

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université Abdelhamid Ibn-Badis
- Mostaganem
Faculté des Sciences de la Nature
et de la Vie



جامعة عبد الحميد بن باديس
مستغانم
كلية علوم الطبيعة والحياة

Département des Sciences Agronomique

Mémoire de fin d'études

Présenté par :

ABDELAZIZ Khadidja

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN AGRONOME

Spécialité : Aménagement hydro-agricole

Thème

**Modélisation numérique d'un écoulement permanent
dans un sol saturé**

14/10/2026

DEVANT LE JURY

Président :	Mr. BOUALEM. A	Université de Mostaganem
Examinatrice :	Mme. BELHANAFI	Université de Mostaganem
Encadreur :	Mr. TAYEB CHERIF .A	MAA. Université de Mostaganem

Année universitaire : 2025/2026

Dédicace

Je dédie ce mémoire,

À ma très chère mère,

Aucune expression ne saurait traduire toute ma reconnaissance pour ton amour inconditionnel, tes sacrifices, ton soutien et tes prières qui m'ont accompagnée tout au long de mon parcours. Tu as toujours été une source de force, de courage et d'inspiration. Que ce travail soit le témoignage de ma profonde gratitude et de mon immense affection.

À mes trois frères,

Merci pour votre présence, vos encouragements et votre confiance. Votre soutien a été un véritable moteur dans les moments de doute et de difficulté. Je vous souhaite à tous réussite, bonheur et épanouissement.

À toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire,

Je leur adresse mes plus sincères remerciements et ma profonde gratitude.

Remerciements

Avant tout, je rends grâce à Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la santé, la force, le courage et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.

J'exprime mes sincères remerciements à mon encadreur, M. TAYEB CHERIF, ainsi qu'aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce mémoire et de consacrer une partie de leur temps à son examen.

Leurs remarques et suggestions seront très appréciées et contribueront à l'amélioration de ce travail.

Je remercie chaleureusement tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et m'ont transmis leurs connaissances, leur expérience et leur savoir tout au long de mon parcours universitaire.

J'adresse une profonde reconnaissance à ma chère mère, à mes trois frères et à mon cher mari pour leur amour, leur patience, leurs encouragements constants et leur soutien indéfectible. Leur confiance et leur présence ont été une source de motivation précieuse tout au long de mes études et durant la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail et m'ont apporté leur aide, leurs conseils ou leur soutien.

À toutes et à tous, j'adresse mes plus sincères remerciements.

Liste des figures

Figure III. 1 : Modèle bidimensionnel retenu l'écoulement permanent d'un fluide incompressible au sein d'un milieu poreux saturé homogène et isotrope	49
Figure IV.2 : Modèle d'un maillage bidimensionnel utilisé pour la discrétisation d'un domaine par la méthode des différences finies.	58
Figure V.3 : Discrétisation du domaine d'étude par la méthode des différences finies avec conditions aux limites imposées.....	76
Figure VI.4 : La discrétisation du domaine d'étude	80
Figure VI .5 : Distribution des lignes équipotentiels de la charge hydraulique	82
Figure VI.6 : Champ de vitesse et ligne de courant	83
Figure VI .7 : Réseau d'écoulement complet.....	84
Figure VI.8: Lignes équipotentiels du champ de charge hydraulique.....	86
Figure VI.9: Champ de vitesse / vecteurs d'écoulement	87
Figure VI.10: Réseau d'écoulement complet	88

Table des matières

Dédicace	
Remerciements	
Liste des figures	
Résumé	

Introduction Générale

Introduction générale :	10
-------------------------------	----

Chapitre I : Milieux poreux saturés : concepts fondamentaux

Introduction :	15
I.A. Généralités sur les milieux poreux saturés :	16
I.B. Notions fondamentales sur les milieux poreux :	16
I.B.1. Définition et caractéristiques d'un milieu poreux :	16
I.B.2. Classification des milieux poreux :	17
I.C. Saturation et circulation des fluides :	18
I. C.1.Définition d'un milieu poreux saturé:	19
I.C.2. Mécanismes d'écoulement dans les milieux saturés:	20
I.D. Propriétés hydrauliques et hypothèses de modélisation :	21
I.E. Paramètres hydrauliques des milieux poreux:	22
I.E.1. La porosité et ses différents types:	22
I.E.2. La perméabilité et la conductivité hydraulique :	23
I.F. Bases de la modélisation des écoulements:	25
I.F.1. Hypothèses simplificatrices de la modélisation :	25
I.F.2. Représentation du milieu poreux dans les modèles mathématiques:	27

Chapitre II : Théorie de l'écoulement en milieu poreux

Introduction :	30
II.A. Loi de Darcy et description de l'écoulement :	31
II.B. Fondements de la loi de Darcy :	31
II.B.1. Origine expérimentale de la loi de Darcy :	31
II.B.2. Expression mathématique de la loi de Darcy :	32
II.B.3. Interprétation physique de la loi de Darcy :	33
II.B.4 Relation entre vitesse et gradient hydraulique:	33

II.B.5. Rôle de la conductivité hydraulique dans l'écoulement :	34
II.C. Conservation de la masse et équation générale :	35
II.D. Principe de conservation de la masse:	36
II.D.1. Bilan de masse dans un volume élémentaire:	36
II.D.2. Équation de continuité en milieu poreux saturé :	37
II.E. Équation générale de l'écoulement :	38
II.E.1. Formulation en régime permanent :	38
II.F. Analyse qualitative du champ de charge hydraulique	39
II.G. Analyse du champ de vitesses d'écoulement.....	40
II.G.1. Détermination et signification des vecteurs de vitesse	40
II.H. Analyse de sensibilité du modèle	41
II.H.1. Interprétation théorique des comportements observés	41

Chapitre III : Formulation mathématique

Introduction :	44
III.A. Équation gouvernante de l'écoulement en milieu poreux :	45
III.A.1. Formulation en régime permanent :	45
III.A.1.1. Établissement de l'équation différentielle gouvernante en régime permanent	45
III.A.1.2. Signification physique et nature mathématique de l'équation obtenue :	47
III.B. Conditions du problème mathématique	47
III.B.1. Conditions aux limites	47
III.B.1.2. Rôle des conditions aux limites dans la définition du domaine d'étude	50
III.C. Conditions initiales	51

Chapitre IV : Méthodes numériques de résolution

Introduction	54
IV.A. Principe de la discrétisation et approximation numérique	55
IV.A.1. Notions fondamentales de la discrétisation	55
IV.A.2. Maillage du domaine et représentation numérique	56
IV.A.2.1. Découpage du domaine en nœuds et éléments	56
IV.A.2.2. Choix du pas spatial et du pas temporel dans la modélisation numérique	57
IV.B. Méthode des différences finies	57
IV.B.1. Principe de la méthode des différences finies	57
IV.B.1.2. Schémas explicites et implicites de résolution numérique	58
IV.B.2. Application aux écoulements en milieu poreux	59

Chapitre V : Développement du modèle numérique

V.A. Paramètres et structure du modèle numérique.....	62
V.A.1. Paramètres physiques et hydrauliques du modèle	62
V.A.1.2. Influence des paramètres sur le comportement de l'écoulement simulé	66
V.A.2. Paramètres numériques de simulation	67
V.B. Algorithme de résolution et stabilité du modèle	69
V. B.1. Organisation algorithmique générale	69
V. B.1.1. Étapes de construction de l'algorithme de simulation numérique	69
V. B.2. Convergence et stabilité numérique	74
V. B.2.2 Analyse de la stabilité et conditions de fiabilité du modèle	75

Chapitre VI : Analyse théorique des résultats

Introduction :	79
VI.A. La discrétisation du domaine d'étude :	80
VI.A.1. CAS 01: Du domaine possédant des conditions aux limites de Dirichlet :	81
VI.A.2. CAS 02: Du domaine possédant des conditions aux limites mixtes	85
VI.A.3. Interprétation générale :	88
VI . B. Explication de l'index :	89
VI . B. 1. Tableau complet de la charge hydraulique 21 x 21:	90
VI . B. 2. Tableau flux qx maillage 21x21 :	90
VI . B. 3. Tableau flux qy maillage 21x21 :	90
Conclusion générale	92
Bibliographies :	96
Index :	98

Résumé :

Résumé :

Mémoire est consacré au développement d'un modèle numérique bidimensionnel destiné à simuler l'écoulement permanent dans un milieu poreux saturé. La démarche repose d'abord sur les fondements physiques et hydrodynamiques de l'hydrogéologie, en s'appuyant sur les notions de porosité, de perméabilité et de conductivité hydraulique.

Le cadre mathématique est établi en combinant la loi de Darcy et le principe de conservation de la masse, conduisant à l'équation différentielle gouvernante du système. Face à la complexité des solutions analytiques, la méthode des différences finies (MDF) est appliquée pour discrétiser le domaine spatial et transformer les équations en un système algébrique. Enfin, le modèle permet de cartographier la distribution de la charge hydraulique, de calculer les champs de vitesse et de mener une analyse de sensibilité sur l'influence des propriétés hydrauliques du milieu.

Abstract :

This thesis focuses on the development of a two-dimensional numerical model to simulate steady-state flow in saturated porous media. The approach is initially based on the physical and hydrodynamic principles of hydrogeology, focusing on key parameters such as porosity, permeability, and hydraulic conductivity.

The mathematical framework is established by combining Darcy's law and the mass conservation principle, resulting in the governing partial differential equation of the flow. Due to the complexity of analytical solutions, the Finite Difference Method (FDM) is implemented to discretize the spatial domain and convert the differential equations into an algebraic system. Finally, the developed model is used to map the hydraulic head distribution, calculate velocity fields, and perform a sensitivity analysis regarding the influence of the medium's hydraulic properties.

Résumé :

ملخص:

تتمحور هذه المذكرة حول تطوير نموذج عددي ثنائي الأبعاد لمحاكاة التدفق الدائم في الأوساط المسامية المشبعة. تعتمد هذه الدراسة في البداية على الأسس الفيزيائية والهيدوديناميكية لعلم المياه الجوفية، مع التركيز على مفاهيم المسامية، النفاذ الاسترجاعي، والناقلية الهيدروليكية.

يتم صياغة الإطار الرياضي للمشكلة من خلال دمج قانون دارسي مع مبدأ انحفاظ الكتلة، مما يؤدي إلى استنتاج المعادلة التفاضلية الحاكمة للتدفق. ونظرًا لتعقيد الحلول التحليلية، تم تطبيق طريقة الفروق المحدودة لتقسيم المجال المكاني وتحويل المعادلات التفاضلية إلى نظام معادلات جبرية. في الأخير، يسمح النموذج المطور بتمثيل توزيع الشحنة الهيدروليكية، وحساب حقول السرعة، بالإضافة إلى إجراء تحليل حساسية لدراسة تأثير الخصائص الهيدروليكية للوسط على النتائج.

Introduction

Générale

Introduction générale :

L'eau constitue une ressource naturelle indispensable au maintien de la vie, au développement des activités agricoles et au fonctionnement des écosystèmes. Sa disponibilité et sa répartition dans le milieu naturel représentent des enjeux majeurs, particulièrement dans les régions où les ressources hydriques sont limitées. Dans ce contexte, la compréhension des mécanismes de circulation de l'eau dans le sous-sol occupe une place importante dans les domaines de l'hydrogéologie, de l'hydraulique et de l'aménagement hydro-agricole. L'étude des écoulements souterrains permet notamment de mieux comprendre le comportement des nappes aquifères, les échanges d'eau entre les différentes formations géologiques ainsi que les phénomènes liés au drainage et à la gestion des ressources en eau.

Le sol est un milieu complexe constitué de particules solides séparées par des espaces vides appelés pores. Ces espaces peuvent contenir de l'air, de l'eau ou un mélange de plusieurs fluides. Lorsque l'ensemble des pores est entièrement rempli d'eau, le milieu est considéré comme saturé. Dans cette situation, l'eau peut circuler à travers les pores interconnectés sous l'effet des différences de charge hydraulique. La direction et l'intensité de cet écoulement dépendent notamment des propriétés physiques du milieu, telles que la porosité, la perméabilité et la conductivité hydraulique, ainsi que des conditions hydrauliques imposées aux limites du domaine étudié.

La description de ces phénomènes repose sur des lois physiques fondamentales. Parmi celles-ci, la loi de Darcy occupe une place essentielle, car elle établit une relation entre le flux d'eau, la conductivité hydraulique du milieu et le gradient de charge hydraulique. Elle permet ainsi de décrire le mouvement de l'eau dans un milieu poreux saturé, dans les conditions où son application est valable. Cette loi, associée au principe de conservation de la masse exprimé par l'équation de continuité, permet d'établir les équations mathématiques qui gouvernent l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement permanent d'un fluide incompressible à travers un milieu homogène et isotrope, en l'absence de sources ou de puits internes, ces relations conduisent à l'équation de Laplace, qui constitue la base théorique de la présente étude.

L'écoulement permanent se caractérise par le fait que les grandeurs hydrauliques en chaque point du domaine ne varient pas au cours du temps. Cette hypothèse permet de simplifier la description mathématique du phénomène et de concentrer l'analyse sur la répartition spatiale de la charge hydraulique. L'étude de cette répartition est importante, car elle permet de déterminer les gradients hydrauliques et de caractériser la direction générale de circulation de

Introduction générale

l'eau. Elle contribue également à l'interprétation des flux et des débits à travers les différentes limites du domaine étudié.

Cependant, la résolution analytique des équations gouvernantes peut devenir difficile lorsque le problème présente plusieurs conditions aux limites ou lorsque la géométrie du domaine ne permet pas d'obtenir une solution mathématique simple. Pour surmonter ces difficultés, les méthodes numériques constituent des outils efficaces permettant d'obtenir des solutions approchées à partir d'un modèle mathématique. Elles offrent la possibilité de représenter le comportement hydraulique du système en plusieurs points du domaine et de visualiser les résultats sous différentes formes graphiques.

Parmi les méthodes numériques utilisées pour l'étude des écoulements en milieu poreux, la méthode des différences finies présente un intérêt particulier. Son principe consiste à subdiviser le domaine d'étude en un maillage composé de nœuds, puis à remplacer les dérivées de l'équation différentielle par des approximations numériques. Cette opération, appelée discrétisation, permet de transformer l'équation de Laplace en un système d'équations algébriques. La résolution de ce système fournit les valeurs approchées de la charge hydraulique aux différents nœuds du maillage. Les valeurs obtenues peuvent ensuite être exploitées pour représenter le champ de charge hydraulique, déterminer les composantes du flux de Darcy et analyser la configuration générale de l'écoulement.

La définition des conditions aux limites représente également une étape fondamentale dans la formulation du problème. Les conditions de Dirichlet consistent à imposer directement la charge hydraulique sur certaines frontières, tandis que les conditions de Neumann permettent d'imposer le flux hydraulique ou sa composante normale. Ces conditions jouent un rôle déterminant dans la répartition de la charge hydraulique et dans le comportement global de l'écoulement. Leur prise en compte permet d'étudier différentes configurations hydrauliques et de comprendre l'influence des contraintes appliquées aux frontières du domaine.

Dans cette perspective, le présent mémoire porte sur la modélisation numérique d'un écoulement bidimensionnel permanent dans un sol saturé, considéré comme homogène et isotrope. L'étude vise à mettre en œuvre une démarche progressive allant de la compréhension des phénomènes physiques à la formulation mathématique, puis à la résolution numérique du problème. Le modèle est appliqué à un domaine bidimensionnel de dimensions 10×10 m, sur lequel différentes configurations de conditions aux limites sont étudiées. La méthode des différences finies est utilisée pour discrétiser l'équation de Laplace, tandis que le logiciel Octave permet de mettre en œuvre le calcul numérique et d'exploiter les résultats obtenus.

Introduction générale

L'analyse porte principalement sur la distribution de la charge hydraulique dans le domaine étudié et sur la représentation des caractéristiques de l'écoulement. Les lignes équipotentielles permettent d'identifier les zones de même charge hydraulique, tandis que les vecteurs de vitesse et les lignes de courant facilitent la compréhension de la direction et de la configuration de l'écoulement. La comparaison entre les différentes conditions aux limites permet également de mettre en évidence leur influence sur le champ hydraulique calculé.

À travers cette étude, il s'agit de montrer l'intérêt de la modélisation numérique comme outil d'analyse des écoulements souterrains et de souligner l'importance de l'association entre les lois physiques, les équations mathématiques et les méthodes de calcul. Cette démarche présente un intérêt particulier pour les applications liées à la gestion des ressources en eau et à l'aménagement hydro-agricole, où la compréhension des mouvements de l'eau dans le sol constitue un élément essentiel de la prise de décision.

Ainsi, la problématique principale de ce mémoire peut être formulée de la manière suivante : comment la méthode des différences finies permet-elle de modéliser et d'analyser la répartition de la charge hydraulique ainsi que les caractéristiques d'un écoulement permanent bidimensionnel dans un sol saturé, en tenant compte des différentes conditions aux limites ?

Pour répondre à cette problématique, le travail s'appuie sur l'étude des fondements théoriques des milieux poreux saturés, l'établissement des équations gouvernantes, la construction du modèle numérique et l'analyse des résultats de simulation. L'objectif final est de mieux comprendre le comportement hydraulique du milieu étudié et de montrer comment les outils numériques peuvent contribuer à l'étude des écoulements souterrains.

Questions de recherche :

Afin de répondre à cette problématique, les questions suivantes sont examinées :

- Quels sont les principes physiques qui régissent les écoulements dans les milieux poreux saturés ?.
- Comment la loi de Darcy conduit-elle à l'établissement des équations mathématiques du problème ?.
- Comment la méthode des différences finies permet-elle de discrétiser ces équations ?.
- Dans quelle mesure les résultats numériques obtenus représentent-ils correctement le comportement hydraulique du système étudié ?.

Introduction générale

Hypothèses de recherche :

Pour répondre à ces interrogations, les hypothèses suivantes sont retenues :

- Les écoulements dans les milieux poreux saturés peuvent être décrits de manière satisfaisante à partir de la loi de Darcy.
- La méthode des différences finies fournit une approximation numérique fiable de la distribution de la charge hydraulique.
- L'approche bidimensionnelle permet de reproduire convenablement les principales caractéristiques de l'écoulement tout en réduisant les coûts de calcul.

Objectifs de l'étude :

L'objectif principal de ce mémoire est de développer un modèle numérique permettant la simulation des écoulements bidimensionnels dans les milieux poreux saturés.

Plus spécifiquement, il s'agit de :

- Présenter les bases théoriques des écoulements en milieux poreux.
- Établir la formulation mathématique du problème étudié.
- Appliquer la méthode des différences finies à la résolution numérique des équations gouvernantes.
- Analyser et interpréter les résultats obtenus.
- Évaluer l'efficacité de l'approche numérique adoptée.

Méthodologie adoptée :

Pour atteindre les objectifs fixés, une démarche théorique et numérique a été adoptée. La première étape consiste à analyser les fondements physiques et mathématiques des écoulements en milieux poreux saturés. La seconde étape porte sur la discrétisation des équations gouvernantes à l'aide de la méthode des différences finies. Enfin, les résultats numériques obtenus sont analysés afin d'évaluer la pertinence du modèle développé.

Structure du mémoire :

Ce mémoire est structuré en six chapitres principaux. Le premier chapitre introduit les concepts fondamentaux des milieux poreux saturés, tandis que le deuxième aborde la théorie de l'écoulement en milieu poreux. Le troisième chapitre présente la formulation mathématique, et le quatrième expose les méthodes numériques de résolution. Enfin, le cinquième chapitre est consacré au développement du modèle numérique, et le sixième propose une analyse théorique approfondie des résultats obtenus.

Chapitre I :

Milieux poreux saturés : concepts fondamentaux

Introduction :

Les milieux poreux saturés constituent le support de nombreux phénomènes d'écoulement rencontrés dans les domaines de l'hydrogéologie, du génie civil, de l'environnement et de l'ingénierie pétrolière. La compréhension de leur structure et de leurs propriétés hydrauliques est indispensable pour analyser le comportement des fluides qui y circulent. En effet, les caractéristiques physiques du milieu, telles que la porosité, la perméabilité et la conductivité hydraulique, influencent directement la vitesse, la direction et l'intensité de l'écoulement. Ainsi, avant d'aborder la formulation mathématique et la modélisation numérique des écoulements, il est nécessaire de présenter les notions fondamentales relatives aux milieux poreux saturés, leurs principales propriétés hydrauliques ainsi que les hypothèses généralement adoptées pour leur représentation dans les modèles théoriques.¹

¹ -Pierre Morel : Computationnel Hydrauliques, Springer, 2018, p. 88-210.

I.A. Généralités sur les milieux poreux saturés :

Les milieux poreux occupent une place importante dans de nombreux domaines scientifiques et techniques, notamment en hydrogéologie, en génie civil, en ingénierie pétrolière et en environnement. Ils constituent le support principal des écoulements souterrains et des phénomènes de transport de masse observés dans la nature. La compréhension de leurs propriétés physiques et hydrauliques est indispensable pour l'étude des mouvements de fluides dans le sous-sol. Cette section présente les notions fondamentales relatives aux milieux poreux saturés, en mettant l'accent sur leur définition, leurs caractéristiques et les paramètres qui influencent leur comportement hydraulique.

I.B. Notions fondamentales sur les milieux poreux :

L'étude des écoulements dans les milieux poreux nécessite au préalable une connaissance approfondie de la structure et des propriétés de ces milieux. En effet, le comportement d'un fluide au sein d'un matériau poreux dépend directement de l'organisation des pores, de leur taille, de leur répartition ainsi que de leur degré d'interconnexion. Les milieux poreux se rencontrent sous diverses formes dans la nature, allant des sols et des sédiments aux roches aquifères. Leur caractérisation constitue donc une étape essentielle pour la modélisation des écoulements et l'analyse des phénomènes de transfert.

I.B.1. Définition et caractéristiques d'un milieu poreux :

Un milieu poreux est un matériau solide contenant un ensemble de vides ou de pores répartis à l'intérieur de sa structure. Ces pores peuvent être remplis par un ou plusieurs fluides tels que l'eau, l'air ou les hydrocarbures. Lorsque les pores sont interconnectés, ils permettent la circulation des fluides à travers le matériau. Les milieux poreux sont largement présents dans la nature sous forme de sols, de sables, de graviers, de calcaires, de grès ou encore de roches fracturées. Ils interviennent également dans de nombreuses applications industrielles comme les filtres, les matériaux absorbants et les réservoirs pétroliers.

La structure d'un milieu poreux est généralement composée de deux phases distinctes : une phase solide constituée des grains ou de la matrice du matériau et une phase vide correspondant à l'espace poreux. La proportion occupée par les pores par rapport au volume total du milieu constitue une caractéristique essentielle appelée porosité. Toutefois, la simple présence de pores ne garantit pas l'écoulement des fluides. Pour qu'un fluide puisse circuler, les pores doivent être suffisamment connectés entre eux afin de former des chemins continus à travers le milieu.

Les milieux poreux présentent des caractéristiques physiques variées qui influencent directement le comportement hydraulique du système. Parmi ces caractéristiques figurent la taille des pores, leur forme, leur distribution spatiale et leur degré d'interconnexion. Ces paramètres déterminent la capacité du milieu à stocker un fluide et à permettre son déplacement sous l'effet d'un gradient de pression ou de charge hydraulique.

L'étude des milieux poreux repose souvent sur l'hypothèse du milieu continu. Cette approche consiste à considérer le matériau comme homogène à l'échelle macroscopique malgré l'existence d'une structure microscopique complexe. Cette simplification permet de décrire les phénomènes d'écoulement à l'aide d'équations mathématiques applicables à l'ensemble du domaine étudié.

Les caractéristiques fondamentales d'un milieu poreux peuvent être résumées par sa capacité de stockage, sa capacité de transmission des fluides et son comportement hydraulique global. Ces propriétés constituent la base de toute analyse des écoulements en milieux poreux saturés.¹

I.B.2. Classification des milieux poreux :

Les milieux poreux peuvent être classés selon plusieurs critères liés à leur origine, leur structure et leurs propriétés hydrauliques.

Selon leur origine, on distingue les milieux poreux naturels et les milieux poreux artificiels. Les milieux naturels comprennent les sols, les formations géologiques et les aquifères souterrains. Les milieux artificiels regroupent les matériaux fabriqués par l'homme tels que les bétons poreux, les filtres industriels ou certains matériaux utilisés dans les procédés de traitement des eaux.

Selon la nature de leur structure, les milieux poreux peuvent être granulaires ou fissurés. Les milieux granulaires sont constitués d'un assemblage de particules solides entre lesquelles se trouvent les espaces poreux. C'est le cas des sables et des graviers. Les milieux fissurés, quant à eux, sont formés de roches compactes traversées par un réseau de fractures permettant l'écoulement du fluide.

Une autre classification importante repose sur le degré d'homogénéité du milieu. Un milieu homogène possède des propriétés identiques en tout point du domaine étudié. À l'inverse, un milieu hétérogène présente des variations spatiales de ses caractéristiques

¹ -Ahmed Benali : Hydrodynamique des milieux poreux saturés, 2e éd., Dar El Hikma, Alger, 2018, p. 45-210.

hydrauliques. Les milieux naturels sont généralement hétérogènes en raison de la diversité de leur composition géologique.

Les milieux poreux peuvent également être classés selon leur comportement directionnel. Un milieu isotrope possède les mêmes propriétés hydrauliques dans toutes les directions. En revanche, un milieu anisotrope présente des propriétés différentes selon la direction considérée. Cette situation est fréquente dans les formations géologiques stratifiées où la circulation de l'eau est plus facile dans certaines directions que dans d'autres.

Enfin, selon la présence des fluides dans les pores, on distingue les milieux saturés et les milieux non saturés. Dans un milieu saturé, l'ensemble des pores est rempli par un même fluide, généralement l'eau. Dans un milieu non saturé, les pores contiennent simultanément de l'eau et de l'air. Cette distinction est fondamentale car les lois gouvernant l'écoulement diffèrent considérablement entre ces deux situations.

Ainsi, la classification des milieux poreux permet de mieux comprendre leur comportement hydraulique et de choisir les modèles mathématiques les plus adaptés à l'étude des écoulements qui s'y développent.¹

I.C. Saturation et circulation des fluides :

La saturation et la circulation des fluides constituent des notions fondamentales dans l'étude des milieux poreux. Le comportement hydraulique d'un milieu dépend non seulement de sa structure poreuse, mais également de la manière dont les fluides occupent et traversent les espaces vides. Dans les formations géologiques naturelles, les pores peuvent être remplis d'eau, d'air ou d'un mélange de plusieurs fluides. L'état de saturation influence directement les mécanismes d'écoulement, les transferts de masse ainsi que les propriétés hydrauliques du milieu. La compréhension de ces phénomènes est donc essentielle pour l'analyse des écoulements souterrains et pour la modélisation des systèmes hydrogéologiques.

Lorsque tous les pores d'un milieu sont entièrement remplis par un fluide, généralement l'eau, le milieu est qualifié de milieu poreux saturé. Dans cette situation, aucune phase gazeuse n'est présente dans les espaces interstitiels et le fluide peut circuler sous l'action de gradients de pression ou de charge hydraulique. En revanche, lorsque les pores contiennent simultanément de l'eau et de l'air, le milieu est dit non saturé, ce qui engendre des phénomènes plus complexes liés aux forces capillaires et aux interactions entre les différentes phases.

¹ -Jean Dupont : Modélisation numérique des écoulements souterrains, 3e éd., Presses Universitaires de France, Paris, 2017, p. 33-180.

La circulation des fluides dans un milieu poreux résulte principalement de différences d'énergie hydraulique entre deux points du système. Le fluide se déplace naturellement des zones de charge hydraulique élevée vers les zones de charge plus faible. Ce mouvement est influencé par plusieurs facteurs, notamment la perméabilité du milieu, la viscosité du fluide, la porosité et les conditions aux limites imposées au système.

Dans les milieux poreux saturés, l'écoulement est généralement lent et fortement conditionné par la géométrie du réseau poreux. Contrairement aux écoulements observés dans les conduites ou les canaux, le fluide suit des trajectoires complexes à travers les pores interconnectés du matériau. Cette particularité justifie l'utilisation de lois spécifiques, telles que la loi de Darcy, pour décrire le comportement hydraulique du système.

L'étude de la saturation et de la circulation des fluides revêt une importance particulière dans de nombreuses applications pratiques, notamment l'exploitation des nappes aquifères, la gestion des ressources en eau souterraine, la dépollution des sols, le drainage agricole, le stockage géologique du dioxyde de carbone ainsi que l'extraction des hydrocarbures. Elle constitue ainsi une étape essentielle pour la compréhension et la modélisation des phénomènes de transfert dans les milieux poreux.

I. C.1.Définition d'un milieu poreux saturé:

Un milieu poreux saturé est un milieu dont l'ensemble des pores ou des vides est complètement rempli par un fluide, généralement de l'eau. Dans cet état, aucune phase gazeuse n'est présente à l'intérieur des espaces poreux, ce qui signifie que le degré de saturation est égal à 100 %. Cette condition représente une situation particulière fréquemment rencontrée dans les nappes phréatiques, les aquifères profonds et certaines couches géologiques situées sous le niveau de la nappe d'eau souterraine.

La notion de saturation est fondamentale dans l'étude des écoulements en milieux poreux car elle simplifie considérablement la description du phénomène physique. En effet, lorsqu'un seul fluide occupe l'ensemble des pores, les interactions entre différentes phases fluides disparaissent, ce qui permet d'appliquer directement les lois classiques de l'hydraulique souterraine, notamment la loi de Darcy. Cette simplification facilite également la formulation mathématique des problèmes d'écoulement et leur résolution numérique.

Dans un milieu poreux saturé, chaque point du domaine est caractérisé par une charge hydraulique qui représente l'énergie totale du fluide. Cette charge dépend de la pression exercée par l'eau ainsi que de la position du point considéré dans le champ de gravité. Les différences

de charge hydraulique entre deux points créent un gradient hydraulique qui constitue la force motrice de l'écoulement.

La saturation complète du milieu joue également un rôle essentiel dans les phénomènes de stockage et de transmission de l'eau. La quantité d'eau pouvant être contenue dans le milieu dépend directement de sa porosité, tandis que la facilité avec laquelle cette eau peut circuler dépend de la perméabilité et de la conductivité hydraulique du matériau. Ainsi, deux milieux présentant la même porosité peuvent avoir des comportements hydrauliques très différents si leurs structures poreuses ne sont pas identiques.

L'étude des milieux poreux saturés est particulièrement importante dans de nombreux domaines tels que l'exploitation des ressources en eau souterraine, la conception des barrages et des ouvrages hydrauliques, le drainage des terrains agricoles, la protection de l'environnement et l'ingénierie pétrolière. Dans tous ces domaines, la compréhension du comportement hydraulique du milieu constitue une étape indispensable pour prévoir les déplacements du fluide et assurer une gestion efficace des ressources disponibles.¹

I.C.2. Mécanismes d'écoulement dans les milieux saturés:

L'écoulement dans un milieu poreux saturé correspond au déplacement du fluide à travers les espaces poreux interconnectés sous l'action d'une différence d'énergie hydraulique. Contrairement aux écoulements observés dans les conduites ou les canaux ouverts, le fluide ne se déplace pas librement mais doit contourner les particules solides qui constituent la matrice du milieu. Cette interaction permanente entre le fluide et le squelette solide engendre des forces de frottement importantes qui ralentissent considérablement l'écoulement.

Le mécanisme fondamental responsable du mouvement du fluide est le gradient de charge hydraulique. L'eau s'écoule naturellement des zones où la charge hydraulique est élevée vers les zones où elle est plus faible. Ce phénomène est analogue à l'écoulement d'un fluide sous l'effet d'une différence de pression. Plus le gradient hydraulique est important, plus la vitesse d'écoulement tend à augmenter.

À l'échelle microscopique, le fluide suit des trajectoires complexes à travers le réseau des pores. Ces trajectoires dépendent de la géométrie interne du milieu, de la taille des pores et de leur degré de connexion. Toutefois, à l'échelle macroscopique utilisée dans les études d'ingénierie, il est possible de représenter ce mouvement par une vitesse moyenne appelée

¹- Mohamed Khelifi : Écoulement en milieux poreux, Revue hydraulique, vol. 12, n°2, 2019, p. 55-78.

vitesse de Darcy. Cette approche permet de décrire le comportement global de l'écoulement sans analyser individuellement chaque port.

Les mécanismes d'écoulement sont fortement influencés par les propriétés hydrauliques du milieu. Une porosité élevée favorise généralement le stockage du fluide, tandis qu'une forte perméabilité facilite sa circulation. À l'inverse, les matériaux très compacts ou présentant des pores peu connectés offrent une résistance importante à l'écoulement. Ainsi, un sable grossier permet généralement un écoulement plus rapide qu'une argile dont les pores sont extrêmement fins.

Selon les conditions hydrauliques, l'écoulement peut être permanent ou transitoire. Dans un régime permanent, les paramètres hydrauliques restent constants au cours du temps et les débits entrant et sortant du système sont équilibrés. En régime transitoire, les caractéristiques de l'écoulement évoluent avec le temps en raison de variations des conditions aux limites, des prélèvements d'eau ou des phénomènes de recharge.

La compréhension des mécanismes d'écoulement dans les milieux saturés constitue le fondement de la modélisation mathématique des écoulements souterrains. Elle permet d'établir les relations entre les propriétés physiques du milieu et le comportement du fluide, ouvrant ainsi la voie à l'élaboration des équations gouvernantes utilisées dans les chapitres suivants.¹

I.D. Propriétés hydrauliques et hypothèses de modélisation :

L'étude des écoulements dans les milieux poreux saturés repose sur la connaissance approfondie des propriétés hydrauliques qui gouvernent le mouvement des fluides à travers les pores. Ces propriétés traduisent la capacité du milieu à stocker, transmettre et distribuer l'eau sous l'effet des forces hydrauliques. Leur détermination constitue une étape essentielle dans la compréhension des phénomènes d'écoulement et dans l'élaboration des modèles mathématiques destinés à leur simulation.

Par ailleurs, la modélisation des écoulements nécessite l'adoption d'un ensemble d'hypothèses simplificatrices permettant de représenter les phénomènes physiques réels de manière rigoureuse tout en conservant une complexité raisonnable. Ces hypothèses facilitent l'établissement des équations gouvernantes et leur résolution numérique. Cette section est ainsi consacrée à la présentation des principaux paramètres hydrauliques caractérisant les milieux poreux ainsi qu'aux hypothèses fondamentales retenues dans la modélisation des écoulements souterrains.

¹ -Paul Martin : Groundwater Flow Theory, Springer, Berlin, 2016, p. 101-250.

I.E. Paramètres hydrauliques des milieux poreux:

Le comportement hydraulique d'un milieu poreux dépend principalement de certaines propriétés physiques qui contrôlent les mécanismes de stockage et de circulation des fluides. Ces paramètres permettent de quantifier les interactions entre le fluide et la matrice solide du milieu et jouent un rôle déterminant dans la description des écoulements souterrains. Leur connaissance est indispensable pour l'application des lois fondamentales de l'hydraulique souterraine, notamment la loi de Darcy, ainsi que pour la mise en œuvre des modèles numériques de simulation.

Les paramètres hydrauliques constituent également les données de base utilisées pour caractériser les aquifères, évaluer leur potentiel d'exploitation et prédire leur comportement face aux sollicitations naturelles ou anthropiques. Parmi les propriétés les plus importantes figurent la porosité, la conductivité hydraulique, la perméabilité intrinsèque, la transmissivité et le coefficient d'emmagasinement. Chacun de ces paramètres apporte des informations spécifiques sur la capacité du milieu à contenir et à transmettre les fluides.

L'analyse de ces propriétés permet ainsi de mieux comprendre les mécanismes régissant les écoulements dans les milieux poreux saturés et de fournir les bases nécessaires à la formulation mathématique des problèmes hydrogéologiques étudiés dans ce mémoire.

I.E.1. La porosité et ses différents types:

La porosité constitue l'une des propriétés fondamentales des milieux poreux. Elle représente la capacité d'un matériau à contenir un fluide dans les espaces vides présents entre les particules solides qui le composent. D'un point de vue physique, la porosité correspond au rapport entre le volume des pores et le volume total du milieu. Elle est généralement exprimée sous forme de pourcentage ou de fraction décimale.

La porosité joue un rôle essentiel dans les phénomènes d'écoulement car elle détermine la quantité maximale de fluide pouvant être stockée à l'intérieur du milieu. Plus la porosité est élevée, plus le volume disponible pour le stockage du fluide est important. Toutefois, une porosité élevée n'implique pas nécessairement une circulation facile du fluide. En effet, la capacité d'écoulement dépend également du degré d'interconnexion des pores et de leur géométrie interne.

La porosité est influencée par plusieurs facteurs tels que la taille des grains, leur forme, leur arrangement spatial, leur degré de compaction ainsi que les phénomènes géologiques ayant affecté le matériau au cours du temps. Les matériaux grossiers comme les graviers et les sables

présentent généralement une porosité importante, tandis que les roches compactes possèdent souvent une porosité plus faible.

On distingue plusieurs types de porosité selon la nature des espaces vides présents dans le matériau.

La porosité totale représente l'ensemble du volume occupé par les pores, qu'ils soient connectés ou non. Elle donne une indication sur la capacité globale de stockage du milieu mais ne renseigne pas directement sur sa capacité à transmettre un fluide.

La porosité efficace correspond uniquement à la partie des pores interconnectés participant réellement à l'écoulement. Cette notion est particulièrement importante dans les études hydrauliques car seuls les pores connectés permettent le déplacement du fluide à travers le milieu.

La porosité primaire est celle qui se forme lors de la création du matériau. Elle résulte directement de l'arrangement des grains au moment de leur dépôt ou de leur formation géologique. Elle est fréquente dans les sables, les graviers et certaines roches sédimentaires.

La porosité secondaire apparaît après la formation du matériau sous l'effet de phénomènes géologiques tels que la dissolution chimique, la fracturation ou l'altération des roches. Ce type de porosité est particulièrement important dans les calcaires karstiques et les formations rocheuses fracturées.

La connaissance de la porosité est indispensable pour l'évaluation des ressources en eau souterraine, la modélisation des écoulements et l'analyse des capacités de stockage des aquifères. Elle constitue l'un des paramètres les plus utilisés dans les études hydrogéologiques et environnementales.¹

I.E.2. La perméabilité et la conductivité hydraulique :

La perméabilité est une propriété physique qui caractérise l'aptitude d'un milieu poreux à permettre le passage d'un fluide à travers son réseau de pores. Contrairement à la porosité qui mesure la capacité de stockage, la perméabilité décrit la capacité de transmission du fluide. Elle dépend principalement de la taille des pores, de leur forme, de leur continuité et de leur degré d'interconnexion.

¹- Samir Boudjemaa : Méthodes numériques appliquées à l'hydraulique, Office des Publications Universitaires, Alger, 2020, p. 66-144.

Un milieu peut présenter une porosité élevée tout en possédant une faible perméabilité si les pores ne communiquent pas efficacement entre eux. Inversement, un matériau ayant une porosité relativement faible peut permettre un écoulement important lorsque ses pores sont largement connectés. Ainsi, la perméabilité constitue un paramètre essentiel pour comprendre la dynamique des écoulements souterrains.

La perméabilité intrinsèque est une propriété propre au matériau poreux. Elle dépend uniquement de la structure du milieu et reste indépendante de la nature du fluide qui circule à travers celui-ci. Elle permet d'évaluer la résistance offerte par le milieu au déplacement du fluide.

Dans les applications hydrauliques, on utilise fréquemment la conductivité hydraulique, qui représente la facilité avec laquelle l'eau peut circuler dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient hydraulique. Contrairement à la perméabilité intrinsèque, la conductivité hydraulique dépend à la fois des caractéristiques du milieu et des propriétés physiques du fluide telles que sa viscosité et sa masse volumique.

La conductivité hydraulique constitue un paramètre central dans la loi de Darcy. Plus sa valeur est élevée, plus l'écoulement est rapide pour un même gradient hydraulique. Les graviers possèdent généralement des conductivités hydrauliques très importantes alors que les argiles présentent des valeurs extrêmement faibles en raison de la finesse de leurs pores.

Plusieurs facteurs influencent la perméabilité et la conductivité hydraulique. Parmi les plus importants figurent la taille des particules, la distribution granulométrique, le degré de compaction, la présence de fractures, la température du fluide ainsi que la composition minéralogique du milieu.

Dans les milieux naturels, ces propriétés peuvent varier considérablement d'une zone à une autre. Cette variabilité est à l'origine de l'hétérogénéité hydraulique observée dans les aquifères et constitue l'un des principaux défis de la modélisation des écoulements en milieu poreux.

La détermination précise de la perméabilité et de la conductivité hydraulique est indispensable pour la gestion des ressources en eau, la conception des ouvrages hydrauliques, l'étude des phénomènes de drainage et la simulation numérique des écoulements souterrains. Ces paramètres jouent un rôle fondamental dans l'ensemble des modèles mathématiques décrivant le comportement hydraulique des milieux poreux saturés.¹

¹ Amina Ziani : Étude des aquifères saturés, Thèse de doctorat, Université d'Oran, 2021, p. 1-220.

I.F. Bases de la modélisation des écoulements:

La modélisation des écoulements constitue un outil fondamental pour l'analyse et la compréhension des phénomènes hydrauliques se produisant dans les milieux poreux saturés. Face à la complexité des systèmes naturels, il est souvent difficile d'observer directement l'ensemble des mécanismes qui gouvernent le mouvement des fluides dans le sous-sol. La modélisation permet alors de représenter ces phénomènes à l'aide de relations mathématiques fondées sur les lois physiques fondamentales, offrant ainsi un cadre rigoureux pour leur étude et leur prévision.

L'objectif principal de cette démarche est de décrire quantitativement le comportement de l'écoulement en tenant compte des caractéristiques du milieu poreux, des propriétés du fluide et des conditions imposées aux limites du domaine étudié. Les modèles développés permettent d'évaluer la distribution des charges hydrauliques, d'estimer les débits d'écoulement et d'analyser l'influence des différents paramètres hydrauliques sur le fonctionnement du système.

Dans le cas des milieux poreux saturés, la modélisation repose essentiellement sur les principes de conservation de la masse ainsi que sur la loi de Darcy, qui constitue la relation fondamentale décrivant le mouvement de l'eau dans les formations poreuses. L'association de ces principes conduit à l'établissement d'équations différentielles capables de représenter les écoulements souterrains de manière cohérente et scientifiquement fondée.

Cependant, afin de rendre les problèmes étudiés accessibles à l'analyse et à la résolution numérique, certaines hypothèses simplificatrices sont généralement adoptées. Ces hypothèses concernent notamment la nature du fluide, les propriétés du milieu poreux et les caractéristiques de l'écoulement. Elles permettent de construire un modèle mathématique adapté tout en conservant une représentation suffisamment fidèle de la réalité physique.

Ainsi, les bases de la modélisation des écoulements constituent une étape essentielle dans l'élaboration des modèles mathématiques et numériques utilisés pour la simulation des phénomènes hydrauliques en milieux poreux saturés. Elles fournissent le cadre théorique nécessaire à la compréhension et à l'interprétation des résultats obtenus lors des études de simulation.

I.F.1. Hypothèses simplificatrices de la modélisation :

L'étude des écoulements en milieu poreux repose sur des phénomènes physiques complexes faisant intervenir de nombreux paramètres liés à la structure du milieu, aux propriétés du fluide et aux interactions entre les différentes phases présentes. Dans les

conditions réelles, les milieux poreux naturels présentent souvent une grande hétérogénéité spatiale, des géométries irrégulières ainsi que des variations temporelles des paramètres hydrauliques. Face à cette complexité, il devient difficile d'établir un modèle mathématique directement applicable sans introduire certaines hypothèses simplificatrices.

Les hypothèses simplificatrices ont pour objectif de représenter la réalité physique de manière suffisamment précise tout en conservant une formulation mathématique exploitable. Elles permettent de réduire le nombre de variables intervenant dans le problème et de faciliter la résolution analytique ou numérique des équations gouvernantes.

L'une des hypothèses les plus couramment adoptées consiste à considérer le milieu poreux comme un milieu continu. Bien que le matériau soit constitué de grains solides séparés par des pores microscopiques, il est traité à l'échelle macroscopique comme un domaine homogène dans lequel les propriétés hydrauliques sont définies en tout point. Cette hypothèse évite l'étude détaillée de chaque pore individuel et permet l'utilisation des équations de la mécanique des milieux continus.¹

Une autre hypothèse fondamentale concerne la saturation complète du milieu. On suppose que tous les pores sont entièrement remplis par un seul fluide, généralement l'eau. Cette condition élimine les phénomènes complexes liés à la coexistence de plusieurs phases fluides, tels que les effets de capillarité ou les interfaces eau-air.

Dans de nombreuses études théoriques, le fluide est également considéré comme incompressible. Cela signifie que sa masse volumique reste constante pendant l'écoulement. Cette hypothèse est parfaitement adaptée à l'eau dans les conditions ordinaires et simplifie considérablement l'équation de conservation de la masse.

La modélisation suppose souvent que les propriétés du milieu, telles que la porosité et la perméabilité, restent constantes dans le temps. Cette hypothèse permet de concentrer l'analyse sur les mécanismes d'écoulement sans tenir compte des transformations éventuelles de la structure du matériau.

Il est également fréquent de supposer que l'écoulement est laminaire. Dans les milieux poreux, les vitesses de déplacement du fluide sont généralement faibles et les forces visqueuses dominant largement les forces d'inertie. Cette condition justifie l'application de la loi de Darcy qui constitue la base de la plupart des modèles hydrauliques.

¹ -Rachid Mekki : Darcy et ses applications modernes, Revue Sciences et Techniques, vol. 8, 2018, p. 90-112.

Enfin, certaines études considèrent le milieu comme homogène et isotrope. L'homogénéité implique que les propriétés hydrauliques sont identiques en tout point du domaine étudié, tandis que l'isotropie signifie qu'elles sont indépendantes de la direction. Bien que ces hypothèses soient rarement vérifiées de manière stricte dans les milieux naturels, elles constituent une approximation utile pour l'analyse théorique des phénomènes d'écoulement.

Ainsi, les hypothèses simplificatrices jouent un rôle essentiel dans la construction des modèles mathématiques. Elles permettent d'établir un cadre théorique cohérent tout en conservant les caractéristiques physiques les plus importantes du phénomène étudié.¹

I.F.2. Représentation du milieu poreux dans les modèles mathématiques:

La représentation mathématique d'un milieu poreux constitue une étape fondamentale dans la modélisation des écoulements souterrains. Elle consiste à traduire les caractéristiques physiques du milieu en paramètres et en équations capables de décrire quantitativement le comportement du fluide à l'intérieur du domaine étudié.

Dans la réalité, un milieu poreux possède une structure interne extrêmement complexe composée d'un très grand nombre de pores de tailles et de formes variées. Une description détaillée de chaque pore serait pratiquement impossible à réaliser pour des domaines de grande dimension. Pour cette raison, les modèles mathématiques adoptent généralement une approche macroscopique fondée sur la théorie des milieux continus.

Selon cette approche, le milieu poreux est représenté par un ensemble de paramètres moyens définis à l'échelle d'un volume représentatif élémentaire. Ce volume est suffisamment grand pour contenir un nombre important de pores tout en restant petit par rapport aux dimensions globales du domaine étudié. Les propriétés hydrauliques moyennes obtenues à cette échelle sont alors utilisées pour décrire le comportement général du système.

Parmi les paramètres les plus importants figurent la porosité, qui représente la capacité de stockage du fluide, et la conductivité hydraulique, qui traduit la facilité avec laquelle le fluide peut circuler dans le milieu. Ces paramètres constituent les principales variables physiques intégrées dans les équations gouvernantes de l'écoulement.

La représentation mathématique repose également sur la notion de charge hydraulique. Cette grandeur exprime l'énergie totale du fluide en un point donné et constitue la variable principale recherchée dans la plupart des problèmes d'écoulement en milieu poreux saturé. La

¹ -Luc Bernard : Numerical Methods in Porous Media, Wiley, New York, 2015, p. 120-300.

distribution spatiale de la charge hydraulique permet ensuite de déterminer les gradients hydrauliques et les vitesses d'écoulement.

Les modèles mathématiques utilisent généralement des équations différentielles aux dérivées partielles pour représenter les variations de la charge hydraulique dans l'espace et dans le temps. Ces équations sont obtenues à partir de la combinaison de la loi de Darcy et du principe de conservation de la masse. Elles décrivent l'évolution du système sous l'effet des conditions aux limites et des propriétés hydrauliques du milieu.

Selon les objectifs de l'étude, le milieu poreux peut être représenté comme homogène ou hétérogène, isotrope ou anisotrope. Dans les modèles les plus simples, les propriétés hydrauliques sont considérées constantes dans tout le domaine. Dans les modèles plus avancés, elles peuvent varier d'un point à un autre afin de reproduire plus fidèlement les caractéristiques des formations naturelles.

La représentation mathématique constitue ainsi le lien entre les phénomènes physiques observés dans le milieu poreux et les outils de calcul utilisés pour leur analyse. Elle permet de transformer un problème réel complexe en un système d'équations susceptible d'être résolu par des méthodes analytiques ou numériques. Cette étape représente le fondement de toute démarche de simulation et d'interprétation des écoulements en milieu poreux saturé.¹

¹- Karim Haddad : Simulation des écoulements bidimensionnels, ENP Alger, 2019, p. 77-190.

Chapitre II :

Théorie de l'écoulement en milieu poreux

Introduction :

Le chapitre II est consacré à l'étude théorique des mécanismes fondamentaux qui gouvernent l'écoulement des fluides dans les milieux poreux saturés. Il constitue une étape essentielle dans la compréhension du comportement hydraulique, car il permet de relier les phénomènes physiques observés aux lois mathématiques qui les décrivent. Ce chapitre repose principalement sur deux principes fondamentaux : la loi de Darcy, qui décrit la relation entre la vitesse d'écoulement et le gradient de charge hydraulique, et le principe de conservation de la masse, qui exprime l'équilibre des flux dans un volume élémentaire. À partir de ces deux bases, il est possible de formuler l'équation générale de l'écoulement en milieu poreux saturé, qui constitue l'outil central de la modélisation mathématique et numérique développée dans ce travail.¹

¹- Youssef Belkacem : Transport en milieux poreux, Revue Algérienne de Physique, vol. 5, 2020, p. 23-58.

II.A. Loi de Darcy et description de l'écoulement :

La compréhension des écoulements dans les milieux poreux saturés repose essentiellement sur l'identification des lois physiques qui gouvernent le mouvement des fluides à travers les pores du milieu. Parmi ces lois, la loi de Darcy occupe une place centrale puisqu'elle constitue le fondement de l'hydraulique souterraine moderne. Établie à partir d'observations expérimentales, cette loi permet de relier le débit d'écoulement aux propriétés hydrauliques du milieu et au gradient de charge qui provoque le mouvement du fluide. Son utilisation a largement contribué au développement des modèles mathématiques et numériques destinés à l'étude des écoulements souterrains. Dans cette section, nous présentons les principes fondamentaux de la loi de Darcy ainsi que les notions essentielles permettant de décrire le comportement de l'écoulement dans les milieux poreux saturés, en mettant en évidence les paramètres physiques qui influencent la dynamique du fluide et les conditions nécessaires à l'application de cette loi.

II.B. Fondements de la loi de Darcy :

La loi de Darcy constitue l'un des principes fondamentaux de l'hydraulique des milieux poreux et représente la base de la modélisation des écoulements souterrains. Formulée au milieu du XIX^e siècle par l'ingénieur français Henry Darcy, à la suite de ses expériences sur l'écoulement de l'eau à travers des colonnes de sable, cette loi a permis d'établir une relation quantitative entre le débit d'un fluide et les caractéristiques hydrauliques du milieu traversé. Son importance réside dans sa capacité à décrire de manière simple et rigoureuse le comportement des écoulements en milieu poreux saturé, tout en tenant compte des propriétés physiques du fluide et de la structure du matériau. Les fondements de cette loi reposent sur l'observation que le mouvement du fluide est principalement gouverné par les différences de charge hydraulique existant au sein du milieu. La compréhension de ces principes est indispensable pour l'établissement des équations gouvernantes des écoulements et pour le développement des méthodes de simulation utilisées en hydrogéologie et en ingénierie hydraulique.

II.B.1. Origine expérimentale de la loi de Darcy :

La loi de Darcy tire son origine des travaux expérimentaux réalisés par Henry Darcy en 1856 lors de ses études sur l'écoulement de l'eau à travers des colonnes de sable. Dans le cadre de ses recherches sur l'alimentation en eau potable de la ville de Dijon, Darcy a mis en place un dispositif expérimental permettant d'analyser le comportement de l'eau traversant un milieu

granulaire saturé. Ce dispositif consistait essentiellement en une colonne remplie de sable à travers laquelle l'eau s'écoulait sous l'effet d'une différence de niveau entre l'entrée et la sortie.

Les observations de Darcy ont permis de mettre en évidence une relation simple et fondamentale entre le débit d'écoulement, la différence de charge hydraulique et la longueur du milieu traversé. Il a ainsi constaté que le débit est proportionnel à la section de l'écoulement et à la différence de charge, et inversement proportionnel à la longueur du matériau. Cette relation expérimentale constitue la base de la loi de Darcy.

Cette découverte est d'une importance majeure car elle a permis de décrire pour la première fois de manière quantitative le comportement de l'écoulement dans les milieux poreux. Elle a également ouvert la voie au développement de l'hydrogéologie moderne et de la mécanique des fluides en milieu poreux. Bien que la loi de Darcy soit initialement empirique, elle a été confirmée par de nombreuses études théoriques et expérimentales ultérieures et reste aujourd'hui un pilier fondamental dans la modélisation des écoulements souterrains.¹

II.B.2. Expression mathématique de la loi de Darcy :

La loi de Darcy peut être exprimée mathématiquement sous une forme vectorielle qui relie la vitesse d'écoulement à la variation de la charge hydraulique dans le milieu poreux. Elle s'écrit généralement sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{v} = -K\nabla h}$$

Où $\mathbf{v}$ représente la vitesse apparente ou vitesse de Darcy, K est la conductivité hydraulique du milieu, et ∇h désigne le gradient de la charge hydraulique. Le signe négatif indique que l'écoulement se fait dans le sens décroissant de la charge hydraulique, c'est-à-dire des zones de forte énergie vers les zones de faible énergie.

Cette relation montre que la vitesse d'écoulement est directement proportionnelle à la conductivité hydraulique du milieu, ce qui signifie que plus le milieu est perméable, plus le fluide circule facilement. Elle dépend également du gradient hydraulique, qui représente la force motrice de l'écoulement.

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel, la loi de Darcy peut être simplifiée sous la forme scalaire :

¹- Fatima Zahra Ait Ali : Modélisation des aquifères, Thèse, Université de Tlemcen, 2022, p. 10-240.

$$v = -K(dh/dx)$$

Où dh/dx représente la variation de la charge hydraulique selon une direction donnée. Cette expression est largement utilisée dans l'analyse des écoulements simples et constitue la base de nombreuses formulations plus complexes en deux ou trois dimensions.

Ainsi, la loi de Darcy établit une relation fondamentale entre les propriétés hydrauliques du milieu poreux et le comportement du fluide, ce qui en fait un outil essentiel pour la modélisation mathématique des écoulements en milieux saturés.¹

II.B.3. Interprétation physique de la loi de Darcy :

L'interprétation physique de la loi de Darcy permet de mieux comprendre la signification réelle des relations mathématiques qui décrivent les écoulements en milieux poreux. Au-delà de sa formulation expérimentale, cette loi traduit un comportement hydraulique fondamental selon lequel le déplacement d'un fluide à travers un milieu poreux est directement proportionnel au gradient de charge hydraulique et dépend des propriétés intrinsèques du milieu, notamment sa perméabilité. Ainsi, la loi de Darcy peut être interprétée comme l'expression d'un équilibre entre les forces motrices, représentées par la différence de pression ou de charge hydraulique, et les forces de résistance liées à la structure du milieu poreux et à la viscosité du fluide. Cette interprétation met en évidence le caractère diffusif de l'écoulement souterrain, où le fluide se déplace lentement à travers un réseau complexe de pores interconnectés. La compréhension de cette signification physique est essentielle pour justifier les hypothèses de modélisation et pour établir les équations mathématiques utilisées dans l'étude des écoulements en milieu poreux saturé.

II.B.4 Relation entre vitesse et gradient hydraulique:

La relation entre la vitesse d'écoulement et le gradient hydraulique constitue un principe fondamental de la mécanique des milieux poreux saturés. Elle découle directement de la loi de Darcy et permet de décrire, à l'échelle macroscopique, le mouvement d'un fluide à travers un réseau poreux complexe. Le gradient hydraulique représente la variation spatiale de la charge hydraulique, c'est-à-dire la perte d'énergie par unité de longueur dans le milieu. Cette différence d'énergie constitue la force motrice principale qui engendre l'écoulement de l'eau souterraine.

¹ -Antoine Leclerc : Finité Différence Methods, Elsevier, 2016, p. 130-270.

D'un point de vue physique, l'écoulement se produit toujours des zones à forte charge hydraulique vers les zones à faible charge hydraulique. La vitesse d'écoulement est donc directement gouvernée par l'intensité de ce gradient. Ainsi, plus la variation de la charge hydraulique est importante sur une distance donnée, plus le fluide est accéléré à travers les pores du milieu. À l'inverse, lorsque le gradient devient faible, le mouvement du fluide ralentit progressivement jusqu'à tendre vers une situation d'équilibre hydraulique.

Cette relation met en évidence le caractère dissipatif de l'écoulement en milieu poreux. Contrairement aux écoulements en conduites où les effets inertiels peuvent être significatifs, le mouvement dans les milieux poreux est dominé par les forces visqueuses et les frottements internes entre le fluide et la matrice solide. Ces résistances entraînent une dissipation continue de l'énergie mécanique, ce qui explique pourquoi la vitesse reste proportionnelle au gradient hydraulique et ne dépend pas de l'inertie du fluide dans le cadre de la loi de Darcy.

Le gradient hydraulique peut ainsi être interprété comme une mesure de l'énergie disponible pour vaincre les résistances internes du milieu. Cette énergie est progressivement dissipée sous forme de pertes de charge dues aux interactions entre le fluide et les parois des pores. Cette interprétation permet de comprendre la nature linéaire de la relation entre vitesse et gradient hydraulique dans les conditions d'écoulement laminaire.¹

II.B.5. Rôle de la conductivité hydraulique dans l'écoulement :

La conductivité hydraulique constitue un paramètre essentiel dans la description des écoulements en milieu poreux saturé. Elle représente la capacité du milieu à transmettre un fluide sous l'effet d'un gradient hydraulique donné. Ce paramètre intègre à la fois les propriétés intrinsèques du matériau poreux, telles que la taille des pores, leur connectivité et leur tortuosité, ainsi que les propriétés du fluide, notamment sa viscosité et sa masse volumique.

Dans la loi de Darcy, la conductivité hydraulique agit comme un coefficient de proportionnalité entre la vitesse d'écoulement et le gradient hydraulique. Elle contrôle donc directement l'intensité de l'écoulement pour une même différence de charge hydraulique. Un milieu à forte conductivité hydraulique permet un transfert rapide du fluide, tandis qu'un milieu à faible conductivité hydraulique oppose une forte résistance à l'écoulement.

¹ -Nadia Bensalem : Analyse numérique des fluides, Revue Mathématique Appliquée, vol. 14, 2021, p. 40-95.

Sur le plan physique, la conductivité hydraulique traduit la facilité avec laquelle l'énergie hydraulique est transmise à travers le milieu poreux. Plus cette valeur est élevée, moins le fluide perd d'énergie lors de son déplacement, ce qui se traduit par des vitesses d'écoulement plus importantes. À l'inverse, une faible conductivité hydraulique implique une dissipation énergétique plus forte et donc un ralentissement du mouvement du fluide.

Dans les milieux naturels, la conductivité hydraulique est rarement uniforme. Elle varie en fonction de la lithologie, de la structure géologique et du degré de fracturation du milieu. Cette hétérogénéité entraîne des variations locales de la vitesse d'écoulement et peut provoquer des phénomènes de concentration des flux dans certaines zones plus perméables. Cette réalité rend la modélisation mathématique plus complexe et justifie souvent l'utilisation de méthodes numériques pour simuler correctement le comportement hydraulique du système.

Ainsi, la relation entre la vitesse d'écoulement, le gradient hydraulique et la conductivité hydraulique constitue la base fondamentale de la compréhension des écoulements en milieu poreux saturé et représente le point de départ de toute analyse hydraulique avancée.¹

II.C. Conservation de la masse et équation générale :

L'étude des écoulements en milieux poreux saturés ne peut être complète sans l'application du principe fondamental de conservation de la masse, qui constitue l'un des piliers de la mécanique des fluides. Ce principe stipule que la masse de fluide entrant dans un volume élémentaire du milieu doit être égale à la masse sortante, en tenant compte éventuellement des variations internes dues à la compressibilité du fluide ou du milieu. Dans le contexte des milieux poreux, cette loi permet de décrire de manière rigoureuse l'évolution spatiale et temporelle de l'écoulement souterrain.

L'association du principe de conservation de la masse avec la loi de Darcy conduit à l'établissement de l'équation générale des écoulements en milieu poreux saturé. Cette équation, généralement sous forme différentielle, constitue l'outil mathématique principal permettant de modéliser la distribution de la charge hydraulique dans un domaine donné. Elle prend en compte les propriétés hydrauliques du milieu ainsi que les conditions physiques imposées au système.

Ainsi, cette section vise à présenter les fondements du principe de conservation de la masse et à développer progressivement l'équation générale régissant les écoulements

¹- Omar Farhat : Groundwater Modelling Techniques, Springer, 2019, p. 110-260.

souterrains, qui servira de base à la modélisation mathématique et numérique du problème étudié dans ce mémoire.

II.D. Principe de conservation de la masse:

Le principe de conservation de la masse constitue une loi fondamentale en mécanique des fluides et représente un point de départ essentiel dans l'étude des écoulements en milieux poreux saturés. Ce principe repose sur l'idée selon laquelle la masse de fluide contenue dans un volume de contrôle ne peut être ni créée ni détruite, mais seulement transformée ou transportée à travers les frontières du système. Ainsi, toute variation de masse à l'intérieur d'un élément du milieu poreux doit être compensée par un flux entrant ou sortant.

Dans le contexte des milieux poreux, ce principe permet de décrire de manière rigoureuse le comportement des écoulements souterrains en tenant compte des échanges de fluide entre les différentes zones du domaine étudié. Il constitue la base de l'établissement des équations de continuité, qui, combinées à la loi de Darcy, conduisent à la formulation des équations gouvernantes de l'écoulement.

L'application du principe de conservation de la masse est donc indispensable pour comprendre l'évolution spatiale et temporelle des charges hydrauliques et pour garantir la cohérence physique des modèles mathématiques utilisés en hydrogéologie et en ingénierie des milieux poreux.

II.D.1. Bilan de masse dans un volume élémentaire:

Le bilan de masse dans un volume élémentaire constitue une étape fondamentale dans la formulation mathématique des écoulements en milieu poreux saturé. Il repose sur le principe de conservation de la masse, selon lequel la masse de fluide ne peut être ni créée ni détruite, mais seulement transportée ou stockée à l'intérieur du milieu. Pour analyser ce phénomène, on considère un volume représentatif élémentaire (VRE) suffisamment petit pour permettre une description locale, mais suffisamment grand pour contenir un nombre important de pores afin de justifier l'approche continue.

Dans ce volume élémentaire, la variation de la masse de fluide au cours du temps est égale à la différence entre la masse entrante et la masse sortante. Cette variation peut également être liée à l'accumulation ou à la diminution de fluide dans les pores du milieu. Ainsi, si plus de fluide entre dans le volume qu'il n'en sort, il y a une accumulation de masse, et inversement, une diminution de la masse se produit dans le cas contraire.

Ce bilan prend en compte plusieurs paramètres physiques essentiels tels que la porosité du milieu, la masse volumique du fluide et la vitesse d'écoulement. La porosité intervient directement dans la capacité du milieu à stocker le fluide, tandis que la vitesse d'écoulement détermine les flux entrants et sortants du volume élémentaire. La combinaison de ces éléments permet de décrire de manière précise les variations locales de la quantité de fluide dans le milieu poreux.

L'établissement du bilan de masse constitue ainsi une base indispensable pour dériver les équations de continuité qui régissent les écoulements en milieu poreux saturé. Il permet de relier les phénomènes microscopiques de transport du fluide aux équations macroscopiques utilisées dans la modélisation mathématique.¹

II.D.2. Équation de continuité en milieu poreux saturé :

L'équation de continuité en milieu poreux saturé découle directement du principe de conservation de la masse appliqué à un volume élémentaire. Elle exprime mathématiquement l'équilibre entre l'accumulation de fluide et les flux d'entrée et de sortie dans le milieu. Cette équation constitue l'un des piliers fondamentaux de la mécanique des fluides en milieu poreux.

Dans sa forme générale, l'équation de continuité relie la variation temporelle de la quantité de fluide stockée dans le milieu à la divergence du flux de vitesse. Elle traduit le fait que toute variation locale de masse doit être compensée par un flux net de fluide entrant ou sortant. Lorsque le flux entrant est supérieur au flux sortant, la quantité de fluide dans le volume augmente, et inversement.

Dans le cas d'un milieu poreux saturé, l'équation de continuité prend en compte la porosité du milieu ainsi que la compressibilité éventuelle du fluide et du squelette solide. Dans de nombreuses applications hydrogéologiques, on considère souvent le fluide comme incompressible et la porosité comme constante, ce qui simplifie considérablement l'expression de l'équation.

Ainsi, l'équation de continuité peut être combinée avec la loi de Darcy afin d'obtenir l'équation générale de l'écoulement en milieu poreux saturé. Cette combinaison permet de relier les propriétés hydrauliques du milieu à la distribution spatiale et temporelle de la charge hydraulique.

¹- Claire Dubois : Équations différentielles appliquées, Dunod, 2015, p. 75-180.

L'importance de cette équation réside dans le fait qu'elle constitue la base de tous les modèles mathématiques utilisés pour simuler les écoulements souterrains. Elle permet de décrire avec précision l'évolution des systèmes hydrauliques et de prévoir le comportement des fluides dans des conditions variées.¹

II.E. Équation générale de l'écoulement :

II.E.1. Formulation en régime permanent :

La formulation de l'écoulement en régime permanent en milieu poreux saturé correspond au cas où les grandeurs hydrauliques ne varient pas avec le temps. Cela signifie que la distribution de la charge hydraulique reste stable dans le domaine étudié, et que le système a atteint un état d'équilibre hydraulique. Dans ce contexte, les débits entrants et sortants s'équilibrent localement, ce qui implique l'absence d'accumulation de masse dans le milieu.

Sur le plan mathématique, cette condition se traduit par l'annulation de la dérivée temporelle de la charge hydraulique dans l'équation de continuité. L'écoulement est alors entièrement gouverné par la loi de Darcy couplée à la conservation de la masse simplifiée. On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles elliptique, qui décrit uniquement la distribution spatiale de la charge hydraulique dans le domaine.

Le régime permanent est très utilisé dans les études hydrogéologiques et géotechniques, car il permet de simplifier considérablement les calculs tout en fournissant une représentation réaliste de nombreux phénomènes naturels stabilisés, tels que l'écoulement stationnaire dans les aquifères ou autour des ouvrages hydrauliques. Ce type de formulation permet également d'analyser les lignes de courant et les équipotentielles de manière claire et interprétable.²

II.E.2. Formulation en régime transitoire :

La formulation en régime transitoire décrit les situations où les conditions hydrauliques évoluent au cours du temps. Contrairement au régime permanent, la charge hydraulique n'est plus constante et varie en fonction des échanges de masse et des sollicitations extérieures du système. Ce type de régime est particulièrement important dans l'étude des phénomènes d'infiltration, de pompage des nappes phréatiques ou de recharge des aquifères.

¹- Hichem Gharbi : Étude des milieux poreux naturels, Université Constantine, 2020, p. 30-170.

²- Jean-Pierre Henry : Fluid Flow in Porous Media, Cambridge University Press, 2016, p. 99-220.

Dans ce cas, l'équation de continuité conserve sa forme générale avec une dérivée temporelle non nulle, ce qui introduit un terme d'accumulation. Ce terme représente la variation de stockage du fluide dans le milieu poreux au fil du temps. L'association de cette équation avec la loi de Darcy conduit à une équation de type parabolique, caractéristique des phénomènes de diffusion.

Le régime transitoire est plus complexe à analyser que le régime permanent, car il nécessite la prise en compte des conditions initiales en plus des conditions aux limites. Ces conditions initiales décrivent la distribution de la charge hydraulique au moment initial de l'étude. La résolution de ce type de problème repose généralement sur des méthodes numériques, en particulier la méthode des différences finies ou des éléments finis.

Ainsi, la formulation en régime transitoire permet de simuler l'évolution temporelle des écoulements en milieu poreux saturé et constitue un outil essentiel pour l'analyse des systèmes hydrauliques soumis à des variations dynamiques.¹

II.F. Analyse qualitative du champ de charge hydraulique

II.F.1. Représentation et lecture des isolignes de charge hydraulique

La représentation et la lecture des isolignes de charge hydraulique constituent un outil fondamental pour l'analyse des résultats issus de la modélisation des écoulements en milieu poreux saturé. Les isolignes, également appelées lignes équipotentiellles, relient les points du domaine où la charge hydraulique est constante. Elles permettent ainsi de visualiser de manière claire la distribution spatiale de l'énergie hydraulique dans le milieu étudié.

L'interprétation de ces isolignes repose sur leur espacement et leur forme. Un resserrement des isolignes indique un gradient hydraulique élevé, donc une variation importante de la charge sur une courte distance, ce qui correspond à des zones d'écoulement intense. À l'inverse, un espacement important traduit un gradient faible et donc une zone où l'écoulement est plus lent.

La forme des isolignes reflète également les conditions aux limites et les propriétés du milieu poreux. Elles se déforment en fonction des contrastes de perméabilité et des obstacles hydrauliques présents dans le domaine, permettant ainsi d'identifier les zones d'influence des différentes conditions imposées.

¹- Samia Cherif : Écoulement transitoire en aquifères, Thèse, Université Alger 1, 2021, p. 1-200.

II.F.2. Comportement spatial de la distribution de la charge dans le milieu poreux

Le comportement spatial de la distribution de la charge hydraulique dans le milieu poreux traduit la manière dont l'énergie hydraulique se répartit dans l'ensemble du domaine étudié. Cette distribution dépend fortement des propriétés du milieu, des conditions aux limites et de la géométrie du système.

Dans un milieu homogène et isotrope, la charge hydraulique varie de manière régulière et continue, suivant des gradients progressifs entre les zones de forte et de faible énergie. En revanche, dans un milieu hétérogène, la distribution devient plus complexe, avec des variations locales importantes liées aux contrastes de conductivité hydraulique.

La charge hydraulique tend toujours à décroître dans le sens de l'écoulement, ce qui permet de définir les directions naturelles du flux. Cette évolution spatiale met en évidence les zones de recharge et de décharge ainsi que les chemins préférentiels de circulation du fluide.

Ainsi, l'analyse du comportement spatial de la charge hydraulique permet de comprendre en profondeur la dynamique interne de l'écoulement et d'interpréter les résultats numériques de manière physique et cohérente.

II.G. Analyse du champ de vitesses d'écoulement

II.G.1. Détermination et signification des vecteurs de vitesse

La détermination des vecteurs de vitesse dans un milieu poreux saturé repose directement sur la loi de Darcy, qui établit une relation entre la vitesse d'écoulement et le gradient de la charge hydraulique. À partir des résultats obtenus pour la distribution de la charge hydraulique, il est possible de calculer en chaque point du domaine un vecteur vitesse représentant la direction et l'intensité de l'écoulement.

Ces vecteurs de vitesse permettent de visualiser le mouvement du fluide dans le milieu poreux. Leur direction indique le sens de l'écoulement, toujours orienté des zones de forte charge hydraulique vers les zones de faible charge. Leur norme représente l'intensité de l'écoulement et dépend directement des propriétés hydrauliques du milieu, notamment la conductivité hydraulique.

L'analyse des vecteurs de vitesse permet également d'identifier des zones particulières telles que les zones de concentration de flux, les zones de stagnation ou encore les chemins préférentiels de circulation de l'eau dans le milieu poreux.

II.G.2. Relation entre champ de vitesse et gradient hydraulique

La relation entre le champ de vitesse et le gradient hydraulique constitue un principe fondamental dans l'étude des écoulements en milieu poreux saturé. Selon la loi de Darcy, la vitesse d'écoulement est proportionnelle au gradient de la charge hydraulique, ce qui signifie que toute variation spatiale de la charge entraîne un mouvement du fluide.

Mathématiquement, le champ de vitesse est dirigé dans le sens opposé du gradient hydraulique, ce qui traduit le déplacement naturel du fluide des zones de haute énergie vers les zones de basse énergie. La conductivité hydraulique agit comme coefficient de proportionnalité, contrôlant l'intensité de ce mouvement.

Ainsi, plus le gradient hydraulique est important, plus la vitesse d'écoulement est élevée. Inversement, dans les zones où le gradient est faible, l'écoulement devient lent voire négligeable. Cette relation permet de relier directement les résultats numériques de la charge hydraulique aux phénomènes physiques d'écoulement observés dans le milieu poreux.

Cette correspondance entre champ de vitesse et gradient hydraulique constitue donc un élément essentiel pour interpréter correctement les résultats de simulation et comprendre la dynamique interne du système hydraulique.

II.H. Analyse de sensibilité du modèle

II.H.1. Interprétation théorique des comportements observés

L'interprétation théorique des comportements observés dans les résultats simulés permet de relier les phénomènes numériques aux lois physiques gouvernant les écoulements en milieu poreux saturé. Elle consiste à analyser les champs obtenus afin de comprendre les mécanismes internes de transport du fluide.

Les comportements observés, tels que la concentration des lignes de courant, la variation des gradients hydrauliques ou la formation de zones de faible écoulement, peuvent être expliqués par les différences de propriétés hydrauliques et les conditions aux limites imposées au système.

Théoriquement, le fluide se déplace toujours des zones de forte charge hydraulique vers les zones de faible charge, conformément à la loi de Darcy. Les variations locales des paramètres du milieu perturbent ce mouvement et créent des hétérogénéités dans le champ d'écoulement. $\vec{v} = -K\nabla h$

Ainsi, l'interprétation théorique permet de valider la cohérence physique des résultats numériques et de confirmer que le modèle reproduit correctement les comportements attendus des écoulements en milieu poreux saturé.

Chapitre III :

Formulation mathématique

Introduction :

Le chapitre III est consacré à la formulation mathématique des écoulements en milieu poreux saturé. Il constitue une étape fondamentale dans la construction du modèle théorique, car il permet de transformer les lois physiques de base en équations différentielles gouvernantes décrivant le comportement du fluide dans le milieu poreux. À partir de la loi de Darcy et du principe de conservation de la masse, il est possible d'établir des modèles mathématiques rigoureux capables de représenter l'évolution de la charge hydraulique en régime permanent ainsi qu'en régime transitoire.

Cette étape de modélisation permet également de définir les conditions nécessaires à la résolution complète du problème, notamment les conditions aux limites et les conditions initiales. Ces éléments jouent un rôle essentiel dans la détermination de la solution et assurent la cohérence physique du modèle. Ainsi, ce chapitre fournit le cadre mathématique indispensable pour analyser et simuler les écoulements souterrains de manière rigoureuse et structurée.¹

¹ -Khaled Messaoudi : Méthode des différences finies, Revue Sciences Appliquées, 2019, p. 65-120.

III.A. Équation gouvernante de l'écoulement en milieu poreux :**III.A.1. Formulation en régime permanent :****III.A.1.1. Établissement de l'équation différentielle gouvernante en régime permanent**

L'établissement de l'équation différentielle gouvernante en régime permanent repose sur l'association de la loi de Darcy et du principe de conservation de la masse appliqué à un milieu poreux saturé. Dans ce régime, l'écoulement est dit stationnaire, ce qui signifie que les variables hydrauliques, en particulier la charge hydraulique, ne présentent aucune variation temporelle. Par conséquent, le système ne connaît aucune accumulation de masse au sein du domaine étudié, et l'état hydraulique global est maintenu par un équilibre permanent entre les flux entrants et sortants.

À partir de la loi de Darcy, la vitesse d'écoulement est exprimée comme étant proportionnelle au gradient de la charge hydraulique, avec une dépendance directe vis-à-vis de la conductivité hydraulique du milieu. Cette relation traduit le comportement physique du fluide dans un réseau poreux où les pertes d'énergie sont dominées par les frottements visqueux.

1.Loi de Darcy

$$q = -K \nabla h$$

Où :

q : débit spécifique (m/s),

k: conductivité hydraulique (m/s),

h : charge hydraulique (m),

∇: gradient de la charge hydraulique.

2. Équation de conservation de la masse

En régime permanent, il n'y a pas d'accumulation d'eau :

$$\nabla \cdot q = Q$$

où "Q" est le terme source (ou puits) volumique.

3. Équation gouvernante

En remplaçant la loi de Darcy dans l'équation de conservation,

On obtient :

$$\nabla \cdot (K \nabla h) + Q = 0$$

Cette équation est la forme générale de l'écoulement permanent dans un milieu poreux saturé.

En intégrant cette expression dans l'équation de continuité et en imposant la condition de régime permanent, on élimine le terme d'accumulation temporelle. Il en résulte une équation aux dérivées partielles gouvernante qui décrit uniquement la distribution spatiale de la charge hydraulique dans le domaine.

Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, cette équation se réduit à une forme classique connue sous le nom d'équation de Laplace. Cette équation elliptique traduit l'équilibre interne du champ hydraulique et permet de déterminer la répartition de la charge ainsi que les directions naturelles de l'écoulement à travers les lignes de courant et les équipotentiels.

Cas particulier : milieu homogène et isotrope

Si la conductivité hydraulique K est constante, l'équation devient :

$$\nabla \cdot (K \nabla^2 h) + Q = 0$$

Ou encore :

$$\nabla^2 h = -\frac{Q}{K}$$

En absence de sources ou de puits ($Q=0$), on obtient l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 h = 0$$

Cette équation décrit l'écoulement permanent de l'eau souterraine dans un milieu poreux saturé homogène et isotrope.

Ainsi, l'équation obtenue constitue le fondement théorique de l'analyse des écoulements stationnaires en milieu poreux saturé, en

Reliant directement les propriétés physiques du milieu aux champs hydrauliques observables.¹

¹ -Anna Keller : Computational Fluid Dynamics, Wiley, 2018, p. 150-310.

III.A.1.2. Signification physique et nature mathématique de l'équation obtenue :

La signification physique de l'équation différentielle gouvernante en régime permanent réside dans la représentation d'un état d'équilibre hydraulique global du système. Chaque point du milieu poreux satisfait localement le principe de conservation de la masse, ce qui implique que les flux de fluide entrants compensent exactement les flux sortants. Il en résulte une distribution stable de la charge hydraulique dans tout le domaine.

Sur le plan physique, cette équation met en évidence un comportement de type diffusif. La charge hydraulique ne se propage pas sous forme d'onde, mais se répartit progressivement dans le milieu en fonction des contrastes de potentiel hydraulique. Cette diffusion est contrôlée par la structure poreuse du matériau et les résistances internes offertes par la matrice solide.

D'un point de vue mathématique, l'équation obtenue appartient à la famille des équations aux dérivées partielles elliptiques. Ce type d'équation est caractérisé par l'absence de dépendance temporelle et par une solution déterminée exclusivement par les conditions aux limites du domaine. Les solutions sont généralement régulières et continues, ce qui reflète la nature physique stable du phénomène étudié.

Ainsi, cette équation constitue un outil mathématique essentiel pour la modélisation des écoulements stationnaires en milieu poreux saturé, permettant une analyse rigoureuse de la distribution spatiale de la charge hydraulique et une interprétation physique cohérente des phénomènes d'écoulement.¹

Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, cette équation peut être simplifiée et prend une forme classique utilisée dans l'hydrogéologie pour modéliser l'évolution des nappes souterraines soumises à des sollicitations telles que le pompage ou la recharge.²

III.B. Conditions du problème mathématique

III.B.1. Conditions aux limites

III.B.1.1. Conditions de type Dirichlet (charge imposée) et Neumann (flux imposé)

Les conditions aux limites jouent un rôle fondamental dans la résolution des équations différentielles gouvernant les écoulements en milieu poreux saturé, car elles permettent de

¹ -Brahim Djerroud : Hydraulique des sols saturés, OPU, 2020, p. 80-175.

² - David Smith : Porous Media Flow, Springer, 2016, p. 120-280.

définir le comportement du système sur les frontières du domaine étudié. Parmi ces conditions, on distingue principalement les conditions de Dirichlet et les conditions de Neumann, qui correspondent à deux types de contraintes physiques différentes.

$$\nabla \cdot (K \nabla h) = 0$$

Les conditions de Dirichlet consistent à imposer directement la valeur de la charge hydraulique sur une partie du domaine. Cela signifie que l'énergie hydraulique est connue et fixée sur la frontière. Ce type de condition est fréquemment utilisé pour représenter des surfaces en contact avec une nappe d'eau à niveau constant, comme un lac, une rivière ou un réservoir. Dans ce cas, la frontière agit comme une source ou un potentiel hydraulique imposé, influençant directement la distribution de l'écoulement dans le milieu poreux.

Elle s'écrit :

$h = HD$. Sur TD

où :

h : est la charge hydraulique (m) ;

HD : est une valeur connue et imposée ;

TD : représente la partie de la frontière où cette condition est appliquée.

Interprétation physique :

Le potentiel hydraulique est fixé à une valeur connue.

L'eau peut entrer ou sortir du domaine, mais la charge reste constante.

Exemples :

Niveau d'eau imposé dans une rivière ou un lac.

Niveau piézométrique mesuré dans un aquifère.

Réservoir dont le niveau d'eau est constant.

Les conditions de Neumann, quant à elles, imposent le flux de fluide à travers la frontière plutôt que la charge hydraulique elle-même. Ce flux est généralement lié au gradient de la charge hydraulique via la loi de Darcy. Une condition de Neumann peut représenter une imperméabilité totale (flux nul), comme dans le cas d'une paroi étanche, ou encore un apport ou une extraction d'eau à travers la frontière. Ce type de condition est essentiel pour modéliser des systèmes où les échanges hydrauliques sont contrôlés en termes de débit plutôt qu'en termes de potentiel.

Elle s'écrit :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_n$$

ou, en utilisant la loi de Darcy,

$$\text{Où : } K \nabla h \cdot \mathbf{n} = q_n$$

$\mathbf{q}$: est le vecteur flux de Darcy (m/s) ;

$\mathbf{n}$: est le vecteur normal sortant à la frontière ;

q_n : est le flux imposé.

.Interprétation physique :

On fixe la quantité d'eau qui traverse la frontière.

La charge hydraulique n'est pas imposée ; elle est calculée par le modèle.

Cas particuliers :

Frontière imperméable :

$$q_n = 0$$

donc :

$$K \nabla h \cdot \mathbf{n} = q_n$$

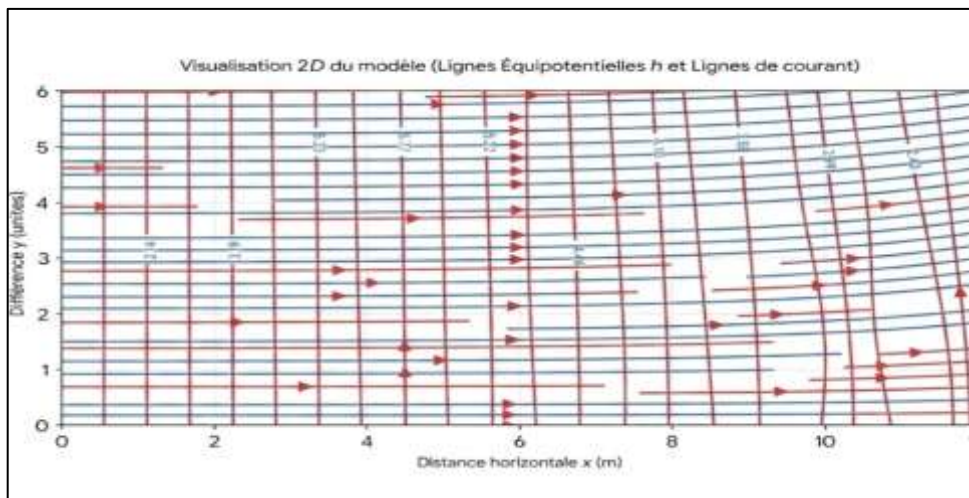


Figure III. 1 : Modèle bidimensionnel retenu l'écoulement permanent d'un fluide incompressible au sein d'un milieu poreux saturé homogène et isotrope

Aucun écoulement ne traverse la frontière.

Flux d'infiltration connu :

$$q_n = q_0$$

où q_0 est une valeur imposée représentant, par exemple, une recharge ou une infiltration.

Ainsi, les conditions de Dirichlet et de Neumann permettent de décrire de manière complète les interactions entre le milieu poreux et son environnement, en définissant les contraintes hydrauliques appliquées sur les frontières du domaine.¹

III.B.1.2. Rôle des conditions aux limites dans la définition du domaine d'étude

Les conditions aux limites jouent un rôle essentiel dans la formulation mathématique des problèmes d'écoulement en milieu poreux saturé, car elles déterminent de manière unique la solution de l'équation gouvernante. Sans ces conditions, l'équation différentielle ne peut pas être résolue de façon déterminée, car elle admettrait une infinité de solutions possibles.

Sur le plan physique, les conditions aux limites traduisent les interactions entre le domaine poreux et son environnement extérieur. Elles définissent les zones où le système échange de l'eau avec l'extérieur, ainsi que les zones où aucun échange n'est possible. Elles permettent donc de représenter fidèlement les réalités hydrogéologiques telles que les rivières, les aquifères voisins, les zones de recharge ou les barrières géologiques imperméables.

Sur le plan mathématique, ces conditions imposent des contraintes essentielles qui orientent la solution de l'équation différentielle. Elles influencent directement la distribution de la charge hydraulique et la forme des lignes de courant à l'intérieur du domaine. Ainsi, deux systèmes ayant la même équation gouvernante mais des conditions aux limites différentes peuvent produire des comportements hydrauliques totalement différents.

Dans la modélisation numérique, les conditions aux limites constituent également un élément crucial pour la stabilité et la convergence des solutions. Leur bonne définition garantit la cohérence du modèle et permet d'obtenir des résultats physiquement réalistes.

En résumé, les conditions aux limites ne sont pas de simples contraintes mathématiques, mais des éléments fondamentaux qui définissent entièrement le comportement hydraulique du système étudié et assurent la validité du modèle d'écoulement en milieu poreux saturé.²

¹ -Julien Roche : Numerical Analysis of PDEs, Cambridge, 2015, p. 130-250.

² - Fawzi Lakhdari : Écoulement en milieu fracturé, Université Blida, 2020, p. 25-140.

III.C. Conditions initiales**III.C.1. Définition de l'état initial du système hydraulique**

L'état initial du système hydraulique correspond à la description complète des conditions du milieu poreux saturé à un instant de référence généralement noté $t = 0$. Cet état initial représente la distribution spatiale de la charge hydraulique dans tout le domaine étudié avant toute perturbation ou évolution temporelle du système. Il constitue donc le point de départ indispensable pour l'analyse des écoulements en régime transitoire.

D'un point de vue physique, l'état initial reflète la situation réelle ou supposée du système avant l'application de sollicitations externes telles qu'un pompage, une recharge ou une modification des conditions aux limites. Il peut correspondre à un état d'équilibre naturel ou à une configuration mesurée sur le terrain. Cette distribution initiale de la charge hydraulique influence directement l'évolution future du système.

Mathématiquement, l'état initial est représenté par une fonction définie sur tout le domaine spatial, qui attribue à chaque point une valeur de charge hydraulique à l'instant initial. Cette fonction constitue une donnée essentielle du problème et doit être cohérente avec les propriétés physiques du milieu poreux ainsi qu'avec les conditions aux limites imposées.¹

III.C.2. Importance des conditions initiales dans les problèmes transitoires

Les conditions initiales jouent un rôle fondamental dans la résolution des problèmes d'écoulement en régime transitoire, car elles déterminent l'évolution temporelle du système hydraulique. Contrairement au régime permanent, où seules les conditions aux limites suffisent à définir la solution, le régime transitoire nécessite également la connaissance précise de l'état du système à l'instant initial.

Sur le plan physique, les conditions initiales définissent la mémoire du système. Elles influencent la manière dont la charge hydraulique se propage et se redistribue dans le milieu poreux au cours du temps. Deux systèmes soumis aux mêmes conditions aux limites mais présentant des états initiaux différents peuvent évoluer de manière significativement différente avant d'atteindre un nouvel équilibre.

Sur le plan mathématique, les conditions initiales assurent l'unicité et la stabilité de la solution des équations différentielles parabolique décrivant les écoulements transitoires. Elles

¹ - Emma Richard : Hydrodynamics and Modelling, Wiley, 2018, p. 110-230.

permettent de suivre l'évolution de la solution dans le temps et de garantir la cohérence du modèle dynamique.

Dans les applications numériques, la définition correcte des conditions initiales est essentielle pour obtenir des résultats fiables. Une mauvaise estimation de l'état initial peut entraîner des erreurs importantes dans la simulation et fausser l'interprétation des résultats.

Ainsi, les conditions initiales constituent un élément indispensable de la modélisation des écoulements transitoires en milieu poreux saturé, en assurant la cohérence physique et mathématique de l'évolution temporelle du système.¹

¹ -Salah Eddine Boussaid : Théorie de Darcy, Revue Hydrologie, 2017, p. 50-100.

Chapitre IV :

Méthodes numériques de résolution

Introduction

Le chapitre IV est consacré aux méthodes numériques de résolution des équations gouvernant les écoulements en milieu poreux saturé. Après la formulation mathématique des modèles dans les chapitres précédents, il devient nécessaire de recourir à des techniques de calcul permettant d'obtenir des solutions approchées, notamment lorsque les équations différentielles ne peuvent pas être résolues analytiquement. Ce chapitre introduit le principe de la discrétisation du domaine spatial et temporel, ainsi que la méthode des différences finies, qui constitue l'une des approches numériques les plus utilisées pour transformer les équations continues en un système d'équations algébriques résolubles par ordinateur. Cette étape permet de simuler le comportement des écoulements et d'analyser les résultats de manière quantitative et précise.

IV.A. Principe de la discrétisation et approximation numérique**IV.A.1. Notions fondamentales de la discrétisation****IV.A.1.1. Définition de la discrétisation du domaine spatial et temporel**

La discrétisation du domaine spatial et temporel est une étape fondamentale dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles décrivant les écoulements en milieu poreux saturé. Elle consiste à remplacer un domaine continu, défini théoriquement par une infinité de points, par un ensemble fini et structuré de points appelés nœuds ou mailles. Cette transformation permet de passer d'un problème continu à un problème discret plus adapté au calcul numérique.

Sur le plan spatial, la discrétisation consiste à découper le domaine physique en une grille régulière ou irrégulière, selon la complexité de la géométrie étudiée. Chaque point de cette grille représente une position où les variables hydrauliques, telles que la charge hydraulique, seront calculées. Sur le plan temporel, lorsque le problème est transitoire, le temps est également découpé en intervalles successifs appelés pas de temps, permettant de suivre l'évolution du système étape par étape.

Cette approche permet de représenter de manière approximative mais contrôlée le comportement continu du milieu poreux à travers un ensemble fini de valeurs numériques.

IV.A.1.2. Objectif de la transformation des équations différentielles en systèmes algébriques

La transformation des équations différentielles en systèmes algébriques constitue l'objectif principal de la discrétisation. Les équations gouvernantes des écoulements en milieu poreux, souvent complexes et difficiles voire impossibles à résoudre analytiquement, sont converties en équations discrètes plus simples à manipuler numériquement.

Les écoulements dans un milieu poreux saturé (où l'eau remplit tous les vides) reposent sur deux principes physiques fondamentaux :

.La conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{pour un fluide incompressible et un milieu rigide}).$$

La loi de Darcy :

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} \nabla P \quad \text{qui relie la vitesse de filtration... , le tenseur de perméabilité } K, \text{ la}$$

viscosité dynamique et le gradient de pression P .

Le couplage de ces deux lois donne l'équation de diffusion (ou équation de Laplace) :

$$\nabla \cdot \left(\frac{K}{\mu} \nabla P \right) = 0$$

Cette transformation permet de remplacer les dérivées continues par des approximations numériques basées sur les différences entre les valeurs des variables aux nœuds du maillage. Ainsi, l'équation différentielle initiale est transformée en un système d'équations linéaires ou non linéaires selon le cas étudié.

L'intérêt principal de cette démarche réside dans la possibilité d'utiliser des algorithmes de calcul et des ordinateurs pour obtenir des solutions approchées avec une grande précision. Elle permet également de simuler des situations complexes, prenant en compte des géométries irrégulières, des conditions aux limites variées et des propriétés hydrauliques hétérogènes.

Ainsi, la transformation en système algébrique constitue une étape indispensable pour rendre le problème mathématique exploitable en pratique et permettre l'analyse numérique des écoulements en milieu poreux saturé.

IV.A.2. Maillage du domaine et représentation numérique

IV.A.2.1. Découpage du domaine en nœuds et éléments

Le découpage du domaine en nœuds et éléments constitue une étape essentielle dans la mise en œuvre des méthodes numériques pour la résolution des écoulements en milieu poreux saturé. Cette opération consiste à représenter le domaine continu étudié par une structure discrète composée d'un ensemble de points appelés nœuds, reliés entre eux pour former des éléments ou des mailles.

Chaque nœud représente une position précise dans le domaine où les variables hydrauliques, notamment la charge hydraulique, seront calculées. Les éléments ou mailles, quant à eux, définissent les relations entre ces points et permettent de décrire la géométrie globale du milieu étudié. Cette représentation transforme un domaine continu complexe en une structure discrète plus facile à analyser numériquement.

Ce découpage doit être suffisamment fin pour capturer les variations importantes des grandeurs hydrauliques, tout en restant suffisamment simple pour limiter le coût de calcul. Ainsi, la qualité du maillage joue un rôle déterminant dans la précision et la stabilité des résultats obtenus.

IV.A.2.2. Choix du pas spatial et du pas temporel dans la modélisation numérique

Le choix du pas spatial et du pas temporel est une étape cruciale dans la modélisation numérique des écoulements en milieu poreux saturé. Le pas spatial correspond à la distance entre deux nœuds successifs du maillage, tandis que le pas temporel définit l'intervalle de temps entre deux étapes de calcul dans le cas des problèmes transitoires.

Un pas spatial trop grand peut entraîner une perte d'information et une mauvaise représentation des gradients hydrauliques, tandis qu'un pas trop petit augmente considérablement le temps de calcul. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre précision et efficacité numérique.

De même, le pas temporel doit être choisi avec soin afin de garantir la stabilité et la convergence des solutions numériques. Un pas de temps trop élevé peut conduire à des instabilités numériques, tandis qu'un pas trop faible augmente inutilement le coût de simulation.

Ainsi, le choix judicieux des pas spatial et temporel est fondamental pour assurer la fiabilité des résultats et optimiser les performances des méthodes numériques utilisées dans la modélisation des écoulements en milieu poreux.

IV.B. Méthode des différences finies

IV.B.1. Principe de la méthode des différences finies

IV.B.1.1. Approximation des dérivées par des différences discrètes

L'approximation des dérivées par des différences discrètes constitue le cœur de la méthode des différences finies utilisée dans la résolution numérique des équations en milieu poreux saturé. Elle consiste à remplacer les dérivées continues présentes dans les équations différentielles par des expressions approchées basées sur les valeurs de la fonction aux points discrets du maillage.

Par exemple, une dérivée première peut être approximée par une différence avant, arrière ou centrée entre deux nœuds voisins, tandis qu'une dérivée seconde est généralement exprimée à l'aide de la combinaison des valeurs de la fonction en plusieurs points adjacents. Ces approximations permettent de transformer les équations différentielles en relations algébriques reliant les inconnues aux différents nœuds du domaine.

Cette approche repose sur une idée fondamentale : plus le pas spatial et temporel est petit, plus l'approximation des dérivées est précise. Ainsi, la qualité de la solution numérique dépend directement de la finesse du maillage et de la formulation choisie pour les différences discrètes.

IV.B.1.2. Schémas explicites et implicites de résolution numérique

Les schémas explicites et implicites représentent deux grandes familles de méthodes utilisées pour la résolution numérique des équations discrétisées en milieu poreux saturé, notamment dans les problèmes transitoires.

Dans un schéma explicite, la valeur de la variable inconnue à un instant donné est calculée directement à partir des valeurs connues aux instants précédents. Cette méthode est simple à mettre en œuvre et ne nécessite pas la résolution d'un système d'équations complexe. Cependant, elle impose souvent des conditions de stabilité strictes sur le choix du pas de temps, ce qui peut limiter son utilisation dans certains cas.

À l'inverse, les schémas implicites consistent à exprimer les valeurs inconnues à l'instant futur en fonction d'un système d'équations où ces mêmes inconnues apparaissent simultanément. Cette approche nécessite la résolution d'un système algébrique à chaque pas de temps, ce qui augmente la complexité de calcul. Toutefois, elle présente généralement une meilleure stabilité numérique et permet d'utiliser des pas de temps plus grands.

Ainsi, le choix entre schéma explicite et implicite dépend d'un compromis entre simplicité de calcul, stabilité numérique et précision des résultats dans la modélisation des écoulements en milieu poreux.

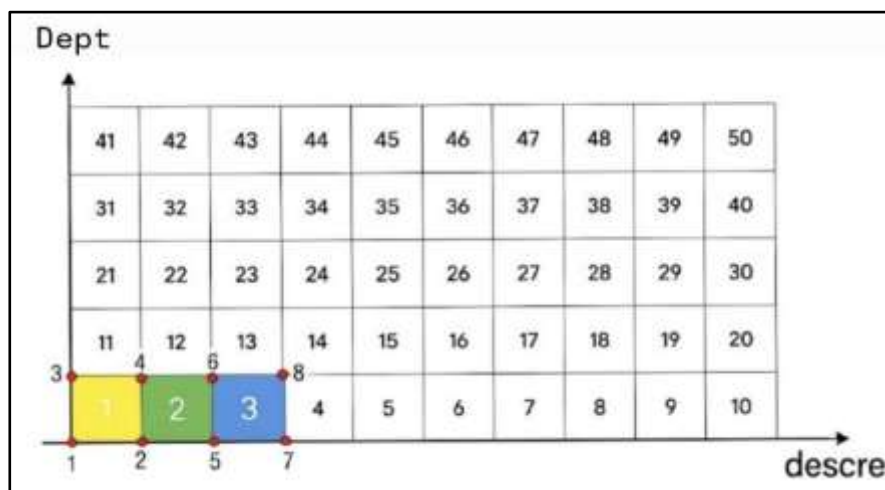


Figure IV.2 : Modèle d'un maillage bidimensionnel utilisé pour la discrétisation d'un domaine par la méthode des différences finies.

1 MAILLE

- 1^{er} nœud = $(x = 0, y = 0)$
- 2^e nœud = $(x = 1, y = 0)$
- 3^e nœud = $(x = 1, y = 1)$
- 4^e nœud = $(x = 0, y = 1)$

2 MAILLE

- 2^e nœud = $(x = 1, y = 0)$
- 4^e nœud = $(x = 1, y = 1)$
- 5^e nœud = $(x = 2, y = 0)$
- 6^e nœud = $(x = 2, y = 1)$

3 MAILLE

- 5^e nœud = $(x = 2, y = 0)$
- 6^e nœud = $(x = 2, y = 1)$
- 7^e nœud = $(x = 3, y = 0)$
- 8^e nœud = $(x = 3, y = 1)$

IV.B.2. Application aux écoulements en milieu poreux**IV.B.2.1. Discrétisation de l'équation de l'écoulement saturé**

La discrétisation de l'équation de l'écoulement en milieu poreux saturé constitue une étape essentielle permettant de transformer l'équation différentielle gouvernante en une forme numérique exploitable par ordinateur. Cette opération repose sur la méthode des différences finies, qui consiste à remplacer les dérivées spatiales et temporelles de la charge hydraulique par des expressions discrètes définies sur un maillage du domaine.

À partir de l'équation générale de l'écoulement obtenue par la combinaison de la loi de Darcy et du principe de conservation de la masse, on approxime les dérivées partielles par des différences centrées ou progressives selon le schéma choisi. Ainsi, chaque point du domaine est associé à une équation reliant sa valeur de charge hydraulique à celles de ses voisins.

Dans le cas du régime transitoire, la discrétisation inclut également le terme temporel, ce qui conduit à une évolution progressive de la solution au cours du temps. Le choix du schéma de discrétisation influence directement la précision, la stabilité et la convergence du modèle numérique.

Cette étape permet donc de passer d'un problème continu complexe à un ensemble de relations discrètes adaptées à une résolution algorithmique.

IV.B.2.2. Construction du système d'équations algébriques et résolution numérique

La construction du système d'équations algébriques découle directement de la discrétisation de l'équation de l'écoulement saturé. Chaque nœud du maillage donne lieu à une équation algébrique reliant la charge hydraulique du point considéré à celles des nœuds adjacents. L'ensemble de ces relations forme un système global d'équations linéaires ou non linéaires selon la complexité du modèle.

Ce système peut être représenté sous forme matricielle, où la matrice des coefficients reflète les propriétés hydrauliques du milieu, notamment la conductivité hydraulique et la structure du maillage. Les conditions aux limites sont intégrées dans ce système afin d'assurer la cohérence physique de la solution.

La résolution numérique de ce système peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes algébriques, telles que les méthodes directes ou itératives. Les méthodes itératives sont particulièrement utilisées dans les problèmes de grande taille, car elles permettent une meilleure efficacité en termes de mémoire et de temps de calcul.

Parmi les techniques couramment employées figurent les méthodes de Gauss-Seidel, Jacobi ou encore les méthodes multi grilles. Le choix de la méthode dépend de la taille du système et des exigences de précision et de stabilité.

Ainsi, cette étape permet d'obtenir une solution numérique approchée de la distribution de la charge hydraulique dans le milieu poreux saturé, ouvrant la voie à l'analyse et à l'interprétation des résultats hydrauliques.

Chapitre V :

Développement du modèle numérique

V.A. Paramètres et structure du modèle numérique**V.A.1. Paramètres physiques et hydrauliques du modèle****V.A.1.1. Définition des paramètres du milieu poreux (porosité, perméabilité, conductivité hydraulique)**

La définition des paramètres du milieu poreux constitue une étape essentielle dans la construction du modèle numérique des écoulements en milieu saturé. Ces paramètres permettent de représenter les propriétés physiques du matériau et de contrôler le comportement hydraulique simulé.

La porosité représente la fraction du volume total du milieu occupée par les vides susceptibles de contenir un fluide. Elle détermine la capacité de stockage du milieu poreux et influence directement la quantité d'eau pouvant être contenue dans le système. Une porosité élevée signifie un espace de stockage important, mais ne garantit pas nécessairement une bonne circulation du fluide.

$$n = \frac{V_v}{V_t}$$

Loi de Darcy

$$q = -K \nabla h$$

En deux dimensions :

$$q_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$q_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}$$

où :

q_x, q_y : composantes du débit spécifique (m/s) ;

k_x, k_y : conductivités hydrauliques (m/s) ;

h : charge hydraulique (m).

La perméabilité caractérise la capacité intrinsèque du milieu à laisser circuler un fluide à travers son réseau poreux. Elle dépend de la taille des pores, de leur connectivité et de la structure interne du matériau. Un milieu fortement perméable permet un écoulement rapide, tandis qu'un milieu peu perméable freine fortement la circulation du fluide.

La conductivité hydraulique est un paramètre dérivé qui combine les propriétés du milieu et celles du fluide. Elle exprime la facilité avec laquelle l'eau se déplace sous l'effet d'un gradient hydraulique. Elle est directement utilisée dans la loi de Darcy et constitue un paramètre clé dans les simulations numériques des écoulements.

Équation aux dérivées partielles :

On considère un domaine bidimensionnel

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2$$

et une fonction inconnue :

$$h(x, y)$$

L'équation de Laplace est :

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0}$$

On peut aussi l'écrire :

$$\boxed{\nabla^2 h = 0}$$

Dans un problème d'écoulement souterrain, par exemple, $h(x, y)$ peut représenter la **charge hydraulique**.

Pour la discrétisation du domaine

Au lieu de travailler sur tous les points du domaine continu, on le remplace par un **maillage**.

On choisit :

$$\Delta x$$

dans la direction x , et :

$$\Delta y$$

dans la direction y .

Les coordonnées des nœuds sont :

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y$$

La valeur de h au nœud (i, j) est notée :

$$h_{i,j}$$

C'est cette quantité que nous allons chercher.

Comment obtenir l'approximation de la dérivée seconde ?

C'est ici que vient réellement la formule des différences finies.

Pour la direction x , développons $h(x + \Delta x, y)$ autour du point (x, y) par Taylor :

$$h(x + \Delta x, y) = h(x, y) + \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

De même :

$$h(x - \Delta x, y) = h(x, y) - \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Additionnons les deux expressions :

$$h(x + \Delta x, y) + h(x - \Delta x, y)$$

Les termes contenant les dérivées premières s'annulent :

$$+\Delta x \frac{\partial h}{\partial x} - \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Les dérivées troisièmes s'annulent également.

On obtient :

$$h(x, y + \Delta x) + h(x, y - \Delta x) = 2h(x, y) + \Delta x^2$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h(x + \Delta x, y) - 2h(x, y) + h(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

Au niveau du maillage :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

Pour la direction y , développons $h(x, y + \Delta y)$ autour du point (x, y) .

Par Taylor =

$$h(x, y + \Delta y) = h(x, y) + \Delta y \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

De même :

$$h(x, y - \Delta y) = h(x, y) - \Delta y \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

- Additionnons les deux expressions :

$$h(x, y + \Delta y) + h(x, y - \Delta y)$$

Les termes contenant les dérivées premières s'annulent :

$$+\Delta y \frac{\partial h}{\partial y} - \Delta y \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

Les dérivées troisièmes s'annulent également.

On obtient :

$$h(x, y + \Delta y) + h(x, y - \Delta y) = 2h(x, y) + \Delta y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

Donc =

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h(x, y + \Delta y) - 2h(x, y) + h(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

Au niveau du Maillage =

On obtient :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Remplacement dans l'équation de Laplace

On part de :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

On remplace chaque dérivée seconde par son approximation :

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

C'est déjà l'équation aux différences finies.

V.A.1.2. Influence des paramètres sur le comportement de l'écoulement simulé

Les paramètres hydrauliques du milieu poreux jouent un rôle déterminant dans le comportement de l'écoulement simulé. Ils influencent directement la vitesse de propagation du fluide, la distribution de la charge hydraulique ainsi que la forme des champs d'écoulement obtenus numériquement.

Une porosité élevée permet un stockage important de l'eau, ce qui peut ralentir la réponse du système en régime transitoire, car une plus grande quantité de fluide doit être mobilisée pour modifier la charge hydraulique. À l'inverse, une faible porosité entraîne une réponse plus rapide du système.

La perméabilité contrôle principalement la facilité de circulation du fluide. Dans un milieu très perméable, les gradients hydrauliques se dissipent rapidement et les écoulements sont plus homogènes. Dans un milieu peu perméable, les gradients peuvent devenir plus importants, entraînant des zones de stagnation ou de faible circulation.

La conductivité hydraulique agit comme un facteur d'amplification ou de réduction de la vitesse d'écoulement. Elle influence directement la solution numérique de l'équation gouvernante et conditionne l'intensité des flux dans tout le domaine simulé.

Ainsi, la variation de ces paramètres permet de simuler différents comportements hydrauliques et d'analyser l'influence des propriétés physiques du milieu sur la dynamique des écoulements en milieu poreux saturé.

V.A.2. Paramètres numériques de simulation

V.A.2.1. Choix du maillage et du domaine de calcul

Le choix du maillage et la définition du domaine de calcul constituent des étapes fondamentales dans la mise en place d'un modèle numérique des écoulements en milieu poreux saturé. Le domaine de calcul représente la zone physique réelle étudiée, qu'il s'agisse d'un aquifère, d'un barrage ou d'une formation géologique. Sa délimitation doit être suffisamment représentative du phénomène hydraulique afin de reproduire correctement le comportement de l'écoulement.

Le maillage consiste à subdiviser ce domaine continu en un ensemble fini de cellules ou de nœuds. Cette discrétisation permet de transformer le problème physique en un problème numérique exploitable par ordinateur. Le choix du type de maillage, régulier ou irrégulier, dépend de la complexité géométrique du domaine et de la précision recherchée. Un maillage fin permet une meilleure résolution des gradients hydrauliques, mais augmente le coût de calcul, tandis qu'un maillage grossier réduit la précision mais améliore la rapidité de simulation.

Ainsi, le compromis entre précision et performance constitue un critère essentiel dans la conception du maillage et la définition du domaine de calcul.

Cas d'un maillage carré : $\Delta x = \Delta y = \Delta$

alors :

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta^2}$$

On multiplie par Δ^2 :

$$h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}$$

Donc :

$$h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j} = 0$$

ou :

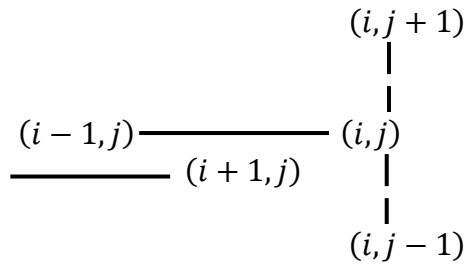
$$4h_{i,j} = h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}$$

et finalement :

$$h_{i,j} = \frac{1}{4} (h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1})$$

Pourquoi « cinq points » ?

Parce que l'équation au nœud $P = (i, j)$ utilise cinq valeurs :



On a donc :

- $h_{i,j}$: point central
- $h_{i+1,j}$: point Est
- $h_{i-1,j}$: point Ouest
- $h_{i,j+1}$: point Nord
- $h_{i,j-1}$: point Sud

Passage de l'équation différentielle à une équation algébrique

C'est une étape fondamentale.

L'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

devient, au nœud (i, j) :

$$h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j} = 0$$

On peut isoler la valeur inconnue :

$$h_{i,j} = \frac{1}{4}(h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1})$$

En l'absence de source ou de puits ($Q=0$):

$$h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$

V.A.2.2. Définition du pas de temps et des paramètres de discrétisation

La définition du pas de temps et des paramètres de discrétisation joue un rôle déterminant dans la stabilité et la précision des simulations numériques en régime transitoire. Le pas de temps correspond à l'intervalle entre deux étapes successives de calcul et contrôle l'évolution temporelle du système hydraulique.

Un pas de temps trop grand peut entraîner des instabilités numériques et une perte de précision dans la simulation des phénomènes rapides, tandis qu'un pas de temps trop petit

augmente fortement le coût de calcul sans amélioration significative des résultats. Il est donc nécessaire de choisir une valeur optimale assurant un équilibre entre stabilité, précision et efficacité.

Les paramètres de discrétisation, tels que les pas spatiaux et temporels, sont également liés aux caractéristiques physiques du milieu poreux et aux méthodes numériques utilisées. Leur choix doit respecter certaines conditions de stabilité afin de garantir la convergence de la solution vers un résultat physiquement cohérent.

Ainsi, la définition correcte du pas de temps et des paramètres de discrétisation est indispensable pour assurer la fiabilité du modèle numérique et la qualité des simulations des écoulements en milieu poreux saturé.

V.B. Algorithme de résolution et stabilité du modèle

V. B.1. Organisation algorithmique générale

V. B.1.1.Étapes de construction de l'algorithme de simulation numérique

La construction de l'algorithme de simulation numérique constitue une étape centrale dans le développement du modèle numérique des écoulements en milieu poreux saturé. Elle consiste à traduire les équations discrétisées et les conditions aux limites en une suite logique d'opérations permettant de calculer la distribution de la charge hydraulique dans le domaine étudié.

La première étape de cet algorithme consiste à initialiser les paramètres du modèle, notamment les propriétés hydrauliques du milieu, les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites. Ensuite, le domaine est discrétisé en un maillage structuré sur lequel les variables hydrauliques sont calculées à chaque nœud.

La deuxième étape consiste à appliquer le schéma numérique choisi, en calculant les valeurs de la charge hydraulique à chaque pas de temps ou itération. Cette procédure est répétée de manière successive jusqu'à atteindre la solution finale du problème. Enfin, des critères d'arrêt basés sur la convergence sont utilisés pour vérifier la stabilité et la précision des résultats obtenus.

Ainsi, l'algorithme de simulation permet d'organiser de manière structurée l'ensemble des opérations nécessaires à la résolution numérique du modèle hydraulique.

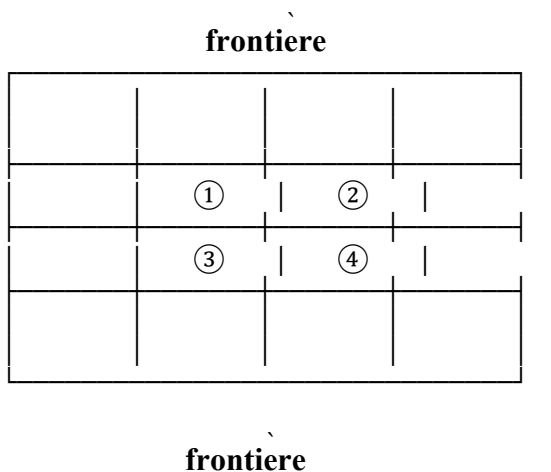
V.B.1.2. Implémentation du schéma de résolution des équations discrétisées

L'implémentation du schéma de résolution des équations discrétisées consiste à transformer les équations obtenues par la méthode des différences finies en un programme informatique capable de fournir des solutions numériques. Cette étape permet de passer de la formulation mathématique à une réalisation pratique du modèle.

Selon le schéma choisi, explicite ou implicite, les équations discrétisées sont traduites sous forme de relations algébriques reliant les valeurs de la charge hydraulique aux différents nœuds du maillage. Dans le cas d'un schéma explicite, les calculs sont effectués directement à partir des valeurs connues des pas précédents, tandis que dans un schéma implicite, il est nécessaire de résoudre un système d'équations simultanées.

L'implémentation nécessite également l'utilisation de méthodes numériques adaptées, telles que les méthodes itératives pour les grands systèmes linéaires. Ces méthodes permettent d'obtenir une solution approchée avec une bonne précision tout en optimisant les ressources de calcul.

Ainsi, l'implémentation du schéma de résolution constitue une étape essentielle pour rendre le modèle opérationnel et permettre la simulation efficace des écoulements en milieu poreux saturé.



Les quatre valeurs inconnues sont :

$$h_1, h_2, h_3, h_4$$

Supposons que les valeurs sur la frontière soient connues.

Équation au nœud 1

Le nœud 1 possède quatre voisins.

Supposons :

$$h_1$$

au centre, et que ses voisins soient :

$$h_L, h_2, h_U, h_3$$

Alors :

$$4h_1 = h_L + h_2 + h_U + h_3$$

Donc :

$$\boxed{4h_1 - h_2 - h_3 = h_L + h_U}$$

Équation au nœud 2

De même :

$$4h_2 = h_R + h_1 + h'_U + h_4$$

Donc :

$$\boxed{-h_1 + 4h_2 - h_4 = h_R + h'_U}$$

Équation au nœud 3

On obtient :

$$\boxed{-h_1 + 4h_3 - h_4 = h'_L + h_D}$$

Équation au nœud 4

Enfin :

$$\boxed{-h_2 - h_3 + 4h_4 = h'_R + h'_D}$$

Regroupons les quatre équations

On a :

$$4h_1 - h_2 - h_3 + 0h_4 = b_1$$

$$-h_1 + 4h_2 + 0h_3 - h_4 = b_2$$

$$-h_1 + 0h_2 + 4h_3 - h_4 = b_3$$

$$0h_1 - h_2 - h_3 + 4h_4 = b_4$$

On écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

C'est le **système d'équations algébriques**.

On peut simplement écrire :

$$\boxed{Ah = b}$$

Vecteur des inconnues

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

Il contient toutes les valeurs inconnues de h aux nœuds internes.

Matrice des coefficients

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

Elle provient directement du stencil à cinq points.

Second membre

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Il contient notamment les contributions provenant des conditions aux limites connues.

Cas où $\Delta x \neq \Delta y$

Il est important de ne pas toujours supposer un maillage carré.

On avait :

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Multiplions par $\Delta x^2 \Delta y^2$:

$$\Delta y^2 (h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}) + \Delta x^2 (h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1})$$

Donc :

$$\Delta y^2 h_{i+1,j} + \Delta y^2 h_{i-1,j} + \Delta x^2 h_{i,j+1} + \Delta x^2 h_{i,j-1}$$

Ou, en isolant $h_{i,j}$:

$$h_{i,j} = \frac{\Delta y^2 (h_{i+1,j} + h_{i-1,j}) + \Delta x^2 (h_{i,j+1} + h_{i,j-1})}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

Pour $\Delta x = \Delta y$, on retrouve naturellement :

$$h_{i,j} = \frac{1}{4} (h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1})$$

Et les conditions aux limites ?

L'équation de Laplace seule ne suffit pas.

Il faut également définir les conditions sur la frontière Γ .

Il existe principalement :

Condition de Dirichlet

On impose directement la valeur :

$$h = h_D$$

Par exemple :

$$h = 100 \text{ m}$$

Sur le bord gauche.

Condition de Neumann

On impose une dérivée normale :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = q_n$$

Par exemple, une frontière imperméable peut être représentée par :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

Le processus complet

On peut donc résumer toute la modélisation ainsi :

Équation physique

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Développement de Taylor

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

L'ensemble des équations discrétisées est ensuite assemblé sous la forme d'un système matriciel :

$$[A]\{H\} = \{B\}$$

où :

A: est la matrice des coefficients issue de la discrétisation ;

H: est le vecteur des charges hydrauliques inconnues ;

B: représente les conditions aux limites ainsi que les termes sources.

V. B.2. Convergence et stabilité numérique**V. B.2.1 Critères de convergence des méthodes itératives**

Les critères de convergence des méthodes itératives constituent un élément fondamental dans la résolution numérique des systèmes d'équations issus de la discrétisation des écoulements en milieu poreux saturé. Ces méthodes sont utilisées lorsque les systèmes algébriques sont trop grands ou trop complexes pour être résolus directement, nécessitant alors une approche progressive basée sur des approximations successives.

La convergence est atteinte lorsque les valeurs successives des inconnues, notamment la charge hydraulique, deviennent suffisamment proches d'une itération à l'autre. Ce rapprochement est généralement évalué à l'aide d'un critère d'erreur, qui peut être défini comme la différence entre deux solutions consécutives ou comme le résidu du système d'équations.

Un critère de convergence adéquat permet de garantir que la solution numérique tend vers une solution stable et physiquement cohérente. En pratique, on impose souvent un seuil de tolérance en dessous duquel l'erreur est considérée comme acceptable. Le choix de ce seuil dépend du niveau de précision souhaité et des caractéristiques du modèle.

Ainsi, les critères de convergence assurent la fiabilité des méthodes itératives et permettent de contrôler la qualité des solutions obtenues.

V. B.2.2 Analyse de la stabilité et conditions de fiabilité du modèle

L'analyse de la stabilité et des conditions de fiabilité du modèle numérique est essentielle pour garantir la validité des simulations des écoulements en milieu poreux saturé. La stabilité d'un schéma numérique désigne sa capacité à produire des solutions bornées et physiquement réalistes au cours des itérations ou des pas de temps successifs.

Un modèle instable peut conduire à des divergences numériques, où les erreurs s'amplifient progressivement jusqu'à rendre la solution inutilisable. La stabilité dépend principalement du choix des paramètres de discrétisation, notamment le pas spatial et le pas temporel, ainsi que du type de schéma utilisé, explicite ou implicite.

Les schémas implicites sont généralement plus stables que les schémas explicites, car ils permettent de mieux contrôler la propagation des erreurs numériques. Cependant, même dans ce cas, certaines conditions doivent être respectées pour garantir la fiabilité des résultats.

La fiabilité du modèle repose également sur la cohérence entre la formulation mathématique, la discrétisation numérique et les paramètres physiques du milieu poreux. Une bonne modélisation doit assurer à la fois la stabilité numérique et la représentativité physique du phénomène étudié.

Ainsi, l'analyse de la stabilité constitue une étape indispensable pour valider le modèle numérique et garantir la pertinence des résultats obtenus dans l'étude des écoulements en milieu poreux saturé.

Exemple :

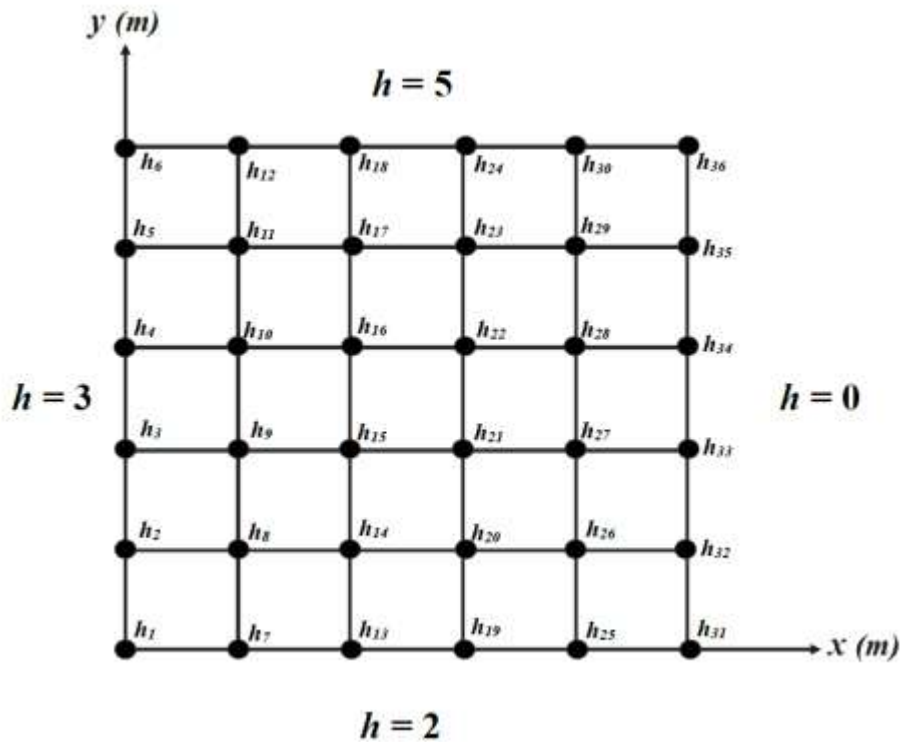


Figure V.3 : Discretisation du domaine d'étude par la méthode des différences finies avec conditions aux limites imposées

Pour un milieu poreux saturé homogène :

$$\nabla^2 h = 0$$

En 2D :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Avec :

$$\Delta x = \Delta y = 1 \text{ m}$$

On reprend :

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad h = 3 \text{ m} \\ y = 0 & \quad h = 2 \text{ m} \\ x = 5 & \quad h = 0 \text{ m} \\ y = 5 & \quad h = 5 \end{aligned}$$

Il y a donc **16 inconnues intérieures** :

$$h_{1,1}, h_{2,1}, \dots, h_4$$

Pour calculer le nœud **h_8** :

On a :

$$h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$

Donc :

$$h_8 = \frac{h_{14} + h_2 + h_9 + h_7}{4}$$

$$4h_8 - h_{14} - h_2 - h_9 - h_7 = 0$$

$$\boxed{4h_8 - h_{14} - h_9 = h_2 + h_7}$$

Chapitre VI :

Analyse théorique des résultats

Introduction :

Ce chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse des résultats obtenus à l'aide du code de calcul développé pour la modélisation numérique d'un écoulement bidimensionnel permanent dans un sol saturé. L'étude est réalisée sur un domaine carré de dimensions 10×10 m, en considérant le même exemple de calcul et les mêmes caractéristiques du milieu étudié.

Afin d'évaluer le comportement de l'écoulement en fonction des conditions aux limites imposées, deux cas sont étudiés. Le premier cas correspond à des conditions aux limites de type Dirichlet, dans lesquelles la charge hydraulique est imposée sur les frontières du domaine. Le deuxième cas concerne des conditions aux limites mixtes, combinant des conditions de Dirichlet, où la charge hydraulique est prescrite, et des conditions de Neumann, caractérisées par l'imposition du flux hydraulique à travers les frontières.

Le code de calcul permet de déterminer la distribution de la charge hydraulique en chaque nœud du maillage, ainsi que de représenter graphiquement les lignes équipotentielles, les lignes de courant et le réseau d'écoulement. Ces résultats permettent de visualiser la répartition des charges hydrauliques au sein du domaine, d'identifier la configuration générale de l'écoulement et d'examiner l'influence des conditions aux limites sur le comportement hydraulique du milieu poreux.

VI.A. La discrétisation du domaine d'étude :

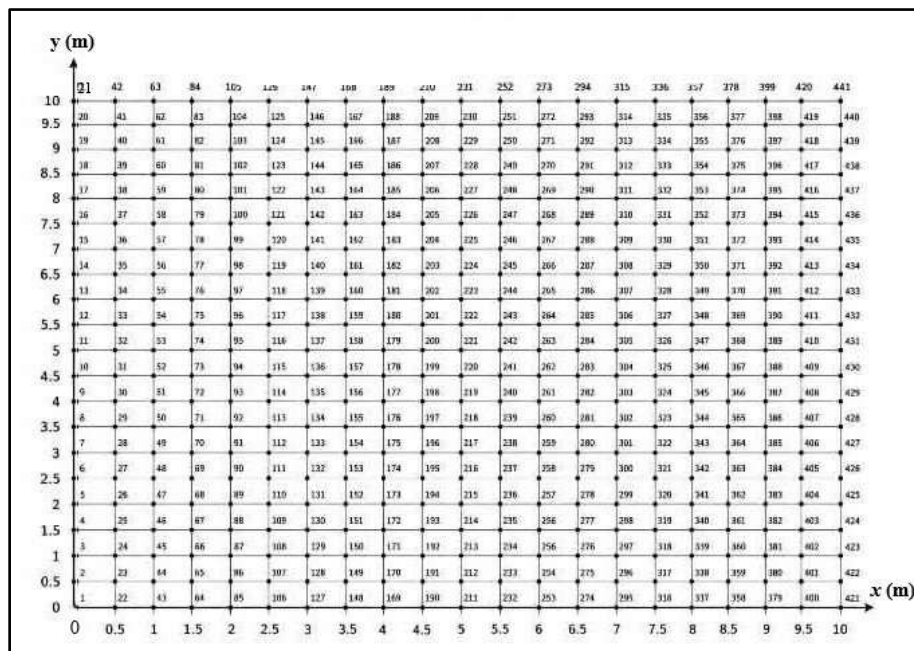


Figure VI.4 : La discrétisation du domaine d'étude

- **Les axes (x et y) :** Le domaine s'étend horizontalement de $x = 0$ m à $x = 10$ m et verticalement de $y = 0$ m à $y = 10$ m.
- **Le pas du maillage (Δx et Δy) :** Chaque maille possède une largeur fixe de $\Delta x = 0,5$ m et une hauteur fixe de $\Delta y = 0,5$ m.

Avec 20 maillages $20 \times 20 = 400$ mailles

- **Les nœuds :** Les intersections des lignes de la grille représentent les nœuds du maillage, identifiés par des points noirs, Il y a un total de $21 \times 21 = 441$ nœuds.

La numérotation de nœud suit une logique séquentielle ordonnée colonne par colonne (de bas en haut, puis de gauche à droite) .

La colonne à $x = 0$ contient les nœuds 1 à 21 (le nœud 1 est à l'origine (0,0) et le nœud 21 est au sommet (0,10)).

La deuxième colonne à $x = 0,5$ contient les nœuds 22 à 42.

Cette logique se répète jusqu'à la dernière colonne à $x = 10$, qui comprend les nœuds 421 à 441.

Chaque point noir correspond à une coordonnée discrète $U_{i,j} = u(X_i, Y_j)$ où :

$$(x_i = i \Delta x \text{ avec } i = 0, 1, 2, \dots, 20).$$

$$(y_j = j \Delta y \text{ avec } j = 0, 1, 2, \dots, 20).$$

En injectant ces approximations dans l'équation classique de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, et puisque $\Delta x = \Delta y = 0,5$, l'équation discrétisée en chaque nœud interne donne le célèbre schéma en étoile ou molécule numérique à 5 points :

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

VI.A.1. CAS 01: Du domaine possèdent des conditions aux limites de Dirichlet :

Conditions aux limites :

-Bord gauche ($x=0$) : $h(0,y) = 20 + 0.5y$

-Bord droite ($x = 10$) : $h(10,y) = 15 \text{ m}$

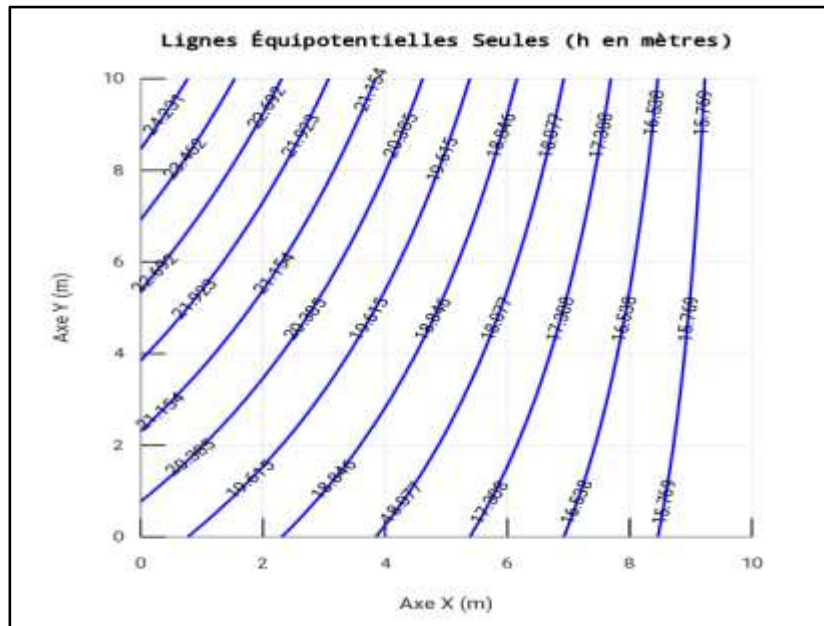
-Bord inférieur ($y=0$) : $h(x,0) = 20 - 0.5x$

-Bord supérieur ($y=10$) : $h(x,10) = 25 - x$

La représentation montre ainsi un **gradient hydraulique globalement orienté de la zone de forte charge vers la zone de faible charge**, la variation de la surface traduit l'influence simultanée des conditions aux limites appliquées sur les quatre côtés du domaine.

Cette représentation permet également de vérifier qualitativement la continuité du champ hydraulique obtenu par la méthode des différences finies. Dans un milieu homogène et isotrope, la variation régulière de la surface est cohérente avec le comportement théorique attendu. Le modèle permet ainsi de transformer les charges calculées aux nœuds du maillage en une représentation spatiale facilement interprétable.

Les résultats de la simulation numérique de l'écoulement bidimensionnel obtenus après la résolution de l'équation de Laplace sous Octave donne les figures suivantes :



est plus intense. À l'inverse, un espacement plus important correspond à une variation plus faible de la charge hydraulique.

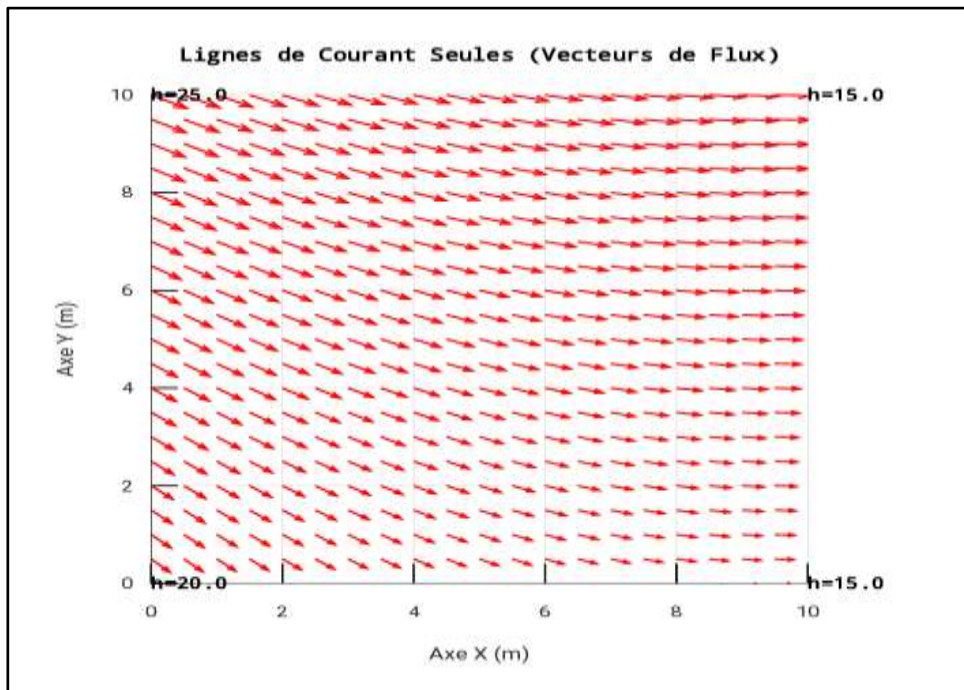


Figure VI.6 : Champ de vitesse et ligne de courant

La figure 6 représente le champ des vitesses d'écoulement obtenu à partir du gradient hydraulique. D'après la loi de Darcy :

$$\vec{v} = -K\nabla h$$

Les vecteurs indiquent donc **la direction et le sens du mouvement de l'eau** dans le milieu poreux.

La figure montre que les vecteurs sont globalement orientés vers la droite, ce qui confirme la diminution générale de la charge hydraulique dans cette direction. Dans la partie supérieure du domaine, les vecteurs présentent une composante horizontale dominante, tandis que dans certaines zones ils possèdent également une composante verticale liée aux variations de charge imposées sur les frontières supérieure et inférieure.

La norme des vecteurs représente l'intensité de l'écoulement. Les zones où le gradient hydraulique est plus important correspondent donc à des vitesses plus élevées. À l'inverse, lorsque les variations de charge sont faibles, les vecteurs deviennent moins importants.

Ces résultats sont cohérents avec le principe selon lequel le fluide se déplace des zones de forte charge vers les zones de faible charge et avec la relation entre le champ de vitesse et le gradient hydraulique.

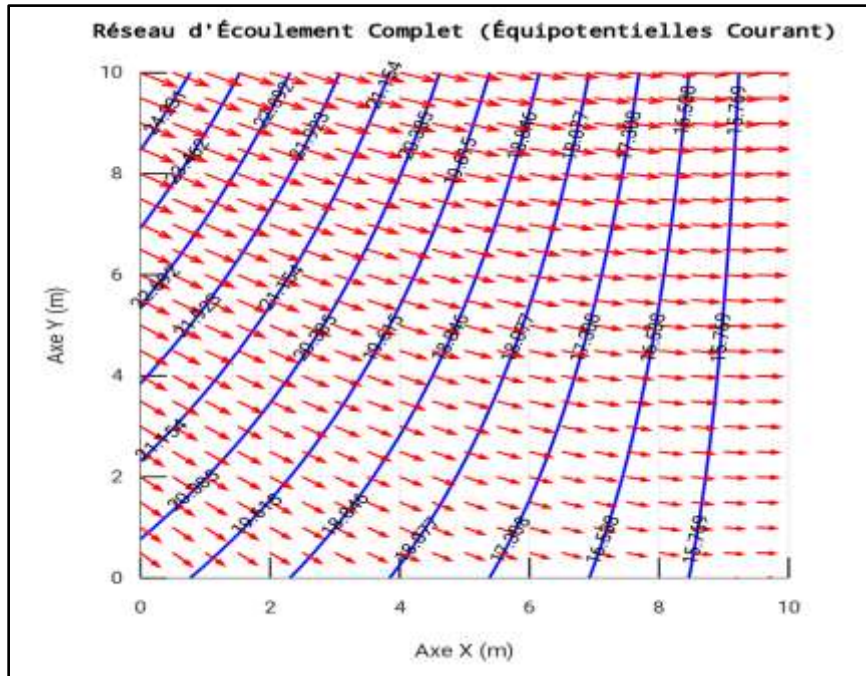


Figure VI .7 : Réseau d'écoulement complet

(La matrice de ces courbes sur l'index)

La figure 7 présente simultanément la distribution de la charge hydraulique et le champ de vitesse dans le milieu poreux saturé, Les lignes équipotentiellles représentent les zones de même charge hydraulique et montrent une diminution progressive de la charge depuis les zones de forte charge vers les zones de faible charge. Les vecteurs de vitesse, superposés aux lignes équipotentiellles, indiquent la direction et le sens de l'écoulement. Ils sont globalement orientés vers les zones de charge hydraulique plus faible et sont perpendiculaires aux lignes équipotentiellles, conformément à la loi de Darcy :

$$\vec{v} = -K\nabla h$$

La concentration des lignes équipotentiellles traduit un gradient hydraulique plus important et correspond à des vitesses d'écoulement plus élevées.

À l'inverse, lorsque les lignes sont plus espacées, le gradient est plus faible et l'écoulement est moins intense. L'association des deux représentations permet ainsi de mettre

en évidence la relation directe entre la distribution de la charge hydraulique, le gradient hydraulique et la direction du flux. Le résultat obtenu est cohérent avec le comportement physique attendu d'un écoulement permanent dans un milieu poreux saturé.

VI.A.2. CAS 02: Du domaine possèdent des conditions aux limites mixtes

La même figure a condition aux limites de Neumann présente le domaine d'étude bidimensionnel utilisé pour la modélisation de l'écoulement souterrain. Le domaine est un carré de dimensions $10\text{ m} \times 10\text{ m}$, discrétisé avec un pas de maillage de $dx = dy = 0,5\text{ m}$. La perméabilité hydraulique du milieu est fixée à $K = 0,0004\text{ m/s}$.

Les conditions aux limites sont définies comme suit :

- À gauche ($x = 0$), une condition de Dirichlet variable est imposée selon

$$h(0, y) = 20 + 0,5y$$

La charge hydraulique varie donc de 20 m à 25 m entre le bas et le haut de cette frontière.

- En haut ($y = 10$), une condition de Dirichlet variable est imposée :

$$h(x, 10) = 25 - x$$

La charge diminue progressivement de 25 m à 15 m de gauche à droite.

- À droite ($x = 10$), une condition de Dirichlet constante est imposée :

$$h(10, y) = 15\text{ m}$$

Cette frontière constitue une zone de charge hydraulique constante.

La charge diminue progressivement de 25 m à 15 m de gauche à droite.

- À droite ($x = 10$), une condition de Dirichlet constante est imposée :

$$h(10, y) = 15\text{ m}$$

Cette frontière constitue ainsi une zone de charge hydraulique constante.

- En bas ($y = 0$), une condition de Neumann à flux nul est appliquée :

$$q_n = 0$$

Cette condition signifie qu'il n'y a aucun écoulement normal à travers la limite inférieure.

Ainsi, les conditions aux limites créent un gradient hydraulique global orienté vers la droite, ce qui entraîne un écoulement des zones de charge élevée vers la zone de charge faible.

Cette configuration constitue la base de la résolution numérique de l'équation de Laplace et permet ensuite de déterminer la distribution de la charge hydraulique ainsi que le champ de vitesse dans le domaine.

Les résultats de la simulation numérique de l'écoulement bidimensionnel obtenus après la résolution de l'équation de Laplace sous Octave donne les figures suivantes :

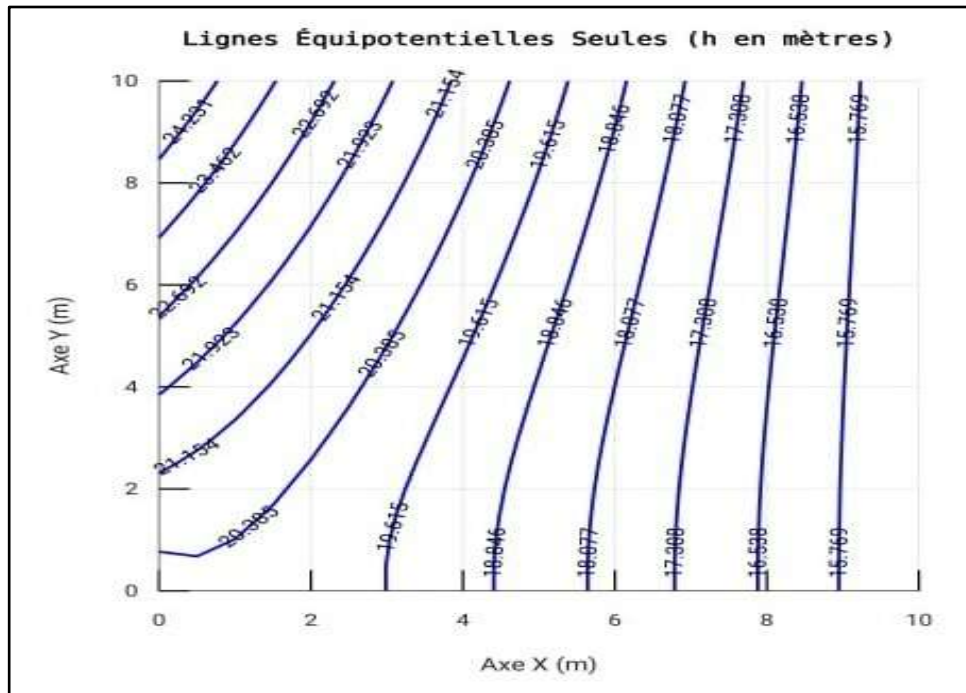


Figure VI.8: Lignes équipotentiellles du champ de charge hydraulique

La Figure 8 présente la distribution bidimensionnelle de la charge hydraulique h dans le domaine étudié. Les lignes équipotentiellles montrent une diminution progressive de la charge hydraulique depuis la zone de forte charge située à gauche et en partie supérieure du domaine vers la limite droite où la charge imposée est plus faible. Les valeurs de h varient approximativement de 15 à 25 m. La déformation des équipotentiellles dans la partie gauche traduit l'influence des conditions aux limites variables imposées sur les frontières gauche et supérieure. En revanche, leur tendance devient plus régulière vers la partie droite, indiquant un champ hydraulique plus homogène.

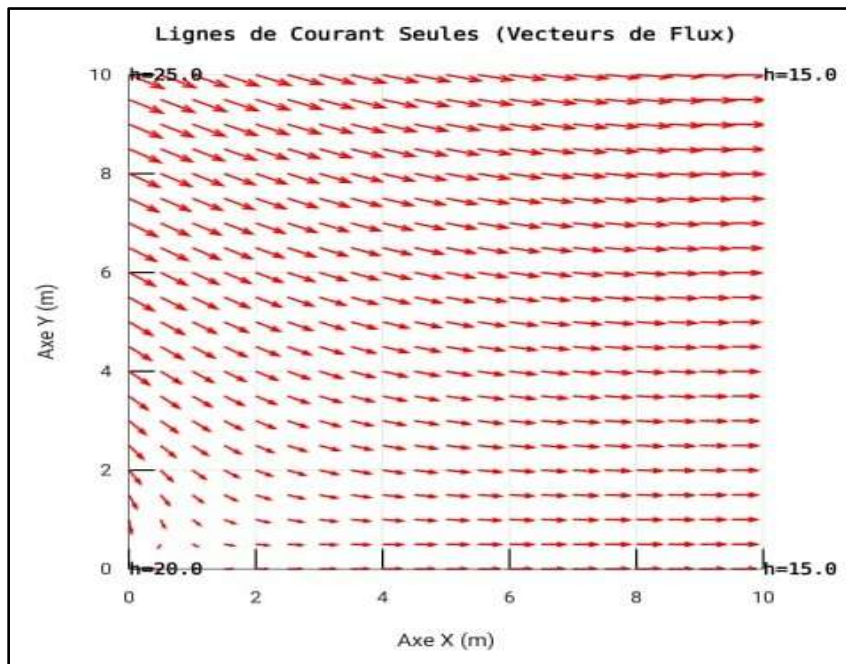


Figure VI.9: Champ de vitesse / vecteurs d'écoulement

La Figure 9 représente le champ bidimensionnel des vitesses d'écoulement à l'aide de vecteurs. Les vecteurs indiquent principalement un écoulement dirigé **des zones de forte charge hydraulique vers les zones de faible charge**, globalement de la gauche vers la droite. Dans la partie gauche du domaine, les vecteurs présentent une composante verticale plus importante, en raison du gradient hydraulique imposé par les conditions aux limites variables. En se rapprochant de la limite droite, l'écoulement devient progressivement plus horizontal. Cette représentation confirme que la direction et l'intensité de l'écoulement sont directement liées au gradient de charge hydraulique.

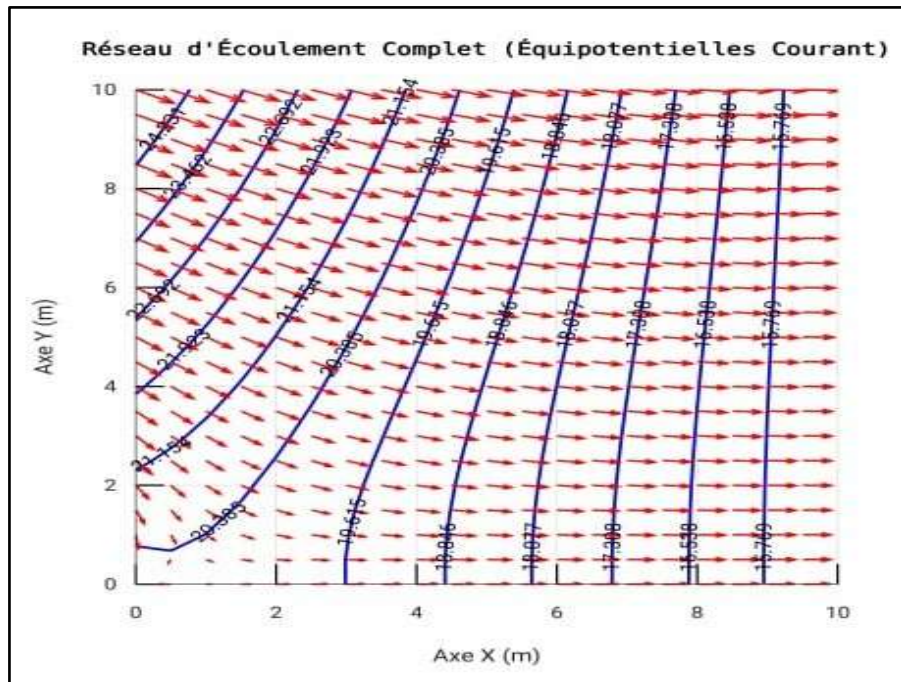


Figure VI.10: Réseau d'écoulement complet

La Figure 10 présente le réseau d'écoulement obtenu par la superposition des **lignes équipotentiels** et des **vecteurs d'écoulement**. Elle permet de visualiser simultanément la distribution de la charge hydraulique et la direction du mouvement de l'eau dans le domaine. Les vecteurs sont globalement orientés perpendiculairement aux lignes équipotentiels, conformément à la loi de Darcy. L'écoulement se fait des régions de charge élevée vers les régions de charge plus faible et devient progressivement horizontal vers la partie droite du domaine. Cette figure met ainsi en évidence la cohérence entre le champ de charge hydraulique calculé et le champ de vitesse obtenu par la modélisation numérique.

VI.A.3. Interprétation générale :

INTERPRÉTATION DU GRAPHE DES LIGNES ÉQUIPOTENTIELLES :

Le graphe des lignes équipotentiels permet d'étudier la distribution de la charge hydraulique et d'identifier les zones où sa variation spatiale est plus ou moins importante.

La figure (VI.5-8) montre que les valeurs de la charge hydraulique varient dans l'espace. Les lignes permettent de visualiser cette répartition et les zones de charges hydrauliques similaires. La géométrie des lignes équipotentiels montre comment la charge hydraulique varie selon la position dans le domaine.

Les lignes rapprochées indiquent un gradient hydraulique plus élevé, tandis que les lignes espacées indiquent un gradient plus faible.

INTERPRÉTATION DES LIGNES DE COURANT :

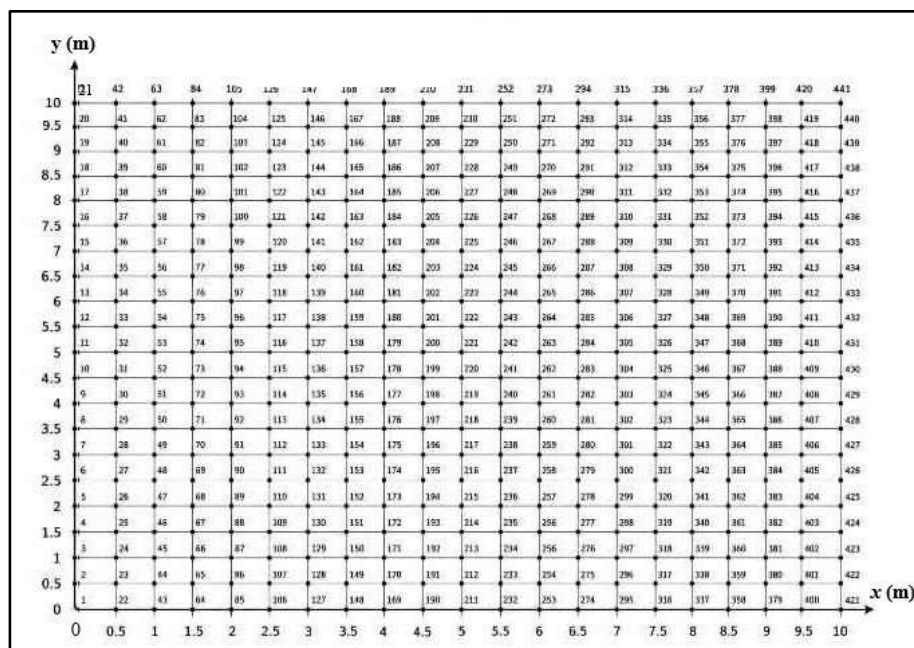
Le graphe (VI.6-9) permet de visualiser la direction, le sens et éventuellement l'intensité du flux de Darcy dans le domaine étudié, en différents points. La pointe de chaque flèche indique le sens dans lequel l'eau s'écoule. Les changements d'orientation des flèches montrent comment la direction du flux varie d'une zone à l'autre. La longueur des flèches est proportionnelle à la norme du flux. Plus la flèche est longue, plus le flux est important.

INTERPRÉTATION DU GRAPHE DU RÉSEAU D'ÉCOULEMENT :

Le graphe (VI.7-10) constitue une représentation synthétique de l'écoulement souterrain. Il associe la distribution de la charge hydraulique, représentée par les lignes équipotentielles, à la direction et au sens du flux de Darcy, représentés par les flèches. Cette représentation facilite l'analyse globale du comportement de l'écoulement dans le domaine étudié. La distribution des lignes équipotentielles et l'orientation des flèches permettent d'analyser conjointement les variations de la charge hydraulique et la configuration de l'écoulement dans le sol.

(La matrice de ces courbes sur l'index)

VI . B. Explication de l'index :



$y m$	$x=0.0$	$x=0.5$	$x=1.0$	$x=1.5$	$x=2.0$	$x=2.5$	$x=3.0$	$x=3.5$	$x=4.0$	$x=4.5$	$x=5.0$	$x=5.5$	$x=6.0$	$x=6.5$	$x=7.0$	$x=7.5$	$x=8.0$	$x=8.5$	$x=9.0$	$x=9.5$	$x=10.0$
0	20	19.75	19.5	19.25	19	18.75	18.5	18.25	18	17.75	17.5	17.25	17	16.75	16.5	16.25	16	15.75	15.5	15.25	15
0.5	20.25	19.988	19.725	19.463	19.2	18.938	18.675	18.413	18.15	17.8875	17.625	17.3625	17.1	16.838	16.575	16.3125	16.05	15.7875	15.525	15.263	15
1	20.5	20.225	19.95	19.675	19.4	19.125	18.85	18.575	18.3	18.025	17.75	17.475	17.2	16.925	16.65	16.375	16.1	15.825	15.55	15.275	15
1.5	20.75	20.463	20.175	19.888	19.6	19.313	19.025	18.738	18.45	18.1625	17.875	17.5875	17.3	17.013	16.725	16.4375	16.15	15.8625	15.575	15.288	15
2	21	20.7	20.4	20.1	19.8	19.5	19.2	18.9	18.6	18.3	18	17.7	17.4	17.1	16.8	16.5	16.2	15.9	15.6	15.3	15
2.5	21.25	20.938	20.625	20.313	20	19.688	19.375	19.063	18.75	18.4375	18.125	17.8125	17.5	17.188	16.875	16.5625	16.25	15.9375	15.625	15.313	15
3	21.5	21.175	20.85	20.525	20.2	19.875	19.55	19.225	18.9	18.575	18.25	17.925	17.6	17.275	16.95	16.625	16.3	15.975	15.65	15.325	15
3.5	21.75	21.413	21.075	20.738	20.4	20.063	19.725	19.388	19.05	18.7125	18.375	18.0375	17.7	17.363	17.025	16.6875	16.35	16.0125	15.675	15.338	15
4	22	21.65	21.3	20.95	20.6	20.25	19.9	19.55	19.2	18.85	18.5	18.15	17.8	17.45	17.1	16.75	16.4	16.05	15.7	15.35	15
4.5	22.25	21.888	21.525	21.163	20.8	20.438	20.075	19.713	19.35	18.9875	18.625	18.2625	17.9	17.538	17.175	16.8125	16.45	16.0875	15.725	15.363	15
5	22.5	22.125	21.75	21.375	21	20.625	20.25	19.875	19.5	19.125	18.75	18.375	18	17.625	17.25	16.875	16.5	16.125	15.75	15.375	15
5.5	22.75	22.363	21.975	21.588	21.2	20.813	20.425	20.038	19.65	19.2625	18.875	18.4875	18.1	17.713	17.325	16.9375	16.55	16.1625	15.775	15.388	15
6	23	22.625	22.2	21.8	21.4	21	20.6	20.2	19.8	19.4	19	18.6	18.2	17.8	17.4	17	16.6	16.2	15.8	15.4	15
6.5	23.25	22.838	22.425	22.013	21.6	21.188	20.775	20.363	19.95	19.5375	19.125	18.7125	18.3	17.888	17.475	17.0625	16.65	16.2375	15.825	15.413	15
7	23.5	23.075	22.65	22.225	21.8	21.375	20.95	20.525	20.1	19.675	19.25	18.825	18.4	17.975	17.55	17.125	16.7	16.275	15.85	15.425	15
7.5	23.75	23.313	22.875	22.438	22	21.563	21.125	20.688	20.25	19.8125	19.375	18.9375	18.5	18.063	17.625	17.1875	16.75	16.3125	15.875	15.438	15
8	24	23.55	23.1	22.65	22.2	21.75	21.3	20.85	20.4	19.95	19.5	19.05	18.6	18.15	17.7	17.25	16.8	16.35	15.9	15.45	15
8.5	24																				

[illegible][illegible]

Conclusion générale

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude des écoulements d'eau dans les milieux poreux saturés représente un domaine important de l'hydraulique souterraine et de l'aménagement hydro-agricole. La compréhension de ces phénomènes nécessite une connaissance des propriétés physiques du sol, des lois qui gouvernent le mouvement de l'eau et des méthodes permettant de représenter mathématiquement son comportement. C'est dans cette perspective que s'inscrit le présent mémoire, consacré à la modélisation numérique d'un écoulement bidimensionnel permanent dans un sol saturé, homogène et isotrope.

L'objectif principal de ce travail était de développer une approche numérique permettant de déterminer la répartition de la charge hydraulique dans un domaine donné et d'analyser les caractéristiques de l'écoulement. Pour atteindre cet objectif, une démarche progressive a été adoptée, depuis l'étude des notions fondamentales relatives aux milieux poreux jusqu'à la formulation mathématique du problème, sa discrétisation et l'exploitation des résultats numériques.

Dans un premier temps, l'étude théorique a permis de mettre en évidence le rôle des propriétés hydrauliques du milieu poreux, notamment la porosité, la perméabilité et la conductivité hydraulique. Ces paramètres influencent la capacité du sol à stocker l'eau et à faciliter sa circulation. Il a également été établi que le mouvement de l'eau dans un milieu saturé est principalement lié aux différences de charge hydraulique entre les différents points du domaine.

La formulation mathématique a ensuite reposé sur l'association de la loi de Darcy et du principe de conservation de la masse. Cette association conduit, sous les hypothèses retenues pour l'étude, à l'équation de Laplace, qui décrit la distribution de la charge hydraulique en régime permanent dans un milieu homogène et isotrope, sans source ni puits internes. L'établissement de cette équation a constitué une étape essentielle pour représenter le phénomène physique à l'aide d'un modèle mathématique cohérent.

Afin de résoudre numériquement le problème, le domaine d'étude a été subdivisé en un maillage bidimensionnel composé de nœuds. La méthode des différences finies a permis d'approcher les dérivées de l'équation de Laplace et de transformer l'équation différentielle en un système d'équations algébriques. Les équations associées aux nœuds inconnus ont ensuite été assemblées sous la forme d'un système linéaire, dont la résolution permet de déterminer les

Conclusion générale

valeurs de la charge hydraulique aux différents points du domaine. Le logiciel Octave a été utilisé pour mettre en œuvre cette démarche de calcul et faciliter l'exploitation des résultats.

L'analyse numérique a porté sur deux configurations de conditions aux limites. Le premier cas correspond à des conditions de Dirichlet, dans lesquelles la charge hydraulique est imposée sur les frontières du domaine. Le second cas repose sur des conditions aux limites mixtes, combinant des charges imposées et des flux hydrauliques imposés. L'étude de ces deux configurations a permis d'examiner l'influence des conditions aux limites sur la distribution de la charge hydraulique et sur l'organisation générale de l'écoulement.

Les représentations graphiques obtenues ont facilité l'interprétation du champ hydraulique. Les lignes équipotentiels ont permis de visualiser la répartition spatiale de la charge hydraulique et de repérer les variations entre les zones de forte charge et celles de faible charge. Les vecteurs de vitesse et les lignes de courant ont également contribué à identifier la direction générale du mouvement de l'eau. Ces représentations montrent l'intérêt de la simulation numérique pour transformer les valeurs calculées en informations physiques plus faciles à interpréter.

Ce travail met ainsi en évidence l'importance de la méthode des différences finies dans la résolution des problèmes d'écoulement en milieu poreux saturé. Elle constitue une approche adaptée à l'étude des distributions de charge hydraulique lorsque la résolution analytique devient difficile. Toutefois, la qualité des résultats dépend de plusieurs facteurs, notamment du choix des conditions aux limites, de la finesse du maillage, de la cohérence des hypothèses physiques et de la qualité de la résolution numérique. Les résultats doivent donc être interprétés dans le cadre des hypothèses adoptées et du domaine étudié.

Sur le plan pratique, cette étude contribue à la compréhension des mécanismes de circulation de l'eau dans les sols et les formations souterraines. Cette compréhension peut être utile dans plusieurs domaines, notamment l'hydrogéologie, l'étude des nappes aquifères, le drainage des terrains agricoles et la gestion des ressources en eau. La modélisation numérique offre en effet la possibilité d'étudier différentes configurations hydrauliques et de mieux comprendre la manière dont les conditions imposées influencent le comportement de l'écoulement.

Conclusion générale

Néanmoins, le modèle développé repose sur des hypothèses simplificatrices, en particulier l'homogénéité et l'isotropie du milieu, la saturation complète et le caractère permanent de l'écoulement. Les sols naturels présentent souvent des propriétés variables dans l'espace, tandis que les conditions hydrauliques peuvent évoluer au cours du temps. Ces particularités ne sont pas entièrement représentées par le modèle actuel et constituent des pistes d'amélioration pour des études ultérieures.

En perspective, il serait intéressant de développer le modèle en considérant des sols hétérogènes et anisotropes, dans lesquels les propriétés hydrauliques varient selon la position ou la direction. L'utilisation de maillages plus fins ou non uniformes pourrait également améliorer la représentation du champ hydraulique. Par ailleurs, l'extension vers les écoulements transitoires permettrait d'étudier l'évolution de la charge hydraulique en fonction du temps. Enfin, une comparaison avec des solutions analytiques disponibles ou des résultats expérimentaux permettrait d'évaluer plus précisément la fiabilité du modèle numérique.

En conclusion, ce mémoire a permis de présenter et de mettre en œuvre les principales étapes de la modélisation numérique d'un écoulement permanent dans un sol saturé, depuis la formulation mathématique jusqu'à l'interprétation des résultats. Il souligne l'intérêt de l'association entre les principes physiques, les méthodes numériques et les outils informatiques pour l'étude des écoulements souterrains. Cette démarche constitue une base de travail pour des recherches plus approfondies visant à améliorer la représentation des phénomènes hydrauliques et à contribuer à une meilleure compréhension de la circulation de l'eau dans les milieux poreux.

Bibliographies

Bibliographies :

- 1- Abdelkader Saidi : Hydrogéologie théorique, OPU Alger, 2017.
- 2- Ahmed Benali : Hydrodynamique des milieux poreux saturés, 2e éd., Dar El Hikma, Alger, 2018.
- 3- Amina Ziani : Étude des aquifères saturés, Thèse de doctorat, Université d'Oran, 2021.
- 4- Antoine Leclerc : Finité Différence Methods, Elsevier, 2016.
- 5- Claire Dubois : Équations différentielles appliquées, Dunod, 2015.
- 6- Fatima Zahra Ait Ali : Modélisation des aquifères, Thèse de doctorat, Université de Tlemcen, 2022.
- 7- Hichem Gharbi : Étude des milieux poreux naturels, Université Constantine, 2020.
- 8- Jean Dupont : Modélisation numérique des écoulements souterrains, 3e éd., Presses Universitaires de France, Paris, 2017.
- 9- Jean-Pierre Henry : Fluid Flow in Porous Media, Cambridge University Press, 2016.
- 10- Karim Haddad : Simulation des écoulements bidimensionnels, ENP Alger, 2019.
- 11- Khaled Messaoudi : Méthode des différences finies, Revue Sciences Appliquées, 2019.
- 12- Laila Bouzid : Simulation numérique hydraulique, OPU, 2018.
- 13- Luc Bernard : Numerical Methods in Porous Media, Wiley, New York, 2015
- 14- Michel Renault : Mathematical Modelling of Groundwater, Springer, 2017.
- 15- Mohamed Khelifi : Écoulement en milieux poreux, Revue Hydraulique, vol. 12, n°2, 2019.
- 16- Nadia Bensalem : Analyse numérique des fluides, Revue Mathématique Appliquée, vol. 14, 2021.
- 17- Omar Farhat : Groundwater Modelling Techniques, Springer, 2019.
- 18- Paul Martin : Groundwater Flow Theory, Springer, Berlin, 2016.
- 19- Pierre Morel : Computational Hydraulics, Springer, 2018.
- 20- Rachid Mekki : Darcy et ses applications modernes, Revue Sciences et Techniques, vol. 8, 2018.
- 21- Samia Cherif : Écoulement transitoire en aquifères, Thèse de doctorat, Université Alger 1, 2021.
- 22- Samir Boudjemaa : Méthodes numériques appliquées à l'hydraulique, Office des Publications Universitaires, Alger, 2020.
- 23- Sophie Laurent : Hydraulique souterraine avancée, Dunod, Paris, 2017.

Bibliographies

- 24- Youssef Belkacem : Transport en milieux poreux, Revue Algérienne de Physique, vol. 5, 2020.
- 25- Samir Boudjemaa : Méthodes numériques appliquées à l'hydraulique, Office des Publications Universitaires, Alger, 2020.
- 26- Sophie Laurent : Hydraulique souterraine avancée, Dunod, Paris, 2017.
- 27- Youssef Belkacem : Transport en milieux poreux, Revue Algérienne de Physique, vol. 5, 2020.

TABLEAU DE LA CHARGE HYDRAULIQUE H(x,y)

Unite : m

Colonnes : x de 0 a 10 m, pas de 0.5 m

y	H(0.0,y)	H(0.5,y)	H(1.0,y)	H(1.5,y)	H(2.0,y)	H(2.5,y)
	H(3.0,y)	H(3.5,y)	H(4.0,y)	H(4.5,y)	H(5.0,y)	H(5.5,y)
	H(6.0,y)	H(6.5,y)	H(7.0,y)	H(7.5,y)	H(8.0,y)	H(8.5,y)
	H(9.0,y)	H(9.5,y)	H(10.0,y)			
0.000000	2.0000000000e+01	1.9750000000e+01	1.9500000000e+01			
	1.9250000000e+01	1.9000000000e+01	1.8750000000e+01	1.8500000000e+01		
	1.8250000000e+01	1.8000000000e+01	1.7750000000e+01	1.7500000000e+01		
	1.7250000000e+01	1.7000000000e+01	1.6750000000e+01	1.6500000000e+01		
	1.6250000000e+01	1.6000000000e+01	1.5750000000e+01	1.5500000000e+01		
	1.5250000000e+01	1.5000000000e+01				
0.500000	2.0250000000e+01	1.9987500000e+01	1.9725000000e+01			
	1.9462500000e+01	1.9200000000e+01	1.8937500000e+01	1.8675000000e+01		
	1.8412500000e+01	1.8150000000e+01	1.7887500000e+01	1.7625000000e+01		
	1.7362500000e+01	1.7100000000e+01	1.6837500000e+01	1.6575000000e+01		
	1.6312500000e+01	1.6050000000e+01	1.5787500000e+01	1.5525000000e+01		
	1.5262500000e+01	1.5000000000e+01				
1.000000	2.0500000000e+01	2.0225000000e+01	1.9950000000e+01			
	1.9675000000e+01	1.9400000000e+01	1.9125000000e+01	1.8850000000e+01		
	1.8575000000e+01	1.8300000000e+01	1.8025000000e+01	1.7750000000e+01		
	1.7475000000e+01	1.7200000000e+01	1.6925000000e+01	1.6650000000e+01		
	1.6375000000e+01	1.6100000000e+01	1.5825000000e+01	1.5550000000e+01		
	1.5275000000e+01	1.5000000000e+01				
1.500000	2.0750000000e+01	2.0462500000e+01	2.0175000000e+01			
	1.9887500000e+01	1.9600000000e+01	1.9312500000e+01	1.9025000000e+01		
	1.8737500000e+01	1.8450000000e+01	1.8162500000e+01	1.7875000000e+01		
	1.7587500000e+01	1.7300000000e+01	1.7012500000e+01	1.6725000000e+01		
	1.6437500000e+01	1.6150000000e+01	1.5862500000e+01	1.5575000000e+01		
	1.5287500000e+01	1.5000000000e+01				
2.000000	2.1000000000e+01	2.0700000000e+01	2.0400000000e+01			
	2.0100000000e+01	1.9800000000e+01	1.9500000000e+01	1.9200000000e+01		
	1.8900000000e+01	1.8600000000e+01	1.8300000000e+01	1.8000000000e+01		
	1.7700000000e+01	1.7400000000e+01	1.7100000000e+01	1.6800000000e+01		
	1.6500000000e+01	1.6200000000e+01	1.5900000000e+01	1.5600000000e+01		
	1.5300000000e+01	1.5000000000e+01				
2.500000	2.1250000000e+01	2.0937500000e+01	2.0625000000e+01			
	2.0312500000e+01	2.0000000000e+01	1.9687500000e+01	1.9375000000e+01		
	1.9062500000e+01	1.8750000000e+01	1.8437500000e+01	1.8125000000e+01		
	1.7812500000e+01	1.7500000000e+01	1.7187500000e+01	1.6875000000e+01		
	1.6562500000e+01	1.6250000000e+01	1.5937500000e+01	1.5625000000e+01		
	1.5312500000e+01	1.5000000000e+01				
3.000000	2.1500000000e+01	2.1175000000e+01	2.0850000000e+01			
	2.0525000000e+01	2.0200000000e+01	1.9875000000e+01	1.9550000000e+01		
	1.9225000000e+01	1.8900000000e+01	1.8575000000e+01	1.8250000000e+01		
	1.7925000000e+01	1.7600000000e+01	1.7275000000e+01	1.6950000000e+01		
	1.6625000000e+01	1.6300000000e+01	1.5975000000e+01	1.5650000000e+01		
	1.5325000000e+01	1.5000000000e+01				

Index

3.500000 2.175000000e+01 2.141250000e+01 2.107500000e+01
2.073750000e+01 2.040000000e+01 2.006250000e+01 1.972500000e+01
1.938750000e+01 1.905000000e+01 1.871250000e+01 1.837500000e+01
1.803750000e+01 1.770000000e+01 1.736250000e+01 1.702500000e+01
1.668750000e+01 1.635000000e+01 1.601250000e+01 1.567500000e+01
1.533750000e+01 1.500000000e+01
4.000000 2.200000000e+01 2.165000000e+01 2.130000000e+01
2.095000000e+01 2.060000000e+01 2.025000000e+01 1.990000000e+01
1.955000000e+01 1.920000000e+01 1.885000000e+01 1.850000000e+01
1.815000000e+01 1.780000000e+01 1.745000000e+01 1.710000000e+01
1.675000000e+01 1.640000000e+01 1.605000000e+01 1.570000000e+01
1.535000000e+01 1.500000000e+01
4.500000 2.225000000e+01 2.188750000e+01 2.152500000e+01
2.116250000e+01 2.080000000e+01 2.043750000e+01 2.007500000e+01
1.971250000e+01 1.935000000e+01 1.898750000e+01 1.862500000e+01
1.826250000e+01 1.790000000e+01 1.753750000e+01 1.717500000e+01
1.681250000e+01 1.645000000e+01 1.608750000e+01 1.572500000e+01
1.536250000e+01 1.500000000e+01
5.000000 2.250000000e+01 2.212500000e+01 2.175000000e+01
2.137500000e+01 2.100000000e+01 2.062500000e+01 2.025000000e+01
1.987500000e+01 1.950000000e+01 1.912500000e+01 1.875000000e+01
1.837500000e+01 1.800000000e+01 1.762500000e+01 1.725000000e+01
1.687500000e+01 1.650000000e+01 1.612500000e+01 1.575000000e+01
1.537500000e+01 1.500000000e+01
5.500000 2.275000000e+01 2.236250000e+01 2.197500000e+01
2.158750000e+01 2.120000000e+01 2.081250000e+01 2.042500000e+01
2.003750000e+01 1.965000000e+01 1.926250000e+01 1.887500000e+01
1.848750000e+01 1.810000000e+01 1.771250000e+01 1.732500000e+01
1.693750000e+01 1.655000000e+01 1.616250000e+01 1.577500000e+01
1.538750000e+01 1.500000000e+01
6.000000 2.300000000e+01 2.260000000e+01 2.220000000e+01
2.180000000e+01 2.140000000e+01 2.100000000e+01 2.060000000e+01
2.020000000e+01 1.980000000e+01 1.940000000e+01 1.900000000e+01
1.860000000e+01 1.820000000e+01 1.780000000e+01 1.740000000e+01
1.700000000e+01 1.660000000e+01 1.620000000e+01 1.580000000e+01
1.540000000e+01 1.500000000e+01
6.500000 2.325000000e+01 2.283750000e+01 2.242500000e+01
2.201250000e+01 2.160000000e+01 2.118750000e+01 2.077500000e+01
2.036250000e+01 1.995000000e+01 1.953750000e+01 1.912500000e+01
1.871250000e+01 1.830000000e+01 1.788750000e+01 1.747500000e+01
1.706250000e+01 1.665000000e+01 1.623750000e+01 1.582500000e+01
1.541250000e+01 1.500000000e+01
7.000000 2.350000000e+01 2.307500000e+01 2.265000000e+01
2.222500000e+01 2.180000000e+01 2.137500000e+01 2.095000000e+01
2.052500000e+01 2.010000000e+01 1.967500000e+01 1.925000000e+01
1.882500000e+01 1.840000000e+01 1.797500000e+01 1.755000000e+01
1.712500000e+01 1.670000000e+01 1.627500000e+01 1.585000000e+01
1.542500000e+01 1.500000000e+01
7.500000 2.375000000e+01 2.331250000e+01 2.287500000e+01
2.243750000e+01 2.200000000e+01 2.156250000e+01 2.112500000e+01

Index

2.0687500000e+01	2.0250000000e+01	1.9812500000e+01	1.9375000000e+01
1.8937500000e+01	1.8500000000e+01	1.8062500000e+01	1.7625000000e+01
1.7187500000e+01	1.6750000000e+01	1.6312500000e+01	1.5875000000e+01
1.5437500000e+01	1.5000000000e+01		
8.000000	2.4000000000e+01	2.3550000000e+01	2.3100000000e+01
2.2650000000e+01	2.2200000000e+01	2.1750000000e+01	2.1300000000e+01
2.0850000000e+01	2.0400000000e+01	1.9950000000e+01	1.9500000000e+01
1.9050000000e+01	1.8600000000e+01	1.8150000000e+01	1.7700000000e+01
1.7250000000e+01	1.6800000000e+01	1.6350000000e+01	1.5900000000e+01
1.5450000000e+01	1.5000000000e+01		
8.500000	2.4250000000e+01	2.3787500000e+01	2.3325000000e+01
2.2862500000e+01	2.2400000000e+01	2.1937500000e+01	2.1475000000e+01
2.1012500000e+01	2.0550000000e+01	2.0087500000e+01	1.9625000000e+01
1.9162500000e+01	1.8700000000e+01	1.8237500000e+01	1.7775000000e+01
1.7312500000e+01	1.6850000000e+01	1.6387500000e+01	1.5925000000e+01
1.5462500000e+01	1.5000000000e+01		
9.000000	2.4500000000e+01	2.4025000000e+01	2.3550000000e+01
2.3075000000e+01	2.2600000000e+01	2.2125000000e+01	2.1650000000e+01
2.1175000000e+01	2.0700000000e+01	2.0225000000e+01	1.9750000000e+01
1.9275000000e+01	1.8800000000e+01	1.8325000000e+01	1.7850000000e+01
1.7375000000e+01	1.6900000000e+01	1.6425000000e+01	1.5950000000e+01
1.5475000000e+01	1.5000000000e+01		
9.500000	2.4750000000e+01	2.4262500000e+01	2.3775000000e+01
2.3287500000e+01	2.2800000000e+01	2.2312500000e+01	2.1825000000e+01
2.1337500000e+01	2.0850000000e+01	2.0362500000e+01	1.9875000000e+01
1.9387500000e+01	1.8900000000e+01	1.8412500000e+01	1.7925000000e+01
1.7437500000e+01	1.6950000000e+01	1.6462500000e+01	1.5975000000e+01
1.5487500000e+01	1.5000000000e+01		
10.000000	2.5000000000e+01	2.4500000000e+01	2.4000000000e+01
2.3500000000e+01	2.3000000000e+01	2.2500000000e+01	2.2000000000e+01
2.1500000000e+01	2.1000000000e+01	2.0500000000e+01	2.0000000000e+01
1.9500000000e+01	1.9000000000e+01	1.8500000000e+01	1.8000000000e+01
1.7500000000e+01	1.7000000000e+01	1.6500000000e+01	1.6000000000e+01
1.5500000000e+01	1.5000000000e+01		

Colonnes : x de 0 a 10 m, pas de 0.5 m

101

102

TABLEAU DE LA COMPOSANTE VERTICALE $q_y(x,y)$

Unite : m/s

Colonnes : x de 0 a 10 m, pas de 0.5 m

y	$q_y(0.0,y)$	$q_y(0.5,y)$	$q_y(1.0,y)$	$q_y(1.5,y)$	$q_y(2.0,y)$	$q_y(2.5,y)$
	$q_y(3.0,y)$	$q_y(3.5,y)$	$q_y(4.0,y)$	$q_y(4.5,y)$	$q_y(5.0,y)$	$q_y(5.5,y)$
	$q_y(6.0,y)$	$q_y(6.5,y)$	$q_y(7.0,y)$	$q_y(7.5,y)$	$q_y(8.0,y)$	$q_y(8.5,y)$
	$q_y(9.0,y)$	$q_y(9.5,y)$	$q_y(10.0,y)$			
0.000000	-2.0000000000e-04	-1.9000000000e-04	-1.8000000000e-04	-		
1.7000000000e-04	-1.6000000000e-04	-1.5000000000e-04	-1.4000000000e-04	-		
1.3000000000e-04	-1.2000000000e-04	-1.1000000000e-04	-1.0000000000e-04	-		
9.0000000000e-05	-8.0000000000e-05	-7.0000000000e-05	-6.0000000000e-05	-		
5.0000000000e-05	-4.0000000000e-05	-3.0000000000e-05	-2.0000000000e-05	-		
1.0000000000e-05	0.0000000000e+00					
0.500000	-2.0000000000e-04	-1.9000000000e-04	-1.8000000000e-04	-		
1.7000000000e-04	-1.6000000000e-04	-1.5000000000e-04	-1.4000000000e-04	-		
1.3000000000e-04	-1.2000000000e-04	-1.1000000000e-04	-1.0000000000e-04	-		
9.0000000000e-05	-8.0000000000e-05	-7.0000000000e-05	-6.0000000000e-05	-		
5.0000000000e-05	-4.0000000000e-05	-3.0000000000e-05	-2.0000000000e-05	-		
1.0000000000e-05	0.0000000000e+00					
1.000000	-2.0000000000e-04	-1.9000000000e-04	-1.8000000000e-04	-		
1.7000000000e-04	-1.6000000000e-04	-1.5000000000e-04	-1.4000000000e-04	-		
1.3000000000e-04	-1.2000000000e-04	-1.1000000000e-04	-1.0000000000e-04	-		
9.0000000000e-05	-8.0000000000e-05	-7.0000000000e-05	-6.0000000000e-05	-		
5.0000000000e-05	-4.0000000000e-05	-3.0000000000e-05	-2.0000000000e-05	-		
1.0000000000e-05	0.0000000000e+00					
1.500000	-2.0000000000e-04	-1.9000000000e-04	-1.8000000000e-04	-		
1.7000000000e-04	-1.6000000000e-04	-1.5000000000e-04	-1.4000000000e-04	-		
1.3000000000e-04	-1.2000000000e-04	-1.1000000000e-04	-1.0000000000e-04	-		
9.0000000000e-05	-8.0000000000e-05	-7.0000000000e-05	-6.0000000000e-05	-		
5.0000000000e-05	-4.0000000000e-05	-3.0000000000e-05	-2.0000000000e-05	-		
1.0000000000e-05	0.0000000000e+00					
2.000000	-2.0000000000e-04	-1.9000000000e-04	-1.8000000000e-04	-		
1.7000000000e-04	-1.6000000000e-04	-1.5000000000e-04	-1.4000000000e-04	-		
1.3000000000e-04	-1.2000000000e-04	-1.1000000000e-04	-1.0000000000e-04	-		
9.0000000000e-05	-8.0000000000e-05	-7.0000000000e-05	-6.0000000000e-05	-		
5.0000000000e-05	-4.0000000000e-05	-3.0000000000e-05	-2.0000000000e-05	-		
1.0000000000e-05	0.0000000000e+00					
2.500000	-2.0000000000e-04	-1.9000000000e-04	-1.8000000000e-04	-		
1.7000000000e-04	-1.6000000000e-04	-1.5000000000e-04	-1.4000000000e-04	-		
1.3000000000e-04	-1.2000000000e-04	-1.1000000000e-04	-1.0000000000e-04	-		
9.0000000000e-05	-8.0000000000e-05	-7.0000000000e-05	-6.0000000000e-05	-		
5.0000000000e-05	-4.0000000000e-05	-3.0000000000e-05	-2.0000000000e-05	-		
1.0000000000e-05	0.0000000000e+00					
3.000000	-2.0000000000e-04	-1.9000000000e-04	-1.8000000000e-04	-		
1.7000000000e-04	-1.6000000000e-04	-1.5000000000e-04	-1.4000000000e-04	-		
1.3000000000e-04	-1.2000000000e-04	-1.1000000000e-04	-1.0000000000e-04	-		
9.0000000000e-05	-8.0000000000e-05	-7.0000000000e-05	-6.0000000000e-05	-		
5.0000000000e-05	-4.0000000000e-05	-3.0000000000e-05	-2.0000000000e-05	-		
1.0000000000e-05	0.0000000000e+00					

105

TABLEAU DES DEBITS AUX FRONTIERES

Debit par unite d'epaisseur (m²/s)

Convention : debit sortant positif

Frontiere	Debit_m2_s
-----------	------------

Gauche	-3.000000000000e-03
--------	---------------------

Droite	3.000000000000e-03
--------	--------------------

Inferieure	1.000000000000e-03
------------	--------------------

Superieure	-1.000000000000e-03
------------	---------------------

Bilan_global	6.938893903907e-18
--------------	--------------------

