

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de master
Spécialité : Contrôle et Analyse des Systèmes

Thème
Présentées par
Briki Hana
Bouhenni Houria

Soutenu le /05/2016

President	Devant le jury	M^r MOHAMMEDI	MUSTAPHA	MMA
Examineur		M^{me} BECHAOUI	KHADIDJA	MMA
Encadreur		M^r BOUAGADA	DJILLALI	Professeur

Table des matières

Introduction	5
1 Rappels d'algèbre linéaire	7
1.1 Notions de base	7
1.1.1 l'inverse d'une matrice	7
1.1.2 Rang d'une matrice	8
1.1.3 Polynôme caractéristique d'une matrice	8
1.1.4 Noyau d'une matrice	8
1.1.5 L'image d'une matrice	8
1.1.6 Représentation de Jordan	8
1.1.7 L'adjoint d'une matrice	10
1.1.8 L'auto-adjointe d'une matrice	10
1.1.9 L'inverse de Moore-Penrose :	10
1.1.10 Faisceau de matrice :	11
1.1.11 Théorème de Weistrass : Cas d'un faisceau régulier	12
2 Une introduction à l'inverse de Drazin	13
2.1 Matrice inverse de Drazin	13
3 Dérivation et intégration fractionnaire	15
3.1 Dérivation et intégration fractionnaire	15
3.1.1 Notions de base sur le calcul fractionnaire	15
3.1.2 L'intégral fractionnaire	16
3.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	16
3.1.4 Dérivée de Caputo ${}^cD_a^\alpha$	18
3.1.5 La relation entre dérivée Caputo et dérivée Riemann-Liouville	19
4 Résolution des systèmes différentiels d'ordre fractionnaires linéaires à temps continu par inverse de Drazin	23
4.1 Solution de l'équation d'état par inverse de Drazin :	26
4.2 Exemple :	28
4.3 Systèmes linéaires invariants à temps continu singuliers unidimensionnel . . .	30
4.4 Cas des systèmes Fractionnaires singuliers à faisceaux réguliers	31

5 Conclusion Générale	36
Bibliographie	37

Résumé

Le but de ce travail est l'étude du problème de solvabilité de systèmes différentiels linéaires à dérivées non entières dits aussi systèmes fractionnaires. Nous considérons la classe des systèmes singuliers pour dériver des solutions sous certaines contraintes. Nous utiliserons dans ce cadre l'inverse généralisé. La décomposition de Weierstrass pour des faisceaux réguliers est aussi utilisée pour étendre les résultats à cette classe de systèmes

Remerciement

Nous remercions Allah le tout puissant d'avoir exaucé notre rêve, de nous avoir donnée la santé, la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Nous tenons particulièrement à remercier notre encadreur Monsieur BOUAGADA Djillali, Professeur à l'université de Mostaganem qui a suscité notre intérêt pour le sujet et qui a su nous orienter par son soutien permanent, ses conseils utiles et ses critiques qui nous ont beaucoup aidée à apprécier ce travail malgré ses occupations. Nous le remercions vivement d'avoir surtout initié nos premières recherches en théorie des systèmes et de contrôle. Nous lui sommes très reconnaissantes pour la confiance qu'il nous a accordé et la liberté qu'il nous a laissée.

Un grand merci aux membres de Jury Monsieur Mustapha MOHAMMEDI d'avoir accepté de présider ce mémoire et Madame Khadidja BECHAOUI pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions également tous ceux qui tout au long de ces années d'études, nous ont encadré, aidée, conseillée, et plus particulièrement nos enseignants du département de Mathématiques informatique de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.

Nous remercions vivement Messieurs, A. AMIR, S. M. BAHRI, Z. DAHMANI, D. BOUAGADA et O. BELHAMITI membres de l'équipe pédagogique du Master Modélisation, Contrôle et Optimisation.

Nous adressons un grand merci à toutes les étudiantes du Master 1 et 2 du département de Mathématiques, que nous avons eu le plaisir de côtoyer durant ces années d'études.

Enfin, nous aimerions conclure en saluant tous ceux qui accomplissent leur travail consciencieusement et qui font tout pour l'évolution de notre cher PAYS.

Introduction

Le monde connaît actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performance. En grande partie, ce progrès est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des mathématiques en général a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingénieur. L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie est celle du Calcul Fractionnaire qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires, ainsi que la dérivation d'ordre fractionnaire

Au début, c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée. Le 30 septembre 1695, Leibnitz adresse une lettre à l'Hospital dans laquelle, il aborde le problème de dérivation fractionnaire. Ce dernier lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre "un demi" d'une fonction x . Leibnitz lui répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles résultats. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler(1730) ; Fourier(1823) ; Liouville(1832) ; Riemann(1847) ;etc...

Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

Durant presque plus de 300 ans, la théorie du Calcul Fractionnaire a été développée uniquement en tant que théorie pure utile juste pour les mathématiciens. Ce n'est qu'au début des années 1950 que Vanderziel [28] dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole [27] dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides ont pu modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

Depuis ces découvertes, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leurs intérêt dans différentes disciplines telles que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique, le traitement de signal et dans différentes applications telles que : la modélisation, l'identification et la commande. En effet, il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématiques d'ordre fractionnaire

Nombreux sont les chercheurs scientifiques dont l'attention est attirée par la classe des systèmes différentielles d'ordre fractionnaire tels que : le circuit de Chua d'ordre fractionnaire [29], le système de Duffing d'ordre fractionnaire [38], le système de Rössler d'ordre fractionnaire [30].

Les publications dans ce domaine sont considérables : D. Matignon (1994) [31], D. Matignon et B. Andréa-Novel (1996) [32], Y. Peng, X. Guangming et W. Long (2003) [33], S. Guermah, S. Djennoune et M. Bettayeb (2008) [34], T. Kaczorek (2008) [35], B. M. Vinagre, C.A. Monje et A. J. Caldero (2002) [36], J. Tenreiro Macchado (2011) [37], [38] et la liste reste longue.

Les systèmes sur lesquels on va se pencher sont les systèmes linéaires standards d'ordre fractionnaires à temps continu définis par les équations d'état,

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) & N-1 < \alpha \leq N \quad (N \in \mathbb{N}^*) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Les systèmes linéaires discrets singuliers ont été pris en compte dans de nombreux articles et livres [1-15]. Les valeurs propres et les vecteurs propres, problèmes d'affectation représentés par des équations d'état, d'entrées et de sorties ont été étudiés dans [7, 10, 16, 17] et de contrôle des systèmes linéaires discrets dans [18, 19]. Le calcul par la forme canonique de Kronecker des faisceaux réguliers a été analysé dans [14]. Les systèmes linéaires positifs différentiels d'ordre fractionnaires ainsi que leur commandabilité ont été traités dans [20]. Le traitement de ces systèmes par l'inverse de Drazin est étudié dans [1-3, 9, 13, 22, 23] tandis que la décomposition des systèmes fractionnaires sous forme matricielles a été introduite dans [12]. L'inverse de Drazin est appliqué pour trouver la solution de systèmes linéaires à temps discrets et à faisceaux réguliers voir [23-26].

Un chapitre introductif regroupant les résultats fondamentaux est introduit pour répondre aux questions posées.

Dans le chapitre 2 on introduit la notion de l'inverse généralisé qu'on utilisera pour la résolution de nos systèmes.

Le chapitre 3 rappelle les notions du calcul fractionnaire et quelques propriétés. Des exemples d'applications sont exposés.

Enfin, le problème de solvabilité des systèmes différentiels d'ordre fractionnaires et singuliers par l'inverse de Drazin est introduit dans le chapitre 4.

Nous proposons ensuite une approche de décomposition par Weierstrass pour résoudre cette classe de systèmes.

Chapitre 1

Rappels d'algèbre linéaire

L'étude des matrices est tout à fait ancienne. Leibnitz est l'un des fondateurs de l'analyse qui a développé la théorie des déterminants en 1693 pour faciliter la résolution des équations différentielles.

Les matrices sont maintenant utilisées pour de multiples applications et servent notamment à représenter les coefficients d'équations et systèmes linéaires.

1.1 Notions de base

1.1.1 l'inverse d'une matrice

On appelle inverse de la matrice carré A toute matrice B telle que :

$$AB = BA = I$$

la matrice B est alors notée :

$$B = A^{-1}$$

Remarque

Une matrice et l'inverse de cette matrice ont nécessairement les mêmes dimensions

Propriétés

- Il suffit qu'une matrice B vérifie l'une des relations,

$$AB = I$$

et

$$BA = I$$

pour qu'elle vérifie l'autre.

- Si deux matrices A et B sont inversibles, leur produit est inversible et l'inverse du produit est le produit des inverses effectués dans l'ordre inverse.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- L'inverse de la transposée d'une matrice A est égale à la transposée de l'inverse

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- Determinant de l'inverse d'une matrice :

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

1.1.2 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est égale au nombre de lignes linéairement indépendantes, en d'autre terme le rang d'une matrice est égale à la dimension de la plus grande matrice carrée extraite dont le déterminant est non nul.

1.1.3 Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), Le polynôme caractéristique de A est le polynôme $P_A(\lambda)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ défini par,

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1.1.4 Noyau d'une matrice

-Le noyau d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, notée $\text{Ker}(A)$ est le noyau de l'application linéaire canonique associée à A et on a :

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m, Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

1.1.5 L'image d'une matrice

L'image d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, notée $\text{Im}(A)$, est l'image de l'application linéaire canonique associée à A et on a :

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } Ax = y\}$$

1.1.6 Représentation de Jordan

En algèbre linéaire la forme canonique de Jordan, d'un opérateur linéaire, dans un espace de dimension fini, est une matrice triangulaire supérieure telle que les éléments diagonaux sont des valeurs propres de la matrice à diagonale supérieure égale à 1,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \lambda_n & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

telle que les λ_i sont les valeurs propres de la matrice A.

P est la matrice de passage de coefficients P_I formés par les vecteurs propres associés à λ_i .

Exemple 1.1 *Considérons l'exemple suivant*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de B sont 4, 4, 2 et 1. De plus, on remarque que :

$$\dim \ker (B - I) = 1, \dim \ker (B - 2I) = 1, \dim \ker (B - 4I) = 1, \text{ et } \dim \ker (B - 4I)^2 = 2.$$

Nous en déduisons que la matrice de Jordan sera (à permutation près des trois blocs) de la forme.

$$J = \begin{bmatrix} J_2(4) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ker(B - 4I)^2 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Nous en déduisons une matrice de passage P telle que $P^{-1}BP$ soit égale à la matrice de Jordan J :

$$P = ((B - 4I)V \mid V \mid W \mid X) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.7 L'adjoint d'une matrice

Une matrice adjointe (aussi appelée matrice transconjuguée) d'une matrice M aux coefficients complexes est la matrice transposée de la matrice conjuguée de M . Dans le cas particulier où M est à coefficients réels, sa matrice adjointe est donc simplement sa matrice transposée.

La matrice adjointe est traditionnellement notée M^* .

$$M^* = \overline{{}^t M}$$

$$\begin{pmatrix} 3+i & 5 \\ 2-2i & i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3-i & 2+2i \\ 5 & -i \end{pmatrix}$$

1.1.8 L'auto-adjointe d'une matrice

La matrice auto-adjointe d'une matrice M à coefficients réels, est la matrice M^* telle que :

$$M^* = M$$

1.1.9 L'inverse de Moore-Penrose :

Pour une matrice à coefficients réels ou complexes (pas nécessairement carrée), ou pour une autre application linéaire entre espaces euclidiens ou hermitiens, il existe un unique pseudo-inverse satisfaisant certaines conditions supplémentaires, appelé pseudo-inverse de Moore-Penrose (ou pseudo-inverse).

Etant donné une matrice A à coefficients réels ou complexes avec n lignes et p colonnes, son pseudo-inverse noté A^+ est l'unique matrice à p lignes et n colonnes vérifiant les conditions suivantes :

$$AA^+A = A \tag{1.1}$$

$$A^+AA^+ = A^+ \text{ (} A^+ \text{ est un inverse pour le semi-groupe multiplicatif)} \tag{1.2}$$

$$(AA^+)^* = AA^+ \text{ (} AA^+ \text{ est une matrice hermitienne)} \tag{1.3}$$

$$(A^+A)^* = A^+A \text{ (} A^+A \text{ est également hermitienne)} \tag{1.4}$$

Dans ce cas, la notion M^* désigne la matrice adjointe à M , c'est à dire, la transposée pour le cas réel de cette matrice peut s'obtenir comme une limite :

$$A^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} (A^*A + \delta I)^{-1} A^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} A^* (AA^* + \delta I)^{-1}$$

elle existe, même si les matrices produits (A^*A) et (AA^*) ne sont pas inversibles.

Propriétés

$$(A^+)^+ = A$$

$$(A^T)^+ = (A^+)^T$$

$$(A^*)^+ = (A^+)^*$$

L'inverse de Moore-Penrose (pseudo-inverse) est :

- 1- Involution (une involution est une application bijective qui est sa propre réciproque)
- 2- Commutative avec la transposition et la conjugaison .

Cependant, la pseudo-inverse n'est pas continue en effet, elle est inversement linéaire par rapport à la multiplication par un scalaire.

Pour tout $\alpha \neq 0$,

$$(\alpha A)^+ = \frac{1}{\alpha} A^+$$

Soit AB un produit de deux matrices. Si l'une au moins est unitaire, ou si les deux matrices sont de rang maximal égal à leur dimension commune, alors la pseudo-inverse est anti-commutative sur le produit.

$$(AB)^+ = B^+ A^+$$

si A est auto-adjointe, alors A^+ est aussi auto-adjointe, car de la relation (4) on déduit :

$$A^+ = (A^+)^*$$

Pour les matrices auto-adjointes ($A = A^*$) les relation (1) et (2) :

$$AA^+ = A^+A \quad , \quad A^+ = A^+AA^+$$

$$A^+A^2 = A$$

En effet, de (2) et (4) on aura :

$$AA^+ = (AA^+)^* = (A^+)^* A^* = A^+A$$

1.1.10 Faisceau de matrice :

Un faisceau de matrices noté $(Es - A)$ ou encore (E, A) est une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré égale à 1. Il est dit régulier si

- 1- $\det(Es - A) \neq 0$ pour un certains $s \in \mathbb{C}$.
- 2- E et A sont des matrices carée de même ordre.

Notons que dans le cas où $\det(Es - A) = 0$, le faisceau est dit singulier

1.1.11 Théorème de Weistrass : Cas d'un faisceau régulier

Tout faisceau régulier $A + \lambda B$ peut être réduit en une forme quasi-diagonale canonique (strictement équivalente) :

$$\begin{bmatrix} J + \lambda I & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & N^{\mu_1} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & N^{\mu_s} \end{bmatrix}$$

où la forme normale du premier bloc diagonal $J + \lambda I$ est déterminée d'une façon unique par les diviseurs élémentaires de $A + \lambda B$ et les s derniers blocs diagonaux correspondent aux diviseurs élémentaires infinis $\mu_1, \dots, \mu_s$ avec,

$$\begin{aligned} N^{\mu_1} &= I^{\mu_1} + \mu_1 H \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Une introduction à l'inverse de Drazin

Il a été récemment montré que l'inverse de Drazin d'une matrice carrée a de multiples applications qui peuvent être très intéressantes. Il est utilisé pour trouver une solution approchée de systèmes linéaires et de systèmes d'équations différentielles respectivement avec des matrices singulières. L'inverse de Drazin dépend généralement de l'index de la matrice. Toutes les définitions connues sur cette inverse sont dans les espaces de dimension finie qui sont les restrictions de l'espace de tout les opérateurs.

2.1 Matrice inverse de Drazin

On appelle matrice inverse de Drazin, la matrice carrée A d'ordre n , la matrice notée A^D qui vérifie le système d'équations suivant :

$$A^D A = A A^D \quad (2.1)$$

$$A^D = A^D A A^D$$

$$(I - A^D A) A^k = 0 \quad (2.2)$$

$$(AB)^D A = A(BA)^D$$

où $k = \text{ind} A$, c'est à dire le plus petit entier positif tel que :

$$\text{rang} A^{k+1} = \text{rang} A^k$$

La matrice inverse de Drazin existe toujours pour toute matrice carrée, et elle est unique et a un sens simple
soit :

$$A = N \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} N^{-1} \quad (2.3)$$

La representation Jordanienne pour A , J_0 est l'ensemble de tous les blocs nilpotents (non inversibles), J_1 est l'ensemble des blocs (inversibles), alors,

$$A^D = N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_1^{-1} \end{pmatrix} N^{-1} \quad (2.4)$$

comme $\mathfrak{S}_0^k = 0$, il s'ensuit

$$A^k = N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_1^k \end{pmatrix} N^{-1} \quad (2.5)$$

En particulier, si $k = 1$, il vient

$$A = N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_1 \end{pmatrix} N^{-1} \quad (2.6)$$

C'est à dire pour chaque bloc B , il existe un $m \in \mathbb{N}$ telle que $B^m = 0$.

Dans ce cas A ne contient pas de blocs nilpotents d'ordre supérieure à 1. On appelle ces matrices les matrices de structure simple. D'après (2.5) A^s ($s \geq k$) sont des matrices de structure simple.

Et de même chaque matrice inversible est de structure simple (car les blocs nilpotents sont absents) et $k = 0$, suite à,

$$rgA^0 = rgI = n = rgA$$

donc :

$$A^D = A^{-1}$$

Chapitre 3

Dérivation et intégration fractionnaire

3.1 Dérivation et intégration fractionnaire

L'objectif dans cette partie dans un premier temps est de mettre en évidence les bases théoriques des dérivées d'ordre fractionnaire, et les principales propriétés de l'opérateur de dérivation fractionnaire. Plusieurs approches et définitions ont été le fruit de contributions de mathématiciens de renommée. Dans ce chapitre, on va se limiter aux deux approches les plus populaires et les plus praticables qui sont celles de Riemann-Liouville et l'approche de Caputo.

3.1.1 Notions de base sur le calcul fractionnaire

La fonction Gamma

Une des fonctions de base pour le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler notée $\Gamma(z)$ définie par l'intégral :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt \quad \text{Re}(z) > 0 \dots (1)$$

Citons quelques propriétés :

$$1) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad z \succ 0$$

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

Preuve :

1) Par une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} \exp(-t) t^z dt \\ &= [-\exp(-t) t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

2) En effet dans (1), si on prend $z=n$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2) \\ &= n!\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.1.2 L'intégral fractionnaire

L'histoire du calcul fractionnaire constitue l'une des plus belles aventures de l'esprit humains sur la quelle se sont engagés plusieurs mathématiciens aussi que des physiciens.

les spécialistes s'accordent pour faire remonter le début de cette histoire à la fin de l'année 1695 quand Leibniz dans une lettre à l'hôpital a voulu engager une réflexion sur une possible théorie des dérivées d'ordre non entier dans sa réponse, l'hôpital c'est interrogé sur la signification qu'on peut donner à la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$, la réponse de Leibniz contenait la phrase suivante : "cela conduirait à un paradoxe à partir du quel, un jour on pourra tirer des conséquences utiles ."

Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières conséquences.

les premiers travaux sont dus à Liouville entre 1832-1837. Indépendamment, Riemann propose une approche qui s'est avérée celle de Liouville, cette théorie porte le nom de Riemann-Liouville. Plus tard d'autres théories ont fait leurs apparitions .

Définition : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville, l'intégrale suivante :

$$(J_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad \text{tel que } \alpha \geq 0 \tag{3.2}$$

3.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Intégrale fractionnaire sur l'intervalle $[a, b]$

Soit une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$

$$\begin{aligned}f^{(-1)}(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ f^{(-2)}(x) &= \int_a^x \int_a^t f(\tau) d\tau dt \\ &= \int_a^x (x-t)f(t) dt\end{aligned}$$

par récurrence, on peut montrer la formule de Cauchy pour tout entier naturel :

$$\begin{aligned}
f^{(-n)}(x) &= \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1 \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma, Riemann se rendit compte que le second membre de (3.3) pouvait avoir un sens même si n prenait une valeur non entière. Il définit alors l'intégrale fractionnaire comme suit,

Définition : La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction continue sur $[a, b]$ est définie par :

$${}^{RL}D_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad \text{pour } \alpha > 0$$

Dérivée fractionnaire sur $[a, b]$ au sens de Riemann-Liouville

Dans la formule de Cauchy :

$$f^{(-n)}(x) = J^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Pour k entier ($k \geq 0$), on peut obtenir :

$$f^{(-k-n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

où le symbole D^{-k} ($k \geq 0$) désigne l'intégration d'ordre k .

D'un autre côté, si on fixe n , pour tout entier k ($k \geq n$) la dérivation d'ordre $(k-n)$ de la fonction f peut s'écrire :

$$f^{(k-n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \tag{3.4}$$

où le symbole D^k ($k \geq 0$) désigne la dérivation d'ordre k .

A partir de la formule (3), on peut prévoir une extension pour la dérivée d'ordre non entier.

On va fixer dans la formule (3.4) l'entier k ($k \geq 0$) et remplacer l'entier n par un réel α tel que $k - \alpha > 0$; ceci donne :

$$D^{k-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^k \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad 0 < \alpha \leq 1$$

En posant $p = k - \alpha$, on aboutit alors à,

Définition :

Soient $f : [a, b]$ une fonction continue et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f

la fonction suivante :

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) := \frac{d^n}{dt^n} J_a^{n-\alpha} f(t) = D_a^n J_a^{n-\alpha} f(t) \quad n-1 < \alpha < n$$

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= D_a^n J_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

avec $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cas particulier : $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &: = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{1-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= D^n J_a^{n-\alpha} f(t) \end{aligned}$$

Limites formelles :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n-1 < \alpha < n$

$$\begin{aligned} a) \lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \\ b) \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} f(x) \end{aligned}$$

Résultats importants :

$${}^{RL}D_a^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}$$

$$J^\alpha x^\beta = x^{\beta+\alpha}$$

3.1.4 Dérivée de Caputo ${}^cD_a^\alpha$

Nous avons vu dans la partie précédente que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]n-1; n[$; $n \in \mathbb{N}$ s'obtient par une application de $J^{n-\alpha}$ suivie d'une dérivation classique d'ordre n .

La dérivée au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérateurs.

Définition :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n - 1 < \alpha < n$ et $f \in C^n[a, b]$, on appelle dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de f , la fonction définie par :

$${}^c D_a^\alpha f(t) := J^{n-\alpha} D^n f(t) \quad n-1 < \alpha < n$$

en d'autres termes :

$${}^c D_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du$$

3.1.5 La relation entre dérivée Caputo et dérivée Riemann-Liouville

soient $\alpha \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \in C^n([a, b])$, on a :

$${}^C D^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha [f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)]$$

Démonstration :

Le développement de f au voisinage de a d'ordre n est donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} D^n f(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + J^n D^n f(x) \end{aligned}$$

Par application de $J^{n-\alpha}$, on obtient,

$$J^{n-\alpha} f(x) = J^{2n-\alpha} f^{(n)}(x) + J^{n-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right)$$

Puis, on applique une dérivation classique d'ordre n

$$\begin{aligned} D^n J^{n-\alpha} f(x) &= D^n J^{2n-\alpha} f^{(n)}(x) + D^n J^{n-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) \\ &= D^n J^n J^{n-\alpha} f^{(n)}(x) + D^n J^{n-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) \\ &= J^{n-\alpha} f^{(n)}(x) + D^n J^{n-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} J^{n-\alpha} f^{(n)}(x) &= D^n J^{n-\alpha} f(x) + D^n J^{n-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) \\ &= D^n J^{n-\alpha} \left(f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) \end{aligned}$$

Finalement,

$${}^c D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha \left(f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right)$$

Comme exemple illustratif, on prend un circuit électrique, qui peut être représenté par un système linéaire fractionnaire.

Considérons un circuit électrique linéaire composé de résistances, super condensateurs (ultra capacité), bobines et tension (source de courant), comme variables d'états (composantes des vecteurs d'états) la tension à travers les super condensateurs, et le courant dans les bobines sont habituellement choisis. Il y'a lieu de savoir que le courant $i(t)$ dans les super condensateurs est relié avec sa tension par la formule suivante :

$$i(t) = C \frac{d^\alpha u_c(t)}{dt^\alpha} \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1 \quad (3.5)$$

Lorsque C est la capacité du condensateur.

De même, la tension $u_L(t)$ dans la bobine avec son courant : $i_L(t)$, sont liées par la formule ci-dessous.

$$u_L(t) = L \frac{d^\beta i_L(t)}{dt^\beta} \quad \text{pour } 0 < \beta < 1 \quad (3.6)$$

Lorsque L est l'inductance de la bobine.

En utilisant les relations (3.5) et (3.6) et les lois de kirchhoff on aboutit au système linéaire fractionnaire qui modélise notre circuit :

$$\begin{pmatrix} \frac{d^\alpha x_C}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\beta x_L}{dt^\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ x_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} e$$

tel que les composantes de $x_C \in \mathbb{R}^{n_1}$ sont les tensions à travers les super condensateurs, les composantes de $x_L \in \mathbb{R}^{n_2}$ sont les courants dans les bobines et les composantes de $e \in \mathbb{R}^m$ sont les tensions du circuit.

On passe maintenant au model suivant, qui n'est rien d'autre qu'un circuit électrique linéaire représenté par la figure 1, avec des résistances connue R_1 , R_2 et R_3 et capacités C_1

et C_2 , inductances L_1 et L_2 et sources de tension e_1 et e_2 .

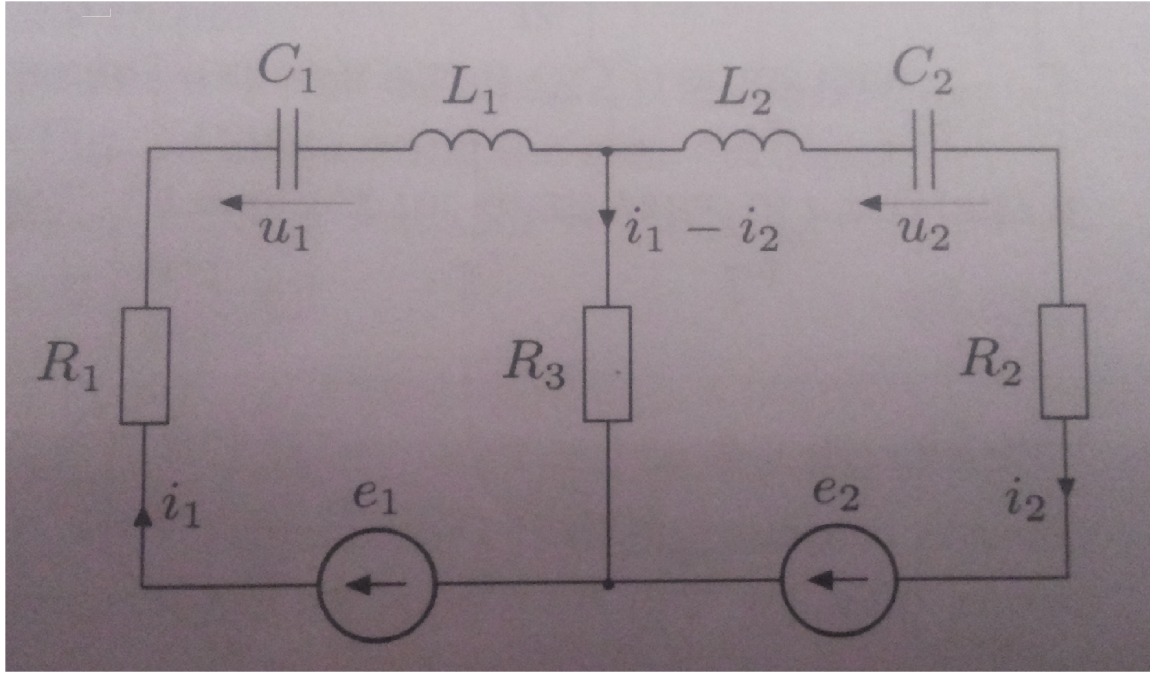


figure1

En utilisant les relation (3.5) et (3.6) ainsi que la loi de kirchhoff ; on obtient les équations suivantes :

$$i_1 = C_1 \frac{d^{\alpha_1} u_1}{dt^{\alpha_1}} \quad , \quad i_2 = C_2 \frac{d^{\alpha_2} u_2}{dt^{\alpha_2}} \quad (3.7)$$

$$e_1 = (R_1 + R_2) i_1 + L_1 \frac{d^{\beta_1} i_1}{dt^{\beta_1}} + u_1 - R_3 i_2 \quad (3.8)$$

$$e_1 = (R_2 + R_3) i_2 + L_2 \frac{d^{\beta_2} i_2}{dt^{\beta_2}} + u_2 - R_3 i_1 \quad (3.9)$$

les équations (3.7)-(3.8) et (3.9) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha_1} u_1}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2} u_2}{dt^{\alpha_2}} \\ \frac{d^{\beta_1} i_1}{dt^{\beta_1}} \\ \frac{d^{\beta_2} i_2}{dt^{\beta_2}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{R_1+R_2}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

et,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} .$$

Il s'agit d'un modèle à dérivées d'ordre non entiers.

Chapitre 4

Résolution des systèmes différentiels d'ordre fractionnaires linéaires à temps continu par inverse de Drazin

Nous exposerons dans ce chapitre une approche liée à [38] tout en proposant une autre approche par la décomposition de Weierstrass. Nous traitons le cas de faisceaux réguliers.

Notre intérêt maintenant porte sur la question suivante : Quelle solution, pour une telle classe de systèmes.

Nombreux sont les papiers qui ont soulevé ce problème tout en donnant la forme de la solution. Citons [38], [39]

On considère le système linéaire à temps continu décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$E {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.1)$$

α est l'ordre fractionnaire, $x(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de contrôle, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et

$${}^C D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.2)$$

est la dérivée de Caputo d'ordre α fractionnaire de $x(t)$ et

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \exp^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (4.3)$$

étant la fonction Gamma

On suppose que $\det E = 0$, mais le faisceau (E, A) de (4.1) est régulier, c'est à dire,

$$\det [Es - A] \neq 0 \quad \text{pour } s \in \mathbb{C} \quad (4.4)$$

On assure que pour un choix de $s \in \mathbb{C}$, $\det [Es - A] \neq 0$ et en multipliant (4.1) par $[Es - A]^{-1}$, on obtient alors,

$$\overline{E} {}^C D_t^\alpha x(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}u(t) \quad (4.5)$$

tel que :

$$\overline{E} = [Es - A]^{-1} E \quad (4.6)$$

$$\overline{A} = [Es - A]^{-1} A$$

$$\overline{B} = [Es - A]^{-1} B$$

Il est à noter que les équations (4.1) et (4.4) ont la même solution $x(t)$.

Définition 1 :

Le plus petit entier positif non nul q est appelé l'index de la matrice $\overline{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si

$$\text{rang} \overline{E}^q = \text{rang} \overline{E}^{q+1} \quad (4.7)$$

Définition 2 :

la matrice $\overline{E}^D$ est appelée la matrice inverse de Drazin de $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si elle satisfait les conditions suivantes :

$$\overline{E} \overline{E}^D = \overline{E}^D \overline{E} \quad (4.8)$$

$$\overline{E}^D = \overline{E}^D \overline{E} \overline{E}^D \quad (4.9)$$

$$\overline{E}^D \overline{E}^{q+1} = \overline{E}^q \quad (4.10)$$

Où q désigne l'index de $\overline{E}$ et est définie en (4.7).

Vérifions ces propriétés

Preuve. 1) $\overline{E} \overline{E}^D = \overline{E}^D \overline{E}$

On a :

$$\overline{E}^D \overline{E} = [(Es - A)^{-1} E]^D [(Es - A)^{-1} E]$$

d'après (2.2)

$$= [(Es - A)^{-1} E \ I]^D [(Es - A)^{-1} E]$$

$$= [(Es - A)^{-1} E] [(Es - A)^{-1} E]^D$$

$$= \overline{E} \overline{E}^D$$

2) $\overline{E}^D = \overline{E}^D \overline{E} \overline{E}^D$

Sachant que :

$$\overline{E}^D \overline{E} \overline{E}^D = (\overline{E}^D \overline{E}) \overline{E}^D$$

$$= (\overline{E} \overline{E}^D) \overline{E}^D \quad (\text{d'après 4.8})$$

On pose,

$$\begin{aligned}\overline{E} &= A \\ \overline{E}^D &= A^D\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AA^D &= N \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} N^{-1} N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_1^{-1} \end{pmatrix} N^{-1} \\ &= NN^{-1} \\ &= I \quad \dots\dots\dots(*)\end{aligned}$$

d'après (*), on obtient,

$$\begin{aligned}\overline{E}^D \overline{E} \overline{E}^D &= I \overline{E}^D \\ &= \overline{E}^D\end{aligned}$$

$$3) \overline{E}^D \overline{E}^{q+1} = \overline{E}^q$$

vu que,

$$\overline{E}^D \overline{E}^{q+1} = \overline{E}^D \overline{E} \overline{E}^D \overline{E}^{q+1}$$

il s'ensuit alors,

$$\overline{E}^D \overline{E}^{q+1} = \overline{E}^D \overline{E} \overline{E}^D \overline{E}^q$$

et suite à (4.8), nous aurons,

$$= \overline{E} \overline{E}^D \overline{E} \overline{E}^D \overline{E}^q$$

puis en utilisant (4.9), il s'ensuit,

$$= I \overline{E}^q$$

$$= \overline{E}^q$$

■

Remarque :

- 1- L'index de Drazin de $\overline{E}^D$ de la matrice carrée $\overline{E}$ existe toujours et il est unique.
- 2- Si $\det \overline{E} \neq 0$ alors $\overline{E}^D = \overline{E}^{-1}$.

Lemme 1 :

Les matrices $\overline{E}$ et $\overline{A}$ définies en (4.5) vérifient les égalités suivantes :

$$1. \overline{A} \overline{E} = \overline{E} \overline{A} \quad (4.11)$$

$$\overline{A}^D \overline{E} = \overline{E} \overline{A}^D$$

$$\overline{E}^D \overline{A} = \overline{A} \overline{E}^D$$

$$\overline{A}^D \overline{E}^D = \overline{E}^D \overline{A}^D$$

$$2. \ker \overline{A} \cap \ker \overline{E} = \{0\} \quad (4.12)$$

$$3. \overline{E} = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1} \quad (4.13)$$

$$\overline{E}^D = T \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

$\det T \neq 0$, $J \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ est non singulière, $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ est nilpotente et $n_1 + n_2 = n$

$$4. (I_n - \overline{E} \overline{E}^D) \overline{A} \overline{A}^D = I_n - \overline{E} \overline{E}^D \quad (4.14)$$

$$(I_n - \overline{E} \overline{E}^D) (\overline{E} \overline{A}^D)^q = 0$$

Remarque

Il est à noter que les conditions 1 et 2 du lemme assure la solvabilité du système.

On dira dans ce cadre que le système est consistant .

4.1 Solution de l'équation d'état par inverse de Drazin :

Dans cette section, on va utiliser l'inverse de Drazin de la matrice $\overline{A}$ et $\overline{E}$ comme outil pour trouver la solution de l'équation d'état (4.1).

Théorème 1 La solution de l'équation (4.1) est donnée par,

$$x(t) = \Phi_0(t) \bar{E} \bar{E}^D v + \bar{E}^D \int_0^t \Phi(t-\tau) \bar{B} u(\tau) d\tau + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{A}^D)^k \bar{A}^D \bar{B} u^{(k\alpha)}(t) \quad (4.15)$$

Lorsque :

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \quad (4.16)$$

$$u^{(k\alpha)}(t) = {}^C D_t^{k\alpha} u(t) \quad (4.17)$$

et le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire.

Preuve :

Pour prouver ce théorème, on doit montrer que (4.15) satisfait l'équation (4.5). En remplaçant (4.15) dans la partie latérale de l'équation (4.5), et en utilisant (4.16), la définition 2 et le lemme 1, on obtient,

$$\begin{aligned} \bar{E} {}^C D_t^\alpha x(t) &= \bar{E} {}^C D_t^\alpha \left[\Phi_0(t) \bar{E} \bar{E}^D v + \bar{E}^D \int_0^t \Phi(t-\tau) \bar{B} u(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{A}^D)^k \bar{A}^D \bar{B} u^{(k\alpha)}(t) \right] \\ &= \bar{E} {}^C D_t^\alpha [\bar{E} \bar{E}^D v + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} v + \bar{E}^D \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{B} u(\tau) d\tau \\ &\quad + \bar{E}^D \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^{k+1} (t-\tau)^{(k+2)\alpha-1}}{\Gamma[(k+2)\alpha]} \bar{B} u(\tau) d\tau \\ &\quad + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{A}^D)^k \bar{A}^D \bar{B} u^{(k\alpha)}(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{E} (\bar{E}^D \bar{A})^{k+1} t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} v + \bar{E}^D \bar{B} u(t) + (\bar{E}^D)^2 \bar{A} \int_0^t \Phi(t-\tau) \bar{B} u(\tau) d\tau \\ &\quad + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{A}^D)^k \bar{A}^D \bar{B} u^{(k\alpha)}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A[\Phi_0(t)\bar{E} \bar{E}^D v + \bar{E}^D \int_0^t \Phi(t-\tau)\bar{B}u(\tau)d\tau \\
&+ (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{A}^D)^k \bar{A}^D \bar{B}u^{(k\alpha)}(t)] + Bu(t)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Moyennant la propriété 2 du lemme 1, il s'ensuit,

$${}^C D_t^\alpha \bar{E} \bar{E}^D v = 0, \quad \bar{E}^D (\bar{E}^D \bar{A})^{k+1} = \bar{A}^{k+1} (\bar{E}^D)^k, \tag{4.19}$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^{k+1} t^{(k+2)\alpha-1}}{\Gamma[(k+2)\alpha]}$$

Une conséquence du théorème est ce pendant dérivée.

Corollaire

Supposons les conditions 1 et 2 du lemme 1 satisfaites, alors il existe une solution de l'équation (4.5) si et seulement si :

$$x(0) = x_0 = \bar{E} \bar{E}^D v + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{A}^D)^k \bar{A}^D \bar{B}u^{(k\alpha)}(0) \tag{4.20}$$

Dans ce cas, la solution est unique .

Pour que $u(t)$ soit admissible, il faut que les conditions initiales vérifient (4.20). Pour le cas particulier où $u(t) = 0$ on a : $x_0 = \bar{E} \bar{E}^D v$ et $x^0 \in \text{Im}(\bar{E} \bar{E}^D)$ lorsque cela représente l'image de $\bar{E} \bar{E}^D$.

4.2 Exemple :

On considère le système (4.1) avec les matrices

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{4.21}$$

Le couple de (4.21) est régulier car

$$\det [Es - A] = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(s+1) \neq 0$$

On choisit $s = 1$ et les matrices (4.6) prennent les formes suivantes :

$$\bar{E} = [Es - A]^{-1} E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\bar{A} = [Es - A]^{-1} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = [Es - A]^{-1} B.$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant (4.9) et (4.23) on obtient

$$\bar{E}^D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \& \quad \bar{A}^D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Il est facile de vérifier que les matrices de (4.23) vérifient les conditions (4.8), (4.10), (4.11) et (4.13)

En utilisant (4.28) et (4.16) on obtient,

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \begin{bmatrix} -1^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{E}^D \bar{A})^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \\ \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \begin{bmatrix} -1^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

qui donne

$$\bar{E}^D \bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

de (4.15) et (4.16), nous aurons la solution souhaitée sous la forme

$$x(t) = \Phi_0(t) \bar{E} \bar{E}^D v + \bar{E}^D \int_0^t \Phi(t-\tau) \bar{B} u(\tau) d\tau + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{A}^D)^k \bar{A}^D \bar{B} u^{(k\alpha)}(t) \quad (4.27)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \begin{bmatrix} -1^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v + \frac{1}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \begin{bmatrix} (-0.5)^k \\ 0 \end{bmatrix} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau \right]$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

on a alors

$$\overline{E} \overline{E}^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{E} \overline{E}^D - I_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q = 1$$

et

$$\begin{aligned} \overline{A}^D \overline{B} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.28}$$

pour un $v \in \mathbb{R}^2$ arbitraire.

4.3 Systèmes linéaires invariants à temps continu singuliers unidimensionnel

Le système,

$$\begin{cases} E \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

est utilisé pour décrire certain type de processus. Notons que cette classe de systèmes d'écrit les modèles représentant les systèmes interconnectés entre eux dont on cite par exemple les circuits RLC, les réseaux, etc....

Ce dernier est appelé système linéaire invariant à temps continu (sous l'hypothèse que le temps t dans lequel évolue le système est continu).

Il est parfois utile de considérer aussi un temps k discret, ou $k \in \mathbb{N}$. De tels systèmes linéaires sont dits à temps discret, et vérifient généralement l'équation de récurrence de type :

$$\begin{cases} E x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice d'entrée, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ la matrice de sortie, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ la matrice de couplage ou de transmission et $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ généralement est singulière .

4.4 Cas des systèmes Fractionnaires singuliers à faisciaux réguliers

Considérons le système fractionnaire LTI singulier à temps continu suivant,

$$\begin{cases} E {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.29)$$

1- **Dans le cas où E^{-1} existe**

Le système s'écrit sous la forme,

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.29')$$

qui est un système explicite (pour $E = I_n$, le système est aussi appelé standard).

A ce stade là, on peut déterminer facilement la solution du système en tenant compte de plusieurs travaux citons [21], [38].

Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction Exponentiel. Elle joue un rôle important dans le recherche des solutions des équations différentielles fractionnaires.

Définition :

La fonction de la variable complexe z définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

est appelée la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.

Exemple 4.1 Pour $\alpha = 1$, on obtient

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$$

Une autre fonction dite de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

La solution de (4.29') est donnée par [21] dans le théorème suivant,

Théorème :

La solution de (4.29') est de la forme ;

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \hat{B}u(\tau) d\tau, \quad x(0) = x_0$$

où,

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(\hat{A}t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

et

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}$$

avec $E_\alpha(\hat{A}t^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler et $\Gamma(z)$ la fonction Gamma.

Pour prouver le théorème, on utilise [21] ou encore, moyennant [38], on donnera la solution sous forme :

Théorème [38]

La solution du système (4.29') est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} (E^{-1}A)^i x_0^{(k)} \\ &+ \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} (E^{-1}A)^i \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} E^{-1}Bu(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

2- Dans le cas où $\det E = 0$,

Le système (4.29) est singulier, il satisfait alors la condition (4.4), alors il existe deux matrices non singulières $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que le système (4.29) peut être décomposer en deux sous systèmes :

A- Un sous-système lent, qui aura la forme,

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha \bar{x}_1 = \bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{B}_1 u \\ \bar{y}_1(t) = \bar{C}_1 \bar{x}_1 \end{cases}$$

B- Un sous-système rapide

$$\begin{cases} {}^N D_t^\alpha \bar{x}_2 = \bar{x}_2 + \bar{B}_2 u \\ \bar{y}_1(t) = \bar{C}_2 \bar{x}_2 \end{cases}$$

où,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= Q^{-1}x \quad \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \bar{E} = PEQ &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & \\ & N \end{bmatrix}, \quad N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \\ \bar{A} = PAQ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{B} &= PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, & \bar{B}_1 &\in \mathbb{R}^{n_1 \times m}, \bar{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}, \\ \bar{C} &= CQ = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}, & \bar{C}_1 &\in \mathbb{R}^{p \times n_1}, \bar{C}_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}, \\ y &= y_1 + y_2, n_1 = \deg \det [Es - A],\end{aligned}$$

N est nilpotente d'indice de nilpotente μ , c-à-d $N^{\mu-1} \neq 0$ et $N^\mu = 0$ avec $\mu = rg E - \deg \det [Es - A] + 1$.

On peut donc, déterminer facilement les solutions des deux sous-systèmes en utilisant l'inverse de Drazin, par suite,

Le sous-système lent :

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha \bar{x}_1 = \bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{B}_1 u \\ \bar{y}_1(t) = \bar{C}_1 \bar{x}_1 \end{cases}$$

En faisant les mêmes démarches qui on été faite dans la preuve précédente, on aboutit à,

$$\bar{x}_1(t) = \bar{\Phi}_0(t)x_0 + \int_0^t \bar{\Phi}(t-\tau) \bar{B}_1 u(\tau) d\tau, \quad x(0) = x_0$$

$$\bar{\Phi}_0(t) = E_\alpha(\bar{A}_1 t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_1^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

et

$$\bar{\Phi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_1^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}.$$

Le sous-système rapide

$$\begin{cases} {}^N D_t^\alpha \bar{x}_2 = \bar{x}_2 + \bar{B}_2 u \\ \bar{y}_2(t) = \bar{C}_2 \bar{x}_2 \end{cases}$$

Pour trouver la solution du sous-système rapide, on va suivre la même procédure

$$\begin{aligned} \bar{N} {}^C D_t^\alpha x(t) &= \bar{N} {}^C D_t^\alpha [\bar{\Phi}_0(t) \bar{N} \bar{N}^D v + \bar{N}^D \int_0^t \bar{\Phi}(t-\tau) \bar{B}_2 u(\tau) d\tau \\ &+ (\bar{N} \bar{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{N} \bar{I}_{n_2}^D)^k \bar{I}_{n_2}^D \bar{B}_2 u^{(k\alpha)}(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{N} {}^C D_t^\alpha [\bar{N} \bar{N}^D v + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{N}^D \bar{I}_{n_2})^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} v + \bar{N}^D \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{B}_2 u(\tau) d\tau \\
&\quad + \bar{N}^D \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{N}^D \bar{I}_{n_2})^{k+1} (t-\tau)^{(k+2)\alpha-1}}{\Gamma[(k+2)\alpha]} \bar{B}_2 u(\tau) d\tau \\
&\quad + (\bar{N} \bar{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{N} \bar{I}_{n_2}^D)^k \bar{I}_{n_2}^D \bar{B}_2 u^{(k\alpha)}(t)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{N} (\bar{N}^D \bar{I}_{n_2})^{k+1} t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} v + \bar{N}^D \bar{B}_2 u(t) + (\bar{N}^D)^2 \bar{I}_{n_2} \int_0^t \Phi(t-\tau) \bar{B}_2 u(\tau) d\tau \\
&\quad + (\bar{N} \bar{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{N} \bar{I}_{n_2}^D)^k \bar{I}_{n_2}^D \bar{B}_1 u^{(k\alpha)}(t) \\
&= [\Phi_0(t) \bar{N} \bar{N}^D v + \bar{N}^D \int_0^t \Phi(t-\tau) \bar{B}_2 u(\tau) d\tau \\
&\quad + (\bar{N} \bar{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{N} \bar{I}_{n_2}^D)^k \bar{I}_{n_2}^D \bar{B}_2 u^{(k\alpha)}(t)] + B_2 u(t)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété 2 du lemme 1

$${}^C D_t^\alpha \bar{N} \bar{N}^D v = 0$$

$$\bar{N}^D (\bar{N}^D \bar{I}_{n_2})^{k+1} = \bar{I}_{n_2}^{k+1} (\bar{N}^D)^k,$$

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{N}^D \bar{I}_{n_2})^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \\
&= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{N}^D \bar{I}_{n_2})^{k+1} t^{(k+2)\alpha-1}}{\Gamma[(k+2)\alpha]}
\end{aligned}$$

pour condition initiale,

$$x(0) = x_0 = \bar{N} \bar{N}^D v + (\bar{N} \bar{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{N} \bar{I}_{n_2}^D)^k \bar{I}_{n_2}^D \bar{B}_2 u^{(k\alpha)}(0)$$

d'où la solution

$$\bar{x}_2(t) = \Phi_0(t) \bar{N} \bar{N}^D v + \bar{N}^D \int_0^t \Phi(t-\tau) \bar{B}_2 u(\tau) d\tau + (\bar{N} \bar{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{N} \bar{I}_{n_2}^D)^k \bar{I}_{n_2}^D \bar{B}_2 u^{(k\alpha)}(t)$$

lorsque :

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{N}^D \overline{I_{n_2}})^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \\ \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{N}^D \overline{I_{n_2}})^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \\ u^{(k\alpha)}(t) &= {}^C D_t^{k\alpha} u(t)\end{aligned}$$

et le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire.

La solution du système singulier (4.29) est,

$$x(t) = \begin{bmatrix} \overline{x_1}(t) \\ \overline{x_2}(t) \end{bmatrix}$$

Ceci est par conséquent caractérisé, par le théorème suivant,

Théorème :

le système fractionnaire singulier (4.29) admet une unique solution de la forme,

$$x(t) = \begin{bmatrix} \overline{x_1}(t) \\ \overline{x_2}(t) \end{bmatrix}$$

avec,

$$\overline{x_1}(t) = \overline{\Phi_0}(t)x_0 + \int_0^t \overline{\Phi}(t-\tau) \overline{B_1} u(\tau) d\tau$$

$$\overline{x_2}(t) = \Phi_0(t) \overline{N} \overline{N}^D v + \overline{N}^D \int_0^t \Phi(t-\tau) \overline{B_2} u(\tau) d\tau + (\overline{N} \overline{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\overline{N} \overline{I_{n_2}}^D)^k \overline{I_{n_2}}^D \overline{B_2} u^{(k\alpha)}(t)$$

où,

$$x(0) = x_0 = \overline{N} \overline{N}^D v + (\overline{N} \overline{N}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\overline{N} \overline{I_{n_2}}^D)^k \overline{I_{n_2}}^D \overline{B_2} u^{(k\alpha)}(0)$$

Pour toutes conditions de consistance,

$${}^C D_t^\alpha \overline{N} \overline{N}^D v = 0$$

$$\overline{N}^D (\overline{N}^D \overline{I_{n_2}})^{k+1} = \overline{I_{n_2}}^{k+1} (\overline{N}^D)^k.$$

Chapitre 5

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons abordé et illustré de manière simple certains aspects d'une nouvelle théorie nommé "La résolution des systèmes linéaires fractionnaires a temps continu par l'inverse de Drazin". L'étude que nous avons menée dans ce travail est organisée en deux parties, nous avons commencé par rappeler la solution d'un système linéaire fractionnaire à temps continu, pour ensuite entamer l'objet de notre travail qui est l'utilisation de l'inverse de Drazin pour trouver une aproche. afin de dérive cette solution qui s'avère nouvelle et qui attire l'attention d'un grand nombre de chercheurs .

Cette étude nous à aussi permis de dégager une analyse sur les problèmes d'inversion des marices d'états. Tout au long de ce mémoire une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire fractionnaire tout deux à temps continu à été faite. Malgré les developements, certains axes méritent des réflexions plus approfondies.

Bibliographie

- [1] R.Bru, C.Cooll, S.Romero-Vivo, et E.Sanchez, "some problems about structural properties of positive descriptor systems" ; lecture note in controle and Inform (2003).
- [2] R.Bru, C.Cooll, et E.Sanchez, "about positivity of positive descriptor-time singular systems", system and control :theory and application(2000).
- [3] R.Bru, C.Cooll, et E.Sanchez, "structural properties of positive linear time-invariant difference-algebraic equations", Linear Algebra appl(2002).
- [4] S.L.Campbell, C.D.Meyer, et N.J. Rose, "Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients", SIAMJ Appl.Math(1976)
- [5] L. Dai, Singular control systems, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [6] M. Doding and M. Stosic, "Singular systems state feedbacks problems", Linear Algebra and Its Applications (2009).
- [7] M.M Fahmy and J. O'Reill, "Matrix pencil of closed-loop descriptor systems : infinite-eigenvalues assignment", Int.J.Control(1989).
- [8] D. Guang-Ren, Analysis and Design of Descriptor Linear systems, Springer, New York, (2010)
- [9] T.kaczorek, "checking of the positivity of descriptor linear systems by the use of the shuffle algorithm", Archives of Control Sciences.(2011)
- [10] T.kaczorek, "Infinite eigenvalue assignment by output-feedbacks for singular systems", Int. J. Appl. Math. Comput.Sci.(2004).
- [11] T.kaczorek, "Reduction and decomposition of singular fractional discrete-time linear systems", Control and Cybernetics (2011)
- [12] T.kaczorek, "Singular fractional discrete-time linear systems", control and Cybernetics 40 (3),753-761 (2011)
- [13] T.kaczorek, "Linear Control Systems, vol 1, Research Studies Press J. Wiley. New York (1992)
- [14] P. Van dooren, "the computation of Krenecker's canonical form of a singular pencil", linear Algebra and Its applications (1979).
- [15] R. virnik, "Stability analysis of positive descriptor systems", Linear Algebra and its Applications (2008)
- [16] F.R Gantmacher, The theory of Matrices, chelsea publishing Co New York (1960)

-
- [17] V. Kucera et P. Zagalak, "Fundamental theorem of state feedback for singular systems", *Automatica* 24(5) 653-658 (1988)
 - [18] T.kaczorek, "Minimum energy control of descriptor positive discrete-time linear systems", *Compel* 23 (2), 205-211(2013)
 - [19] T.kaczorek, "Minimum energy control of positive fractional descriptor continuous-time linear systems", *IET Control Theory and Applications* (2013)
 - [20] T.kaczorek, "Positive linear systems with different fractional orders", *Bull. Pol. Ac :Tech.* 58(3)(2010).
 - [21] T.kaczorek, *Selected problems of Fractional Systems theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
 - [22] T.kaczorek, *Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical systems theory*, Springer-verlag, London, (2007).
 - [23] T.kaczorek, "Application of Drazin inverse to analysis of descriptor fractional discrete-time linear systems with regular pencils", *Int J. Appl. Math. comput. Sci* 23 29-34(2013)
 - [24] .ommalut et N. Marchand, "positive systems", *Lecture Note in Control and Inform. Sci* (2006)
 - [25] L.Farina et S.Rinaldi, *Positive Linear systems*, J. Willey New York (2000).
 - [26] T. Kaczorek, *positive 1D et 2 D systèmes*, Springer-verlag, London. (2002).
 - [27] D . W. Davidson, and R . H Cole, "Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol and n-propanol", *Journal of Chemical Physics* 19(12), pp. 1484-1490, (1951)
 - [28] A . Van Der Ziel, "On the Noise Spectra of Semiconductor Noise and of Flicker Exects", *Physica*, 16 :359-372, (1950).
 - [29] T.T.Hartley, C.F.Lorenzo, H.K.Qammer, "Chaos in a Fractional Order Chua's System", *IEEE Trans. CAS-I* 42 (1995) 485—490.
 - [29] C.Li, G.Chen, "Chaos and Hyperchaos in the Fractional-order Rossler Equations", *Phys. A : Stat. Mech. Appl.* 341 (2004) 55—61.
 - [30] D . Matignon , N. B. d'Andréa, P. Depalle and A. Oustaloup (1994). *Viscothermal Losses in Wind Instruments : A Non-Integer Model*, Academic Verlag, Berlin.
 - [31] D . Matignon, "Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing", *Computational Engineering in Systems and Application multi-conference*, vol. 2, IMACS, in : *IEEE-SMC Proceedings*, Lille, France, July 1996.
 - [32] Y . Peng ., Guangming X. and Long W. (2003). "Controllability of Linear Discrete-time Systems with Time-Delay in State", available at dean.pku.edu.cn/bksky/1999tztlwj/4.
 - [33] S . Guermah, S. Djennoune , M. Bettayeb. "Controllability and Observability of Linear Discrete-time Fractional-Order Systems."
 - [34] T. Kackzorek. "Fractional Positive Continuous-time Linear Systems and their Reachability." *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2008, Vol.18., No. 2, 223-228.
 - [35] B . M . Vinagre , Monje C. A. and Caldero A. J. (2002). "Fractional order systems and fractional order actions", *Tutorial Workshop 2 : Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics*, 41st IEEE CDC, Las Vegas, USA.
 - [36] J . Tenreiro Machado - "Applications of fractional calculus in engineering sciences. Benelux meeting (2011) 258-266.

- [37] P . Arena, R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto, Chaos in a Fractional Order. Duffing System, in : Proceedings ECCTD, Budapest, 1997,pp. 1259—1262
- [38] T.Kaczorek, "Drazin inverse matrix method for fractional descriptor continuous-time linear systems" Bul. Poly. ACC. Tech.SC, Vol. 62, No. 3, 2014
- [39] Dj. Bouagada end P. Van Dooren "state space solution of implicit fractional continuons time system.FCAA-vol.15.N :3-2012 springer.