\frac{1}{2}\left(L-M\right)^2\left(L+M\right)^{-1}+M-\frac{1}{2}\left(L+M\right) \\
= \; & \left(L-M\right)M\left(L+M\right)^{-1}+\frac{1}{2}\left(L-M\right)^2\left(L+M\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(L+M-2M\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left(L-M\right)\left[2M+\left(L-M\right)\right]\left(L+M\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(L-M\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left(L-M\right)\left(M+L\right)\left(L+M\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(L-M\right) \\
= \; & 0,
\end{aligned}$$

de même,

$$L-\left(L-M\right)L\left(L+M\right)^{-1}-\left(LM+ML\right)\left(L+M\right)^{-1}=0.$$

$\square$

Lemme 2.3.4 *On suppose (2.2.1)∼(2.2.3). Alors, pour* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < +\infty$ *et* $Q \in \{L, M\}$, *on a*

1. $x \to Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.
2. $x \to Q\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.
3. $x \to Q\int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.
4. $\int_0^1 e^{sQ} f(s)ds$, $\int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s)ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.

Preuve. Pour les points 1, 2 et 3, voir [12] et A. Favini *et* al [18] p. 167-168 et (24), (25), (26) dans [20]. Le point 4 est une conséquence du point 1 et 2, on procède comme dans la Remarque 2.2.2, on utilise

$$x \to \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)ds, x \to \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)ds \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(Q)).$$

□

Lemme 2.3.5 *On suppose (2.2.1)∼(2.2.8) et* $\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$ *avec* $Q \in \{L, M\}$. *Alors :*

1. $(L+M)\Lambda^{-1}\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.
2. $(L+H)\Lambda^{-1}\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.

Preuve.

1. On pose $T = (L+M)\Lambda^{-1}$, alors T est un opérateur linéaire continu de X dans X. En utilisant l'hypothèse (2.2.8), on obtient $T(D(L)) \subset D(L)$ et
$$T \in \mathcal{L}(D(L), D(L)),$$
(ici $D(L)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe). Alors, en utilisant les propriétés de l'interpolation, on trouve
$$T \in \mathcal{L}((X, D(L))_{\frac{1}{p},p}, (X, D(L))_{\frac{1}{p},p}),$$
voir [29], p. 19.
2. D'après l'assertion 5 du Lemme 2.3.3, on a
$$(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^L e^M (L+H)\Lambda^{-1} - I,$$
donc, d'après le point 1, on déduit
$$(L+H)\Lambda^{-1}\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$$
pour $\varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$.

□

2.4 Formule de représentation de la solution

De même dans cette section, la dépendance en ω n'étant pas nécessaire, on n'indexera pas donc par ce paramètre.
En utilisant la formule de représentation de la solution du problème (2.1.2)-(2.1.3) trouvée par Cheggag *et* al (voir [8] p. 63) dans le cas commutatif et quelques considérations heuristiques, nous essayerons d'obtenir une équation intégral vérifiée par l'éventuelle solution classique $u := (L+M)^{-2} v$. Cette équation intégrale est écrite sous la forme :

$$v + R(v) = F(f) + \Gamma$$

où R, F et S dépendent de L et M, R dépendant du commutateur $C_{L,M}$ et S dépendant des données u_1, d_0.
Dans le cadre commutatif, la solution formelle du problème (2.1.2)-(2.1.3) est donnée, pour presque tout $x \in (0,1)$, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{xM}\Lambda^{-1}d_0 + e^{xM}e^{L}(L+H)\Lambda^{-1}u_1 \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\
&\quad +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&\quad +e^{(1-x)L}u_1 - e^{(1-x)L}e^{M}e^{L}(L+H)\Lambda^{-1}u_1 - e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0 \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left(I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right)\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\
&\quad -(M+L)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&\quad +(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\
&= D(x) + \Psi(x) + \Phi(x),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
D(x) &= e^{xM}\Lambda^{-1}d_0 - e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0 + e^{xM}e^{L}(L+H)\Lambda^{-1}u_1 \\
&\quad +e^{(1-x)L}u_1 - e^{(1-x)L}e^{M}e^{L}(L+H)\Lambda^{-1}u_1,
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\
&\quad +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
&\quad -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds,
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

et

$$\Phi\left(x\right)=\left(L+M\right)^{-1}\int_{0}^{x}e^{(x-s)M}f(s)ds+\left(L+M\right)^{-1}\int_{x}^{1}e^{(s-x)L}f(s)ds, \tag{2.4.3}$$

où

$$\Lambda=\left(M-H\right)+e^{L}e^{M}\left(L+H\right),$$

avec

$$D(\Lambda)=D(M)\cap D(H)=D(L)\cap D(H).$$

Maintenant, dans le cas non commutatif, en faisant un raisonnement heuristique et cela en supposant qu'il existe une solution classique u du problème (2.1.2)-(2.1.3) satisfaisant la propriété de régularité maximale pour trouver une équation intégrale de la forme :

$$v:=\left(L+M\right)^{2}u. \tag{2.4.4}$$

Le calcul de $\Psi\left(.\right)$

Ici dans ce cas non commutatif, en remplaçant f par $u''+\left(L-M\right)u'-\dfrac{1}{2}\left(LM+ML\right)u$, pour presque tout $x\in\left(0,1\right)$, Ψ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Psi\left(x\right) &= -\left(L+M\right)^{-1}e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}\left(u''(s)+(L-M)u'(s)\right)ds\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(L+M\right)^{-1}e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}\left(LM+ML\right)u(s)ds\\
&\quad+\left(L+M\right)^{-1}e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}\left(u''(s)+(L-M)u'(s)\right)ds\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(L+M\right)^{-1}e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}\left(LM+ML\right)u(s)ds\\
&\quad-\left(L+M\right)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}\left(u''(s)+(L-M)u'(s)\right)ds\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(L+M\right)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_{0}^{1}e^{sL}\left(LM+ML\right)u(s)ds\\
&\quad-\left(L+M\right)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}\left(u''(s)+(L-M)u'(s)\right)ds\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(L+M\right)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_{0}^{1}e^{(1-s)M}\left(LM+ML\right)u(s)ds\\
&= \sum_{i=1}^{12}\Psi_{i}\left(x\right),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= -(L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L \int_0^1 e^{(1-s)M}u''(s)ds, \\
\Psi_2(x) &= (L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL}u''(s)ds, \\
\Psi_3(x) &= -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL}u''(s)ds, \\
\Psi_4(x) &= -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left[I-e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right] \int_0^1 e^{(1-s)M}u''(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_5(x) &= -(L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L \int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)ds, \\
\Psi_6(x) &= (L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL}(L-M)u'(s)ds, \\
\Psi_7(x) &= -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL}(L-M)u'(s)ds, \\
\Psi_8(x) &= -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left[I-e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right] \int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_9(x) &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L \int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds, \\
\Psi_{10}(x) &= -\frac{1}{2}(L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds, \\
\Psi_{11}(x) &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds, \\
\Psi_{12}(x) &= \frac{1}{2}(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left[I-e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right] \int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds.
\end{aligned}$$

En effectuant, pour les fonctions Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 et Ψ_4, des intégrations par parties, on trouve

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(x) \\
&= -(L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L \int_0^1 e^{(1-s)M}u''(s)ds \\
&= -(L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L \left(u'(1)-e^Mu'(0)+Mu_1-Me^Mu(0)\right) \\
&\quad -(L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L M^2 \int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi_2(x) \\
&= (L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 e^{sL}u''(s)ds \\
&= (L+M)^{-1} e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1} \left[e^Lu'(1)-u'(0)-Le^Lu_1+Lu(0)+L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi_3(x)\\
= &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}u''(s)ds\\
= &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^{L}u'(1)-u'(0)-Le^{L}u_1+Lu(0)\right)\\
&-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Psi_4(x)\\
= &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left(I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right)\int_0^1 e^{(1-s)M}u''(s)ds\\
= &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left(I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right)\left[u'(1)+Mu_1-e^{M}(u'(0)+Mu(0))\right]\\
&-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left(I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right)M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds.
\end{aligned}$$

Même procédure pour les fonctions Ψ_5, Ψ_6, Ψ_7 et Ψ_8

$$\begin{aligned}
&\Psi_5(x)\\
= &-(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)ds\\
= &-(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\left((L-M)u_1-e^{M}(L-M)u(0)\right)\\
&-(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi_6(x)\\
= &(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(L-M)u'(s)ds\\
= &(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^{L}(L-M)u_1-(L-M)u(0)\right)\\
&-(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi_7(x)\\
= &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(L-M)u'(s)ds\\
= &-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^{L}(L-M)u_1-(L-M)u(0)\right)\\
&+(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Psi_8(x) \\
= \;& -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M (L+H)\Lambda^{-1} e^L\right)\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u'(s)ds \\
= \;& -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M (L+H)\Lambda^{-1} e^L\right)\left((L-M)u_1 - e^M(L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)^{-1} e^{(1-x)L}\left(I - e^M (L+H)\Lambda^{-1} e^L\right) M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)ds.
\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^2(\Psi_1(.)+\Psi_2(.)+\Psi_3(.)+\Psi_4(.))$
En appliquant $(L+M)^2$ à $\Psi_1(.)+\Psi_2(.)+\Psi_3(.)+\Psi_4(.)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\Psi_3(x)+\Psi_4(x)) \\
= \;& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L\left(-e^M u'(0) + Mu_1 - Me^M u(0)\right) \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(-u'(0) - Le^L u_1 + Lu(0)\right) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^M(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^L u'(1) - u'(0) - Le^L u_1 + Lu(0)\right) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left(I - e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right)\left[u'(1) - e^M u'(0) + Mu_1 - Me^M u(0)\right] \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^M(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I - e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right]M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds.
\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^2(\Psi_5(.)+\Psi_6(.)+\Psi_7(.)+\Psi_8(.))$

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Psi_5(x)+\Psi_6(x)+\Psi_7(x)+\Psi_8(x)) \\
= \;& (L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L e^M(L-M)u(0) \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}(L-M)u(0) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^M(L+H)\Lambda^{-1}\left(e^L(L-M)u_1 - (L-M)u(0)\right) \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I - e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right]\left[(L-M)u_1 - e^M(L-M)u(0)\right] \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^L M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)ds \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)ds \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}e^M(L+H)\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I - e^M(L+H)\Lambda^{-1}e^L\right]M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)ds.
\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^2(\Psi_9(.)+\Psi_{10}(.)+\Psi_{11}(.)+\Psi_{12}(.))$
De même

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Psi_9(x)+\Psi_{10}(x)+\Psi_{11}(x)+\Psi_{12}(x)) \\
= & \frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}(LM+ML)u(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}(LM+ML)u(s)ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Psi(x)) \\
= & (L+M)^2(\sum_{i=1}^{6}\Psi_i(x)) \\
= & -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\left[-e^{M}u'(0)+Mu_1-Me^{M}u(0)\right] \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left[-u'(0)-Le^{L}u_1+Lu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left[e^{L}u'(1)-u'(0)-Le^{L}u_1+Lu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left[u'(1)-e^{M}u'(0)+Mu_1-Me^{M}u(0)\right] \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)(L-M)u(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left[e^{L}(L-M)u_1-(L-M)u(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\left[(L-M)u_1-e^{M}(L-M)u(0)\right] \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}L^2\int_0^1 e^{sL}u(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]M^2\int_0^1 e^{(1-s)M}u(s)ds \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)ds
\end{aligned}$$

$$-(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)ds$$
$$+(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}L\int_0^1 e^{sL}(L-M)u(s)ds$$
$$-(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]M\int_0^1 e^{(1-s)M}(L-M)u(s)ds$$
$$+\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}\,(LM+ML)\,u(s)ds$$
$$-\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}\,(LM+ML)\,u(s)ds$$
$$+\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}\,(LM+ML)\,u(s)ds$$
$$+\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}\,(LM+ML)\,u(s)ds,$$

en posant $v(.)=(L+M)^2\,u(.)$ et puisque, sur $D((L+M)^2)$, on a

$$L^2e^{\cdot L}=e^{\cdot L}L^2,\;\; M^2e^{\cdot M}=e^{\cdot M}M^2,$$

alors, après les simplifications, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Psi(x)) \\
= \;& -(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\left[-e^{M}u'(0)+Lu_1-e^{M}Lu(0)\right] \\
& +(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left[-u'(0)-e^{L}Mu_1+Mu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left[-u'(0)-e^{L}Mu_1+Mu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left(I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right)\left[-e^{M}u'(0)+Lu_1-e^{M}Lu(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}u'(1) \\
& +(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\times \\
& \int_0^1 e^{(1-s)M}[-M^2-M(L-M)+\frac{1}{2}\,(LM+ML)](L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\times \\
& \int_0^1 e^{sL}[L^2-L(L-M)-\frac{1}{2}\,(LM+ML)](L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\times \\
& \int_0^1 e^{sL}[-L^2+L(L-M)+\frac{1}{2}\,(LM+ML)](L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]\times \\
& \int_0^1 e^{(1-s)M}[-M^2-M(L-M)+\frac{1}{2}\,(LM+ML)](L+M)^{-2}v(s)ds.
\end{aligned}$$

Si on définit le commutateur $C_{L,M}$ comme suit

$$C_{L,M}:=[M;L]\,(L+M)^{-2}=(ML-LM)\,(L+M)^{-2},$$

alors

$$
\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Psi(x)) \\
= \; & (L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left[\left(-I+e^{L}e^{M}\right)u'(0)-e^{L}\,(L+M)\,u_1+\left(M+e^{L}e^{M}L\right)u(0)\right] \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left[\left(e^{L}e^{M}-I\right)u'(0)+\left(M+e^{L}e^{M}L\right)u(0)\right] \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\,(L+M)\,u_1 \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[-e^{M}u'(0)+u'(1)+Lu_1-e^{M}Lu(0)\right] \\
& -\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds \\
& -(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds.
\end{aligned}
$$

Finalement, Puisque $u'(0)=Hu(0)+d_0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Psi(x)) \\
= \; & (L+M)e^{xM}\,(L+H)\,u(0)-(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\,(L+M)\,u_1 \\
& -(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\
& +(L+M)e^{(1-x)M}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\,(L+M)\,u_1 \\
& +(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}u'(1)-(L+M)e^{(1-x)L}Lu_1+(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\
& -\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds \\
& -(L+M)e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds.
\end{aligned}
$$

Le calcul de $\Phi(.)$

En utilisant la même procédure utilisée pour Ψ, la fonction Φ devient :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}[u''(s)+(L-M)\,u'(s)\\&-\frac{1}{2}\,(LM+ML)\,u(s)]ds+(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}[u''(s)\\&+(L-M)\,u'(s)-\frac{1}{2}\,(LM+ML)\,u(s)]ds\\&= \sum_{i=1}^{6}\Phi_i(x),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}u''(s)ds,\\ \Phi_2(x) &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}u''(s)ds,\\ \Phi_3(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}\,(L-M)\,u'(s)ds,\\ \Phi_4(x) &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}\,(L-M)\,u'(s)ds,\\ \Phi_5(x) &= -\frac{1}{2}\,(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}\,(LM+ML)\,u(s)ds,\\ \Phi_6(x) &= -\frac{1}{2}\,(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}\,(LM+ML)\,u(s)ds.\end{aligned}$$

L'idée principale est d'appliquer $(L+M)^2$ et d'effectuer des intégrations par parties afin de déduire l'équation intégrale satisfaite par v.
Le calcul de $(L+M)^2\,(\Phi_1(.)+\Phi_2(.))$
Suite à la Remarque 2.2.2, on a

$$u\,(0)\,,u_1\in D\,(L)=D\,(M)\,,$$

et donc

$$\begin{aligned}(L+M)^{-1}\,Me^{xM}u\,(0) &= (L+M)^{-1}\,e^{xM}Mu\,(0)\,,\\ (L+M)^{-1}\,Le^{xL}u_1 &= (L+M)^{-1}\,e^{xL}Lu_1.\end{aligned}$$

En utilisant des intégrations par parties et pour presque tout $x\in(0,1)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}u''(s)ds \\
&= (L+M)^{-1}\left[e^{(x-s)M}u'(s)\right]_0^x + (L+M)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}u'(s)ds \\
&= (L+M)^{-1}u'(x) - (L+M)^{-1}e^{xM}u'(0) \\
&\quad + (L+M)^{-1}Mu(x) - (L+M)^{-1}Me^{xM}u(0) \\
&\quad + (L+M)^{-1}\int_0^x M^2e^{(x-s)M}u(s)ds,
\end{aligned}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x) &= (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}u''(s)ds \\
&= (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}u'(1) - (L+M)^{-1}u'(x) \\
&\quad - (L+M)^{-1}Le^{(1-x)L}u_1 + (L+M)^{-1}Lu(x) \\
&\quad + (L+M)^{-1}\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}u(s)ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&(\Phi_1(x)+\Phi_2(x)) \\
= \; & u(x) - (L+M)^{-1}e^{xM}\left(u'(0)+Mu(0)\right) \\
& + (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Lu_1\right) \\
& + (L+M)^{-1}\int_0^x M^2e^{(x-s)M}u(s)ds \\
& + (L+M)^{-1}\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}u(s)ds.
\end{aligned}$$

En appliquant $(L+M)^2$ à $\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$ et puisque, on a

$$v(.) = (L+M)^2u(.),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&(L+M)^2(\Phi_1(x)+\Phi_2(x)) \\
= \; & v(x) - (L+M)e^{xM}\left(u'(0)+Mu(0)\right) \\
& + (L+M)e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Lu_1\right) \\
& + (L+M)\int_0^x M^2e^{(x-s)M}(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& + (L+M)\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}(L+M)^{-2}v(s)ds.
\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^2(\Phi_3(.)+\Phi_4(.))$
Pour presque tout $x\in(0,1)$, on obtient grâce aux intégrations par parties

$$\begin{aligned}\Phi_3(x) &= (L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}(L-M)\,u'(s)ds\\ &= (L+M)^{-1}(L-M)\,u(x)-(L+M)^{-1}e^{xM}(L-M)\,u(0)\\ &\quad+(L+M)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}(L-M)\,u(s)ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\Phi_4(x)\\ =\ & (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}(L-M)\,u'(s)ds\\ =\ & (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}(L-M)\,u(1)\\ & -(L+M)^{-1}(L-M)\,u(x)-(L+M)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}(L-M)\,u(s)ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\Phi_3(x)+\Phi_4(x)\\ =\ & -(L+M)^{-1}e^{xM}(L-M)\,u(0)+(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}(L-M)\,u_1\\ & +(L-M)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}u(s)ds-(L-M)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}u(s)ds.\end{aligned}$$

En appliquant $(L+M)$ à $\Phi_3(.)+\Phi_4(.)$, on obtient

$$\begin{aligned}&(L+M)(\Phi_3(x)+\Phi_4(x))\\ =\ & -e^{xM}(L-M)\,u(0)+e^{(1-x)L}(L-M)\,u_1\\ & +\int_0^x Me^{(x-s)M}(L-M)\,u(s)ds-\int_x^1 Le^{(s-x)L}(L-M)\,u(s)ds,\end{aligned}$$

ainsi, puisque

$$(L+M)^{-1}e^{xM}Mu(0)=(L+M)^{-1}Me^{xM}u(0),$$

et

$$(L+M)^{-1}e^{xL}Lu_1=(L+M)^{-1}Le^{xL}u_1,$$

en appliquant encore $(L+M)$ et en remplaçant u par $(L+M)^{-2}v$, on trouve

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Phi_3(x)+\Phi_4(x)) \\
= & -(L+M)e^{xM}(L-M)u(0)+(L+M)e^{(1-x)L}(L-M)u_1 \\
& +(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -(L+M)\int_0^x M^2e^{(x-s)M}(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -(L+M)\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}(L+M)^{-2}v(s)ds.
\end{aligned}$$

Le calcul de $(L+M)^2(\Phi_5(.)+\Phi_6(.))$

Enfin, en appliquant $(L+M)^2$ à $(\Phi_5(.)+\Phi_6(.))$ pour presque tout $x\in(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2(\Phi_5(x)+\Phi_6(x)) \\
= & -\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}LM(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}ML(L+M)^{-2}v(s)ds.
\end{aligned}$$

Après sommation, on trouve

$$\begin{aligned}
& (L+M)^2\Phi(x)= \\
& v(x)-(L+M)e^{xM}(u'(0)+Lu(0))+(L+M)e^{(1-x)L}(u'(1)-Mu_1) \\
& +(L+M)\int_0^x M^2e^{(x-s)M}(L+M)^{-2}v(s)ds+(L+M)\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& +(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)ds+(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -(L+M)\int_0^x M^2e^{(x-s)M}(L+M)^{-2}v(s)ds-(L+M)\int_x^1 L^2e^{(s-x)L}(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}LM(L+M)^{-2}v(s)ds-\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML(L+M)^{-2}v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM(L+M)^{-2}v(s)ds-\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}ML(L+M)^{-2}v(s)ds,
\end{aligned}$$

après les simplifications, on obtient

$$
\begin{aligned}
(L+M)^2\,\Phi(x) &= v(x)-(L+M)\,e^{xM}\left(u'(0)+Lu(0)\right)\\
&+(L+M)\,e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Mu_1\right)\\
&+\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}ML\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\
&-\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}LM\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}LM\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\
&-\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}ML\,(L+M)^{-2}\,v(s)ds,
\end{aligned}
$$

et puisque $u'(0)=Hu(0)+d_0$, on trouve finalement

$$
\begin{aligned}
(L+M)^2\,\Phi(x) &= v(x)-(L+M)\,e^{xM}\left[(H+L)\,u(0)+d_0\right]\\
&+(L+M)\,e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Mu_1\right)\\
&+\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}\left(ML-LM\right)(L+M)^{-2}\,v(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}\left(LM-ML\right)(L+M)^{-2}\,v(s)ds,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
(L+M)^2\,\Phi(x) &= v(x)-(L+M)\,e^{xM}\left((H+L)\,u(0)+d_0\right)\\
&+(L+M)\,e^{(1-x)L}\left(u'(1)-Mu_1\right)\\
&+\frac{1}{2}(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v(s)ds\\
&-\frac{1}{2}(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v(s)ds.
\end{aligned}
$$

avec

$$C_{L,M}:=[M;L]\,(L+M)^{-2}=(ML-LM)\,(L+M)^{-2},$$

2.5 L'équation intégrale

$(L+M)^2(\Psi(.))$ sommée avec $(L+M)^2\,\Phi(.)$, permet de poser

$$v+R(v)=F(f)+\Gamma, \tag{2.5.1}$$

avec

$$
\begin{aligned}
R(v)(x) \;=\;& \frac{1}{2}\left(L+M\right)\int_0^x e^{(x-s)M}C_{L,M}v(s)ds-\frac{1}{2}\left(L+M\right)\int_x^1 e^{(s-x)L}C_{L,M}v(s)ds \\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds \\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds \qquad (2.5.2) \\
&-\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}C_{L,M}v(s)ds \\
&+\frac{1}{2}(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}C_{L,M}v(s)ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& F(f)\,(x) \\
=\;& (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds+(L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\
& -(L+M)\,e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \qquad (2.5.3) \\
& +(L+M)\,e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
& -(L+M)\,e^{(1-x)L}e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\
& -(L+M)\,e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) \;=\;& (L+M)e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \\
&+(L+M)\,e^{xM}d_0-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)d_0 \qquad (2.5.4) \\
&+(L+M)e^{xM}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\left(L+M\right)u_1+ \\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}e^{L}\left(L+M\right)u_1 \\
&+(L+M)e^{(1-x)L}\left(L+M\right)u_1.
\end{aligned}
$$

Remarque 2.5.1 *Comme*

$$\left(L+H\right)\Lambda^{-1}=\left(L+M\right)\Lambda^{-1}+e^{L}e^{M}\left(L+H\right)\Lambda^{-1}-I,$$

donc, on peut écrire

$$\Gamma(x)=\widetilde{R}(x)+S(x),$$

avec

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R}(x)\\
=\ &(L+M)e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}d_0-(L+M)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}e^{L}e^{M}d_0\\
&-(L+M)e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}e^{M}d_0+(L+M)e^{xM}e^{L}e^{M}d_0\\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\left[I+(L+H)\Lambda^{-1}\left(I-e^{L}e^{M}\right)\right]d_0\\
&+(L+M)e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1-(L+M)e^{xM}e^{L}(L+M)u_1\\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1\\
&+(L+M)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1,
\end{aligned}$$

et

$$S(x)=(L+M)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0+(L+M)e^{(1-x)L}(L+M)u_1.$$

2.6 Résultats principaux

Dans cette section, on suppose $u_1 \in D(L+M) = D(L)$, $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$ et on note encore $L_\omega = L$, $M_\omega = M$, $R_\omega = R$, ...
Si u est une solution classique de notre problème, alors $v := (L+M)^2 u$ vérifie l'équation intégrale suivante

$$v + R(v) = F(f) + \widetilde{R} + S.$$

Proposition 2.6.1 *(voir [37], p. 96) Soient Q un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\left(e^{xQ}\right)_{x\geq 0}$ sur X, $\varphi \in X$, $1 < p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Alors*

1. $e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X)$
2. $Q^m e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1;X) \Leftrightarrow e^{\cdot Q}\varphi \in W^{m,p}(0,1;X) \Leftrightarrow \varphi \in (D(Q^m), X)_{\frac{1}{mp},p}$.

On pose, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$G(g)(x) = \int_0^x e^{(x-s)M_\omega} g(s)ds,\ K(g)(x) = \int_x^1 e^{(s-x)L\omega} g(s)ds,$$

où g est une fonction de $(0,1)$ de X.
On applique [33] et la remarque dans [13] p. 25 et en utilisant le théorème du graphe, on obtient

Proposition 2.6.2 *on suppose (2.2.1)∼(2.2.3). Soit $g \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty$. Alors*

$$\left\{\begin{array}{l} G(g) \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(M)),\\ K(g) \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(L)),\end{array}\right.$$

ce qui implique

$$G(g)(1),\ K(g)(0) \in (D(M), X)_{\frac{1}{p},p} = (D(L), X)_{\frac{1}{p},p}. \tag{2.6.1}$$

Donc, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$G'(g) = MG(g) + g, \ \ K'(g) = -LK(g) - g,$$

et il existe $C > 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \|G(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}, \\ \|K(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}, \\ \|MG(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}, \\ \|LK(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}. \end{cases}$$

Proposition 2.6.3 *Sous les hypothèses (2.2.1)*$\sim$*(2.2.4) et soit* $g \in L^p(0,1;X)$ *avec* $1 < p < \infty$*. Alors les applications*

$$\begin{cases} \Psi_1(g) = e^{\cdot M}(L+H)\Lambda^{-1}K(g)(0), \\ \Psi_2(g) = e^{\cdot M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}G(g)(1), \\ \Psi_3(g) = e^{(1-\cdot)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}G(g)(1), \\ \Psi_4(g) = e^{(1-\cdot)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}K(g)(0), \\ \Psi_5(g) = e^{(1-\cdot)L}G(g)(1), \end{cases}$$

sont dans $L^p(0,1;D(L))$ *et il existe* $C > 0$, *tel que*

$$\begin{cases} \|\Psi_i(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}, i = \overline{1,5} \\ \|M\Psi_i(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}, i = 1,2 \\ \|L\Psi_i(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}, i = 3,4,5. \end{cases}$$

Preuve. On étudie Ψ_1 (même travail pour les autres fonctions). On utilise C une constante quelconque et peut être dépondant de p. Il est clair que $\Psi_1 \in L^p(0,1;X)$ et

$$\|\Psi_1(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}.$$

Maintenant, on montre que $\Psi_1 \in L^p(0,1;D(M))$. On a

$$\begin{aligned} &\Psi_1(g)(x) \\ = \;& e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}g(s)ds \\ = \;& \int_0^x e^{(x-s)M}e^{sM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{sL}g(s)ds + e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds, \end{aligned}$$

donc, on peut écrire

$$\Psi_1(g)(x) = G(\widetilde{g})(x) + \widetilde{\Psi}_1(g)(x),$$

avec

$$\begin{cases} \widetilde{g}(s) = e^{sM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{sL}g(s), \\ \widetilde{\Psi}_1(g) = e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds. \end{cases}$$

Mais $\widetilde{g} \in L^p(0,1;X)$, alors d'après la Proposition 2.6.2, $G(\widetilde{g}) \in L^p(0,1;D(M))$ et

$$\|MG(\widetilde{g})\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|\widetilde{g}\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\|g\|_{L^p(0,1;X)}. \tag{2.6.2}$$

Maintenant, suite au Lemme 2.3.3, assertion 5, on a

$$(L+H)\Lambda^{-1} = (L+M)\Lambda^{-1} + e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} - I,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_1(g)(x) &= e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \\
&= e^{xM}\left[(L+M)\Lambda^{-1} + e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} - I\right]\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \\
&= e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \qquad (2.6.3)\\
&\quad + e^{xM}e^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds - e^{xM}\int_x^1 e^{sL}g(s)ds \\
&= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x).
\end{aligned}$$

Comme $e^{L}(X) \subset D(M)$, on a $Me^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|MI_2(x)\|^p dx &= \int_0^1 \left\| e^{xM}Me^{L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{xL}\int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)ds\right\|^p dx \\
&\leqslant C\int_0^1 \left\|\int_x^1 e^{(s-x)L}g(s)ds\right\|^p dx \\
&\leqslant C\|K(g)\|^p_{L^p(0,1;X)} \\
&\leqslant C\|g\|^p_{L^p(0,1;X)},
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|MI_3(x)\|^p dx &= \int_0^1 \left\| e^{xM}M(L-I)^{-1}(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds\right\|^p dx \\
&\leqslant C\int_0^1 \left\|(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds\right\|^p dx \\
&\leqslant C\left(\|LK(g)\|_{L^p(0,1;X)} + \|K(g)\|\right)^p \\
&\leqslant C\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.
\end{aligned}$$

Pour I_1, on utilise l'hypothèse (2.2.8), ce qui montre que $M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \|MI_1(x)\|^p dx \\
&= \int_0^1 \left\| e^{xM}M(L+M)\Lambda^{-1}(L-I)^{-1}(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds\right\|^p dx \\
&\leqslant C\int_0^1 \left\|(L-I)\int_x^1 e^{sL}g(s)ds\right\|^p dx \\
&\leqslant C\|g\|^p_{L^p(0,1;X)}.
\end{aligned}$$

Finalement, les estimations précédentes concernant I_1, I_2 et I_3 avec (2.6.2) et (2.6.3) montrent que $\Psi_1 \in L^p(0,1;D(M))$ et

$$\|M\Psi_1(g)\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\,\|g\|_{L^p(0,1;X)}\,.$$

$\square$

Proposition 2.6.4 *Soient les hypothèses (2.2.1)∼(2.2.7) et soit* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. *Alors*

$$F(f) \in L^p(0,1;X)\,.$$

Preuve. En utilisant les notations de la Proposition 2.6.3, on peut écrire $F(f)$ de la forme :

$$\begin{aligned} & F(f)\,(x) \\ = \; & (L+M)\,(M-I)^{-1}\,(M-I)\,G(f) + (L+M)\,(L-I)^{-1}\,(L-I)\,K(f) \\ & -(L+M)\,(M-I)^{-1}\,(M-I)\,\Psi_2(f) + (L+M)\,(M-I)^{-1}\,(M-I)\,\Psi_1(f) \\ & -(L+M)\,(L-I)^{-1}\,(L-I)\,\Psi_4(f) + (L+M)\,(L-I)^{-1}\,(L-I)\,\Psi_3(f) \\ & -(L+M)\,(L-I)^{-1}\,(L-I)\,\Psi_5(f)\,. \end{aligned}$$

On rappelle que $(L+M)\,(L-I)^{-1}, (L+M)\,(M-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Ainsi, en vertu des deux propositions précédentes 2.6.2 et 2.6.3, $F(f) \in L^p(0,1;X)$. $\square$

Proposition 2.6.5 *On suppose (2.2.1)∼(2.2.8). Soit* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$\widetilde{R} \in L^p(0,1;X)\,.$$

Preuve. On note

$$U := (L+M)\,(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } V := (L+M)\,(M-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in X$, on a

$$e^L\xi \in D(L^n) \text{ et } e^M\xi \in D(M^n),$$

donc $(M-I)e^L, (L-I)e^M \in \mathcal{L}(X)$ et ainsi, d'après l'hypothèse (2.2.8),

$$\begin{aligned} (M-I)\,(L+M)\,\Lambda^{-1}e^L &= M\,(L+M)\,\Lambda^{-1}\,(L-I)^{-1}\,(L-I)\,e^L \\ &\quad -(L+M)\,\Lambda^{-1}e^L \in \mathcal{L}(X). \end{aligned}$$

Pour $x \in (0,1)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(x) \;=\; & Ve^{xM}(M-I)e^Le^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}d_0 \\ & -Ve^{xM}(M-I)\,(L+M)\,\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 \\ & -Ve^{xM}(M-I)e^Le^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^Le^Md_0 + Ve^{xM}(M-I)e^Le^Md_0 \\ & -Ue^{(1-x)L}(L-I)e^M\left[I + (L+H)\,\Lambda^{-1}\left(I - e^Le^M\right)\right]d_0 \\ & +Ve^{xM}(M-I)e^Le^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^L\,(L+M)\,u_1 \\ & -Ve^{xM}(M-I)e^L\,(L+M)\,u_1 \\ & -Ue^{(1-x)L}(L-I)e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}e^L\,(L+M)\,u_1 \\ & +Ve^{xM}(M-I)\,(L+M)\,\Lambda^{-1}e^L\,(L+M)\,u_1. \end{aligned}$$

donc, suite à la Proposition 2.6.1, $\widetilde{R} \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. $\square$

Proposition 2.6.6 *Soient (2.2.1)∼(2.2.7). Soit* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$S \in L^p(0,1;X),$$

si et seulement si

$$u_1, \Lambda^{-1} d_0 \in \left(X,\ D((L+M)^2)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. Pour $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & (L+M)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)e^{(1-x)L}(L+M)u_1 \\ & = & (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0 \\ & & +(L+M)(L-I)^{-1}(L-I)e^{(1-x)L}(L+M)u_1 \\ & = & S_1(x) + S_2(x). \end{array}$$

Comme $(L+M)(M-I)^{-1}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$, on a $S_1 \in L^p(0,1;X)$ si et seulement si

$$x \to (M-I)e^{xM}(L+M)\Lambda^{-1}d_0 \in L^p(0,1;X), \tag{2.6.4}$$

et, d'après la Proposition 2.6.1, (2.6.4) est équivalente à :

$$(L+M)\Lambda^{-1}d_0 \in (X,\ D(M))_{1-\frac{1}{p},p} = (X,\ D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}.$$

De même, $S_2 \in L^p(0,1;X)$ si et seulement si

$$x \to (L-I)e^{(1-x)L}(L+M)u_1 \in L^p(0,1;X),$$

qui est équivalente à

$$(L+M)u_1 \in (X,\ D(L))_{1-\frac{1}{p},p} = (X,\ D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}.$$

D'une autre part, on a $S_1 \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right)$ et $S_2 \in L^p\left(0,\frac{1}{2};X\right)$, alors

$$\begin{array}{rcl} S \in L^p(0,1;X) & \Longleftrightarrow & S \in L^p\left(0,\frac{1}{2};X\right) \text{ et } S \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right) \\ & \Longleftrightarrow & S_1 \in L^p\left(0,\frac{1}{2};X\right) \text{ et } S_2 \in L^p\left(\frac{1}{2},1;X\right) \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (L+M)\Lambda^{-1}d_0 \in (X,\ D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p} \text{ et} \\ (L+M)u_1 \in (X,\ D(L+M))_{1-\frac{1}{p},p}, \end{array} \right. \end{array}$$

et grâce à la propriété de réitération, on obtient :

$$S \in L^p(0,1;X) \Longleftrightarrow \Lambda^{-1}d_0, u_1 \in \left(X, D((L+M)^2)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

□

Maintenant, on a besoin de la dépendance de ω donc on réintroduit le paramètre ω dans R, $\widetilde{R}$, $F(f)$ et S, en les notant R_ω, $\widetilde{R}_\omega$, $F_\omega(f)$ et S_ω.
Dans la proposition suivante, on montre que $I + R_\omega$ est inversible pour ω assez grand, donc la représentation de la solution classique u du problème (2.1.2)-(2.1.3) est

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left[(I+R_\omega)^{-1}\left(F_\omega(f) + \widetilde{R}_\omega + S_\omega\right)\right]. \tag{2.6.5}$$

Proposition 2.6.7 *On suppose (2.2.1)∼(2.2.11). Soit* $1 < p < +\infty$. *Alors* $R_\omega \in \mathcal{L}\left(L^p\left(0,1;X\right)\right)$ *et il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$

$$\left\|R_\omega\right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;X))} < 1.$$

Ainsi $I + R_\omega$ *est inversible dans* $\mathcal{L}\left(L^p\left(0,1;X\right)\right)$ *pour* $\omega \geqslant \omega^*$.

Preuve. Soit $v \in L^p\left(0,1;X\right)$. Puisque $C_{L_\omega,M_\omega} \in \mathcal{L}(X)$ alors $C_{L_\omega,M_\omega}v \in L^p\left(0,1;X\right)$. En utilisant les notations des Propositions 2.6.2 et 2.6.3, on peut écrire

$$\begin{aligned}
& 2R_\omega(v)\left(.\right) \\
= \; & \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(M_\omega - I\right)^{-1}\left(M_\omega - I\right)G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)\left(.\right) \\
& - \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(L_\omega - I\right)^{-1}\left(L_\omega - I\right)K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)\left(.\right) \\
& - \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(M_\omega - I\right)^{-1}\left(M_\omega - I\right)\Psi_1\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)\left(.\right) \\
& - \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(M_\omega - I\right)^{-1}\left(M_\omega - I\right)\Psi_2\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)\left(.\right) \\
& + \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(L_\omega - I\right)^{-1}\left(L_\omega - I\right)\Psi_3\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)\left(.\right) \\
& + \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(L_\omega - I\right)^{-1}\left(L_\omega - I\right)\Psi_4\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)\left(.\right) \\
& - \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(L_\omega - I\right)^{-1}\left(L_\omega - I\right)\Psi_5\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\left(.\right)\right)\left(.\right),
\end{aligned}$$

et comme $\left(L_\omega + M_\omega\right)\left(M_\omega - I\right)^{-1}, -\left(L_\omega + M_\omega\right)\left(L_\omega - I\right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ donc, d'après les Propositions 2.6.2 et 2.6.3, on a $R_\omega(v) \in L^p\left(0,1;X\right)$ et il existe une constante $b > 0$ telle que, pour $\omega \geqslant \omega_0$

$$\left\|R_\omega(v)\right\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant b\left\|C_{L_\omega,M_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|v\right\|_{L^p(0,1;X)},$$

et suite à l'hypothèse (2.2.11), on a

$$\left\|R_\omega(v)\right\|_{L^p(0,1;X)} \leqslant C\chi\left(\omega\right)\left\|v\right\|_{L^p(0,1;X)},$$

où $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\chi\left(\omega\right) = 0$. Par conséquent, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ telle que pour $\omega \geqslant \omega^*$

$$\left\|R_\omega\right\|_{\mathcal{L}(L^p(0,1;X))} < 1.$$

Alors $I + R_\omega$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^p\left(0,1;X\right))$ pour toute $\omega \geqslant \omega^*$. □

Remarque 2.6.1 *La solution (2.6.5)*

$$u = \left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}\left(F_\omega(f) + \widetilde{R}_\omega + S_\omega\right) - \left(L_\omega + M_\omega\right)^{-2}R_\omega$$

vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

En effet

$$\begin{aligned}
& \left(F_\omega(f) + \Gamma_\omega\right)(1) \\
= \; & \left(F_\omega(f) + \widetilde{R}_\omega + S_\omega\right)(1) \\
= \; & (L_\omega + M_\omega)e^{M_\omega}\left(L_\omega + H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0 + e^{L_\omega}\left(L_\omega + M_\omega\right)u_1\right] \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{M_\omega}\left(L_\omega + H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0 + e^{L_\omega}\left(M_\omega + L_\omega\right)u_1\right] \\
& + \left(L_\omega + M_\omega\right)e^{M_\omega}d_0 + \left(L_\omega + M_\omega\right)\left(-e^{M_\omega}d_0 + \left(M_\omega + L_\omega\right)u_1\right) \\
= \; & \left(M_\omega + L_\omega\right)^2 u_1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_\omega(v)(1) &= \frac{1}{2}\left(L_\omega+M_\omega\right)\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega+M_\omega)e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega+M_\omega)e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega+M_\omega)\left[I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(L_\omega+M_\omega)e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
u(1) &= \left(L_\omega+M_\omega\right)^{-2}\left[\left(F_\omega(f)+\Gamma_\omega\right)(1)-R_\omega(v)(1)\right] \\
&= u_1,
\end{aligned}$$

d'une autre part

$$\begin{aligned}
&\left(L_\omega+M_\omega\right)^2u(0) \\
&= F_\omega(f)\,(0)+\Gamma_\omega(0)-R_\omega(v)\,(0) \\
&= \left(L_\omega+M_\omega\right)^2\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}f(s)ds-\left(L_\omega+M_\omega\right)^2\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(M_\omega+L_\omega\right)^2\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(L_\omega+M_\omega\right)^2\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&\quad +(L_\omega+M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
u(0) &= \Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}f(s)ds-\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds+\frac{1}{2}\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
&\quad +\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right],
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

et on a

$$\begin{aligned}
&u'(0)\\
=\;& (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left(F'_\omega(f)(0) + \Gamma'_\omega(0) - R'_\omega(v)(0)\right)\\
=\;& (L_\omega + M_\omega)^{-1}\left[-L_\omega(M_\omega - H) + M_\omega(L_\omega + H)\right]\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)ds\\
&+(L_\omega + M_\omega)^{-1}\left[-M_\omega(L_\omega + H) + L_\omega(M_\omega - H)\right]\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} f(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)^{-1}\left[-L_\omega(M_\omega - H) + M_\omega(L_\omega + H)\right]\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)^{-1}\left[M_\omega(L_\omega + H) - L_\omega(M_\omega - H)\right]\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds\\
&-(L_\omega + M_\omega)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)\\
&+(L_\omega + M_\omega)^{-1}(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0 + e^{L_\omega}(L_\omega + M_\omega)u_1\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&u'(0) - Hu(0)\\
=\;& (L_\omega + M_\omega)^{-1}(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)ds\\
&-(L_\omega + M_\omega)^{-1}(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} f(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)^{-1}(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds\\
&+\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)^{-1}(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds\\
&-(L_\omega + M_\omega)^{-1}(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)u(0)\\
&+(L_\omega + M_\omega)^{-1}(M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0 + e^{L_\omega}(L_\omega + M_\omega)u_1\right]\\
&+d_0,
\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

en insérant (2.6.6) dans (2.6.7), on obtient

$$u'(0) - Hu(0) = d_0.$$

Remarque 2.6.2 *Suite aux propositions précédentes, pour $\omega \geqslant \omega^*$, on peut dire que s'il existe une solution classique du problème (2.1.2)-(2.1.3), elle s'écrit sous la forme (2.6.5) et on en déduit alors l'unicité de la solution.*

On a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.6.1 *On suppose (2.2.1)∼(2.2.11). Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
1. Le problème (2.1.2)-(2.1.3) admet une unique solution classique u.
2.

$$u_1, \Lambda_\omega^{-1}d_0 \in \left(X,\ D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}. \tag{2.6.8}$$

Preuve. On considère ω^* assez grand et $\omega \geqslant \omega^*$.

Assertion 1 implique l'assertion 2

On suppose l'assertion 1, i.e u définie par (2.6.5) est une solution classique du problème (2.1.2)-(2.1.3). Alors

$$x \mapsto (L_\omega + M_\omega)^2 u(x) = (I + R_\omega)^{-1} \Big(F_\omega(f)(x) + \widetilde{R}_\omega(x) + S_\omega(x) \Big) \in L^p(0,1;X),$$

et on obtient $F_\omega(f) + \widetilde{R}_\omega + S_\omega \in L^p(0,1;X)$. Donc, d'après les Propositions 2.6.4, 2.6.5 et 2.6.6, l'assertion 2 est satisfaite.

Assertion 2 implique l'assertion 1

On suppose (2.6.8). Le but est de montrer que u, définie par (2.6.5), est une solution classique de (2.1.2)-(2.1.3). Soit

$$\begin{aligned} v(x) &= (L_\omega + M_\omega)^2 u(x) \\ &= (I + R_\omega)^{-1} \Big(F_\omega(f)(x) + \widetilde{R}_\omega(x) + S_\omega(x) \Big), \end{aligned}$$

- **Première étape :** Montrons que $u \in L^p\left(0,1; D((L_\omega - M_\omega)^2)\right)$.
  D'après les Propositions (2.6.4), (2.6.5), (2.6.6) et (2.6.7), on obtient $v \in L^p(0,1;X)$. Comme
  $$(L_\omega - M_\omega)^2 (L_\omega + M_\omega)^{-2} \in \mathcal{L}(X),$$
  donc
  $$x \mapsto (L_\omega - M_\omega)^2 u(x) = (L_\omega - M_\omega)^2 (L_\omega + M_\omega)^{-2} v(x) \in L^p(0,1;X).$$
- **Deuxième étape :** Montrons que $(L_\omega - M_\omega) u' \in L^p(0,1;X)$.Puisque $v = F_\omega(f) + \Gamma_\omega - R_\omega(v)$, on a
  $$u(.) := (L_\omega + M_\omega)^{-2} (F_\omega(f)(.) + \Gamma_\omega(.)) - (L_\omega + M_\omega)^{-2} R_\omega(v)(.), \tag{2.6.9}$$
  donc, en utilisant (2.5.2), (2.5.3) et (2.5.4), on peut réécrire u de la forme suivante
  $$u = \overline{u} + \widetilde{u} + \widehat{u},$$
  telles que
  $$\begin{cases} \overline{u}(x) = & (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(f)(x) + (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(f)(x) \\ & -\dfrac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)^{-1} G\left(C_{L_\omega,M_\omega} v(.)\right)(x) \\ & +\dfrac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)^{-1} K\left(C_{L_\omega,M_\omega} v(.)\right)(x) \\ \widetilde{u}(x) = & (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} f_0 \\ \widehat{u}(x) = & (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} f_1, \end{cases}$$
  avec
  $$\begin{aligned} f_0 \;=\; & -(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G(f)(1) + (L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1} K(f)(0) \\ & + (L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1} \left[\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0 + e^{L_\omega} (L_\omega + M_\omega) u_1 \right] + d_0 \\ & + \frac{1}{2}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1} K\left(C_{L_\omega,M_\omega} v(.)\right)(0) \\ & + \frac{1}{2}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G\left(C_{L_\omega,M_\omega} v(.)\right)(1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f_1 &= -e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)+\left(-e^{M_\omega}d_0+\left(M_\omega+L_\omega\right)u_1\right)\\
&\quad-\left[I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]G(f)(1)\\
&\quad-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(M_\omega+L_\omega\right)u_1\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(1)\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(0).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\left(L_\omega+M_\omega\right)\overline{u}'(x)\\
=\;&M_\omega G(f)(x)-L_\omega K(f)(x)-\frac{1}{2}M_\omega G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x)\\
&-\frac{1}{2}L_\omega K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x)-C_{L_\omega,M_\omega}v\left(x\right),
\end{aligned}$$

mais $f\in L^p\left(0,1;X\right)$ et ainsi v, donc, on vertu de la Proposition 2.6.2 et de l'assertion 5 du Lemme 2.3.3, on obtient $\left(L_\omega+M_\omega\right)\overline{u}'(.)\in L^p\left(0,1;X\right)$.
Comme

$$\left(L_\omega-M_\omega\right)\overline{u}'(.)=\left(L_\omega-M_\omega\right)\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}\left(L_\omega+M_\omega\right)\overline{u}'(.),$$

on a

$$x\mapsto\left(L_\omega-M_\omega\right)\overline{u}'(x)\in L^p\left(0,1;X\right). \tag{2.6.10}$$

Maintenant pour f_1, on assemble tout les termes qui contient e^{M_ω} ; on peut réécrire

$$f_1=\left(M_\omega+L_\omega\right)u_1-G(f)(1)+\frac{1}{2}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(1)+e^{M_\omega}\mu_1,$$

avec $\mu_1\in X$. Donc, d'après (2.6.8) et (2.6.1), on déduit

$$f_1\in\left(D(M_\omega),X\ \right)_{\frac{1}{p},p},$$

et ainsi

$$x\mapsto\left(L_\omega-M_\omega\right)\widehat{u}'(x)\in L^p\left(0,1;X\right). \tag{2.6.11}$$

Il reste à étudier $\widetilde{u}$. Pour f_0, en utilisant le Lemme 2.3.3, point 5, donc, on peut réécrire

$$\begin{aligned}
f_0 &= \left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}w_0+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left(w_0+d_0\right)\\
&\quad+e^{L_\omega}e^{M_\omega}d_0-e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1+e^{L_\omega}G(f)(1)\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{L_\omega}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(1)\\
&\quad-K\left(f\right)(0)-\frac{1}{2}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(0)+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}d_0,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
w_0 &= -e^{L_\omega}e^{M_\omega}d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1-e^{L_\omega}G(f)(1)\\
&\quad+K\left(f\right)(0)+\frac{1}{2}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(0)+\frac{1}{2}e^{L_\omega}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(1).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f_0 &= (L_\omega + M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}w_0 - K(f)(0) - \frac{1}{2}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(0) \\ &\quad + (L_\omega + M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}d_0 + e^{L_\omega}\mu_0, \end{aligned}$$

avec $\mu_0 \in X$. Il est clair que $w_0 \in (D(M_\omega), X)_{\frac{1}{p},p}$ donc

$$f_0 \in (D(M_\omega), X\ )_{\frac{1}{p},p}\,,$$

et

$$x \mapsto (L_\omega - M_\omega)\,\widetilde{u}'(x) \in L^p(0,1;X)\,. \tag{2.6.12}$$

Finalement, à partir de (2.6.10), (2.6.11) et (2.6.12), on conclut que $x \mapsto (L_\omega - M_\omega)\,u'(x) \in L^p(0,1;X)$.

- **Troisième étape :** Montrons que $u \in W^{2,p}(0,1;X)$.
  Grâce aux étapes précédentes et vu que u vérifie (2.1.2), on déduit que

  $$x \mapsto u''(x) = -(L_\omega - M_\omega)\,u'(x) + \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\,u(x) + f(x) \in L^p(0,1;X)\,,$$

  ce qui implique $u \in W^{2,p}(0,1;X)$.
- **Quatrième étape :** Montrons que u vérifie le problème (2.1.2)-(2.1.3).
  Pour presque tout $x \in (0,1)$, on a

  $$\begin{aligned} v(x) &= (L_\omega + M_\omega)\,G(f)(x) + (L_\omega + M_\omega)\,K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)\,G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x) \\ &\quad +\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)\,K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x) \\ &\quad + (L_\omega + M_\omega)\,e^{xM_\omega}f_0 + (L_\omega + M_\omega)\,e^{(1-x)L_\omega}f_1, \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

  et

  $$\begin{aligned} &(L_\omega + M_\omega)\,u'(x) \\ =\ & M_\omega G(f)(x) - L_\omega K(f)(x) - \frac{1}{2}M_\omega G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x) \\ & -\frac{1}{2}L_\omega K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x) \\ & +M_\omega e^{xM_\omega}f_0 - L_\omega e^{(1-x)L_\omega}f_1 - C_{L_\omega,M_\omega}v\,(x)\,. \end{aligned}$$

  Par conséquent, en substituant (2.6.13) dans $(L_\omega + M_\omega)\,u'(x)$, et en utilisant le Lemme 2.3.3, assertion 6, pour presque tout $x \in (0,1)$, on obtient

  $$\begin{aligned} u'(x) &= M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(f)(x) - L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(f)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2}M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x) \\ &\quad -\frac{1}{2}L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v(.)\right)(x) \\ &\quad +M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega}f_0 - L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega}f_1. \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Alors, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
& u''(x) \\
= \; & f(x) + M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega G(f)(x) + L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega K(f)(x) \\
& -\frac{1}{2} M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega G \left(C_{L_\omega, M_\omega} v(.)\right)(x) \\
& +\frac{1}{2} L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega K \left(C_{L_\omega, M_\omega} v(.)\right)(x) \\
& +\frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} v(x) \\
& + M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega e^{xM_\omega} f_0 + L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega e^{(1-x)L_\omega} f_1.
\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

En substituant (2.6.13) dans (2.6.15) donc, pour presque tout $x \in (0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
u''(x) \;=\; & f(x) + E_1 G(f)(x) + T_1 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_1 G \left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) \\
& + \frac{1}{2} T_1 K \left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) + E_1 e^{xM} f_0 + T_1 e^{(1-x)L} f_1,
\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

où, sur le domaine $D(L_\omega + M_\omega)$, E_1 et T_1 sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
E_1 \;=\; & M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega \\
& + \frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} (L_\omega + M_\omega) \\
=\; & \frac{1}{2} M_\omega - \frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T_1 \;=\; & L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega \\
& + \frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} (L_\omega + M_\omega) \\
=\; & \frac{1}{2} L_\omega + \frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1},
\end{aligned}$$

en vertu du Lemme 2.3.3, assertion 6. On utilise (2.6.9), (2.6.14) et (2.6.16), pour presque tout $x \in (0,1)$, on trouve

$$\begin{aligned}
& u''(x) + (L_\omega - M_\omega) u'(x) - \frac{1}{2} (L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) u(x) \\
= \; & f(x) + E_2 G(f)(x) + T_2 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_2 G \left(C_{L_\omega, M_\omega} v(.)\right)(x) \\
& + \frac{1}{2} T_2 K \left(C_{L_\omega, M_\omega} v(.)\right)(x) + E_2 e^{xM_\omega} f_0 + T_2 e^{(1-x)L_\omega} f_1,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
E_2 \;=\; & \frac{1}{2} M_\omega - \frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
& + (L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
& - \frac{1}{2} (L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}L_\omega + \frac{1}{2}\left(L_\omega - M_\omega\right)L_\omega\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-1} \\ &\quad - \left(L_\omega - M_\omega\right)L_\omega\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega\right)\left(L_\omega + M_\omega\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Mais, en vertu du Lemme 2.3.3, assertion 8, on obtient

$$E_2G(f)(.) = T_2K(f)(.) = 0 \ \text{ dans } \ L^p\left(0,1;X\right).$$

Finalement, on déduit

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}\left(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega\right)u(x) = f(x).$$

D'après la Remarque 2.6.1, on conclut alors que u, déterminée par (2.6.5), est une solution classique de (2.1.2)-(2.1.3).

□

2.7 Retour au cas commutatif

Dans cette section, on fait une comparaison entre ce travail et celui du récent papier [8]. On va montrer que ce travail améliore les résultats de [8]. En effet, plutôt que de considérer des familles d'opérateurs linéaires $(L_\omega)_{\omega\geq\omega_0}, (M_\omega)_{\omega\geq\omega_0}$, on considère les deux opérateurs linéaires fermés L, M dans X tels que

$$\begin{cases} D(M) = D(L) \\ LM = ML, \end{cases} \tag{2.7.1}$$

comme hypothèses (11) et (12), p. 59 dans [8]. Mais, on ne suppose ni la commutativité entre L et H, ni entre M et H, comme dans les hypothèses (15) et (16), p. 59 dans [8].
D'après (2.7.1), on a

$$\Lambda = (M - H) + e^L e^M (L + H) = (M - H) + e^{L+M}(L + H),$$

et puisque $C_{L,M} = 0$, on a $R = 0$. Alors, grâce à (2.6.5), la solution du problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L - M)u'(x) - LMu(x) = f(x), \ x \in (0,1), \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2.7.2}$$

est

$$u(.) = (L + M)^{-2}\left(F(f)(.) + \Gamma(.)\right),$$

où ici $(I+R)^{-1}=I$. De plus, pour $x\in[0,1]$

$$\begin{aligned}
&(L+M)^{-2}F(f)(x)\\
=\;&(L+M)^{-1}\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds+(L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds\\
&-(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds\\
&+(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds\\
&-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL}f(s)ds\\
&-(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(L+M)^{-2}\Gamma(x)\\
=\;&(L+M)^{-1}e^{xM}\left[(L+H)\Lambda^{-1}+I-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}\right]d_0\\
&-(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}\left[(L+H)\Lambda^{-1}+I-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}\right]d_0\\
&+(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1\\
&+(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1.
\end{aligned}$$

Le fait que

$$(L+H)\Lambda^{-1}=(L+M)\Lambda^{-1}+e^{L+M}(L+H)\Lambda^{-1}-I,$$

(voir le Lemme 2.3.3, point 5), on en déduit

$$\begin{aligned}
&e^{M}d_0+e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}d_0-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\
=\;&e^{M}d_0+e^{M}\left[(L+M)\Lambda^{-1}+e^{L+M}(L+H)\Lambda^{-1}-I\right]d_0\\
&-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\
=\;&e^{M}(L+M)\Lambda^{-1}d_0+e^{M}e^{L+M}(L+H)\Lambda^{-1}d_0\\
&-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\
=\;&e^{M}(L+M)\Lambda^{-1}d_0+e^{M}\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0,
\end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned}
&(L+H)\Lambda^{-1}d_0+d_0-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\
=\;&\left[(L+H)+(M-H)+e^{L+M}(L+H)\right]\Lambda^{-1}d_0-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\
=\;&\left[(L+M)+e^{L+M}(L+H)\right]\Lambda^{-1}d_0-(L+H)\Lambda^{-1}e^{L+M}d_0\\
=\;&(L+M)\Lambda^{-1}d_0+\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0,
\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$\begin{array}{rl} & (L+M)^{-2}\Gamma(x) \\ = & e^{xM}\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)^{-1}e^{xM}\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0 \\ & -e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0 - (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}\left[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}\right]d_0 \\ & +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\ & +(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1. \end{array}$$

Finalement, la représentation de la solution du problème (2.7.2), pour p.p. $x \in (0,1)$, est

$$\begin{array}{rl} & u(x) \\ = & e^{xM}\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\ & -(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ & +(L+M)^{-1}e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ & -e^{(1-x)L}e^{M}\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right](L+M)u_1 \\ & -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL}f(s)ds \\ & -(L+M)^{-1}e^{(1-x)L}\left[I-e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M}f(s)ds \\ & +(L+M)^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)M}f(s)ds + (L+M)^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)L}f(s)ds \\ & +(L+M)^{-1}\left(e^{xM}-e^{(1-x)L}e^{M}\right)[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}]d_0. \end{array} \tag{2.7.3}$$

Cette représentation généralise celle utilisée dans [8], p. 63.
On note, que si l'opérateur H commute, au sens des résolvantes, avec les opérateurs L et M alors le dernier terme

$$(L+M)^{-1}\left(e^{xM}-e^{(1-x)L}e^{M}\right)[e^{L+M};(L+H)\Lambda^{-1}]d_0,$$

sera nul et donc, notre solution coïncide dans ce cas avec celle utilisée dans [8].

Corollaire 2.7.1 *Soient L et M deux opérateurs linéaires fermés vérifiant (2.7.1). On suppose (2.2.1)∼(2.2.8) avec, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, $L_\omega = L$, $M_\omega = M$ et $LM = ML$. Soit $f \in L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Le Problème*

$$\begin{cases} u''(x) + (L-M)u'(x) - LMu(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

admet une unique solution classique.

2. $u_1, \Lambda^{-1}d_0 \in \left(X, D((L+M)^2)\right)_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Remarque 2.7.1 *Au lieu de supposer la commutativité entre H et les opérateurs L et M, on considère l'hypothèse suivante :*

$$\forall \xi \in D(L) = D(M) = D(L+M),\ \Lambda^{-1}\xi \in D((L+M)^2),$$

Ce qui est évidemment vérifié lorsque l'opérateur H commute avec L et M au sens des résolvantes.
On note ainsi la condition (2.7.1) implique (2.2.5).

2.8 Retour à l'équation initiale

En construisant une paire d'opérateurs $(L_\omega,\ M_\omega)$ satisfaisant les hypothèses (2.2.1)∼(2.2.8), on s'attache à illustrer la théorie opérationnelle précédente. Le but est ensuite de pouvoir résoudre le Problème initial (2.1.1), c'est-à-dire

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)\,, \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases}$$

Nos hypothèses sont ici les suivantes
– – Sur l'espace ambiant

$$X \text{ est un espace } UMD, \tag{2.8.1}$$

– Sur les opérateurs A et B
On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que, $\forall \omega \geqslant \omega_0$, les opérateurs A et B vérifient

$$\begin{cases} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho\left(B^2 - A_{\omega_0}\right), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0,\ \ \left\|(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda| + 1}, \end{cases} \tag{2.8.2}$$

$$\begin{cases} i)\ D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(B), \\ ii)\ D(B^2 - A_\omega) \subset D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}B), \end{cases} \tag{2.8.3}$$

$$\left\|\left[B; (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right](B^2 - A_\omega)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi(\omega)\,, \tag{2.8.4}$$

où

$$\chi :\ [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0. \tag{2.8.5}$$

On suppose que les opérateurs

$$\begin{cases} L_\omega := B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega := -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{2.8.6}$$

vérifient, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, les hypothèses suivantes

$$\begin{cases}]0,+\infty[\subset \rho\left(L_\omega\right) \cap \rho\left(M_\omega\right), \\ \ker(L_\omega) = \ker\left(M_\omega\right) = \{0\}, \ \overline{\mathrm{Im}(L_\omega)} = \overline{\mathrm{Im}(M_\omega)} = X, \\ \exists C_0 > 0, \sup\limits_{\lambda>0} \left\|\lambda\left(L_\omega - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0 \text{ et } \sup\limits_{\lambda>0} \left\|\lambda\left(M_\omega - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0. \end{cases} \tag{2.8.7}$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \left(-L_\omega\right)^{is}, \left(-M_\omega\right)^{is} \in \mathcal{L}(X); \\ \exists \theta_L, \theta_M \in]0, \frac{\pi}{2}[, \exists C \geqslant 1 : \forall s \in \mathbb{R}, \\ \left\|\left(-L_\omega\right)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta_L |s|}, \left\|\left(-M_\omega\right)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta_M |s|}. \end{cases} \tag{2.8.8}$$

– Sous les hypothèses précédentes on obtient des résultats positifs modulo l'ajout de l'hypothèse technique suivante

$$\Lambda_\omega = \left(M_\omega - H\right) + e^{L_\omega} e^{M_\omega}\left(L_\omega + H\right) \text{ est un opérateur inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{2.8.9}$$

et

$$\forall \xi \in D(L_\omega), \ \Lambda_\omega^{-1}\xi \in D((L_\omega + M_\omega)^2). \tag{2.8.10}$$

On va montrer par la suite que les hypothèses (2.8.2)∼(2.8.10) impliquent (2.2.2)∼(2.2.11)

2.8.1 Résolution du problème

On suppose ici que les hypothèses (2.8.1)∼(2.8.10) sont réalisées.

Conséquences des hypothèses.

Remarque 2.8.1

1. *L'hypothèse (2.8.3) est nécessaire puisque l'opérateur*

$$\left[B; (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right](B^2 - A_\omega)^{-1},$$

de l'hypothèse (2.8.4) est défini sur X tout entier si et seulement si

$$\begin{cases} D\left(B^2 - A_\omega\right) \subset D\left(B(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right), \\ D\left(B^2 - A_\omega\right) \subset D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} B\right), \end{cases}$$

donc si et seulement si (2.8.3) est vérifiée.

2. *L'hypothèse (2.8.7) et (2.8.8) implique que L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques sur X, $\left(e^{\xi L_\omega}\right)_{\xi \geq 0}$, $\left(e^{\xi M_\omega}\right)_{\xi \geq 0}$.*

Lemmes techniques

Lemme 2.8.1 *([31]) On suppose (2.8.2)∼(2.8.3).* $\forall \omega \geqslant \omega_0$

1. *Les domaines des opérateurs sont*

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}), \\ D((L_\omega + M_\omega)^2) = D((B^2 - A_\omega)), \\ D((L_\omega - M_\omega)^2) = D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) \cap D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} B), \\ D(L_\omega M_\omega) = D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\right), \\ D(M_\omega L_\omega) = D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) \cap D(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}), \\ D([M_\omega; L_\omega]) = D(B^2 - A_\omega), \end{cases}$$

et

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2).$$

2. *L'opérateur* $L_\omega + M_\omega$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(X)$ *et*

$$(L_\omega + M_\omega)^{-1} = -\frac{1}{2}(B^2 - A_\omega)^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(X).$$

3. *On a les extensions d'opérateurs suivantes*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) \subset A_\omega, \\ L_\omega - M_\omega \subset 2B. \end{cases}$$

Preuve.

– En vertu de (2.8.3), on obtient les domaines suivants

$$D(L_\omega) = D(M_\omega) = D(B) \cap D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) = D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}).$$

– D'autre part

$$\begin{cases} D(L_\omega + M_\omega) = D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}), \\ (L_\omega + M_\omega)\varphi = -2(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\varphi, \end{cases}$$

et d'après (2.8.2), $L_\omega + M_\omega$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ avec

$$(L_\omega + M_\omega)^{-1} = -\frac{1}{2}(B^2 - A_\omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

– De même

$$\begin{cases} D(L_\omega - M_\omega) = D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}), \\ (L_\omega - M_\omega)\varphi = 2B\varphi, \end{cases}$$

et, en vertu de (i) de (2.8.3), $L_\omega - M_\omega \subset 2B$.

– De plus

$$\begin{aligned}\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)^2) \;&\Leftrightarrow\; \varphi \in D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) \text{ et } -2(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\varphi \in D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\Leftrightarrow\; \varphi \in D\left(B^2 - A_\omega\right),\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{cases} D((L_\omega + M_\omega)^2) = D(B^2 - A_\omega), \\ (L_\omega + M_\omega)^2\varphi = 4(B^2 - A_\omega)\varphi. \end{cases} \tag{2.8.11}$$

Il est clair que $(L_\omega + M_\omega)^2 = 4(B^2 - A_\omega)$.

– De même, on a

$$\begin{aligned}\varphi \in D((L_\omega - M_\omega)^2) \;&\Leftrightarrow\; \varphi \in D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) \text{ et } 2B\varphi \in D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\Leftrightarrow\; \varphi \in D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right) \cap D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}B\right) \subset D\left(B^2\right),\end{aligned}$$

grâce à (i) de (2.8.3), et on en déduit

$$\begin{cases} D((L_\omega - M_\omega)^2) = D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right) \cap D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}B\right), \\ (L_\omega - M_\omega)^2\varphi = 4B^2\varphi. \end{cases}$$

On déduit que $4B^2$ est un prolongement de l'opérateur $(L_\omega - M_\omega)^2$.

– De plus grâce à (ii) de (2.8.3), on obtient

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2).$$

– On a

$$\begin{aligned}\varphi \in D(L_\omega M_\omega) \;&\Leftrightarrow\; \varphi \in D(L_\omega) \text{ et } M_\omega\varphi \in D(L_\omega)\\ &\Leftrightarrow\; \varphi \in D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}) \text{ et } -B\varphi - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\varphi \in D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\Leftrightarrow\; \varphi \in D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} D(L_\omega M_\omega) = D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ L_\omega M_\omega\varphi = \left(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\varphi. \end{cases}$$

– De la même manière on obtient

$$\begin{cases} D(M_\omega L_\omega) = D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\left(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ M_\omega L_\omega\varphi = \left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\varphi. \end{cases}$$

– On remarque que $D(L_\omega M_\omega)$ n'est pas nécessairement égal à $D(M_\omega L_\omega)$ puisque pour $\varphi \in D\left((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)$

$$-B\varphi - \left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\varphi \in D\left(\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

n'implique pas nécessairement

$$B\varphi-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\varphi=\left(-B\varphi-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\varphi\right)+2B\varphi\in D\left(\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Mais

$$\begin{aligned}\varphi\in D(L_\omega M_\omega)\cap D(M_\omega L_\omega) &\iff \begin{cases}\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ -B\varphi-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ B\varphi-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ B\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ (B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\\ B\varphi\in D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \varphi\in D\left(B^2-A_\omega\right)\cap D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}B\right).\end{aligned}$$

De plus, grâce à (ii) de (2.8.3), on a

$$D\left(B^2-A_\omega\right)\cap D\left(\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}B\right)=D\left(B^2-A_\omega\right),$$

et pour tout $\varphi\in D\left(B^2-A_\omega\right)\subset D\left((B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}B\right)\cap D\left(B\left(B^2-A_\omega\right)\right)$

$$\begin{aligned}[M_\omega;L_\omega]\varphi &= \left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\\ &\quad -\left(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\\ &= -B^2+B\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}+\left(B^2-A_\omega\right)-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}B\varphi\\ &\quad +B^2-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}B-\left(B^2-A_\omega\right)+B\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\varphi\\ &= 2\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right]\varphi.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases}D\left([M_\omega;L_\omega]\right)=D\left(B^2-A_\omega\right),\\ [M_\omega;L_\omega]\varphi=2\left[B;(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right]\varphi.\end{cases}\tag{2.8.12}$$

– Pour tout $\varphi\in D\left(M_\omega L_\omega+L_\omega M_\omega\right)=D\left(M_\omega L_\omega\right)\cap D\left(L_\omega M_\omega\right)=D\left(B^2-A_\omega\right)\subset D\left(A_\omega\right)$, on a

$$-\frac{1}{2}\left(M_\omega L_\omega+L_\omega M_\omega\right)\varphi=B^2\varphi-\left(B^2-A_\omega\right)\varphi=A_\omega\varphi,$$

on en déduit

$$-\frac{1}{2}\left(M_\omega L_\omega+L_\omega M_\omega\right)\subset A_\omega.$$

□

Lemme 2.8.2 *Sous les hypothèses (2.8.2)∼(2.8.4), on a le commutateur est*

$$C_{L_\omega,M_\omega} = 2\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(B^2-A_\omega\right)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

et (2.2.9) est satisfaite.

Preuve. Pour tout $\varphi \in X$, on a

$$\psi = \left(B^2-A_\omega\right)^{-1}\varphi \in D\left(B^2-A_\omega\right),$$

et, d'après l'hypothèse (2.8.3),

$$\psi \in D\left(B\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right) \cap D(\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}B).$$

Donc, grâce à (2.8.11) et (2.8.12), on trouve

$$\begin{aligned}\left[B;\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(B^2-A_\omega\right)^{-1}\varphi &= 2\left[M_\omega;L_\omega\right]\left(M_\omega+L_\omega\right)^{-2}\varphi \\ &= C_{L_\omega,M_\omega}\varphi.\end{aligned}$$

De plus, d'après (2.8.4), on obtient

$$\forall\omega \geqslant \omega_0,\ \ \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi(\omega),$$

donc (2.2.9) est satisfaite. □

Lemme 2.8.3 *On suppose (2.8.2)-(2.8.3). On a le domaine d'interpolation*

$$\left(X, D((L_\omega+M_\omega)^2)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left(X, D((B^2-A_\omega))\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. Puisque $0 < 1-\frac{1}{2p} < 1$, $D((L_\omega+M_\omega)^2) = D((B^2-A_\omega))$ et grâce au Lemme 2.8.1, assertion 1, on obtient

$$\left(X, D((L_\omega+M_\omega)^2)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = \left(X, D((B^2-A_\omega))\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

Ainsi, les hypothèses (2.8.2)∼(2.8.10) impliquent (2.2.2)∼(2.2.11). □
On applique alors le Théorème 2.6.1.

Résultat principal

Théorème 2.8.1 *On suppose (2.8.1)∼(2.8.10). Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
1. Le problème (2.1.1) admet une unique solution classique u, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ u' \in L^p(0,1;D(B)), \end{cases}$$

$u(0) \in D(H)$ et u vérifiant le Poblème (2.1.1).
2.

$$u_1, \Lambda_\omega^{-1}d_0 \in \left(X, D((B^2-A_\omega))\right)_{1-\frac{1}{2p},p}.$$

2.9 Exemple

Soit $X = L^2(\mathbb{R})$. On définit les opérateurs L_ω, M_ω et H par

$$\left\{\begin{array}{l} D(L_\omega) = D(M_\omega) = H^2(\mathbb{R}), \quad D(H) = H^1(\mathbb{R}). \\ L_\omega\varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y), \quad M_\omega\varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y), \\ H\varphi(y) = \varphi'(y), \end{array}\right. \tag{2.9.1}$$

avec $\alpha > 0, \omega > 0$ et $a \in C_b^2(\mathbb{R})$, $a \neq 0$.

2.9.1 Vérification des hypothèses

1. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est un espace UMD. D'après Seeley [34], L_ω et M_ω vérifient (2.2.2), (2.2.3) donc L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques.
2. D'après (2.9.1), on a $D(L_\omega) = D(M_\omega)$. D'autre part,

$$L_\omega M_\omega \neq M_\omega L_\omega,$$

car

$$\begin{array}{l} D(M_\omega L_\omega) \\ = \{\varphi \in D(L_\omega) : \ L_\omega\varphi \in D(M_\omega)\} \\ = \{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \text{ et } \varphi'' + a\varphi' - \omega^\alpha\varphi \in H^2(\mathbb{R})\} \\ = \{\varphi \in H^3(\mathbb{R}) : \ \varphi'' + a\varphi' \in H^2(\mathbb{R})\} \\ = \{\varphi \in H^3(\mathbb{R}) : \ \varphi'' \in H^2(\mathbb{R})\} \\ = H^4(\mathbb{R}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rl} & (M_\omega L_\omega)\varphi(y) \\ = & (\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y))'' - \omega^\alpha(\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha\varphi(y)) \\ = & \varphi^{(4)}(y) + a''(y)\varphi'(y) + a'(y)\varphi''(y) + a'(y)\varphi''(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) \\ & -\omega^\alpha\varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi''(y) - \omega^\alpha a(y)\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y) \\ = & \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) + (2a'(y) - 2\omega^\alpha)\varphi''(y) \\ & + (a''(y) - \omega^\alpha a(y))\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y), \end{array}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} D(M_\omega L_\omega) = H^4(\mathbb{R}) \\ (M_\omega L_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) + (2a'(y) - 2\omega^\alpha)\varphi''(y) \\ + (a''(y) - \omega^\alpha a(y))\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y), \ y \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{2.9.2}$$

et

$$\begin{array}{l} D(L_\omega M_\omega) \\ = \{\varphi \in D(M_\omega) : \ M_\omega\varphi \in D(L_\omega)\} \\ = \{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \text{ et } \varphi'' \in H^2(\mathbb{R})\} \\ = H^4(\mathbb{R}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & (L_\omega M_\omega)\varphi(y) \\ = & (\varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y))'' + a(y)(\varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y))' - \omega^\alpha(\varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y)) \\ = & \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) - 2\omega^\alpha\varphi''(y) - \omega^\alpha a(y)\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y). \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} D(L_\omega M_\omega) = H^4(\mathbb{R}) \\ (L_\omega M_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) - 2\omega^\alpha \varphi''(y) \\ -\omega^\alpha a(y)\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y), \ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9.3}$$

D'après (2.9.2) et (2.9.3), on a

$$\begin{aligned} & [M_\omega; L_\omega]\varphi(y) \\ = \ & \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) + (2a'(y) - 2\omega^\alpha)\varphi''(y) \\ & + (a''(y) - \omega^\alpha a(y))\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y) \\ & -\varphi^{(4)}(y) - a(y)\varphi^{(3)}(y) + 2\omega^\alpha\varphi''(y) + \omega^\alpha a(y)\varphi'(y) - \omega^{2\alpha}\varphi(y) \\ = \ & 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} D([M_\omega; L_\omega]) = H^4(\mathbb{R}) \\ [M_\omega; L_\omega]\varphi(y) = 2a'(y)\varphi''(y) + a''(y)\varphi'(y), \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. De plus, $D((L_\omega + M_\omega)^2) \subset D((L_\omega - M_\omega)^2)$, car

$$\begin{cases} D(L_\omega + M_\omega) = H^2(\mathbb{R}) \\ (L_\omega + M_\omega)\varphi(y) = 2\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - 2\omega^\alpha\varphi(y), \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(L_\omega - M_\omega) = H^2(\mathbb{R}) \\ (L_\omega - M_\omega)\varphi(y) = a(y)\varphi'(y), \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De même,

$$\begin{aligned} & D((L_\omega + M_\omega)^2) \\ & = \{\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)) : (L_\omega + M_\omega)\ \varphi \in D((L_\omega + M_\omega))\} \\ & = \{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \text{ et } 2\varphi'' + a\varphi' - 2\omega^\alpha\varphi \in H^2(\mathbb{R})\} \\ & = H^4(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & D((L_\omega - M_\omega)^2) \\ & = \{\varphi \in D((L_\omega - M_\omega)) : (L_\omega - M_\omega)\ \varphi \in D((L_\omega - M_\omega))\} \\ & = \{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \text{ et } a\varphi' \in H^2(\mathbb{R})\} \\ & = H^3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

4. Inversibilité de $L_\omega + M_\omega$ dans $\mathcal{L}(X)$. Si on pose

$$\begin{cases} D(P) = D(Q) = H^1(\mathbb{R}), \\ P\varphi(y) = \varphi'(y), \ y \in \mathbb{R}, \\ Q\varphi(y) = a(y)\varphi'(y), \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

on a

$$L_\omega + M_\omega = 2P^2 + Q - 2\omega^\alpha I.$$

D'après Engel-Nagel [15], Exemple 2.2, p. 169 et le Lemme 2.6, p. 173, on a $\omega^\alpha \in \rho(2P^2 + Q)$, i.e

$$\left\| \left(2P^2 + Q - 2\omega^\alpha I\right)^{-1} \right\| \leqslant \frac{C}{2\omega^\alpha},$$

autrement dit, $L_\omega + M_\omega$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$.
5. Inversibilité de Λ_ω.
On a

$$\begin{cases} D(M_\omega - H) = H^2(\mathbb{R}), \\ (M_\omega - H)\varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha \varphi(y) - \varphi'(y) = \psi(y). \end{cases}$$

Par la transformation de Fourier, on résout l'équation

$$(M_\omega - H)\varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha \varphi(y) - \varphi'(y) = \psi(y) \quad \text{où } \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

On va montrer que $M_\omega - H$ est un isomorphisme de $H^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in H^2(\mathbb{R})$ alors

$$(M_\omega - H)\,\varphi = \varphi'' - \omega^\alpha \varphi - \varphi' \in L^2(\mathbb{R}),$$

d'où $M_\omega - H$ est bien défini. Il est fermé à domaine dense. On résout l'équation

$$\varphi''(y) - \omega^\alpha \varphi(y) - \varphi'(y) = \psi(y), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}),$$

par la transformation de Fourier on a

$$(2i\pi\xi)^2\,\widehat{\varphi}(\xi) - \omega^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) - 2i\pi\xi\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi),$$

d'où

$$\widehat{\varphi}(\xi) = -\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2i\pi\xi},$$

on a bien $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$. D'où

$$\varphi(.) = -\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2i\pi\xi}\right)(.).$$

Dire que $\varphi \in H^2(\mathbb{R})$ est équivaut à montrer que

$$\left(4\pi^2\xi^2 + 1\right)\widehat{\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\varphi})} \in L^2(\mathbb{R}),$$

or

$$\left(4\pi^2\xi^2 + 1\right)\widehat{\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\varphi})}(\xi) = \left(4\pi^2\xi^2 + 1\right)\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2i\pi\xi} = \frac{\left(4\pi^2\xi^2 + 1\right)\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2i\pi\xi}$$

et la fonction

$$\xi \mapsto \frac{\left(4\pi^2\xi^2 + 1\right)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2i\pi\xi}$$

est bornée, d'où le résultat. On en déduit que

$$\begin{aligned} \left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) &= -\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 2i\pi\xi}\right)(y) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi}\,\widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 2i\pi\xi\right)}d\xi, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega &= (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \\ &= \left(I + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1}\right)(M_\omega - H),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}& (L_\omega + H)\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) \\ = \; & L_\omega\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) + H\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) \\ = \; & -\int_{\mathbb{R}} \frac{4\pi^2\xi^2 e^{2i\pi y\xi}\, \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 2i\pi\xi\right)} d\xi - (a(y)+1)\int_{\mathbb{R}} \frac{2i\pi\xi e^{2i\pi y\xi}\, \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 2i\pi\xi\right)} d\xi \\ & +\omega^\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi}\, \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 2i\pi\xi\right)} d\xi,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\left\|(L_\omega + H)\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right]\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + C\omega^\alpha\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= C(1+\omega^\alpha)\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1}\psi\right\| &\leqslant C(1+\omega^\alpha)\left\|e^{L_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)}\left\|e^{M_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant \frac{C}{\omega^{2\alpha}}(1+\omega^\alpha)\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Donc, pour ω assez grand, on déduit l'inversibilité de Λ_ω.
6. Maintenant, on montre que

$$\forall \varphi \in D(L_\omega) = H^2(\mathbb{R}),\, \Lambda_\omega^{-1}\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)^2) = H^4(\mathbb{R}).$$

Soit $\Lambda_\omega^{-1}\varphi = \psi$, alors

$$\varphi = \Lambda_\omega\psi = \left[(M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H)\right]\psi,$$

et

$$(M_\omega - H)\psi = \psi'' - \omega^\alpha\psi - \psi' \in D(L_\omega) = H^2(\mathbb{R}),$$

implique

$$\Lambda_\omega^{-1}\varphi = \psi \in H^4(\mathbb{R}) = D((L_\omega + M_\omega)^2).$$

7. Pour le commutateur on a la proposition suivante :

Proposition 2.9.1 *([31], p. 120) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega > 0$,*

$$\left\|[M_\omega; L_\omega](L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\gamma},$$

où

$$\gamma = \begin{cases} 2\alpha & si\ 0 < \omega < 1, \\ \alpha & si\ \omega \geqslant 1.\end{cases}$$

Preuve. On pose, pour $f \in X = L^p(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} (L_\omega + M_\omega)^{-2} f = g, \\ (L_\omega + M_\omega)^{-1} f = \psi, \end{cases}$$

alors

$$(L_\omega + M_\omega)^{-1}\psi = g \text{ avec } g \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right) = D(L_\omega M_\omega) \cap D(M_\omega L_\omega),$$

et ainsi

$$\begin{cases} g \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right), \\ 2g''(y) + a(y)\, g'(y) - 2\omega^\alpha g(\zeta) = \psi(y). \end{cases} \tag{2.9.4}$$

On a

$$\begin{aligned} \{[M_\omega; L_\omega]\, g\}(y) &= 2a'(y)\, g''(y) + (a''(y) - \omega^\alpha a(y) + \omega^\alpha)\, g'(y) \\ &= 2a'(y)\, P^2 g(y) + (a''(y) - \omega^\alpha a(y) + \omega^\alpha)\, Pg(y), \end{aligned}$$

or P est borné et, grâce à (2.9.4), on a

$$\begin{aligned} \|[M_\omega; L_\omega]\, g\| &\leqslant C\left(\left\|P^2 g\right\| + \|Pg\|\right) \\ &\leqslant C_1\left(\left\|P^2 g\right\| + \|g\|\right) \\ &\leqslant C_1\left(\|g''\| + \|g\|\right) \\ &\leqslant C_2\left(\|\psi\| + \frac{1}{\omega^\alpha}\|\psi\|\right). \end{aligned} \tag{2.9.5}$$

De plus, de $(L_\omega + M_\omega)^{-1} f = \psi$, on déduit

$$\begin{cases} \psi \in D\left((L_\omega + M_\omega)\right) \\ 2\psi''(y) + a(y)\,\psi'(y) - 2\omega^\alpha \psi(\zeta) = f(y), \end{cases}$$

et

$$\|\psi\| \leqslant \frac{C}{\omega^\alpha}\|f\|. \tag{2.9.6}$$

Il s'ensuit (de (2.9.5) et (2.9.6)) que

$$\begin{aligned} \|[M_\omega; L_\omega]\, g\| &= \left\|[M_\omega; L_\omega]\,(L_\omega + M_\omega)^{-2} f\right\| \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{\omega^\alpha} + \frac{1}{\omega^{2\alpha}}\right)\|g\| \\ &\leqslant \frac{2C}{\omega^\gamma}\|f\|. \end{aligned}$$

Finalement, il existe $C > 0$ tel que, pour $\omega > 0$,

$$\left\|[M_\omega; L_\omega]\,(L_\omega + M_\omega)^{-2}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\gamma},$$

d'où $\gamma = 2\alpha$ si $0 < \omega < 1$ et $\gamma = \alpha$ si $\omega \geqslant 1$. □

2.9.2 Existence et unicité d'une solution classique

Toutes les hypothèses sont vérifiées, donc tous les résultats obtenus pour ω positif assez grand, s'appliquent au problème concret

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\ -a'(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \dfrac{1}{2}a''(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha a(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ +2\omega^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega^{2\alpha} u(x,y) = f(x,y),\ x \in (0,1),\ y \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(0,y) = d_0,\ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) = u_1,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9.7}$$

La proposition suivante donne l'existence et l'unicité de la solution de ce problème

Proposition 2.9.2 *Soit $f \in L^p\left(0,1;L^2(\mathbb{R})\right)$ avec $1 < p < +\infty$. Alors, pour $\omega > 0$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (2.9.7) admet une unique solution classique u.*
2. $u_1, \Lambda_\omega^{-1} d_0 \in \left(H^4(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p}$,

Lemme 2.9.1 *On a, d'après [21], p. 680-681,*

$$\left(H^4(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p} = B_{2,p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R}).$$

Lemme 2.9.2 *On a $\Lambda_\omega^{-1} d_0 \in B_{2,p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R})$ si et seulement si*

$$y \to \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi}\ \widehat{d_0}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 2i\pi\xi\right)} d\xi \in B_{2,p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R}).$$

Preuve. Soit $V_\omega = e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1}$ et on note

$$(I + V_\omega)^{-1} = I - V_\omega (I + V_\omega)^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega^{-1} d_0 &= (M_\omega - H)^{-1}(I + V_\omega)^{-1} d_0 \\ &= (M_\omega - H)^{-1} d_0 - (M_\omega - H)^{-1} V_\omega (I + V_\omega)^{-1} d_0. \end{aligned}$$

Mais V_ω contient l'operateur régulier e^{L_ω}, alors $\Lambda_\omega^{-1} d_0 \in B_{2,p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R})$ si et seulement si $(M_\omega - H)^{-1} d_0 \in B_{2,p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$y \to \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi}\ \widehat{d_0}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 2i\pi\xi\right)} d\xi \in B_{2,p}^{4(1-1/2p)}(\mathbb{R}).$$

□

Chapitre 3

Equations différentielles opérationnelles avec des C-L de type Robin généralisé : cas non commutatif sur les espaces de Hölder

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on reprend l'étude du problème (2.1.1) mais cette fois-ci dans les espaces de Hölder $C^{\theta}([0,1]\,;X)$ avec $0<\theta<1$ qui ont une géométrie différente de celle des espaces $L^p\,(0,1;X)$ avec $1<p<\infty$. Plus précisément, on s'intéresse aux équations différentielles opérationnelles complètes du second ordre de type elliptique, posées sur l'intervalle borné $[0,1]$ et munies des conditions aux limites de type Robin généralisé :

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x)+2Bu'(x)+Au(x)-\omega u(x)=f(x), \quad x\in(0,1)\,, \\ u'(0)-Hu(0)=d_0, \\ u(1)=u_1, \end{array}\right. \tag{3.1.1}$$

où A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X, $f\in C^{\theta}([0,1]\,;X)$ avec $0<\theta<1$, d_0,u_1 sont des éléments donnés dans X et ω est un réel positif assez grand.
On s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution classique du problème (3.1.1), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\left\{\begin{array}{l} u\in C^2\left([0,1]\,;X\right)\cap C\left([0,1]\,;D(A)\right), \\ u'\in C\left([0,1]\,;D\left(B\right)\right), \end{array}\right.$$

$u(0)\in D\left(H\right)$ et u satisfaisant le problème (3.1.1) ainsi qu'à la régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire

$$u'', Bu', Au\in C^{\theta}([0,1]\,;X).$$

Pour étudier le problème (3.1.1), on traite un cas plus général en considérant des opérateurs linéaires fermés non commutatifs L_ω, M_ω, ce qui ramène à traiter le problème

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \dfrac{1}{2}\left(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega\right)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)\,, \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

On cherche une solution classique du problème (3.1.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in C^2\left([0,1]\,;X\right) \cap C\left([0,1]\,;D\left(L_\omega M_\omega\right) \cap D\left(M_\omega L_\omega\right)\right), \\ u' \in C\left([0,1]\,;D\left(L_\omega - M_\omega\right)\right), \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$u(0) \in D\left(H\right)$ et u satisfaisant le problème (3.1.2). On veut montrer également la propriété de régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire

$$u'', (L_\omega - M_\omega)u', \left(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega\right)u \in C^\theta([0,1]\,;X). \tag{3.1.4}$$

Bien évidemment, si la solution classique u vérifie

$$u'', (L_\omega - M_\omega)u', L_\omega M_\omega u \in C^\theta([0,1]\,;X),$$

alors on aura

$$M_\omega L_\omega u \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right),$$

puisque

$$M_\omega L_\omega u(x) = -2f(x) + 2u''(x) + 2(L_\omega - M_\omega)u'(x) - L_\omega M_\omega u(x).$$

3.2 Hypothèses

Les hypothèses sur les opérateurs M_ω et L_ω sont les suivantes. Il existe un réel positif fixé ω_0 tel que

$$\begin{cases} \exists \delta \in]0, \frac{\pi}{2}[, \ \exists C > 0 : \ \forall \omega \geqslant \omega_0, \ S_\delta \subset \rho\left(L_\omega\right), S_\delta \subset \rho\left(M_\omega\right), \\ \left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, \ z \in S_\delta, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $S_\delta := \left\{z \in \mathbb{C}\backslash\left\{0\right\} : |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta\right\}$.

Remarque 3.2.1 *Sous l'hypothèse (3.2.1) et vu que les domaines des opérateurs L_ω et M_ω ne sont pas supposés denses dans X, les opérateurs L_ω et M_ω génèrent des semi-groupes analytiques généralisés sur X, $\left(e^{\xi L_\omega}\right)_{\xi>0}$, $\left(e^{\xi M_\omega}\right)_{\xi>0}$.*

Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$ et $0 < \theta < 1$, on suppose également

$$D(L_\omega) = D(M_\omega), \tag{3.2.2}$$

$$D((L_\omega + M_\omega)^2) \subseteq D((L_\omega - M_\omega)^2), \tag{3.2.3}$$

$$L_\omega + M_\omega \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{3.2.4}$$

$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}. \tag{3.2.5}$$

Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, l'opérateur

$$\Lambda_\omega = (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X) \tag{3.2.6}$$

et

$$\forall \xi \in D(L_\omega),\ \Lambda_\omega^{-1}\xi \in D((L_\omega + M_\omega)^2),\ (L_\omega + M_\omega)^2 \Lambda_\omega^{-1}\xi \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}. \tag{3.2.7}$$

L'hypothèse de non commutativité est

$$\forall \omega \geqslant \omega_0, \|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi(\omega); \tag{3.2.8}$$

où C_{L_ω,M_ω} est le commutateur donné par

$$\begin{aligned} C_{L_\omega,M_\omega} &= (M_\omega L_\omega - L_\omega M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-2} \\ &= [M_\omega; L_\omega](L_\omega + M_\omega)^{-2}, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

et

$$\chi : [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi(\omega) = 0. \tag{3.2.10}$$

Remarque 3.2.2 *Notons que dans les exemples, on a souvent $M_\omega - H$ inversible avec de plus, pour ω assez grand,*

$$\left\| e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Dans ce cas, l'opérateur

$$\Lambda_\omega = \left(I + e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1}\right)(M_\omega - H),$$

est lui même inversible.

Remarque 3.2.3 *On note que sous l'hypothèse (3.2.2), on a l'égalité suivante*

$$(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = (X, D(M_\omega))_{\theta,\infty}.$$

Remarque 3.2.4 *Si les hypothèses (3.2.2) et (3.2.3) sont satisfaites et si de plus*

$$D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega M_\omega),$$

alors l'hypothèse (3.2.5) est satisfaite.
En effet, d'après le Lemme 2.3.1, assertion 1, on a

$$D(M_\omega L_\omega) = D(L_\omega^2) = D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega^2),$$

donc pour tout $\theta \in]0,1[$, on obtient

$$\left(X, D(L_\omega^2)\right)_{\theta,\infty} = \left(X, D(M_\omega^2)\right)_{\theta,\infty}$$

et grâce à la propriété de réitération (voir Lions-Peetre [27]), il s'ensuit

$$(X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = \left(X, D(L_\omega^2)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty} = \left(X, D(M_\omega^2)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}.$$

Remarque 3.2.5 *Si on suppose (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.4) et si on considère le cas commutatif $M_\omega L_\omega = L_\omega M_\omega$, alors les hypothèses (3.2.3) et (3.2.5) sont vérifiées.*
En effet
1- Soit $\varphi \in D\left((L_\omega + M_\omega)^2\right)$, alors

$$\varphi, (L_\omega + M_\omega)\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) = D(L_\omega - M_\omega)$$

de plus

$$\begin{aligned} & (L_\omega - M_\omega)\varphi \\ = \ & (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1}(L_\omega + M_\omega)\varphi \\ = \ & (L_\omega + M_\omega)^{-1}(L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)\varphi \in D(L_\omega + M_\omega), \end{aligned}$$

ainsi, $\varphi \in D\left((L_\omega - M_\omega)^2\right)$ et donc (3.2.3) est satisfaite.
2- Si $D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega)$ alors, d'après la Remarque 3.2.4, l'hypothèse (3.2.5) est satisfaite.

3.3 Lemmes techniques

Lemme 3.3.1 *([17]) Si on suppose (3.2.2) alors l'hypothèse (3.2.5) est équivalente à*

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\omega (L_\omega - I)^{-1} (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} \subset (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\ L_\omega (M_\omega - I)^{-1} (X, D(M_\omega))_{\theta,\infty} \subset (X, D(M_\omega))_{\theta,\infty}. \end{array} \right. \tag{3.3.1}$$

Preuve. Considérons les hypothèses (3.2.2) et (3.2.5). Soit $\varphi \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = (X, D(L_\omega - I))_{\theta,\infty}$. Alors

$$(L_\omega - I)^{-1}\varphi := \psi \in (X, D(L_\omega - I))_{\theta,\infty},$$

et

$$\varphi = (L_\omega - I)\psi \in (X, D(L_\omega - I))_{\theta,\infty} = (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty},$$

d'où

$$\psi, L_\omega\psi \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty},$$

c'est-à-dire

$$\psi \in (X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}.$$

Ainsi

$$M_\omega\psi = M_\omega (L_\omega - I)^{-1}\varphi \in (X, D(M_\omega))_{\theta,\infty} = (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty},$$

ce qui prouve la première ligne de (3.3.1).
La seconde ligne est obtenue en échangeant les rôles de L_ω et M_ω.
Inversement, supposons (3.2.2) et (3.3.1). Soit $\varphi \in (X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty} = (X, D(L_\omega - I))_{1+\theta,\infty}$. Alors

$$(L_\omega - I)\varphi = L_\omega\varphi - \varphi \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty},$$

donc

$$M_\omega (L_\omega - I)^{-1}(L_\omega - I)\varphi \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = (X, D(M_\omega))_{\theta,\infty},$$

ainsi $\varphi \in (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}$.
De la même manière si $\varphi \in (X, D(M_\omega))_{1+\theta,\infty}$, alors $\varphi \in (X, D(L_\omega))_{1+\theta,\infty}$. □

3.4 Résultats principaux

On rappelle la démarche adoptée dans le cadre L^p et qui est également valable dans notre cadre höldérien. Si u est une solution classique du problème (3.1.2) alors

$$u(0), u_1 \in D(L_\omega) = D(M_\omega)$$

et $v := (L_\omega + M_\omega)^2 u$ vérifie, pour $f \in C^\theta([0,1];X)$ avec $0 < \theta < 1$, l'équation intégrale suivante

$$v + R_\omega(v) = F_\omega(f) + S_\omega, \tag{3.4.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
& R_\omega(v)(x) \\
= \; & \frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)\int_0^x e^{(x-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds - \frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}\left[I - e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& +\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds,
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

$$\begin{aligned}
& F_\omega(f)(x) \\
= \; & (L_\omega + M_\omega)\int_0^x e^{(x-s)M_\omega} f(s)ds + (L_\omega + M_\omega)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} f(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} f(s)ds \\
& +(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} f(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}\left[I - e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} f(s)ds,
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

et

$$\begin{aligned}
& S_\omega(x) \\
= \; & (L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0 + (L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}d_0 \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\left(I - e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0 - (L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}e^{M_\omega}d_0 \\
& +(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}(L_\omega + M_\omega)u_1 + \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}(L_\omega + M_\omega)u_1 + (L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}(L_\omega + M_\omega)u_1.
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Le but est de trouver, sous certaines hypothèses sur les données $d_0, u_1, f(0)$ et $f(1)$, $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour chaque $\omega \geqslant \omega^*$, on puisse construire un sous-espace Y_ω de $C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ avec $0<\theta<1$, satisfaisant

1. $F_\omega(f) + S_\omega \in Y_\omega$.
2. $I + R_\omega$ est inversible dans $\mathcal{L}(Y_\omega)$.

Dans ce cas, pour $\omega \geqslant \omega^*$, on pourra déduire que s'il existe une solution classique u du problème (3.1.2) satisfaisant la propriété de la régularité maximale (3.1.4), alors u est uniquement déterminée par la formule de représentation

$$u = (L_\omega + M_\omega)^{-2}\left[(I + R_\omega)^{-1}\left(F_\omega(f) + S_\omega\right)\right]. \tag{3.4.5}$$

Ainsi, pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité pour le problème (3.1.2), il suffira d'étudier la régularité de cette représentation.

Proposition 3.4.1 *Soit Q un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur X, $\left(e^{\xi Q}\right)_{\xi>0}$ non nécessairement continu en* 0.

1. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $\varphi \in X$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
   (a) $e^{\cdot Q}\varphi \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$.
   (b) $\varphi \in \left(X, D(Q)\right)_{\theta,\infty}$.
2. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$. On pose*
$$w_1(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds, \ \ x \in [0,1].$$
   Alors $w_1 \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$, et il existe $K>0$ tel que
$$\|w_1\|_{C^\theta([0,1];X)} \leqslant K\,\|g\|_{C^\theta([0,1];X)}.$$
3. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$. On pose*
$$w_2(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q}\left(g(s) - g(0)\right)ds, \ \ x \in [0,1],$$
   alors $w_2 \in C^{1,\theta}\left([0,1]\,;X\right) \cap C^\theta\left([0,1]\,;D(Q)\right)$.
4. *Soient $\theta \in]0,1[$, $g \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ et $\varphi \in X$. On pose*
$$w_3(x) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds, \ \ x \in [0,1],$$
   alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $w_3 \in C^{1,\theta}\left([0,1]\,;X\right) \cap C^\theta\left([0,1]\,;D(Q)\right)$.
   (b) $\varphi \in D(Q)$ *et* $g(0) + Q\varphi \in \left(X, D(Q)\right)_{\theta,\infty}$.

En particulier, si $\varphi = 0_X$ et $g(0) \in (X, D(Q))_{\theta,\infty}$, alors il existe $K > 0$ tel que

$$\|Qw_3\|_{C^\theta([0,1];X)} \leqslant K \|g\|_{C^\theta([0,1];X)}.$$

5. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^\theta([0,1];X)$. Alors*

$$Q \int_0^1 e^{sQ} (g(s) - g(0))\, ds \in (X, D(Q))_{\theta,\infty},$$

et

$$Q \int_0^1 e^{(1-s)Q} (g(s) - g(1))\, ds \in (X, D(Q))_{\theta,\infty}.$$

6. *Soient $\psi \in X$ et $x \in [0,1]$, alors*

$$\int_0^x e^{(x-s)Q} \psi ds, \; \int_x^1 e^{(s-x)Q} \psi ds \in D(Q).$$

L'assertion 3 est obtenu en appliquant la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard [11]. L'assertion 4. qui améliore l'assertion 3. est dû à Sinestrari [35], voir aussi Da Prato [10]. On trouve dans Guidetti [23], une preuve simple de ces résultats, voir proposition 2.5 p. 132, Corollaire 2.1 et Théorème 2.4, p. 136.
Pour l'assertion 6, voir Sinestrari [35], proposition 1.2 page 20.
On pose pour une fonction g donnée de $[0,1]$ dans X et pour $x \in [0,1]$

$$G(g)(x) = \int_0^x e^{(x-s)M_\omega} g(s) ds, \quad K(g)(x) = \int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} g(s) ds.$$

Remarque 3.4.1 *Pour plus de commodité et puisque, dans cette partie, la dépendance de ω n'est pas utile, on note $L_\omega = L$, $M_\omega = M$, $\Lambda_\omega = \Lambda$, $F_\omega(f) = F(f)$....*

Proposition 3.4.2 *On suppose (3.2.1)∼(3.2.7). Soit $f \in C^\theta([0,1];X)$ avec $\theta \in]0,1[$. Alors*

$$F(f) + S \in C^\theta([0,1];X),$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \Lambda^{-1} d_0, u_1 \in D(ML) \cap D(LM), \\ (M - I)(L + M)\Lambda^{-1} d_0 + (L + M)(L - I)^{-1} f(0) \in (X, D(L))_{\theta,\infty}, \\ L(L + M) u_1 + (L + M)(M - I)^{-1} f(1) \in (X, D(L))_{\theta,\infty}. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

Preuve. On a, pour tout $x \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
& F(f)(x) \\
= \; & (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
S(x) \; = \; & (L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I - e^{L}e^{M}\right)d_0 + (L+M)e^{xM}d_0 \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I - e^{L}e^{M}\right)d_0 - (L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\
& -(L+M)e^{(1-x)M}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 + (L+M)e^{(1-x)L}(L+M)u_1.
\end{aligned}
$$

En sommant F et S, on obtient

$$
\begin{aligned}
& F(f)(x) + S(x) = (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
& -(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sL} f(s)ds \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}\left[I - e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds \qquad (3.4.7) \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I - e^{L}e^{M}\right)d_0 + (L+M)e^{xM}d_0 \\
& -(L+M)e^{(1-x)L}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}\left(I - e^{L}e^{M}\right)d_0 - (L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\
& +(L+M)e^{xM}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 \\
& -(L+M)e^{(1-x)M}e^{M}(L+H)\Lambda^{-1}e^{L}(L+M)u_1 + (L+M)e^{(1-x)L}(L+M)u_1.
\end{aligned}
$$

Alors

$$\begin{aligned}
& F(f)(x)+S(x) \\
= \; & (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
& -(L+M)\, e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^{L}[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] \\
& +(L+M)\, e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I-e^{L}e^{M}\right) d_0] \\
& -(L+M)\, e^{(1-x)L} e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I-e^{L}e^{M}\right) d_0] \\
& -(L+M)\, e^{(1-x)L}[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] \\
& +(L+M)e^{xM}d_0 - (L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\
& +(L+M)\, e^{(1-x)L} e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^{L}[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1],
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& F(f)(x)+S(x) \\
= \; & (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
& +(L+M)\, e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I-e^{L}e^{M}\right) d_0] \\
& -(L+M)\, e^{(1-x)L}[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] \\
& -(L+M)\, e^{(1-x)L} e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I-e^{L}e^{M}\right) d_0] \\
& -(L+M)\, e^{xM}\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^{L}[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] \\
& +(L+M)e^{xM}d_0 - (L+M)e^{(1-x)L}e^{M}d_0 \\
& +(L+M)\, e^{(1-x)L} e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^{L}[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1].
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.3.3, point 5, on a

$$(L+H)\,\Lambda^{-1} = (L+M)\,\Lambda^{-1} + e^{L}e^{M}\,(L+H)\,\Lambda^{-1} - I,$$

alors

$$
\begin{aligned}
&F(f)\,(x) + S(x) = \\
&(L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
&+ (L+M)\, e^{xM}\left[(L+M)\,\Lambda^{-1} + e^L e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1} - I\right][\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I - e^L e^M\right) d_0] \\
&- (L+M)\, e^{(1-x)L}[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1] \qquad (3.4.8) \\
&- (L+M)\, e^{(1-x)L} e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I - e^L e^M\right) d_0] \\
&- (L+M)\, e^{xM}\left[(L+M)\,\Lambda^{-1} + e^L e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1} - I\right] e^L[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1] \\
&+ (L+M) e^{xM} d_0 - (L+M) e^{(1-x)L} e^M d_0 \\
&+ (L+M)\, e^{(1-x)L} e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^L(\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1),
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& F(f)\,(x) + S(x) \\
= \;& (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
& + (L+M)\, e^{xM}\,(L+M)\,\Lambda^{-1}\left[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds - e^L e^M d_0\right] \\
& + (L+M)\, e^{xM} e^L e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I - e^L e^M\right) d_0\right] \\
& - (L+M)\, e^{xM}\left[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I - e^L e^M\right) d_0\right] \\
& - (L+M)\, e^{(1-x)L}\left[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1\right] \\
& - (L+M)\, e^{(1-x)L} e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}\left[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I - e^L e^M\right) d_0\right] \\
& - (L+M)\, e^{xM}\,(L+M)\,\Lambda^{-1} e^L\left[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1\right] \\
& - (L+M)\, e^{xM} e^L e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^L\left[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1\right] \\
& + (L+M)\, e^{xM} e^L\left[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1\right] + (L+M)\, e^{xM}\,(L+M)\,\Lambda^{-1} d_0 \\
& + (L+M) e^{xM} d_0 - (L+M) e^{(1-x)L} e^M d_0 \\
& + (L+M)\, e^{(1-x)L} e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^L\left[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\, u_1\right],
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& F(f)\,(x) + S(x) \\
= \quad & (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds + (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
& + (L+M)\,e^{xM}\,(L+M)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds - e^L e^M d_0] \\
& + (L+M)\,e^{xM}[e^L e^M d_0 - \int_0^1 e^{sL} f(s)ds] \\
& + (L+M)\,e^{xM} e^L e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I - e^L e^M\right) d_0] +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + (L+M)\,e^{(1-x)L}[(L+M)\,u_1 - \int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds] \\
& - (L+M)\,e^{(1-x)L} e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1}[\int_0^1 e^{sL} f(s)ds + \left(I - e^L e^M\right) d_0] \\
& - (L+M)\,e^{xM}\,(L+M)\,\Lambda^{-1} e^L[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] \\
& - (L+M)\,e^{xM} e^L e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^L[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] \\
& + (L+M)\,e^{xM}\,(L+M)\,\Lambda^{-1} d_0 \\
& + (L+M)\,e^{xM} e^L[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] - (L+M)e^{(1-x)L} e^M d_0 \\
& + (L+M)\,e^{(1-x)L} e^M\,(L+H)\,\Lambda^{-1} e^L[\int_0^1 e^{(1-s)M} f(s)ds - (L+M)\,u_1] \\
= \quad & (I)\,(x) + (II)\,(x) + (III)\,(x) + (IV)\,(x) + (V)\,(x) + (VI)\,(x) + (VII)\,(x) \\
& + (VIII)\,(x) + (IX)\,(x) + (X)\,(x) + (XI)\,(x) + (XII)\,(x) + (XIII)\,(x)\,.
\end{aligned}
$$

On rappelle que

$$(L+M)\,(M-I)^{-1}\,,(L+M)\,(L-I)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

De plus, d'après l'assertion 6 de la Proposition 3.4.1 et puisque $f \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right), \theta \in]0,1[$, on a pour tout $x \in [0,1]\,,$

$$
\begin{aligned}
G(f)(x) &= \int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds \in D(M), \\
K(f)(x) &= \int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \in D(L).
\end{aligned}
$$

Etude de la régularité de $(I)\,(\cdot)$ **et** $(II)\,(\cdot)$

On a, pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
(I)(x) &= (L+M)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds \\
&= (L+M)(M-I)^{-1}(M-I)\int_0^x e^{(x-s)M} f(s)ds \\
&= (L+M)(M-I)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M} f(s)ds - (L+M)(M-I)^{-1}G(f)(x) \\
&= (L+M)(M-I)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}\left(f(s)-f(x)\right)ds \\
&\quad + (L+M)(M-I)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M} f(x)ds - (L+M)(M-I)^{-1}G(f)(x),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
(I)(x) &= (L+M)(M-I)^{-1}\int_0^x Me^{(x-s)M}\left(f(s)-f(x)\right)ds \\
&\quad - (L+M)(M-I)^{-1} f(x) + (L+M)(M-I)^{-1} e^{xM}\left(f(x)-f(0)\right) \\
&\quad - (L+M)(M-I)^{-1} e^{xM}(L-I)^{-1} f(0) + (L+M)(M-I)^{-1} e^{xM} L (L-I)^{-1} f(0) \\
&\quad - (L+M)(M-I)^{-1} G(f)(x) \\
&= (I)_1(x) + (I)_2(x) + (I)_3(x) + (I)_4(x) + (I)_5(x) + (I)_6(x),
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
(II)(x) &= (L+M)\int_x^1 e^{(s-x)L} f(s)ds \\
&= (L+M)(L-I)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L} f(s)ds \\
&\quad - (L+M)(L-I)^{-1} K(f)(x) \\
&= (L+M)(L-I)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}\left(f(s)-f(x)\right)ds \\
&\quad + (L+M)(L-I)^{-1} L\int_x^1 e^{(s-x)L} f(x)ds \\
&\quad - (L+M)(L-I)^{-1} K(f)(x) \\
&= (L+M)(L-I)^{-1}\int_x^1 Le^{(s-x)L}\left(f(s)-f(x)\right)ds - (L+M)(L-I)^{-1} f(x) \\
&\quad + (L+M)(L-I)^{-1} e^{(1-x)L}\left(f(x)-f(1)\right) \\
&\quad - (L+M)(L-I)^{-1} e^{(1-x)L}(M-I)^{-1} f(1) \\
&\quad + (L+M)(L-I)^{-1} e^{(1-x)L} M (M-I)^{-1} f(1) - (L+M)(L-I)^{-1} K(f)(x) \\
&= (II)_1(x) + (II)_2(x) + (II)_3(x) + (II)_4(x) + (II)_5(x) + (II)_6(x).
\end{aligned}$$

– Grâce à la Proposition 3.4.1, assertion 3, $(I)_1, (II)_1 \in C^\theta([0,1];X)$.
– Il est clair que $(I)_2$, $(I)_3$, $(II)_2$, $(II)_3 \in C^\theta([0,1];X)$.

– Suite à la Proposition 3.4.1, assertion 1, $(I)_4\,,(II)_4 \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$.
– $(I)_6\,,(II)_6 \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ grâce à la Proposition 3.4.1, assertion 2.
Etude de la régularité de $(IV)(\cdot)$ **et** $(VI)(\cdot)$
– On a

$$\begin{aligned} LK(f)(0) &= \int_0^1 Le^{sL}\left(f(s)-f(0)\right)ds + e^L f(0) - f(0), \\ MG(f)(1) &= \int_0^1 Me^{(1-s)M}\left(f(s)-f(1)\right)ds + e^L f(1) - f(1), \end{aligned}$$

ainsi, pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} (IV)(x) &= (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)\left[e^L e^M d_0 - K(f)(0)\right] \\ &= -(L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}\int_0^1 Le^{sL}\left(f(s)-f(0)\right)ds \\ &\quad + (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}(M-I)(L-I)^{-1}\left(K(f)(0)-e^L f(0)\right) \\ &\quad - (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}((L-I)^{-1}f(0)+e^L e^M d_0) \\ &\quad + (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}M(L-I)^{-1}f(0) \\ &\quad + (L+M)(M-I)^{-1}e^{xM}Me^L e^M d_0 \\ &= (IV)_1(x) + (IV)_2(x) + (IV)_3(x) + (IV)_4(x) + (IV)_5(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &(VI)(x) \\ = \;& -(L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}\int_0^1 Me^{(1-s)M}\left(f(s)-f(1)\right)ds \\ & + (L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}(L-I)(M-I)^{-1}\left(G(f)(1)-e^M f(1)\right) \\ & - (L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}\left((L+M)u_1 + (M-I)^{-1}f(1)\right) \\ & + (L+M)(L-I)^{-1}e^{(1-x)L}\left(L(L+M)u_1 + L(M-I)^{-1}f(1)\right) \\ = \;& (VI)_1(x) + (VI)_2(x) + (VI)_3(x) + (VI)_4(x). \end{aligned}$$

– De (3.3.1) et la Proposition 3.4.1, assertion 5, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} (M-I)(L-I)^{-1}\int_0^1 Le^{sL}\left(f(s)-f(0)\right)ds \in (X,D(L))_{\theta,\infty}, \\ (L-I)(M-I)^{-1}\int_0^1 Me^{(1-s)M}\left(f(s)-f(1)\right)ds \in (X,D(M))_{\theta,\infty}, \end{array}\right.$$

donc, on peut déduire, grâce à la Proposition 3.4.1, assertion 1, que

$$(IV)_1\,,(IV)_5\,,(VI)_1 \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right).$$

– En utilisant encore une fois (3.3.1), on obtient

$$\begin{array}{rcl} (M-I)(L-I)^{-1}\left(K(f)(0)-e^L f(0)\right) & \in & (X,D(L))_{\theta,\infty}, \\ (L-I)^{-1}f(0)+e^L e^M d_0 \in D(L) & \subset & (X,D(L))_{\theta,\infty}, \\ (L-I)(M-I)^{-1}\left(G(f)(1)-e^M f(1)\right) & \in & (X,D(L))_{\theta,\infty}, \\ (L+M)u_1 + (M-I)^{-1}f(1) \in D(L) & \subset & (X,D(L))_{\theta,\infty}, \end{array}$$

donc, suite à la proposition 3.4.1, assertion 1, on trouve

$$(IV)_2\,,(IV)_3\,,(VI)_2\,,(VI)_3 \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right).$$

– Il est clair, en vertu de (3.3.1), la Proposition 3.4.1, assertion 1 et de l'hypothèse (3.2.7), que $(III)\,,\,(V)\,,\,(VII)\,,(VIII)\,,\,(IX)\,,\,(XI)\,,\,(XII)$ et $(XIII) \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right).$

Conclusion

On a

$$\begin{aligned}
& F(f)\,(x) + S\,(x) \\
= \;& T\,(x) + (L+M)\,(M-I)^{-1}\,e^{xM}\left((M-I)\,(L+M)\,\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)\,(L-I)^{-1}\,f(0)\right) \\
& + (L+M)\,(L-I)^{-1}\,e^{(1-x)L}\left(L\,(L+M)\,u_1 + (L+M)\,(M-I)^{-1}\,f(1)\right).
\end{aligned}$$

où, suite à l'étude précédente, $T \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ avec

$$\begin{aligned}
T \;\; : \;\; & = (I)_1 + (I)_2 + (I)_3 + (I)_4 + (I)_6 + (II)_1 + (II)_2 + (II)_3 + (II)_4 + (II)_6 \\
& + (IV)_1 + (IV)_2 + (IV)_3 + (IV)_5 + (VI)_1 + (VI)_2 + (VI)_3 + (III) \\
& + (V) + (VII) + (VIII) + (IX) + (XI) + (XII) + (XIII)\,.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
x \;\; \to \;\; & (L+M)\,(M-I)^{-1}\,e^{xM}\left((M-I)\,(L+M)\,\Lambda^{-1}d_0 + (L+M)\,(L-I)^{-1}\,f(0)\right) \\
& + (L+M)\,(L-I)^{-1}\,e^{(1-x)L}\left(L\,(L+M)\,u_1 + (L+M)\,(M-I)^{-1}\,f(1)\right),
\end{aligned}$$

est dans $C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ si et seulement si (3.4.6) est satisfaite. □

Maintenant, on fait apparaître la dépendance de ω. En notant R, L, M, Λ... par R_ω, L_ω, M_ω, Λ_ω....

En posant, pour $\omega \geqslant \omega_0$,

$$\begin{aligned}
& C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right) \\
& = \{v \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right) : \;\; (L_\omega - M_\omega)\,(L_\omega - I)^{-1}\,C_{L_\omega,M_\omega}v(0) \in \left(X, D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty}\,, \\
& (L_\omega - M_\omega)\,(M_\omega - I)^{-1}\,C_{L_\omega,M_\omega}v(1) \in \left(X, D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty}\},
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

on obtient ainsi le résultat suivant.

Proposition 3.4.3 *On suppose (3.2.1)∼(3.2.10) et soit* $\theta \in]0,1[$.

1. $R_\omega(v) \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ *si et seulement si* $v \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)$.
2. $R_\omega(v) \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)$ *si et seulement si* $v \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right)$.
3. $R_\omega(v) \in \mathcal{L}(C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right))$.
4. *Il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$, *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$,

$$\left\|R_\omega\right\|_{\mathcal{L}(C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X))} < 1.$$

Ainsi, pour $\omega \geqslant \omega^*$, $I + R_\omega$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(C^\theta_{L_\omega,M_\omega}\left([0,1]\,;X\right))$.

Preuve. **1)** Soit $v \in C^{\theta}_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$. Puisque $C_{L_\omega,M_\omega} = [M_\omega;L_\omega](L_\omega+M_\omega)^{-2} \in \mathcal{L}(X)$ alors $C_{L_\omega,M_\omega}v \in C^{\theta}([0,1];X)$.
On effectue un raisonnement similaire à celui de la preuve de la Proposition 3.4.2.
On écrit pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
& 2R_\omega(v)(x) \\
= \; & (L_\omega+M_\omega)\int_0^x e^{(x-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)e^{xM_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)e^{xM_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}\left[I-e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& +(L_\omega+M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds,
\end{aligned}$$

et comme

$$(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1} = (L_\omega+M_\omega)\Lambda_\omega^{-1} + e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1} - I,$$

alors, on peut réécrire $R_\omega(v)$ comme suit

$$\begin{aligned}
& 2R_\omega(v)(x) \\
= \; & (L_\omega+M_\omega)\int_0^x e^{(x-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)e^{xM_\omega}\left[(L_\omega+M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}-I\right]\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)e^{xM_\omega}\left[(L_\omega+M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}-I\right]e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}\left[I-e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right]\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds \\
& +(L_\omega+M_\omega)e^{(1-x)L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(s)ds,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
& 2R_\omega(v)(x) \\
= \; & (L_\omega + M_\omega) \int_0^x e^{(x-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega) \int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega} (L_\omega + M_\omega) \Lambda_\omega^{-1} \int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega} e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} \int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& +(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega} \int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega} (L_\omega + M_\omega) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \qquad (3.4.10) \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega} e^{L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& +(L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega} e^{L_\omega} \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& -(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega} \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& +(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
& +(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} \int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds, \\
= \; & (I)(x) + (II)(x) + (III)(x) + (IV)(x) + (V)(x) + (VI)(x) + (VII)(x) + (VIII)(x) \\
& + (IX)(x) + (X)(x) + (XI)(x).
\end{aligned}
$$

Alors pour (I) et (II), on obtient

$$
\begin{aligned}
(I)(x) &= (L_\omega + M_\omega) \int_0^x e^{(x-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&= (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} (M_\omega - I) \int_0^x e^{(x-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&= (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} \int_0^x M_\omega e^{(x-s)M_\omega} \left(C_{L_\omega,M_\omega} v(s) - C_{L_\omega,M_\omega} v(x) \right) ds \\
&\quad - (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(x) \\
&\quad + (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega} \left(C_{L_\omega,M_\omega} v(x) - C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \right) \\
&\quad - (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega} (L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \\
&\quad + (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega} L_\omega (L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \\
&\quad - (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} G(C_{L_\omega,M_\omega} v)(x) \\
&= (I)_1(x) + (I)_2(x) + (I)_3(x) + (I)_4(x) + (I)_5(x) + (I)_6(x),
\end{aligned}
$$

de même

$$\begin{aligned}
(II)(x) &= -(L_\omega + M_\omega)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)\,ds \\
&= -(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}(L_\omega - I)\int_x^1 e^{(s-x)L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)\,ds \\
&= -(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}\int_x^1 L_\omega e^{(s-x)L_\omega}\left(C_{L_\omega,M_\omega} v(s) - C_{L_\omega,M_\omega} v(x)\right)ds \\
&\quad + (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(x) \\
&\quad - (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega}\left(C_{L_\omega,M_\omega} v(x) - C_{L_\omega,M_\omega} v(1)\right) \\
&\quad + (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega}(M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \\
&\quad - (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} M_\omega (M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \\
&\quad + (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} K(C_{L_\omega,M_\omega} v)(x) \\
&= (II)_1(x) + (II)_2(x) + (II)_3(x) + (II)_4(x) + (II)_5(x) + (II)_6(x).
\end{aligned}$$

- Il est clair que $(I)_2, (I)_3, (II)_2, (II)_3 \in C^\theta([0,1];X)$ car $v \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$ (et donc $C_{L_\omega,M_\omega} v \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$).
- D'après la Proposition 3.4.1, assertion 1, $(I)_4, (II)_4 \in C^\theta([0,1];X)$.
- Grâce à la Proposition 3.4.1, assertion 2, $(I)_6, (II)_6 \in C^\theta([0,1];X)$.
- Suite à la Proposition 3.4.1, assertion 3, $(I)_1, (II)_1 \in C^\theta([0,1];X)$.

Etude de (V) **et** (IX).

On a

$$\begin{aligned}
&(V)(x) \\
&= (L_\omega + M_\omega)e^{xM_\omega}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)\,ds \\
&= (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega}(M_\omega - I)(L_\omega - I)^{-1}(L_\omega - I)\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)\,ds \\
&= (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega}(M_\omega - I)(L_\omega - I)^{-1}\int_0^1 L_\omega e^{sL_\omega}\left(C_{L_\omega,M_\omega} v(s) - C_{L_\omega,M_\omega} v(0)\right)ds \\
&\quad -(L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega}(M_\omega - I)(L_\omega - I)^{-1}\left(K(C_{L_\omega,M_\omega} v)(0) - e^{L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(0)\right) \\
&\quad +(L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega}(L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \\
&\quad -(L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega} M_\omega (L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \\
&= (V)_1(x) + (V)_2(x) + (V)_3(x) + (V)_4(x),
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
& (IX)(x) \\
= \; & -(L_\omega + M_\omega)e^{(1-x)L_\omega} \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
= \; & -(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} (L_\omega - I)(M_\omega - I)^{-1} (M_\omega - I) \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
= \; & -(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} (L_\omega - I)(M_\omega - I)^{-1} \times \\
& \int_0^1 M_\omega e^{(1-s)M_\omega} \left(C_{L_\omega,M_\omega} v(s) - C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \right) ds \\
& +(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} (L_\omega - I)(M_\omega - I)^{-1} \left(G(C_{L_\omega,M_\omega} v)(1) - e^{M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \right) \\
& -(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} (M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \\
& +(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} L_\omega (M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \\
= \; & (IX)_1(x) + (IX)_2(x) + (IX)_3(x) + (IX)_4(x).
\end{aligned}
$$

– Suite à (3.3.1) et l'assertion 5, de la Proposition 3.4.1, on trouve

$$
\begin{cases}
(M_\omega - I)(L_\omega - I)^{-1} L_\omega \int_0^1 e^{sL_\omega} \left(C_{L_\omega,M_\omega} v(s) - C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \right) ds \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\
(L_\omega - I)(M_\omega - I)^{-1} M_\omega \int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} \left(C_{L_\omega,M_\omega} v(s) - C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \right) ds \in (X, D(M_\omega))_{\theta,\infty},
\end{cases}
$$

on déduit donc, grâce à la Proposition 3.3.1 et la Proposition 3.4.1, assertion 1, que $(V)_1, (IX)_1 \in C^\theta([0,1];X)$.

– En utilisant encore une fois (3.3.1), on obtient

$$
\begin{array}{l}
(M_\omega - I)(L_\omega - I)^{-1} \left(K(C_{L_\omega,M_\omega} v)(0) - e^{L_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \right) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\
(L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \in D(L_\omega) \subset (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\
(L_\omega - I)(M_\omega - I)^{-1} \left(G(C_{L_\omega,M_\omega} v)(1) - e^{M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \right) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\
(M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(1) \in D(L_\omega) \subset (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty},
\end{array}
$$

on obtient donc, suite à la Proposition (3.4.1), assertion 1,

$$
(V)_2, (V)_3, (IX)_2, (IX)_3 \in C^\theta([0,1];X).
$$

– En vertu de (3.3.1) et la Proposition 3.4.1, assertion 1, on déduit (IV), (VII), $(VIII)$, (X), $(XI) \in C^\theta([0,1];X)$.

– D'après l'hypothèse (3.2.7), on a $(III), (VI) \in C^\theta([0,1];X)$.

On pose

$$
\begin{aligned}
P \; : \; = \; & (I)_1 + (I)_2 + (I)_3 + (I)_4 + (I)_6 + (II)_1 + (II)_2 + (II)_3 + (II)_4 \\
& + (II)_6 + (III) + (IV) + (V)_1 + (V)_2 + (V)_3 + (VI) + (VII) \\
& + (VIII) + (IX)_1 + (IX)_2 + (IX)_3 + (X) + (XI),
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
2R_\omega(v)(x) \; = \; & P + [(I)_5 + (V)_4] + [(II)_5 + (IX)_4] \\
= \; & P + (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} e^{xM_\omega} (L_\omega - M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(0) \\
& +(L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} (L_\omega - M_\omega)(M_\omega - I)^{-1} C_{L_\omega,M_\omega} v(1).
\end{aligned}
$$

L'étude précédente montre que $P \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right)$, de plus

$$\begin{array}{rcl} x & \rightarrow & \left(L_{\omega}+M_{\omega}\right)\left(M_{\omega}-I\right)^{-1}e^{xM_{\omega}}\left(L_{\omega}-M_{\omega}\right)\left(L_{\omega}-I\right)^{-1}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(0) \\ & & +\left(L_{\omega}+M_{\omega}\right)\left(L_{\omega}-I\right)^{-1}e^{(1-x)L_{\omega}}\left(L_{\omega}-M_{\omega}\right)\left(M_{\omega}-I\right)^{-1}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(1), \end{array}$$

est dans $C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \left(L_{\omega}-M_{\omega}\right)\left(L_{\omega}-I\right)^{-1}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(0)\in(X,D(L_{\omega}))_{\theta,\infty}, \\ \left(L_{\omega}-M_{\omega}\right)\left(M_{\omega}-I\right)^{-1}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(1)\in(X,D(L_{\omega}))_{\theta,\infty}, \end{array}\right.$$

ce qui est équivalent à dire que $v\in C^{\theta}_{L_{\omega},M_{\omega}}\left([0,1]\,;X\right)$.

2) En posant $x=0$ dans (3.4.10), on obtient

$$\begin{array}{rl} & 2R_{\omega}(v)(0) \\ = & -\left(L_{\omega}+M_{\omega}\right)\displaystyle\int_0^1 e^{sL_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & -(L_{\omega}+M_{\omega})\left(L_{\omega}+M_{\omega}\right)\Lambda_{\omega}^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & -(L_{\omega}+M_{\omega})e^{L_{\omega}}e^{M_{\omega}}\left(L_{\omega}+H\right)\Lambda_{\omega}^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & +(L_{\omega}+M_{\omega})\displaystyle\int_0^1 e^{sL_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & -(L_{\omega}+M_{\omega})\left(L_{\omega}+M_{\omega}\right)\Lambda_{\omega}^{-1}e^{L_{\omega}}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & -(L_{\omega}+M_{\omega})e^{L_{\omega}}e^{M_{\omega}}\left(L_{\omega}+H\right)\Lambda_{\omega}^{-1}e^{L_{\omega}}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & +(L_{\omega}+M_{\omega})e^{L_{\omega}}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & -(L_{\omega}+M_{\omega})e^{L_{\omega}}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & +(L_{\omega}+M_{\omega})e^{L_{\omega}}e^{M_{\omega}}\left(L_{\omega}+H\right)\Lambda_{\omega}^{-1}e^{L_{\omega}}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & +(L_{\omega}+M_{\omega})e^{L_{\omega}}e^{M_{\omega}}\left(L_{\omega}+H\right)\Lambda_{\omega}^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds, \end{array}$$

ce qui donne, après simplifications

$$\begin{array}{rcl} (L_{\omega}+M_{\omega})^{-2}R_{\omega}(v)(0) & = & -\dfrac{1}{2}\Lambda_{\omega}^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sL_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds \\ & & -\dfrac{1}{2}\Lambda_{\omega}^{-1}e^{L_{\omega}}\displaystyle\int_0^1 e^{(1-s)M_{\omega}}C_{L_{\omega},M_{\omega}}v(s)ds, \end{array}$$

et en posant $x = 1$ dans (3.4.10), on trouve

$$\begin{aligned}
R_\omega(v)(1) &= \frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{2}(L_\omega + M_\omega)e^{M_\omega}(L_\omega + H)\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'hypothèse (3.2.7) et comme $\int_0^1 e^{sL_\omega} C_{L_\omega,M_\omega} v(s)ds \in D(L_\omega)$, on a

$$R_\omega(v) \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$$

si et seulement si $v \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$.

3) D'après l'assertion précédente, R_ω est un opérateur linéaire de $C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$ dans lui même.

4) Grâce à la Proposition (3.4.1) ; assertions 2 et 4, et suite à l'hypothèse (3.2.8), pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on a

$$\begin{aligned}
\|R_\omega(v)\|_{C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)} &\leqslant C\|C_{L_\omega,M_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}\|v\|_{C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)} \\
&\leqslant C\chi(\omega)\|v\|_{C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)},
\end{aligned}$$

or, d'après (3.2.10), on a $\lim_{\omega\to+\infty}\chi(\omega) = 0$, donc il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$, tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

$$\|R_\omega(v)\|_{C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)} < 1.$$

Ainsi, pour $\omega \geqslant \omega^*$, $I + R_\omega$ est inversible dans $\mathcal{L}\left(C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)\right)$. □

Remarque 3.4.2 *On note qu'il est nécessaire que R_ω soit dans $C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X)$ puisque $I + R_\omega$ n'est pas inversible dans $C^\theta([0,1];X)$ ni dans $C([0,1];X)$.*

Proposition 3.4.4 *On suppose (3.2.1)∼(3.2.7). Soit $f \in C^\theta([0,1];X)$, $\theta \in]0,1[$. Alors*

$$F_\omega(f) + S_\omega \in C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X),$$

si et seulement si

$$\begin{cases}
\Lambda_\omega^{-1}d_0, u_1 \in D(M_\omega L_\omega) \cap D(L_\omega M_\omega), \\
(M_\omega - I)(L_\omega + M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}d_0 + (L_\omega + M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}f(0) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\
L_\omega(L_\omega + M_\omega)u_1 + (L_\omega + M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}f(1) \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\
(L_\omega - M_\omega)(L_\omega - I)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}d_0 \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}, \\
(L_\omega - M_\omega)(M_\omega - I)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega + M_\omega)^2 u_1 \in (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty}.
\end{cases} \tag{3.4.11}$$

Preuve. Grâce à la Proposition 3.4.2, il suffit de calculer $F_\omega(f)+S_\omega$ en 0 et 1.
1) On a

$$\begin{aligned}
& (L_\omega+M_\omega)^{-2}\left[F_\omega(f)(0)+S_\omega(0)\right] \\
= \; & (L_\omega+M_\omega)^{-1}\left[\Lambda_\omega-e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)+(L_\omega+H)\right]\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}f(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)^{-1}\left[(L_\omega+H)+\Lambda_\omega-e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)\right]\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}f(s)ds \\
& +(L_\omega+M_\omega)^{-1}\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}(L_\omega+M_\omega)u_1\right] \\
& +(L_\omega+M_\omega)^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}(M_\omega+L_\omega)u_1\right],
\end{aligned}$$

et vu que

$$\Lambda_\omega-e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)+(L_\omega+H)=L_\omega+M_\omega,$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}
& (F_\omega(f)+S_\omega)(0) \\
= \; & (L_\omega+M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}\int_0^1 e^{sL_\omega}f(s)ds-(L_\omega+M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\int_0^1 e^{(1-s)M_\omega}f(s)ds \\
& -(L_\omega+M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}\left[e^{L_\omega}e^{M_\omega}d_0-e^{L_\omega}(L_\omega+M_\omega)u_1\right] \\
& +(L_\omega+M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}d_0 \\
& -(L_\omega+M_\omega)e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+M_\omega)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}(L_\omega+M_\omega)u_1\right] \\
& +(L_\omega+M_\omega)\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)e^{L_\omega}e^{M_\omega}(L_\omega+H)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}(L_\omega+M_\omega)u_1\right] \\
& +(L_\omega+M_\omega)e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}(L_\omega+M_\omega)u_1\right],
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (3.2.7) et puisque $\forall\xi\in X$, $e^Q\xi\in D(Q^n)$ avec $n\in\mathbb{N}$, on trouve

$$C_{L_\omega,M_\omega}(F_\omega(f)+S_\omega)(0)\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty}\Leftrightarrow C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega+M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}d_0\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty},$$

et d'après (3.3.1), on a

$$(L_\omega-M_\omega)(L_\omega-I)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(F_\omega(f)+S_\omega)(0)\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty},$$

qui est équivalent à

$$(L_\omega-M_\omega)(L_\omega-I)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}(L_\omega+M_\omega)^2\Lambda_\omega^{-1}d_0\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty}.$$

2) D'une autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \left(F_\omega(f)+S_\omega\right)(1) \\
= \; & \left(L_\omega+M_\omega\right) \int_0^1 e^{(1-s) M_\omega} f(s) d s \\
& -\left(L_\omega+M_\omega\right) e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} \int_0^1 e^{(1-s) M_\omega} f(s) d s \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right) e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1} \int_0^1 e^{s L_\omega} f(s) d s \\
& -\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1} e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1} \int_0^1 e^{s L_\omega} f(s) d s \\
& -\left(L_\omega+M_\omega\right)\left[I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega}\right] \int_0^1 e^{(1-s) M_\omega} f(s) d s \\
& +(L_\omega+M_\omega) e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right) u_1\right] \\
& -(L_\omega+M_\omega) e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0+e^{L_\omega}\left(M_\omega+L_\omega\right) u_1\right] \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right) e^{M_\omega} d_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)\left[-e^{M_\omega} d_0+\left(M_\omega+L_\omega\right) u_1\right],
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \left(F_\omega(f)+S_\omega\right)(1) \\
= \; & (L_\omega+M_\omega) e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right) u_1\right] \\
& -(L_\omega+M_\omega) e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right) \Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0+e^{L_\omega}\left(M_\omega+L_\omega\right) u_1\right] \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right) e^{M_\omega} d_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)\left[-e^{M_\omega} d_0+\left(M_\omega+L_\omega\right) u_1\right] \\
= \; & \left(L_\omega+M_\omega\right)^2 u_1,
\end{aligned}$$

on obtient ainsi le résultat. □

Remarque 3.4.3 *Grâce aux propositions précédentes, on peut dire que pour $\omega \geqslant \omega^*$, s'il existe une solution classique du problème (3.1.2) satisfaisant la propriété de la régularité maximale (3.1.4), elle s'écrit forcément sous la forme (3.4.5) et on en déduit alors l'unicité de la solution classique.*

Théorème 3.4.1 *On suppose (3.2.1)∼(3.2.10). Soit $\theta \in]0,1[$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le problème (3.1.2) admet une unique solution classique u satisfaisant*

$$\left\{\begin{array}{l}
u'', (L_\omega-M_\omega) u', (L_\omega M_\omega+M_\omega L_\omega) u \in C^\theta([0,1] ; X), \\
(L_\omega+M_\omega)^2 u \in C_{L_\omega, M_\omega}^\theta([0,1] ; X).
\end{array}\right.$$

2. $f \in C^{\theta}([0,1];X)$ *et*

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda_{\omega}^{-1}d_0, u_1 \in D(M_{\omega}L_{\omega}) \cap D(L_{\omega}M_{\omega}), \\ (M_{\omega}-I)(L_{\omega}+M_{\omega})\Lambda_{\omega}^{-1}d_0 + (L_{\omega}+M_{\omega})(L_{\omega}-I)^{-1}f(0) \in (X, D(L_{\omega}))_{\theta,\infty}, \\ L_{\omega}(L_{\omega}+M_{\omega})u_1 + (L_{\omega}+M_{\omega})(M_{\omega}-I)^{-1}f(1) \in (X, D(L_{\omega}))_{\theta,\infty}, \\ (L_{\omega}-M_{\omega})(L_{\omega}-I)^{-1}C_{L_{\omega},M_{\omega}}(L_{\omega}+M_{\omega})^2\Lambda_{\omega}^{-1}d_0 \in (X, D(L_{\omega}))_{\theta,\infty}, \\ (L_{\omega}-M_{\omega})(M_{\omega}-I)^{-1}C_{L_{\omega},M_{\omega}}(L_{\omega}+M_{\omega})^2u_1 \in (X, D(L_{\omega}))_{\theta,\infty}. \end{array}\right. \tag{3.4.12}$$

Preuve. Soit $\omega > 0$ fixé telque $\omega \geqslant \omega^*$.
Suffisance :
On suppose (3.4.12) et $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, on veut prouver que u défini par (3.4.5) et l'unique solution classique du problème (3.1.2).

1. **Première étape :** On montre que $u \in C^{\theta}([0,1];D(L_{\omega}M_{\omega}+M_{\omega}L_{\omega}))$.
Soit
$$(I+R_{\omega})(v) = (F_{\omega}(f)+S_{\omega}),$$
alors
$$v = (F_{\omega}(f)+S_{\omega}) - R_{\omega}(v) = (L_{\omega}+M_{\omega})^2 u,$$
d'où
$$u = (L_{\omega}+M_{\omega})^{-2}(F_{\omega}(f)+S_{\omega}) - (L_{\omega}+M_{\omega})^{-2}R_{\omega}(v). \tag{3.4.13}$$
Grâce aux Propositions 3.4.3 et 3.4.4 on a $(L_{\omega}+M_{\omega})^2 u = v \in C^{\theta}_{L_{\omega},M_{\omega}}([0,1];X)$. D'après le Lemme 2.3.2, $L_{\omega}M_{\omega}(L_{\omega}+M_{\omega})^{-2}$, $M_{\omega}L_{\omega}(L_{\omega}+M_{\omega})^{-2} \in \mathcal{L}(X)$, on obtient donc
$$(L_{\omega}M_{\omega}+M_{\omega}L_{\omega})u = (L_{\omega}M_{\omega}+M_{\omega}L_{\omega})(L_{\omega}+M_{\omega})^{-2}(L_{\omega}+M_{\omega})^2 u \in C^{\theta}([0,1];X). \tag{3.4.14}$$
2. **Deuxième étape :** On montre que $u' \in C^{\theta}([0,1];D(L_{\omega}-M_{\omega}))$.
En introduisant les formules (3.4.2), (3.4.3) et (3.4.4) dans (3.4.13), on obtient pour

tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
u(x) \;=\;& (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(f)(x) + (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(f)(x) \\
& - (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G(f)(1) \\
& + (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} K(f)(0) \\
& - (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} K(f)(0) \\
& - (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} \left[I - e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega}\right] G(f)(1) \\
& + (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} \left[\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0 + e^{L_\omega} (L_\omega + M_\omega) u_1\right] \\
& - (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} \left[\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0 + e^{L_\omega} (M_\omega + L_\omega) u_1\right] \\
& + (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} d_0 + (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} \left(-e^{M_\omega} d_0 + (M_\omega + L_\omega) u_1\right) \\
& - \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(C_{L_\omega, M_\omega} v)(x) + \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(C_{L_\omega, M_\omega} v)(x) \\
& + \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} K(C_{L_\omega, M_\omega} v)(0) \\
& + \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G(C_{L_\omega, M_\omega} v)(1) \\
& + \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} \left[I - e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega}\right] G(C_{L_\omega, M_\omega} v)(1) \\
& - \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} e^{M_\omega} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} K(C_{L_\omega, M_\omega} v)(0),
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire comme suit

$$\begin{aligned}
u(x) \;=\;& (L_\omega + M_\omega)^{-1} G(f)(x) + (L_\omega + M_\omega)^{-1} K(f)(x) \\
& - \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} G\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) + \frac{1}{2} (L_\omega + M_\omega)^{-1} K\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) \\
& + (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{xM_\omega} f_0 + (L_\omega + M_\omega)^{-1} e^{(1-x)L_\omega} f_1,
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

avec

$$\begin{aligned}
& f_0 \\
=\;& - (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G(f)(1) + (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} K(f)(0) \\
& + (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} \left[\left(I - e^{L_\omega} e^{M_\omega}\right) d_0 + e^{L_\omega} (L_\omega + M_\omega) u_1\right] \\
& + d_0 + \frac{1}{2} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} K\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(0) + \frac{1}{2} (L_\omega + H) \Lambda_\omega^{-1} e^{L_\omega} G\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(1),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
& f_0 \\
= \; & -\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)+e^{L_\omega}G(f)(1) \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)-K\left(f\right)(0) \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right] \\
& +e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right] \\
& +e^{L_\omega}e^{M_\omega}d_0-e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1 \\
& +\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}-I\right)K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0) \\
& +\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}-I\right)e^{L_\omega}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(1),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& f_1 \\
= \; & -e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)+\left(-e^{M_\omega}d_0+\left(M_\omega+L_\omega\right)u_1\right) \\
& -\left(I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right)G(f)(1) \\
& -e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left(\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(M_\omega+L_\omega\right)u_1\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(I-e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\right)G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(1) \\
& -\frac{1}{2}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0).
\end{aligned}
$$

On a donc, pour tout $x\in[0,1]$

$$
\begin{aligned}
& v(x) \\
= \; & \left(L_\omega+M_\omega\right)G(f)(x)+\left(L_\omega+M_\omega\right)K(f)(x) \\
& -\frac{1}{2}\left(L_\omega+M_\omega\right)G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(x)+\frac{1}{2}\left(L_\omega+M_\omega\right)K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(x) \quad (3.4.16) \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right)e^{xM_\omega}f_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)e^{(1-x)L_\omega}f_1.
\end{aligned}
$$

D'après la Proposition 3.4.1, assertion 4,

$$u\in C^{1,\theta}([0,1]\,;X)\cap C^{\theta}([0,1]\,;D(L_\omega)),$$

si et seulement si

$$
\left\{
\begin{array}{l}
f_0,f_1\in D(M_\omega)=D(L_\omega), \\
f\left(0\right)-\dfrac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)+M_\omega f_0\in\left(X,D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty}, \\
f\left(1\right)+\dfrac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(1)+L_\omega f_1\in\left(X,D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty}.
\end{array}
\right. \quad (3.4.17)
$$

D'après (3.4.12) et l'hypothèse (3.2.7), il est clair que $f_0,f_1\in D(M_\omega)=D(L_\omega)$ et de plus

$$\begin{aligned}
&f_0 = \\
&-\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)+e^{L_\omega}G(f)(1)\\
&+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)\\
&-\left(L_\omega-I\right)^{-1}L_\omega K\left(f\right)(0)+\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(f\right)(0)\\
&+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\left[-e^{M_\omega}d_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right]\\
&+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}d_0\\
&+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right]\\
&+e^{L_\omega}e^{M_\omega}d_0-e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\\
&+\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\right)K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0)\\
&-\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}L_\omega K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0)+\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0)\\
&+\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}-I\right)e^{L_\omega}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(1),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&f_0 = \\
&-\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)+e^{L_\omega}G(f)(1)\\
&+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)\\
&-\left(L_\omega-I\right)^{-1}\left(\int_0^1 L_\omega e^{sL_\omega}(f(s)-f(0))ds+e^{L_\omega}f(0)\right)\\
&+\left(L_\omega-I\right)^{-1}f(0)+\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(f\right)(0)\\
&+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\left[-e^{M_\omega}d_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right]\\
&+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}d_0\\
&+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right]\\
&+e^{L_\omega}e^{M_\omega}d_0-e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\\
&+\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\right)K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0)\\
&-\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}\left(\int_0^1 L_\omega e^{sL_\omega}(C_{L_\omega,M_\omega}v(s)-C_{L_\omega,M_\omega}v(0))ds+e^{L_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)+\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0)\\
&+\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}-I\right)e^{L_\omega}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(1),
\end{aligned}$$

donc

$$
\begin{aligned}
& f(0)-\frac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)+M_\omega f_0 \\
= \;& f(0)-\frac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)-\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1) \\
& -e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)+e^{L_\omega}G(f)(1) \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0) \\
& -\left(L_\omega-I\right)^{-1}\left(\int_0^1 L_\omega e^{sL_\omega}(f(s)-f(0))ds+e^{L_\omega}f(0)\right) \\
& +\left(L_\omega-I\right)^{-1}f(0)+\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(f\right)(0) \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\left[-e^{M_\omega}d_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right] \\
& +\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}d_0 \\
& +e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right] \\
& +e^{L_\omega}e^{M_\omega}d_0-e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1 \\
& +\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\right)K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0) \\
& -\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}\left(\int_0^1 L_\omega e^{sL_\omega}(C_{L_\omega,M_\omega}v(s)-C_{L_\omega,M_\omega}v(0))ds+e^{L_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)+\frac{1}{2}\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0) \\
& +\frac{1}{2}\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}-I\right)e^{L_\omega}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(1),
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
& f(0)-\frac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)+M_\omega f_0 \\
= \;& \left(M_\omega-I\right)\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}d_0+\left(M_\omega+L_\omega\right)\left(L_\omega-I\right)^{-1}f(0)+\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}d_0 \\
& -\left(L_\omega-I\right)^{-1}\left(f(0)-\frac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)\right)-\frac{1}{2}\left(L_\omega-M_\omega\right)\left(L_\omega-I\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}v(0) \\
& -M_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1) \\
& -M_\omega e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}G(f)(1)+M_\omega e^{L_\omega}G(f)(1) \\
& +M_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0)+M_\omega e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}K\left(f\right)(0) \\
& -M_\omega\left(L_\omega-I\right)^{-1}\left(\int_0^1 L_\omega e^{sL_\omega}(f(s)-f(0))ds+e^{L_\omega}f(0)\right)+M_\omega\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(f\right)(0) \\
& +M_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}e^{L_\omega}\left[-e^{M_\omega}d_0+\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+M_\omega e^{L_\omega} e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\left[\left(I-e^{L_\omega}e^{M_\omega}\right)d_0+e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\right]\\
&+M_\omega e^{L_\omega} e^{M_\omega} d_0-M_\omega e^{L_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)u_1\\
&+\frac{1}{2}M_\omega\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}\right)K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0)\\
&-\frac{1}{2}M_\omega\left(L_\omega-I\right)^{-1}\left(\int_0^1 L_\omega e^{sL_\omega}(C_{L_\omega,M_\omega}v(s)-C_{L_\omega,M_\omega}v(0))ds+e^{L_\omega}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)\right)\\
&+\frac{1}{2}M_\omega\left(L_\omega-I\right)^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(0)\\
&+\frac{1}{2}M_\omega\left(\left(L_\omega+M_\omega\right)\Lambda_\omega^{-1}+e^{L_\omega}e^{M_\omega}\left(L_\omega+H\right)\Lambda_\omega^{-1}-I\right)e^{L_\omega}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(1).
\end{aligned}
$$

D'après (3.3.1) et (3.4.12) et la Proposition 3.4.1 ; point 5., on a

$$f(0)-\frac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)+M_\omega f_0\in(X,D(M_\omega))_{\theta,\infty}\,,$$

de même

$$f\,(1)+\frac{1}{2}C_{L_\omega,M_\omega}v(0)+L_\omega f_1\in(X,D(L_\omega))_{\theta,\infty}\,.$$

Ensuite, on obtient pour tout $x\in[0,1]$

$$
\begin{aligned}
&\left(L_\omega+M_\omega\right)u'(x)\\
=\;& M_\omega G(f)(x)-L_\omega K(f)(x)-\frac{1}{2}M_\omega G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(x)\\
&-\frac{1}{2}L_\omega K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(x)-C_{L_\omega,M_\omega}v(x)\\
&+M_\omega e^{xM_\omega}f_0-L_\omega e^{(1-x)L_\omega}f_1,
\end{aligned}
$$

donc, pour tout $x\in[0,1]$, on a $u'(x)\in D(L_\omega+M_\omega)=D(L_\omega-M_\omega)$. De plus, en insérant (3.4.16) dans cette dernière formule, et en utilisant le Lemme 2.3.3 point 6.,

$$
\left\{
\begin{array}{r}
\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}M_\omega-\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)=M_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1},\\
-\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}L_\omega-\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}C_{L_\omega,M_\omega}\left(L_\omega+M_\omega\right)=-L_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1},
\end{array}
\right.
$$

on obtient, pour tout $x\in[0,1]$,

$$
\begin{aligned}
u'(x)\;=\;& M_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}G(f)(x)-L_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}K(f)(x)\\
&-\frac{1}{2}M_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}G\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(x)-\frac{1}{2}L_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}K\left(C_{L_\omega,M_\omega}v\right)(x)\\
&+M_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}e^{xM_\omega}f_0-L_\omega\left(L_\omega+M_\omega\right)^{-1}e^{(1-x)L_\omega}f_1.
\end{aligned}
\tag{3.4.18}
$$

En vertu de (3.4.17) et de la Proposition 3.4.1, point 4, on a

$$u'\in C^\theta([0,1]\,;D\left(L_\omega-M_\omega\right)).\tag{3.4.19}$$

3. **Troisième étape :** On montre que $u''\in C^\theta([0,1]\,;X)$.
Puisque $f\in C^\theta([0,1]\,;X)$ et d'après (3.4.14) et (3.4.19), on a

$$u''=f-(L_\omega-M_\omega)u'+\frac{1}{2}\left(L_\omega M_\omega+M_\omega L_\omega\right)u\in C^\theta([0,1]\,;X).$$

4. **Quatrième étape :** On montre que la fonction (3.4.5) est une solution du problème (3.1.2).
On a pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
& u''(x) \\
= \; & f(x) + M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega G(f)(x) - L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega K(f)(x) \\
& -\frac{1}{2} M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega G\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) + \frac{1}{2} L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega K\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) \\
& +\frac{1}{2} (L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} v(x) + M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega e^{x M_\omega} f_0 \\
& + L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega e^{(1-x)L_\omega} f_1,
\end{aligned}$$

en insérant (3.4.16) dans cette dernière formule, on obtient donc

$$\begin{aligned}
u''(x) &= f(x) + E_1 G(f)(x) + T_1 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_1 G\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} T_1 K\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) + E_1 e^{x M_\omega} f_0 + T_1 e^{(1-x)L_\omega} f_1,
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

où, d'après le point 7 du Lemme 2.3.3,

$$\begin{aligned}
E_1 &= M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega + \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} (L_\omega + M_\omega) \\
&= \frac{1}{2} M_\omega - \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T_1 &= L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega + \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} (L_\omega + M_\omega) \\
&= \frac{1}{2} L_\omega - \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1}.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.4.15), (3.4.18) et (3.4.20), on a pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
& u''(x) + (L_\omega - M_\omega) u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega) u(x) \\
= \; & f(x) + E_2 G(f)(x) + T_2 K(f)(x) - \frac{1}{2} E_2 G\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) \\
& + \frac{1}{2} T_2 K\left(C_{L_\omega, M_\omega} v\right)(x) + E_2 e^{x M_\omega} f_0 + T_2 e^{(1-x)L_\omega} f_1,
\end{aligned}$$

d'où, d'après les points 6, 7 et 8 du Lemme 2.3.3

$$\begin{aligned}
E_2 &= E_1 + (L_\omega - M_\omega)\left[(L_\omega + M_\omega)^{-1} M_\omega - (L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega} (L_\omega + M_\omega)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
&= \frac{1}{2} M_\omega - \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} + (L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
&\quad - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[M_\omega + (L_\omega - M_\omega) M_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} - (L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1}\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et même pour

$$\begin{aligned}
T_2 &= T_1 - (L_\omega - M_\omega)\left[(L_\omega + M_\omega)^{-1} L_\omega + (L_\omega + M_\omega)^{-1} C_{L_\omega, M_\omega}(L_\omega + M_\omega)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}L_\omega + \frac{1}{2}(L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} - (L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
&\quad -\frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[L_\omega + - (L_\omega - M_\omega) L_\omega (L_\omega + M_\omega)^{-1} - (L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)(L_\omega + M_\omega)^{-1}\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)u'(x) - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\, u(x) = f(x).$$

De plus, grâce à la Remarque 2.6.1, on trouve

$$\begin{aligned}
u(1) &= (L_\omega + M_\omega)^{-2}(F_\omega(f) + S_\omega)(1) - (L_\omega + M_\omega)^{-2} R_\omega(v)(1) \\
&= u_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u'(0) - Hu(0) &= (L_\omega + M_\omega)^{-2}(F'_\omega(f) + S'_\omega)(0) - (L_\omega + M_\omega)^{-2} R'_\omega(v)(0) \\
&\quad -H(L_\omega + M_\omega)^{-2}(F_\omega(f) + S_\omega)(0) - H(L_\omega + M_\omega)^{-2} R_\omega(v)(0) \\
&= d_0,
\end{aligned}$$

donc u, définie par (3.4.5), est une solution classique de (3.1.2).

Nécessité :
On suppose l'assertion 1. On a d'une part,

$$u'' + (L_\omega - M_\omega)\, u' - \frac{1}{2}(L_\omega M_\omega + M_\omega L_\omega)\, u = f,$$

on déduit $f \in C^\theta([0,1]\,; X)$. D'autre part, u est uniquement déterminé par la formule (3.4.5) et

$$(L_\omega + M_\omega)^2 u = (I + R_\omega)^{-1}(F_\omega(f) + S_\omega) \in C^\theta_{L_\omega, M_\omega}([0,1]\,; X),$$

et d'après la Proposition 3.4.3, assertion 4, $I + R_\omega \in \mathcal{L}(C^\theta_{L_\omega, M_\omega}([0,1]\,; X))$, , il s'ensuit donc

$$F_\omega(f) + S_\omega \in C^\theta_{L_\omega, M_\omega}([0,1]\,; X),$$

ainsi, grâce à la Proposition 3.4.4, l'hypothèse (3.4.12) est satisfaite. □

3.5 Retour à l'équation initiale

En construisant une paire d'opérateurs $(L_\omega,\ M_\omega)$ satisfaisant les hypothèses (3.2.1)$\sim$(3.2.10), on s'attache à illustrer la théorie opérationnelle précédente. Le but est ensuite de pouvoir résoudre le Problème initial (3.1.1), c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)\,, \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{array}\right.$$

Nos hypothèses sont ici les suivantes
– Sur les opérateurs A et B.
On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs A et B vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} B^2 - A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X,\ \mathbb{R}^- \subset \rho\left(B^2 - A_{\omega_0}\right), \\ \exists C > 0,\ \forall \lambda \leqslant 0,\ \ \left\|\left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda| + 1}, \end{array}\right. \tag{3.5.1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i)\ D\left(\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(B), \\ ii)\ D(B^2 - A_\omega) \subset D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}B), \end{array}\right. \tag{3.5.2}$$

$$\left(X, D(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}})\right)_{1+\theta,\infty} = \left(X, D(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}})\right)_{1+\theta,\infty}, \tag{3.5.3}$$

$$\forall \omega \geqslant \omega_0,\ \ \left\|\left[B; (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right](B^2 - A_\omega)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \chi\left(\omega\right), \tag{3.5.4}$$

où

$$\chi:\ \ [\omega_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lim_{\omega \to +\infty} \chi\left(\omega\right) = 0.$$

On suppose que les opérateurs

$$\left\{\begin{array}{l} L_\omega := B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega := -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}, \end{array}\right.$$

vérifient les hypothèses suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \exists \delta > 0,\ \exists C > 0:\ \forall \omega \geqslant \omega_0,\ S_\delta \subset \rho\left(L_\omega\right), S_\delta \subset \rho\left(M_\omega\right), \\ \left\|(L_\omega - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|}, \left\|(M_\omega - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|z|},\ z \in S_\delta, \end{array}\right. \tag{3.5.5}$$

où $S_\delta := \left\{z \in \mathbb{C}\backslash\left\{0\right\} : |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta\right\}$.
– Sous les hypothèses précédentes on obtient des résultats positifs modulo l'ajout de l'hypothèse technique suivante
Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, l'opérateur

$$\Lambda_\omega = (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega}\left(L_\omega + H\right) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{3.5.6}$$

et

$$\forall \xi \in D(L),\ \Lambda_\omega^{-1}\xi \in D((L_\omega + M_\omega)^2),\ \ \left(L_\omega + M_\omega\right)^2 \Lambda_\omega^{-1}\xi \in \left(X, D(L_\omega)\right)_{\theta,\infty}. \tag{3.5.7}$$

3.5.1 Résolution du problème

Remarque 3.5.1

1. *L'hypothèse d'ellipticité (3.5.1) est de type Krein [26]. D'après (3.5.1), il existe* $\theta_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\delta_1 > 0$ *petit tel que le secteur*

$$\Sigma := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \geqslant 2\theta_1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 2\delta_1\},$$

vérifie

$$\begin{cases} \Sigma \subset \rho\left(B^2 - A_{\omega_0}\right), \\ \exists C > 0, \forall \lambda \in \Sigma, \left\| \left(B^2 - A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda| + 1}. \end{cases}$$

2. *Pour tout* $\omega \geqslant \omega_0$, $A_\omega = A_{\omega_0} - (\omega - \omega_0) I$, *donc (3.5.1) implique que*

$$\begin{cases} B^2 - A_\omega \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ \Sigma \subset \rho\left(B^2 - A_\omega\right) \\ \exists C > 0, \forall \lambda \in \Sigma, \left\| \left(B^2 - A_\omega - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\lambda - \omega + \omega_0| + 1}. \end{cases}$$

où C *est une constante indépendante de* ω, *définie dans (3.5.1). Ainsi, l'opérateur* $-\left(B^2 - A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé uniformément borné sur* X.

Remarque 3.5.2 *Les Lemmes 2.8.1, 2.8.2 et 2.8.3 et la Remarque 2.8.1 restent valables ici.*

On veut montrer que les opérateurs $L_\omega := B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}$, $M_\omega := -B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}$ vérifient les hypothèses (3.2.1)-(3.2.8).

Lemmes techniques

Lemme 3.5.1 *([31]) On suppose (3.5.2)-(3.5.3).*

1. *On a le domaine d'interpolation*

$$(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \left(X, D(B^2 - A_\omega)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.$$

2. *L'hypothèse (3.5.3) est équivalente à (3.2.5).*

Preuve. 1- D'après le Lemme 2.8.1 point 1., on a

$$D(L_\omega) = D((B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}).$$

Comme $0 < \theta < 1$, on a

$$(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = (X, D(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}})_{\theta,\infty},$$

et on applique ensuite la propriété de réitération pour obtenir

$$(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} = \left(X, D(B^2 - A_\omega)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}.$$

2- Par la propriété de réitération, il s'ensuit que l'hypothèse (3.5.3) est équivalente à

$$(X, D((B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}})^2))_{\frac{\theta+1}{2},\infty} = (X, D((-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}})^2))_{\frac{\theta+1}{2},\infty}.$$

De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} D(M_\omega^2) & = & D((-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}})^2), \\ D(L_\omega^2) & = & D((B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}})^2). \end{array}$$

Comme $0 < \dfrac{1+\theta}{2} < 1$, l'hypothèse (3.5.3) est équivalente à

$$\left(X, D(L_\omega^2)\right)_{\frac{1+\theta}{1},\infty} = \left(X, D(M_\omega^2)\right)_{\frac{1+\theta}{2},\infty},$$

et par la propriété de réitération, il s'ensuit que (3.5.3) est équivalente à

$$\left(X, D(L_\omega)\right)_{1+\theta,\infty} = \left(X, D(M_\omega)\right)_{1+\theta,\infty}.$$

$\square$

Lemme 3.5.2 *([31]) Sous les hypothèses (3.5.1)-(3.5.2), l'hypothèse (3.5.3) est équivalente à*

$$\left\{ \begin{array}{l} (-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}})(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I)^{-1}\left(X, D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} \subset \left(X, D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}, \\ (B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}})(-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I)^{-1}\left(X, D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} \subset \left(X, D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}. \end{array} \right. \tag{3.5.8}$$

Preuve. Tout d'abord, grâce à la propriété de réitération et suite à (i) de (3.5.2), on a

$$\left(X, D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} = (X, D(\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty} = (X, D(\pm B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty}.$$

On suppose (3.5.3). Alors pour $\varphi \in \left(X, D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty} = (X, D(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I))_{\theta,\infty}$, on a

$$(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I)^{-1}\varphi := \psi \in (X, D(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I))_{1+\theta,\infty},$$

donc $\psi \in D(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}})$ et

$$(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I)\psi \in (X, D(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I))_{\theta,\infty} = (X, D(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty}.$$

Or $\psi \in (X, D(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty}$ alors, en faisant la somme, on obtient

$$(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}})\psi \in (X, D(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty},$$

c'est-à-dire

$$\psi \in (X, D(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{1+\theta,\infty} = (X, D(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{1+\theta,\infty},$$

par (3.5.3), donc,

$$(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}})(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I)^{-1}\varphi\in(X,D(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty},$$

et

$$(X,D(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty}=\left(X,D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

ce qui prouve la première ligne.
En échangeant les rôles de $B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}$ et $-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}$, on obtient la seconde ligne.
Inversement, on suppose (3.5.8). Alors, pour $\varphi\in(X,D(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}))_{1+\theta,\infty}$, on a

$$(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I)\varphi\in(X,D(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty}=\left(X,D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

donc, par (3.5.8), on obtient

$$(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}})(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I)^{-1}(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}-I)\varphi\in\left(X,D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty},$$

ainsi

$$(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}})\varphi\in\left(X,D\left(B^2-A_\omega\right)\right)_{\frac{\theta}{2},\infty}=(X,D(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{\theta,\infty},$$

d'où

$$\varphi\in(X,D(-B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{1+\theta,\infty}.$$

De la même manière si $\varphi\in(X,D(-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}))_{1+\theta,\infty}$, alors

$$\varphi\in(X,D(B-\left(B^2-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}))_{1+\theta,\infty}.$$

□

On introduit, pour $\omega\geqslant\omega_0$, l'espace $C^\theta_{A,B,\omega}([0,1];X)$ des fonctions v de $C^\theta([0,1];X)$ telles que

$$\begin{cases} B(B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I)^{-1}[B;(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}]\left(B^2-A_\omega\right)^{-1}v\left(0\right)\in(X,D\left(B^2-A_\omega\right))_{\frac{\theta}{2},\infty}, \\ B(-B-(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}-I)^{-1}[B;(B^2-A_\omega)^{\frac{1}{2}}]\left(B^2-A_\omega\right)^{-1}v\left(1\right)\in(X,D\left(B^2-A_\omega\right))_{\frac{\theta}{2},\infty}. \end{cases}$$

Alors, il est clair que

$$C^\theta_{A,B,\omega}([0,1];X)=C^\theta_{L_\omega,M_\omega}([0,1];X),$$

est un espace de Banach complexe.
D'après les Lemmes 2.8.1, 2.8.2 et 3.5.1, il est clair que les hypothèses (3.5.1)∼(3.5.7) impliquent (3.2.1)∼(3.2.10).
On applique alors le Théorème 3.4.1.

Résultat principal

Théorème 3.5.1 *On suppose (3.5.1)∼(3.5.7) et soit* $\theta \in]0,1[$. *Alors, il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$, *les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Le problème (3.1.1) admet une unique solution classique u satisfaisant*

$$\begin{cases} u \in C^2([0,1]\,;X) \cap C([0,1]\,;D(A)), \\ u' \in C([0,1]\,;D(B)), \\ \forall x \in [0,1]\,, u(x) \in D(B^2 - A), \\ \forall x \in [0,1]\,, u'(x) \in D((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}), \end{cases}$$

   et la propriété de régularité maximale

$$\begin{cases} u'',\ Bu',\ A_\omega u,\ B^2 u \in C^\theta([0,1]\,;X), \\ (B^2 - A_\omega)u \in C^\theta_{A,B,\omega}([0,1]\,;X). \end{cases}$$

2. $f \in C^\theta([0,1]\,;X)$, $\Lambda_\omega^{-1} d_0 \in D(A_\omega)$, $u_1 \in D(A_\omega)$ *et*

$$\left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} - I\right)(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \Lambda_\omega^{-1} d_0 + (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \left(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} - I\right)^{-1} f(0),$$
$$\left(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right)(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} u_1 + (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} \left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} - I\right)^{-1} f(1),$$
$$B\left(B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} - I\right)^{-1} \left[B; (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right] \Lambda_\omega^{-1} d_0,$$
$$B\left(-B - (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}} - I\right)^{-1} \left[B; (B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}\right] u_1,$$

   appartiennent à $(X, D(B^2 - A_\omega))_{\frac{\theta}{2},\infty}$.

3.6 Exemple

Soit $X = L^2(\mathbb{R})$. On définit les opérateurs L_ω, M_ω et H comme suit

$$\begin{cases} D(L_\omega) = D(M_\omega) = H^2(\mathbb{R})\,, \\ L_\omega \varphi(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \omega^\alpha \varphi(y), \quad M_\omega \varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha \varphi(y), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(H) = H^4(\mathbb{R})\,, \\ H\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y), \end{cases}$$

avec

$$\alpha > 0, \omega > 0,\ a \in C_b^2(\mathbb{R})\,,\ a \neq 0.$$

On va montrer que les opérateurs L_ω, M_ω et H vérifient les hypothèses (3.2.1)∼(3.2.8). D'après l'exemple (2.9) du Chapitre 2, les hypothèses (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.8) sont vérifiées et on a

$$\begin{cases} D(M_\omega L_\omega) = H^4(\mathbb{R}) \\ (M_\omega L_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) + (2a'(y) - 2\omega^\alpha)\varphi''(y) \\ + (a''(y) - \omega^\alpha a(y))\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y)\,,\ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(L_\omega M_\omega) = H^4(\mathbb{R}) \\ (L_\omega M_\omega)\varphi(y) = \varphi^{(4)}(y) + a(y)\varphi^{(3)}(y) - 2\omega^\alpha \varphi''(y) \\ -\omega^\alpha a(y)\varphi'(y) + \omega^{2\alpha}\varphi(y), \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

donc

$$D(L_\omega M_\omega) = D(M_\omega L_\omega) = H^4(\mathbb{R})$$

et d'après la Remarque 3.2.4, on a l'hypothèse (3.2.5) est vérifiée.
Reste à vérifier les hypothèses (3.2.6) et (3.2.7).
- Vérification l'hypothèse (3.2.6) ; pour montrer l'inversibilité de Λ_ω. On a

$$\begin{cases} D(M_\omega - H) = H^2(\mathbb{R}), \\ (M_\omega - H)\varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y) - \varphi^{(4)}(y) = \psi(y). \end{cases}$$

En utilisant la transformation de Fourier, on résout l'équation

$$(M_\omega - H)\varphi(y) = \varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y) - \varphi^{(4)}(y) = \psi(y) \quad \text{où } \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

On va montrer que $M_\omega - H$ est un isomorphisme de $H^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in H^2(\mathbb{R})$ alors

$$(M_\omega - H)\varphi = \varphi'' - \omega^\alpha\varphi - \varphi^{(4)} \in L^2(\mathbb{R}),$$

d'où $M_\omega - H$ est bien défini. Il est fermé à domaine dense. On résout l'équation

$$\varphi''(y) - \omega^\alpha\varphi(y) - \varphi^{(4)}(y) = \psi(y), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}),$$

par la transformation de Fourier on a

$$(2i\pi\xi)^2\,\widehat{\varphi}(\xi) - \omega^\alpha\widehat{\varphi}(\xi) - (2i\pi\xi)^4\,\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi),$$

d'où

$$\widehat{\varphi}(\xi) = -\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 16\pi^4\xi^4},$$

on a bien $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$. D'où

$$\varphi(.) = -\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 16\pi^4\xi^4}\right)(.).$$

Dire que $\varphi \in H^2(\mathbb{R})$ équivaut à montrer que

$$\left(16\pi^4\xi^4 + 1\right)\widehat{\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\varphi})} \in L^2(\mathbb{R}),$$

or

$$\left(16\pi^4\xi^4 + 1\right)\widehat{\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\varphi})}(\xi) = \left(16\pi^4\xi^4 + 1\right)\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 16\pi^4\xi^4} = \frac{\left(16\pi^4\xi^4 + 1\right)\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 16\pi^4\xi^4},$$

et la fonction

$$\xi \mapsto \frac{\left(16\pi^4\xi^4 + 1\right)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 16\pi^4\xi^4},$$

est bornée, d'où le résultat. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) &= -\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{\psi}(\xi)}{4\pi^2\xi^2 + \omega^\alpha + 16\pi^4\xi^4}\right)(y) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi}\ \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 16\pi^4\xi^4\right)} d\xi,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\Lambda_\omega &= (M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H) \\
&= \left(I + e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1}\right)(M_\omega - H)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (L_\omega + H)\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) \\
= \ & L_\omega\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) + H\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right](y) \\
= \ & \int_{\mathbb{R}} \frac{4\pi^2\xi^2 e^{2i\pi y\xi}\ \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 16\pi^4\xi^4\right)} d\xi - a(y)\int_{\mathbb{R}} \frac{2i\pi\xi e^{2i\pi y\xi}\ \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 16\pi^4\xi^4\right)} d\xi \\
& + \omega^\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi y\xi}\ \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 16\pi^4\xi^4\right)} d\xi - \int_{\mathbb{R}} \frac{16\pi^4\xi^4 e^{2i\pi y\xi}\ \widehat{\psi}(\xi)}{\left(\omega^\alpha + 4\pi^2\xi^2 + 16\pi^4\xi^4\right)} d\xi,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\|(L_\omega + H)\left[(M_\omega - H)^{-1}\psi\right]\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + C\omega^\alpha\left\|\widehat{\psi}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= C(1 + \omega^\alpha)\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\|e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H)(M_\omega - H)^{-1}\psi\right\| &\leqslant C(1 + \omega^\alpha)\left\|e^{L_\omega}\right\|\left\|e^{M_\omega}\right\|\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant \frac{C}{\omega^{2\alpha}}(1 + \omega^\alpha)\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Donc, pour ω assez grand, on déduit Λ_ω est inversible.
- Pour l'hypothèse (3.2.7),

$$\forall \xi \in D(L_\omega), \Lambda_\omega^{-1}\xi \in D((L + M)^2), (L_\omega + M_\omega)^2 \Lambda_\omega^{-1}\xi \in (X, D(L))_{\theta,\infty}.$$

On a

$$\begin{aligned}
& D((L_\omega + M_\omega)^3) \\
= \ & \left\{\varphi \in D(L_\omega + M_\omega) \text{ et } (L_\omega + M_\omega)\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)^2) = H^4(\mathbb{R})\right\} \\
= \ & \left\{\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \text{ et } 2\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - 2\omega^\alpha\varphi(y) \in H^4(\mathbb{R})\right\} \\
= \ & H^6(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Si on pose $\Lambda_\omega^{-1}\varphi = \psi$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\varphi &= \Lambda_\omega \psi \\ &= \left[(M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H)\right]\psi.\end{aligned}$$

Notons que

$$\Lambda_\omega^{-1}\varphi \in D(L_\omega) \cap D(M_\omega) \cap D(H) = D(H) = H^4(\mathbb{R}),$$

c'est-à dire

$$\psi \in H^4(\mathbb{R}).$$

Puisque on a $e^{L_\omega}\zeta \in D(L_\omega) = H^2(\mathbb{R})$,
alors

$$\varphi = \left[(M_\omega - H) + e^{L_\omega} e^{M_\omega}(L_\omega + H)\right]\psi \in D(H) = H^4(\mathbb{R}),$$

implique $(M_\omega - H)\psi \in H^2(\mathbb{R})$,
donc

$$\psi'' - \omega^\alpha \psi - \psi^{(4)} \in H^2(\mathbb{R}),$$

d'où,

$$\Lambda_\omega^{-1}\varphi = \psi \in H^6(\mathbb{R}) = D((L_\omega + M_\omega)^3),$$

donc

$$(L_\omega + M_\omega)^2 \Lambda_\omega^{-1}\varphi \in D((L_\omega + M_\omega)) = D(L_\omega) \subset (X, D(L_\omega))_{\theta,\infty},$$

Toutes les hypothèses sont vérifiées, donc on peut appliquer le Théorème 3.4.1 sur le problème concret

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + a(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) \\ -a'(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \dfrac{1}{2}a''(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \omega^\alpha a(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ +2\omega^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \omega^{2\alpha} u(x,y) = f(x,y),\ x \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0,y) = d_0,\ y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) = u_1,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

Lemme 3.6.1 *Soit $\theta \in]0,1[$. Alors, on a d'après [21],*

$$\begin{aligned}(X, D(L_\omega))_{\theta,\infty} &= \left(L^2(\mathbb{R}), H^2(\mathbb{R})\right)_{\theta,\infty} \\ &= B_{2,\infty}^{2(1-\theta)}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Perspectives

On donne ici une liste (non exhaustive) des principales perspectives de recherche qui apparaissent à l'issue de cette thèse :

1. On peut reprendre les mêmes équations dans les cadre commutatif et non commutatif avec des conditions aux limites de type Robin

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), & x \in (0,1)\,, \\ \alpha u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ \beta u'(1) + hu(1) = d_1. \end{cases}$$

   où α et β sont deux constantes données, H et h sont deux opérateurs linéaires sur X. On étudiera l'équation associée avec les opérateurs L_ω et M_ω. On peut même envisager le cas où α et β sont remplacés par des opérateurs linéaires.

2. On peut étudier ces équations sur la droite réelle, dans le cas où A et B sont des opérateurs variables, c'est-à-dire l'équation

$$u''(x) + 2B\,(x)\,u'(x) + A\,(x)\,u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Il est intéressant de noter que pour étudier l'équation associée on pourra introduire les opérateurs L_ω et M_ω, définis par

$$\begin{cases} L_\omega\,(x) := B\,(x) - \left(B^2\,(x) - A\,(x)\right)^{\frac{1}{2}}, \\ M_\omega\,(x) := -B\,(x) - \left(B^2\,(x) - A\,(x)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

3. On peut étudier aussi cette même équation, mais dans un intervalle borné

$$u''(x) + 2B\,(x)\,u'(x) + A\,(x)\,u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1)\,,$$

   avec des conditions de Robin de la forme

$$u'(0) - Hu(0) = d_0,\ u(1) = u_1.$$

Ces études devront être faites dans les deux cadres fonctionnels (fondamentalement différents), $L^p(0,1;X),\ 1 < p < \infty$ et $C^\theta\left([0,1];X\right),\ 0 < \theta < 1$.

Bibliographie

[1] A.V. Balakrishnan : Fractional Powers of Closed Operators and the Semi-groups Generated by them, Pacif. J. Math.10 (1960), 419-437.

[2] J. Bourgain : Somme Remarks on Banach Spaces in which Martingale Differences are Unconditional, Ark. Mat., 21 (1983), 163-168.

[3] D. L. Burkholder : A Geometric Condition that Implies the Existence of Certain Singular Integrals of Banach Space Valued Function, Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Chicago, 1981, Wadsworth, Belmont, CA (1983), 270-286.

[4] P. L. Butzer and H. Berens : Semigroups of Operators and Approximation, Springer-Verlag, (1967).

[5] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri : Sturm-Liouville Problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces, Differential and Integral Equations, volume 21, numbers 9-10 (2008), 981-1000.

[6] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri : Complet Abstract Differential Equations of Elliptic type with General Robin Boundary Conditions, in UMD Spaces,volume 4, number 3, June 2011, pp 523-538.

[7] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri : Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in Hölder Spaces. Applicable Analysis, 2012, Vol. 91, no. 8, pp1453-1475. DOI : 10. 1080/ 00036811. 2011. 635653.

[8] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri : Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in General L_p Sobolev Spaces and Applications. Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS), 2015, vol. 8, no. 3, pp. 56-77.

[9] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and Kh. Ould Melha : New Results on Complete Elliptic Equations with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in non Commutative Case, Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 70-96.

[10] G. Da Prato : Absract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearisation, Proc. Symp. Pure Math. 45(1) (1986), p. 359-370.

[11] G. Da Prato et P. Grisvard : Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975), p. 305-387.

[12] G. Dore and A. Venni : On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators, Mathematische Zeitschrift, 196 (1987), 270-286.

[13] G. Dore : L^p Regularity for Abstract Differential Equation. Functional Analysis and Related Topics, Kyoto 1991, Lect. Notes in Math. Volume 1540, Springer-Verlag, Berlin, 1993, p. 25-38.

[14] N. Dunford and J. T. Schwartz : Linear Operators, Part I, New York, Interscience 1958.

[15] K. J. Engel and R. Nagel : One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Grad. Texts Math. 194, Springer, New York, 2000.

[16] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner : Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in non Commutative Cases, Appl. anal, 91(2012), 1495-1510.

[17] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner : Boundary Value Problem For Elliptic Differential Equations in Non-commutative Cases, Discrete and continuous dynamical systems, Volume 33, Number 11&12, November & December 2013, pp. 4967-4990.

[18] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equation in UMD Space and New Applications, Funkcialaj Ekvacioj, 51 (2008), 165-187.

[19] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : Necessary and Sufficient Conditions for Maximal Regularity in the Study of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces, Disc. Contin. Dyn. Sys. 22(4) (2008), p. 973-987.

[20] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : Complete Abstracte Differential Equation of Elliptic type in UMD spaces, Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006) 193-214.

[21] P. Grisvard : Spazi di trace e applicazioni (Italian), Rend. Mat. (6), 5 (1972), 657-729.

[22] P. Grisvard : Equations Differentielles Abstraites, Ann. Sci. Ecol Norm. Sup. (4) 2(3) (1969). p. 311-395.

[23] D. Guidetti : An Introduction to Maximal Regularity for Parabolic Problems and Interpolation Theory with Application to an Inverse Problem, International Minicourse-Workshop, Interplay Between (C_0)- Semigroups and PDEs : Theory and Applications, Bari/Italy September 22-26, 2003, p. 113-146.

[24] M. Haase : The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods, Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.

[25] T. Kato : Perturbation Theory for Linear Operators, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[26] S. G. Krein : Linear Differential Equations in Banach Spaces, Moscou, 1967 ; English translation, AMS, Providence, 1971.

[27] J. L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 19 (1964), p. 5-68.

[28] J. L. Lions : Théorèmes de trace et d'interpolation, I et II. Annali S.N.S. di Pisa, 13, (1959), 389-403 et 14, (1960), 317-331.

[29] A. Lunardi : Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhaüser, Basel, 1995.

[30] A. Lunardi : Interpolation Theory, Birkhaüser, 1999.

[31] M. Meisner : Etude Unifiée d'Equations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique Régies par des Equations Différentielles à Coefficients Opérateurs dans un Cadre non Commutatif : Applications Concrètes dans les Espaces de Hölder et les Espaces L^p, Thèse de doctorat de l'Université du Havre, 2012.

[32] A. Pazy : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[33] J. Prüss and H. Sohr : On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces, Math. Z., 203 (1990), 429-452.

[34] R. Seeley : Norms and Domains of the Complex Powers $(A_B)^z$, Amer. J. Math. 93 (1971), p. 299-309.

[35] E. Sinestrari : On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Space of Continuous Functions, J. Math. Anal. Appl. 107 (1985), p. 16-66.

[36] H. Tanabe : Equations of evolution, Osaka University, translated from Japanese by N. Mugibayashi and H. Haneda, Kobe university, 1979.

[37] H. Triebel : Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de l'équation différentielle opérationnelle complète de type elliptique, dans le cadre non commutatif, suivante

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

sous les conditions aux limites de type Robin généralisé

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

avec A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach X, $u_1, d_0 \in X$.
L'étude est faite dans deux cadres fonctionnels distincts : cadre $C^\theta([0,1], X)$ avec $0 < \theta < 1$ et cadre $L^p(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$.
On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique du problème (1)-(2).

Mots clés : Equations différentielles abstraites du second ordre de type elliptique, cadre non commutatif, semi-groupes analytiques, régularité maximale, espace UMD, espace de Hölder, espaces d'interpolation.

Abstract

This work is devoted to the study of the following complete abstract differential equations of elliptic type in non-commutative framework,

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{3}$$

with the abstract boundary conditions of Robin's type

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{4}$$

where A, B and H are closed linear operators in a complex Banach space X, u_1, $d_0 \in X$.
The study is performed in two different frameworks : frame $C^\theta([0,1], X)$ with $0 < \theta < 1$ and frame $L^p(0,1;X)$ with $1 < p < \infty$.
We will seek for existence, uniqueness and optimal regularity of the classical solution to (3)-(4).

Keywords : second-order abstract elliptic differential equations, non-commutative case, analytic semi-group, maximal regularity, UMD space, Hölder space, interpolation spaces.