

Mémoire Master Mathématiques

Meguenni Abdelkader

Université de MOSTAGANEM

Juin 2013

Objectifs:

- Construire une matrice opérationnelle de dérivation (et de dérivation fractionnaire) des ondelettes de Legendre .
- Introduire une procédure calculatoire utilisant ces matrices pour résoudre des problèmes différentiels en les réduisant à des systèmes linéaires d'équations algébriques .

- Polynomes de Legendre.
- Dérivation fractionnaire.
- Ondelettes .

Dérivation fractionnaire

Définition de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

Soit m un entier naturel et α un réel tel que $m - 1 < \alpha \leq m$ et soit f une fonction de classe C_1^m .

La dérivée d'ordre α de f est définie pour tout x strictement positif par :

$$D^\alpha f(x) = \mathfrak{I}^{m-\alpha} f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (1)$$

Où \mathfrak{I}^α désigne l'opérateur d'intégration d'ordre α .

Théorème:

(composition des opérateurs D^α et \mathfrak{I}^α)

Soit f une fonction de classe C_μ ($\mu \geq -1$) et m un entier naturel et α un réel tel que $m - 1 < \alpha \leq m$; alors, pour tout x strictement positif, on a:

1

$$D^\alpha \mathfrak{I}^\alpha f(x) = f(x) \quad (2)$$

2

$$\mathfrak{I}^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \quad (3)$$

Exemple d'application

Exemple

On considère la fonction monôme f définie par :

$$f(x) = x^\beta ; \beta \in \mathbb{N}$$

Sa dérivée d'ordre α est donnée par :

$$D^\alpha(x^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \leq [\alpha] \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta > [\alpha] \end{cases} \quad (4)$$

où $[\alpha]$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à α

Abrégé de Solution:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= \mathfrak{S}^{m-\alpha} D^m f(x) = \mathfrak{S}^{m-\alpha} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} x^{\beta-m} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} \mathfrak{S}^{m-\alpha} \left[x^{\beta-m} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} \times \frac{\Gamma(1+\beta-m)}{\Gamma(m-\alpha+\beta-m+1)} x^{m-\alpha+\beta+m} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Polynômes de Legendre

- Equation de Legendre :

On appelle équation de Legendre l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

- Diverses définitions d'un polynome de Legendre

Def(1) : formule de récurrence de BONNET

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

et $\forall n > 0, (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$ (6)

Déf(2) : formule de RODRIGUES

$$\forall n \in \mathbb{N} P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right) \quad (7)$$

Déf(3): forme analytique

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)! x^k}{(n-k)! (k!)^2} \quad (8)$$

- Dérivée d'un polynome de Legendre :

Théoreme :

Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

P_m est un polynome de Legendre sur $[0, 1]$.

La dérivée de P_m est définie par :

$$\forall x \in [0, 1], P'_m(x) = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ (k+m) \text{ impair}}}^{m-1} (2k+1) P_k(x) \quad (9)$$

Corollaire:

$$\forall n \geq 1, P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1) P_n \quad (10)$$

Exemples de polynômes de Legendre

Les six premiers polynômes de Legendre sont :

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

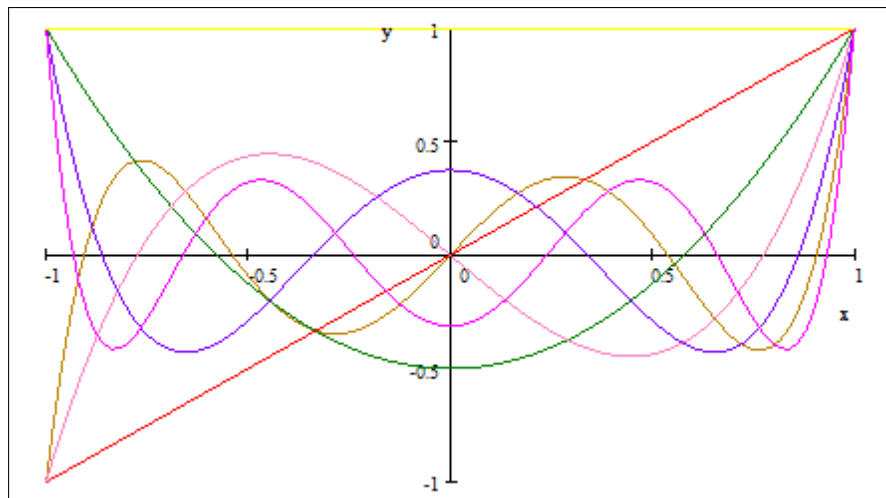
$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$p_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 7)$$

Courbes des polynômes de Legendre



Courbes de Polynomes de Legendre

Propriétés des polynômes de Legendre

- Le degré de P_n est n .
- La parité de P_n est celle de n .
- Produit scalaire

$$\forall (n, m), \langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx$$

- La norme euclidienne

$$\|P_n\| = (\langle P_n, P_n \rangle)^{1/2} = \left(\frac{2}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Orthogonalité de la base (P_0, \dots, P_n) :

$$\text{si } n \neq m \text{ alors } \langle P_n, P_m \rangle = 0$$

Les ondelettes constituent une famille de fonctions générées par translation et par dilatation d'une seule fonction appelée "Ondelette-Mère".

Quand le paramètre de dilatation a et celui de translation b varient continûment, l'expression générale de ces ondelettes, générées par l'ondelette-mère Ψ est:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (11)$$

où a et b sont des réels et $a \neq 0$

CAS DISCRET : $a = a_0^{-j}$, $b = kb_0 a_0^{-j}$, avec $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on obtient la famille des ondelettes discrètes :

$$\psi_{jk}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \psi\left(a_0^j(t) - kb_0\right)$$

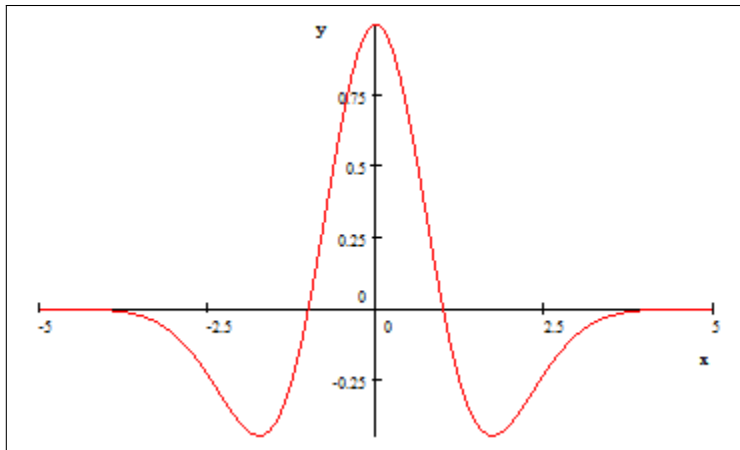
l'ensemble de ces ondelettes forment une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$. En particulier si $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$ cette base est orthonormale c'est-à-dire:

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{l,n} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,n}$$

Exemples d'ondelettes:

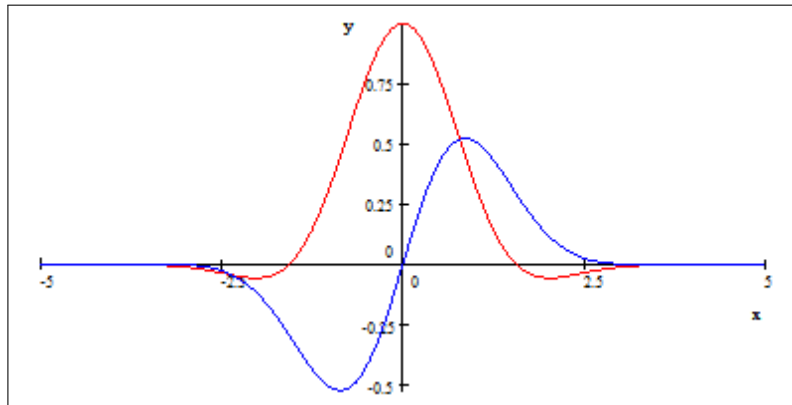
·Chapeau Mexicain

$$\Psi(t) = (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$$



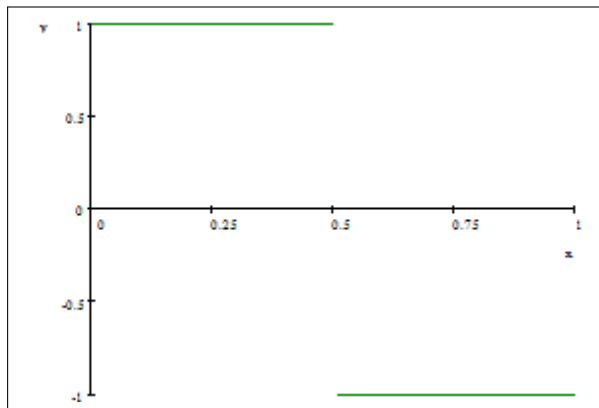
•Ondelette de Morlet

$$\Psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



La courbe en bleu représente la partie imaginaire et la rouge la partie réelle

·Ondelette de Haar



ondelette de HAAR

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ondelettes de Legendre

Elles sont générées à partir d'un polynôme de Legendre.

Si L_m est un polynôme de Legendre d'ordre m sur $[0,1]$, elles sont définies sur $[0,1]$ par:

$$\Psi_{n,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{(m+1/2)} 2^{\frac{k+1}{2}} L_m(2^{k+1}t - (2m+1)) & \text{si } \frac{n}{2^k} \leq t \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (12)$$

où n et k sont des entiers positifs tels que :

$$n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$$

$$m = 0, 1, \dots, M$$

L'ensemble des ondelettes de Legendre forme une base orthogonale de $L^2([0, 1])$.

Décomposition en base d'ondelettes de Legendre

Toute fonction f de $L^2 [0, 1]$, peut s'écrire en séries d'ondelettes de Legendre comme suit:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \psi_{nm}(t) \quad (13)$$

où $C_{nm} = \langle f(t), \Psi_{nm}(t) \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designe le produit scalaire.

Ces séries, étant infinies, et pour les besoins du calcul, on en prend une troncature, d'où:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M C_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t) \quad (14)$$

où

$$C = [C_{0,0}, C_{0,1}, \dots, C_{0,M}, \dots, C_{2^k-1,0}, C_{2^k-1,1}, \dots, C_{2^k-1,M}]^T$$

et

$$\Psi(t) = [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,M}, \dots, \psi_{2^k-1,0}, \psi_{2^k-1,1}, \dots, \psi_{2^k-1,M}]^T$$

Un exemple sur la décomposition en ondelettes de Legendre :

Pour illustrer la décomposition d'une fonction $L_2(R)$ en ondelettes de Legendre donnée dans le paragraphe précédent , prenons comme exemple $f(t) = t^2$

Prenons $k = 1$ et $M = 2$

Pour calculer :

$$\psi_{nm} = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k+1}{2}} L_m [2^{k+1}t - (2n + 1)] & \text{si } \frac{n}{2^k} \leq t \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

m est l'ordre du polynome de Legendre L_m

$m = 0, 1, \dots, M$ donc $m = 0$ ou 1 ou 2

$n = 0, \dots, 2^k - 1$ donne $n = 0, 1$

D'où les $\psi_{n,m}$ sont : $\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \psi_{0,2}, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}$.

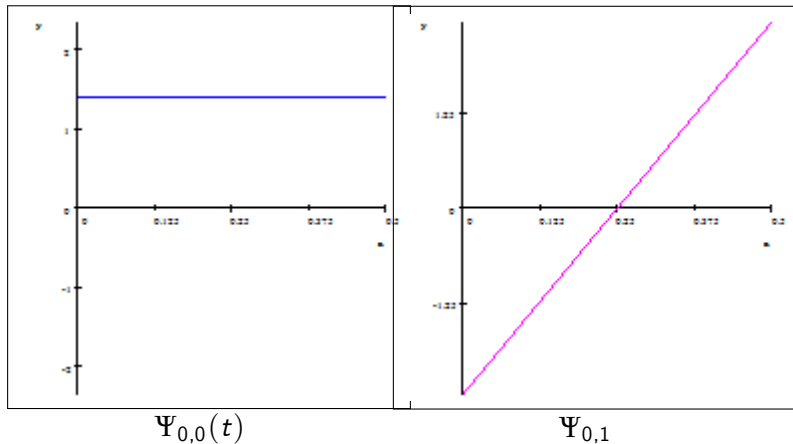
$$\psi_{0,0}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \psi_{0,1}(t) = \begin{cases} \sqrt{6}(4t - 1) & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

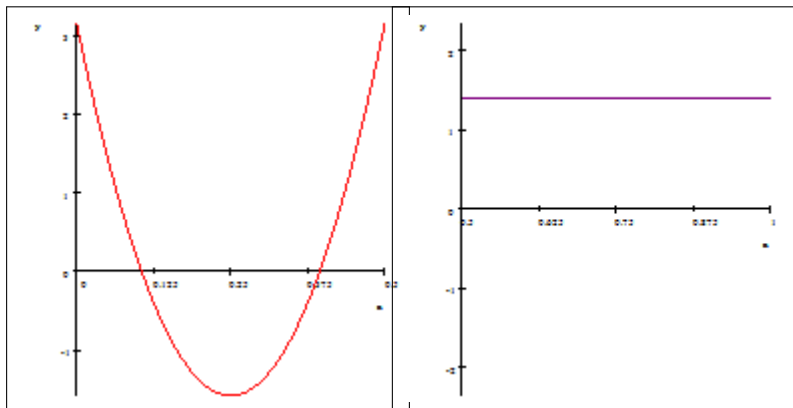
$$\psi_{0,2}(t) = \begin{cases} \sqrt{10}(24t^2 - 12t + 1) & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\psi_{1,0}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \psi_{1,1}(t) = \begin{cases} \sqrt{6}(4t - 3) & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\psi_{1,2}(t) = \begin{cases} \sqrt{10}(24t^2 - 36t + 13) & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

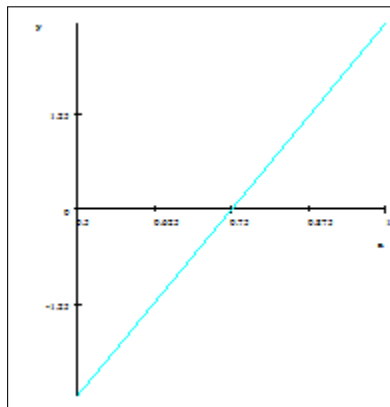
Courbes des ψ_{nm}



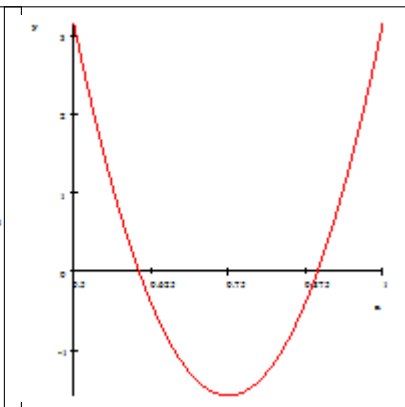


$\Psi_{0,2}$

$\Psi_{1,0}$



$\Psi_{1,1}$



$\Psi_{1,2}$

Prenons par exemple $f(t) = t^2$

On a vu que f peut être approchée par $f(t) = \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^2 C_{nm} \psi_{nm}(t)$. Il nous

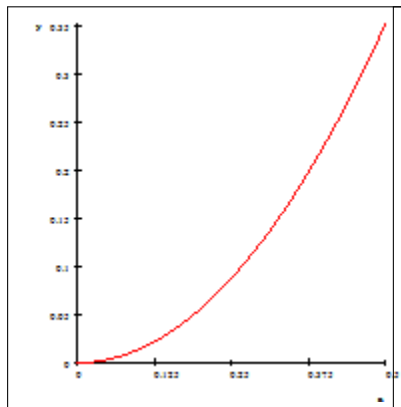
reste donc à calculer les $C_{nm} = \langle f(t), \psi_{nm} \rangle$. On trouve :

$$C_{0,0} = \begin{cases} t^2 \sqrt{2} & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad C_{0,1} = \begin{cases} \sqrt{6} t^2 (4t - 1) & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

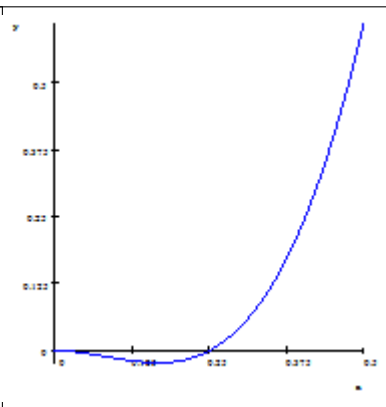
$$C_{0,2} = \begin{cases} \sqrt{10} t^2 (24t^2 - 12t + 1) & \text{sur } [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{1,0} = \begin{cases} t^2 \sqrt{2} & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad C_{1,1} = \begin{cases} \sqrt{6} t^2 (4t - 3) & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

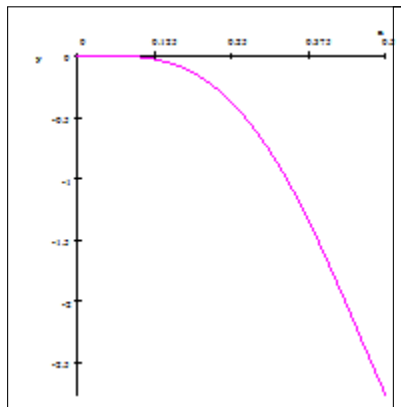
$$C_{1,2} = \begin{cases} t^2 \sqrt{10} (24t^2 - 36t + 13) & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



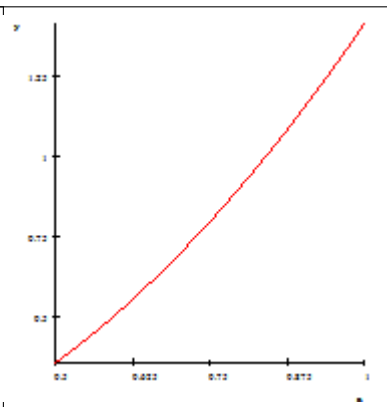
$C_{0,0}$



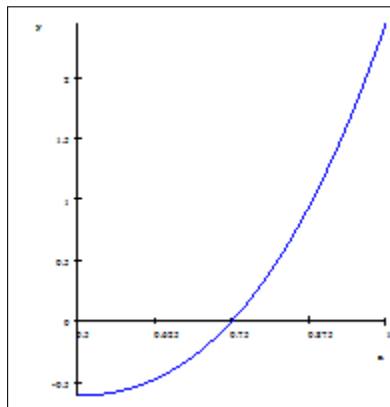
$C_{0,1}$



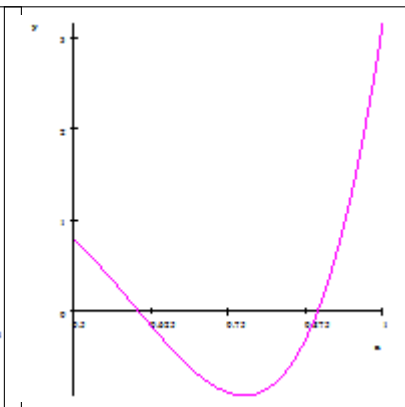
$C_{0,2}$



$C_{1,0}$



$C_{1,1}$



$C_{1,2}$

- Soit $\Psi(t)$ le vecteur d'ondelettes de Legendre défini par la relation (12). La dérivée de $\Psi(t)$ peut s'exprimer par :

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = D\Psi(t) \quad (15)$$

où D est la matrice carrée $2^k(M+1)$ opérationnelle de dérivation définie par :

$$D = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & \\ & & 0 \\ 0 & & 0 & F \end{bmatrix} \quad (16)$$

où $F = [F_{r,s}]$ est la matrice $(M+1)(M+1)$ dont le $(r, s)^{ème}$ élément est

$$F_{r,s} = \begin{cases} 2^{k+1} \sqrt{(2r-1)(2s-1)} & \text{si } \begin{cases} r = 2, \dots, (M+1) \text{ et } (r+s) \text{ impair} \\ s = 1, \dots, r-1 \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (17)$$

- Dérivée d'ordre n

Pour tout entier naturel n , la dérivée $n^{ième}$ du vecteur ondelettes de Legendre s'écrit

$$\frac{d^n \Psi(t)}{dt} = D^n \Psi(t) \quad (18)$$

où D^n est la puissance $n^{ième}$ de la matrice D

Exemples d'application

Premier exemple :

Prenons $M = 2$ et $k = 0$

D sera donc une matrice 3×3 ; $r = 2$ ou 3 ; $s = 1$ ou 2

Calculons ses éléments :

$$F_{2,1} = 2^{0+1} \sqrt{(2 \times 2 - 1)(2 \times 1 - 1)} = 2\sqrt{3}.$$

$$F_{3,2} = 2^1 \sqrt{(6 - 1)(4 - 1)} = 2\sqrt{5}\sqrt{3}.$$

Les autres éléments sont tous nuls .

d'où

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 \end{bmatrix}$$

Deuxieme exemple :

Pour $k = 1$ et $M = 1$, D est une matrice carrée d'ordre

$$2^k(M + 1) = 2(2) = 4$$

Le bloc F est une matrice 2×2

$$r = 2 \text{ et } s = 1$$

On ne calcule que $F_{2,1}$ car les autres elements sont nuls .

$$F_{2,1} = 2^1 \sqrt{[2(2) - 1][2 \times 1 - 1]} = 2\sqrt{3}$$

ainsi la matrice F est

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

et par conséquent

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Troisième exemple:

$$k = 2 \quad M = 2$$

D est une matrice carrée d'ordre $2^2(2+1) = 12$

F est 3×3 :

$r = 2$ ou 3 ; si $r = 2$ alors $s = 1$ $(r, s) = (2, 1)$

si $r = 3$ alors $s = 1$ ou 2 mais $r + s$ impair donc $(r, s) = (3, 2)$

on calcule donc : $F_{2,1}$ et $F_{3,2}$ et les autres sont nuls .

$$F_{2,1} = 2^3 \sqrt{(4-1)(2-1)} = 8\sqrt{3}$$

$$F_{3,2} = 2^3 \sqrt{(6-1)(4-1)} = 8\sqrt{15}$$

d'où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 8\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$$

Et par conséquent D est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$$

Généralisation au cas fractionnaire

Soit N un entier naturel non-nul et α un réel tel que $N - 1 < \alpha \leq N$. soit $\Psi(t)$ le vecteur ondelettes de Legendre défini précédemment .

Alors on a :

$$D^\alpha \Psi(t) = D^{(\alpha)} \Psi(t)$$

où $D^{(\alpha)}$ est la matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire d'ordre α au sens de CAPUTO .

Cette matrice est $[2^k(M+1)]^2$; sont $(p,q)^{ieme}$ élément est

$$(D^{(\alpha)})_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq p \leq [\alpha] \\ 2^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} \left[\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i b_i q \binom{i}{j} \frac{(-1)^{m+i} (m+i)! 2^{kj} n^{i-j}}{(m-i)! (i!)^2} \right] & \text{si } [\alpha] + 1 \leq p \leq 2^k(M+1) \end{cases} \quad (19)$$

où $b_j q$ sont les q^{emes} coefficients du developpement en ondelettes de Legendre des fonctions

$$f_j(t) = t^j \chi_{\left[\frac{n}{2k}, \frac{n+1}{2k}\right]} \quad \text{et } j = 0, \dots, i$$

Exemple

Calculons $D^{\frac{1}{2}}$. On prend $k = 0$ et $M = 1$; dans ce cas $p = 1$ ou 2 et $m = 0$ ou 1 ; on trouve

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} t\sqrt{t} & \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} t\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

Application à la résolution de problèmes différentiels

Forme générale d'un problème de BAGLEY-TORVIK

$$\begin{cases} A_0 D^2 y(t) + A_1 D^{\frac{3}{2}} y(t) + A_2 y(t) = f(t) & t \in [0, T] \\ y(0) = \alpha_0 \quad \text{et} \quad y(T) = \alpha_1 \end{cases} \quad (20)$$

où A_0, A_1, A_2, α_0 et α_1 sont des constantes et $A_0 \neq 0$ et $y \in L_1 [0, T]$ et rappelons que le symbole D^α définit l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de CAPUTO.

On approche les fonctions $y(t)$ et $f(t)$ par des développements en base d'ondelettes de Legendre:

$$\begin{cases} y(t) = C^T \Psi(t) \\ f(t) = G^T \Psi(t) \end{cases} \quad (21)$$

où le vecteur

$$C = \left[c_{0,0}, c_{0,1}, \dots, c_{0,M}; \dots, c_{2,M}; c_{1,0}, \dots, c_{(2^k-1),0}, c_{(2^k-1),1}, \dots, c_{(2^k-1),M} \right]^T$$

est inconnu et G un vecteur connu .

$$\begin{cases} D^2 y(x) = C^T D^{(2)} y(x) \\ D^{\frac{3}{2}} y(x) = C^T D^{(\frac{3}{2})} \Psi(x) \end{cases} \quad (22)$$

on remplace dans la 1^{ere} équation du problème initial :

$$\left[A_0 C^T D^{(2)} + A_1 C^T D^{(\frac{3}{2})} + A_2 C^T \right] \Psi(x) = G^T \Psi(x) \quad (23)$$

Posons

$$R_m(x) = \left[A_0 C^T D^{(2)} + A_1 C^T D^{(\frac{3}{2})} + A_2 C^T \right] \Psi(x)$$

On génère $(2^k(M+1) - 2)$ equations linéaires , et, en appliquant :

$$\left\langle R_{2^k(M+1)}(x), \Psi_j(x) \right\rangle = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, 2^k(M+1) - 2 \quad (24)$$

et , en considerant les conditions aux limites (données dans l'ennoncé initial du problème) , on a:

$$\begin{cases} y(0) = C^T \Psi(0) = \alpha_0 \\ y(1) = C^T \Psi(1) = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{En utilisant la relation (19) pour le vecteur } C$$

on obtiendra une approximation de la solution .

Exemples illustratifs

Premier exemple

soit le problème non-linéaire , avec conditions aux limites , suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + 2(y'(x))^2 + 8y(x) = 0 & , 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Réolvons ce problème en appliquant la méthode proposée , au chapitre précédent , en prenant $M = 2$ et $k = 0$; en abrégé ,on aura :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 12\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Et on arrive au système

$$\begin{cases} C_{0,0} - \sqrt{3}C_{0,1} + \sqrt{5}C_{0,2} = 0 \\ C_{0,0} + \sqrt{3}C_{0,1} + \sqrt{5}C_{0,2} = 0 \end{cases}$$

dont une solution est $\left[\frac{1}{6}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{30}\right]$; ensuite , on calcule les Ψ_{nm} , et on arrive à :

$$y(x) = C^T \Psi(x) = \left[\frac{1}{6}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{30}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2x-1) \\ \sqrt{5}(6x^2-6x+1) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6}(6x^2 - 6x + 1) = -x^2 + x$$

qui est l'exacte solution

Deuxieme exemple

On se propose de résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} Dy(t) + \sqrt{\pi}D^{\frac{1}{2}}y(t) + y(t) = 1 + 2\sqrt{t} + t \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Avec $k = 0$ et $M = 1$ on arrive au système $\begin{cases} C_{0,0} + \sqrt{3}C_{0,1} = 1 \\ C_{0,0} = 0 \end{cases}$ dont la

solution est $C^T = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Et ainsi la solution est : $y(t) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ t\sqrt{3} \end{bmatrix} = t$

Troisième exemple :

$$\text{Soit le problème : } \begin{cases} D^2 y(t) + D^{\frac{3}{2}} y(t) + y(t) = t^2 + 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} + 2 \\ y(0) = 0 \\ y(5) = 25 \end{cases}$$

On peut résoudre ce problème en appliquant la méthode décrite dans notre étude précédente (Paragraphe applications) , en prenant :

$M = 2$ et $K = 1$; on obtiendra $2^k (M + 1) = 2^1 (2 + 1) = 6$ équations linéaires dont l'inconnue est $C^T = [C_{0,0}; C_{0,1}; C_{0,2}; C_{1,0}; C_{1,1}; C_{1,2}]$, et ce , en procédant d'une manière analogue aux 2 exemples précédents . La solution exacte est $y(t) = t^2$.