

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème :

*Modélisation et simulation numérique par les différences finies d'une épidémie avec
vaccination*

Présenté par :

Melle *Benalioua Rabia*

Président :Mr.Z.Dehmani ,Université de Mostaganem.

Examinatrice :Mme.N.Abmoui ,Université de Mostaganem.

Encadreur :Mr.O.Belhamiti ;Université de Mostaganem.

Année universitaire 2014-2015

Table des matières

Remerciments	i
Résumé	ii
Introduction	iii
1 Rappels des outils mathématiques	2
1.1 Problème de Cauchy	2
2 Modélisation mathématique en épidémiologie	5
2.1 Modèles en compartiments	7
3 Méthode des différences finies	12
3.1 Un peu d'histoire sur la méthode	12
3.2 Le principe de la méthode	15
3.2.1 Quelques schémas en 1D	18
3.2.2 La convergence de la méthode	19
3.2.3 Motivation	19
4 Applications numériques	24
4.1 Test de la méthode	24
4.2 Simulation de la transmission d'une épidémie avec vaccination(V)	26

Conclusion et perspectives**35****Annexe****38**

Remerciements

Je remercie ALLAH le plus puissant de nous avoir donné la force et la volonté pour réaliser ce travail de master de tout fond de cœur.

Je remercie mon encadreur monsieur Belhamiti Omar qui m'a donné des conseils et des remarques pour la conception de ce thème que j'ai développée.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes enseignants durant Cinq années de formation.

Je tiens surtout à apporter mes vifs remerciements à ma famille qui m'a soutenu durant ce travail.

Enfin, je ne voudrais pas non plus oublier tous mes amis que je les aime beaucoup.

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est d'étudier l'évolution d'une épidémie dans le temps. Dans un premier temps on développe deux modèles :

- Un modèle de la dynamique d'une population atteinte par une épidémie sans vaccination.
- Un modèle de la dynamique d'une population atteinte par une épidémie avec vaccination.

Ensuite, on simule les deux modèles par la méthode de différences finies, dans le but de voir l'effet de la vaccination sur la propagation de l'épidémie.

INTRODUCTION

Un modèle mathématique est une formulation d'un phénomène physique (*thermique, électrostatique, hydrogéologie, mécanique*), biologique (*Pathologie*) ou chimique basée sur l'opérateur différentiel, intégral, Laplacien, gradient, interpolation,...d'un problème ou d'une hypothèse particulière.

En médecine, la transmission épidémiologique est la plus modélisée mathématiquement, ce phénomène est représenté par des modèles du type (*SI, SIS, SIR, SIX, SIRX, ...etc.*), pour remédier ces problèmes d'une manière approximative, il existe plusieurs méthodes et la tâche principale consiste à sélectionner celle qui est la mieux adaptée pour atteindre l'objectif. Ce principe est très général et peut être appliqué à un problème que nous allons aborder tout au long de ce travail. La connaissance préalable de ces méthodes nous permet de bien choisir la manière de résoudre un problème numérique donné, le plus efficacement possible en tenant en compte le point de vue informatique pour améliorer la précision et une bonne interprétation des résultats.

Ce travail est basé sur les prérequis en analyse numérique, modélisation et programmation MATLAB. Ce rapport est organisé de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions de quelques notions constructifs sur la théorie des équations différentielles ordinaires que nous allons utiliser par la suite, spécifiquement nous précisons la méthode de différences finies utilisée pour la simulation de notre problème.
- Dans le deuxième chapitre, nous décrivons quelques modèles en épidémiologie et nous expliquons chaque formule mathématique par un diagramme représentatif.
- Dans le troisième chapitre, nous exposons la méthode de différences finies.
- Le dernier chapitre de ce mémoire est destiné particulièrement à l'application numérique, passons tout d'abord par un exemple académique qui teste dans un premier temps la vitesse de convergence de cette méthode, en suite nous faisons la simulation numérique d'un problème qui étudie la propagation d'une épidémie (*la fièvre aphteuse*) et l'impact du

vaccin sur ce dernier, en discutant les résultats obtenus. Nous terminons ce travail par une conclusion, perspectives, bibliographie et une annexe.



Rappels des outils mathématiques

Dans ce chapitre on va présenter quelques outils mathématiques qu'ils vont être utiles pour la suite de notre travail.

1.1 Problème de Cauchy

Définition 1.1.1 On appelle équation différentielle d'ordre n tel que $n \in \mathbb{N}^*$ toute relation de type

$$f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{sur } [a, b]$$

Généralement, pour résoudre une EDO numériquement, on a besoin de conditions aux limites. On définit le problème de Cauchy par

Définition 1.1.2 Un problème est dit de "Cauchy", s'il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0 & \text{sur }]a, b[\\ u(a) = d_0 \\ u'(a) = d_1 \\ \vdots \\ u^{(n)}(a) = d_{n-1} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où $u^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n u}{dx^n}$.

Dans le cas où $n = 1$, on a le problème d'ordre un suivant

$$\begin{cases} f(x, u, u') = 0 & \text{sur }]a, b[\\ u(a) = d_0. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

L'écriture (1.1.2) est équivalente à la définition suivante

Définition 1.1.3 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et une fonction :

$$\begin{cases} f: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x, u) \rightarrow f(x, u(x)) \end{cases}$$

on appelle solution scalaire de l'équation différentielle à coefficient non constant "d'ordre un" tout couple (J, u) où $J \subset I$ et u est une fonction dérivable définie sur J tel que pour tout $x \in J$, on a

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(a) = d_0 \quad a \in J. \end{cases}$$

Remarque 1.1.1 L'équation (1.1.1) est dite autonome lorsqu'elle ne dépend pas de la variable temporelle "t".

Remarque 1.1.2 Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution, on suppose que f est localement lipchitzienne par rapport à la deuxième variable [1].

Définition 1.1.4 Soit $f: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue .

on dit que f est localement lipchitzienne par rapport à la deuxième variable

si $\forall (x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, ils existent un voisinage V de (x_0, u_0) et une constante $C_{(x_0, u_0)} > 0$ tels que $\forall (x, u), (x, w) \in V: \|f(x, u) - f(x, w)\| \leq C_{(x_0, u_0)} \|u - w\|$.

Définition 1.1.5 On appelle système différentiel (ou encore un système d'équations différentielles) toute forme compacte

$$\dot{u}(x) = F(x, u(x)) \tag{1.1.3}$$

où

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\rightarrow F(x, u). \end{aligned}$$

Le système (1.1.3) est équivalent à

$$\begin{cases} u'_1(x) = F_1(x, u(x)) \\ u'_2(x) = F_2(x, u(x)) \\ \vdots \\ u'_n(x) = F_n(x, u(x)) \end{cases} \tag{1.1.4}$$

tel que $F(x, u(x)) = (F_1(x, u(x)), F_2(x, u(x)), \dots, F_n(x, u(x)))$.

Résoudre le système différentiel (1.1.4) revient à trouver une fonction vectorielle $u(x)$ qui vérifie (1.1.3) telle que

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$$

Le problème (1.1.4) est à un problème de *Cauchy*, si on le rajoute les contraintes,

$$\begin{cases} u_1(x_0) = d_0 \\ u_2(x_0) = d_1 \\ \vdots \\ u_n(x_0) = d_{n-1}. \end{cases}$$

On peut ramener une équation différentielle à coefficient non constant d'ordre n

$$u^{(n)}(x) = -a_0(x)u(x) - a_1(x)u'(x), \dots, -a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + f(x) \quad \text{sur } [a, b]$$

à un systèmes d'équations différentielles d'ordre 1

$$\begin{cases} u(x) = u_1(x) \\ u'(x) = u_2(x) \\ u''(x) = u_3(x) \\ \vdots \\ u^{(n)}(x) = -a_0(x)u_1(x) - a_1(x)u_2(x), \dots, -a_{n-1}(x)u_n(x) + f(x) \end{cases}$$

cette opération s'appelle la réduction de l'ordre.

Pour plus de détails sur les *équations différentielles ordinaires* voir [1].

Modélisation mathématique en épidémiologie

L'épidémiologie est indispensable pour comprendre la physiopathologie d'une maladie chez l'être vivant, elle décrit les variations des maladies et cherche les déterminants de ces variations, de plus elle vise à la compréhension des causes de maladies et à l'amélioration de leurs traitements et moyens de prévention.

Dans le cas des maladies infectieuses, l'épidémiologie cherche à identifier les agents pathogènes et à prendre leur mode de propagation. Ainsi, les épidémiologistes cherchent à répondre à des questions telles que : quelles sont les populations à risque ?

C'est *Daniel Bernoulli* en 1760 qui a réalisé le premier travail de modélisation en épidémiologie afin de démontrer, par une étude de scénarios était efficace pour prévenir la variole en termes de nombre de morts évités et de gain d'espérance de vie. Actuellement la modélisation en épidémiologie concerne aussi bien les maladies infectieuses (*par exemple infection par le VIH, par l'hépatite C, par les maladies à prion, grippe, etc.*) que les maladies non infectieuses (*par exemple le cancer*) puis publié en 1766. Les rôles de la modélisation en épidémiologie :

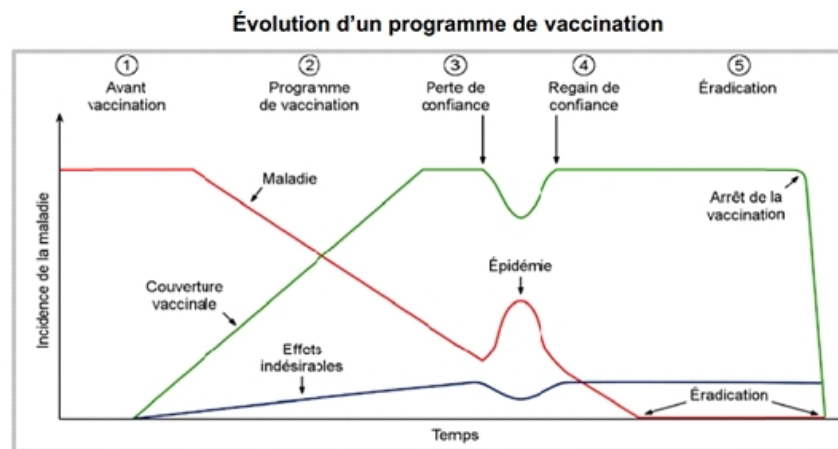
- 1) l'aide à la description de données complexes afin de faciliter la diffusion des résultats,
- 2) a démontré les lois générales expliquant la diffusion des épidémies,
- 3) l'estimation des valeurs de paramètres qui ne peuvent être directement mesurés dans une observation ou dans une expérience,
- 4) la prévision des nombres de cas futur dans certaines maladies,
- 5) l'optimisation de plans expérimentaux.

Au début du 20^e siècle, *Ronald Ross*, découvreur du *plasmodium falciparum*, parasite à l'origine du paludisme, publie une série de travaux utilisant des modèles mathématiques pour étudier la propagation et le contrôle de *la malaria*.

Dans les années 1920 fut celle des modèles compartimentaux, qui divisent la population en classes épidémiologiques tels que les individus susceptibles (S) d'être infectés, ceux qui sont infectieux (I). Ensuite, Kermack et Kendrick en 1927 proposent un autre modèle composé de trois compartiments : (S), (I), et *Removed/Recovered* (R) ceux qui ont acquis une immunité à la suite de la guérison.

Une épidémie se transmet par contact direct (*dans des maladies sexuelles telles que le SIDA*) ou bien par contact indirect (*fièvre Aiphteuse Rougeole, Rubéole, Grippe...*) véhiculés par l'air ou par des objets. Sa propagation dans une population dépendant de paramètres extrêmement nombreux (*stade cliniques possibles, déplacement des individus, souches de la maladie,...*). Depuis plusieurs années, le travail mathématique et l'épidémiologie ont une relation complémentaire assimilée par la modélisation en général.

Les modèles mathématiques se sont progressivement affirmés comme outils d'aide à la décision. En effet, les modèles permettent de prévoir les conséquences pour la population d'actions aussi variées que la vaccination pour avoir effectué une neutre amélioration en matière de performance sanitaire. Cette image explique bien l'effet du vaccin pour limiter la propagation d'une maladie infectieuse



2.1 Modèles en compartiments

Le modèle épidémiologique sert à démontrer comment le nombre d'individus dans chaque compartiments varie au cours du temps t , il est formé de deux parties : les compartiments et les règles

- **Compartiments** : sont les différentes classes de la population par rapport à la maladie, ils existent sept qui sont utilisables (S, I, E, X, R, M, C), on les définit comme suit

S : représente les individus qui sont exposés à la maladie (susceptible).

I : représente les individus qui portent la maladie (infectieux).

E : représente les individus qui sont infectés mais non infectieux.

X : les individus qui meurent à cause de la maladie (décès).

R : les individus qui ont acquis une immunisation contre la réinfection (Résistants).

M : les individus qui sont nés avec une immunité contre la maladie par voie maternelle.

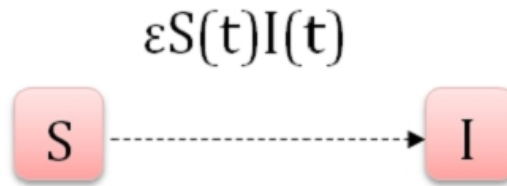
C : représente les individus qui portent la maladie sans l'apparition de signes (carriers).

- **Règles** : spécifient la probabilité des individus passant d'une classe à une autre.

Modèles SI

Supposons que la probabilité de transmission de la maladie puisse varier d'une paire d'individus à l'autre selon une distribution donnée, en un temps t suffisamment court pour que les naissances et morts «naturelles» aient un impact négligeable sur la dynamique de la maladie. On appelle *susceptible* l'individu de population qui est sain mais pouvant potentiellement devenir *infectée* par la maladie, on notera S le compartiment contenant ces individus, et que le problème aux valeurs initiales constitué un système décrit ci-dessous auquel sont adjointes les conditions initiales $S(0) = S_0 \geq 0$ et $I(0) = I_0 \geq 0$, avec $S_0 + I_0 = N_0 > 0$.

Le plus simple modèle qui décrit la dynamique de la transmission d'une épidémie est représenté par le schéma suivant



Le diagramme (SI)

En un instant t , le compartiment S comporte $S(t)$ individus. De la même façon, on qualifie d'infectés les individus affligés par la maladie. Le compartiment contenant cette fraction de la population sera noté I et contient $I(t)$ individus au temps t .

On considère maintenant que la probabilité qu'un individu *susceptible* devienne infecté est proportionnelle au nombre d'individus actuellement infectés et que le taux de transmission de la maladie est ε .

Si un grand nombre d'individus est en cause, on peut s'attendre à ce qu'ils d'entre eux deviennent nouvellement infectés à chaque t . Donc pour savoir la variation de nombre d'éléments au cours de temps au sens mathématique cette variation est donnée par une *EDO*, sinon un système des *EDOs*.

Ce modèle est formulé mathématiquement par

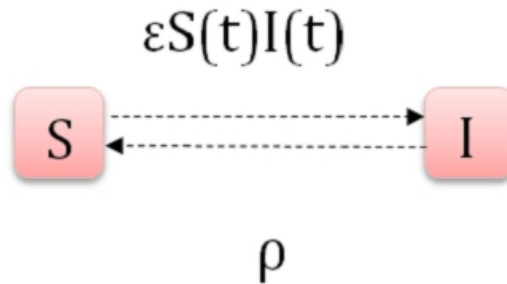
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon I(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon I(t)S(t) \end{cases}$$

Remarque 2.1.1 *Le signe négative signifie qu'il y a quelques éléments sains sortent de l'ensemble et devient infectés et le positive signifie que le nombre d'éléments infectieux va augmenter*

Modèles SIS

Pour bon nombre de maladies, la guérison est heureusement possible. Si à chaque unité de temps un individu infecté a une probabilité $\rho \geq 0$ de «guérir» de la maladie et de redevenir

susceptible, on a en moyenne ρI individus guérissant chaque unité temporelle, voir le schéma qui suit



Le diagramme (SIS)

La formulation mathématique de ce modèle est

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon I(t)S(t) + \rho I(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon I(t)S(t) - \rho I(t), \end{cases}$$

si la guérison ne peut être possible, il s'agit d'un modèle SI .

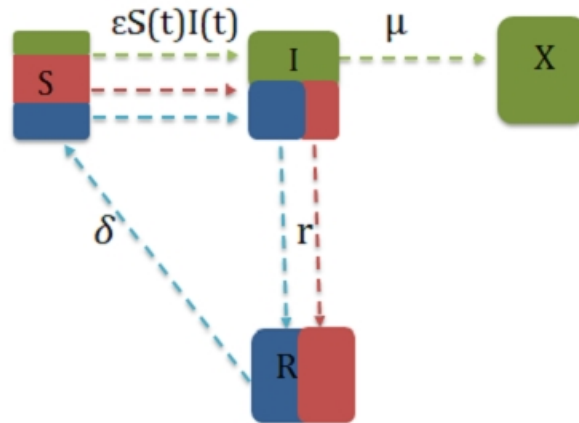
Modèles SIR , $SIRS$ et SIX

Certaines maladies sont mortelles. Afin d'en tenir compte, on utilise le compartiment X pour stocker les individus décédés, avec un taux de mortalité due à la maladie μ .

Pour bon nombre de maladies, les individus ayant guéris ou acquière une immunité, dans certain cas, cette immunité est permanente et dans d'autres, elle est temporaire. La lettre R sera utilisée pour référer aux individus ayant guéri de la maladie à un taux r et en ayant maintenant acquis l'immunité.

- Dans le cas où l'immunité est Permanente alors on parle d'un modèle SIR .
- Dans le cas où l'immunité est temporaire alors on parle d'un modèle $SIRS$.
- En cas où l'individu n'aura pas l'immunité et décède par la maladie alors on parle d'un modèle SIX .

Ces modèles sont schématisés par



Le système d'équations différentielles régissant le modèle SIR correspond au diagramme qui est en rouge est

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon I(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon I(t)S(t) - rI(t) \\ \frac{dR}{dt} = rI(t). \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles de modèle $SIRS$ correspond au diagramme qui est en bleu est

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon I(t)S(t) + \delta R(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon I(t)S(t) - rI(t) \\ \frac{dR}{dt} = rI(t) - \delta R(t). \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles régissant le modèle SIX correspond au diagramme qui est en vert est

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon I(t)S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon I(t)S(t) - \mu I(t) \\ \frac{dX}{dt} = \mu I(t), \end{cases}$$

où

ε :est le taux de transmission de la maladie

δ :est la probabilité des individus qui ont acquis l'immunité de redevenir susceptible selon la maladie.

r :est la probabilité qu'un individu infectieux d'être guérissant et d'acquière une immunité contre la maladie.

μ :est le taux de mortalité à cause de l'infection.

En réalité ce n'est pas toujours facile de résoudre une équation différentielle ordinaire analytiquement, pour cette raison on a recours à des méthodes numériques. Il y a plusieurs classes de méthodes numériques, on cite : les méthodes à pas, les méthodes spectrales, les méthodes des résidus pondérées, la méthode de différences finies, ... etc.

Dans notre travail on s'intéresse à la méthode de différences finies.

Méthode des différences finies

Dans ce chapitre, on développe la méthode de différences finies, en décrivant des différentes étapes pour aboutir à la matrice de discrétisation.

3.1 Un peu d'histoire sur la méthode



Sir Brook Taylor est un homme de sciences anglais, né le 18 *août* 1685 à Edmonton (Angleterre). Il est mort à l'âge de 46 *ans*, le 29 *décembre* 1731 à Londres. Son domaine d'intérêt inclut les mathématiques, la musique, la peinture et la philosophie. Son amour pour les mathématiques, lui a été transmis par ces professeurs John Machin et John Keill. Il a complété ses études à l'université de Cambridge et devint célèbre pour ses contributions au développement du calcul infinitésimal. Le 3 avril 1712 (à l'âge de 27ans), Taylor fut admis à la Royal Society de Londres (l'équivalent de l'Académie des sciences de Paris), non sur la base de ces publications

scientifiques mais sur recommandation et expertise de Machin, Keill et autres. Environ deux années après il fut élu secrétaire de la Royal Society, et il y resta du 14 *janvier* 1714 au 21 *octobre* 1718, lorsqu'il dut se résigner pour raisons de santé d'une part, d'autre part par manque de motivation. La période où il fut secrétaire de la Royal Society de Londres fut celle de sa vie où il fut le plus productif en mathématiques. Il publia deux ouvrages en 1715, qui sont extrêmement important pour l'histoire des mathématiques.⁸ *août* 1685 à Edmon-ton(Angleterre). Il est mort à l'âge de 46 ans, le 29 décembre 1731 à Londres. Son domaine d'intérêt inclus les mathématiques, la musique, la peinture et la philosophie. Son amour pour les mathématiques, lui a été transmis par ces professeurs John Machin et John Keill. Il a complété ses études à l'université de Cambridge et devint célèbre pour ses contributions au développement du calcul infinitésimal. Le 3 *avril* 1712 (à l'âge de 27 ans), Taylor fut admis à la Royal Society de Londres (l'équivalent de l'Académie des sciences de Paris), non sur la base de ces publications scientifiques mais sur recommandation et expertise de Machin, Keill et autres. Environ deux années après il fut élu secrétaire de la Royal Society, et il y resta du 14 *janvier* 1714 au 21 *octobre* 1718, lorsqu'il dut se résigner pour raisons de santé d'une part, d'autre part par manque de motivation. La période où il fut secrétaire de la Royal Society de Londres fut celle de sa vie où il fut le plus productif en mathématiques. Il publia deux ouvrages en 1715, qui sont extrêmement important pour l'histoire des mathématiques.

Dans son ouvrage, "Methodus incrementorum directa et inversa", Taylor ajouta aux mathématiques supérieures une nouvelle branche appelée 'calcul de différences finies', inventa l'intégration par parties, et découvrit les séries appelées 'développement de Taylor'.

En fait, la première mention par Taylor de ce qui est appelé aujourd'hui théorème de Taylor apparaît dans une lettre que ce dernier écrivit à Machin le 26 *juillet* 1712. L'importance du théorème de Taylor ne fut pas perçue avant 1772 quand Lagrange proclama que c'était le principe de base du calcul différentiel. Le terme série de 'Taylor semble' avoir été utilisé pour la première fois par L'Huilier en 1786.

Taylor a présenté aussi les principes de base de la perspective dans Linéaire Prospect (1715). La seconde édition fut appelée New principles of linear perspective.

Enfin, Taylor fit de nombreux séjours en France. C'était d'une part suite à des problèmes de santé et d'autre part pour garder le contact avec ces amis mathématiciens.

Actuellement, la pierre angulaire de la méthode des différences finies n'est autre que le développement des séries de Taylor.

La tentative embryonnaire de Bond, en 1849, et le travail non encore publié d'Adams, en 1855, on peut affirmer que les méthodes Multi pas sont créés plusieurs fois, de façon indépendante, dans une assez courte période débutant en 1883. Ce développement se fait parallèlement aux méthodes de Runge-Heun-Kutta, qui voient le jour en Allemagne entre 1894 et 1901. Les deux courants sont complètement indépendants, quoi qu'ayant des buts communs.

En fin de compte, il s'agit chaque fois d'adapter les quadratures numériques aux équations différentielles, afin de dépasser l'ancienne méthode d'Euler avec développement de Taylor. Les solutions trouvées pour éviter le calcul des dérivées successives "hantise suprême" des calculateurs sont très différentes : pas divisés pour les allemands ,pas multiples pour les anglais. Il semble pertinent de comparer l'efficacité des deux démarches selon le critère proposé par Runge en 1895 : l'ordre d'une méthode par pas est défini, à partir du nombre de termes communs dans les développements de Taylor de la vraie valeur pour tout $x \in]x_0, x_1]$, $u(x_1) = u(x_0 + h)$ et de la valeur approchée $u_1 = u_0 + h_{u_0}$. De plus, la partie principale de la différence entre valeur exacte et valeur approchée fournit une estimation de l'erreur de méthode pour un pas.

À titre de comparaison, rappelons que, dans les méthodes classiques de Runge-Kutta (obtenues par Kutta, en 1901, après bien des efforts), les développements de Taylor coïncident jusqu'au quatrième ordre (autrement dit, l'erreur de méthode élémentaire pour un pas est du cinquième ordre). Pour simplifier l'écriture, notons le développement de Taylor de la vraie valeur sous la forme

$$\begin{aligned} u(x_1) = & u_0 + Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{6} + D\frac{h^4}{24} + E\frac{h^5}{120} \\ & + F\frac{h^6}{720} + G\frac{h^7}{5040} + \dots \end{aligned}$$

La première méthode numérique à un pas fut introduite en 1768 par Leonhard Euler. Depuis un grand nombre de techniques ont été développées : elles se basent sur la discrétisation de l'intervalle d'étude en un certain nombre de pas. Suivant le type de formule utilisé pour approcher les solutions, on distingue les méthodes numériques à un pas ou à pas multiples, explicites ou implicites.

Pour un calcul poussé jusqu'au même ordre de différences finies, les méthodes implicites sont plus précises que les méthodes explicites (remarqué par Adams) et l'emploi d'une équation du second ordre plus efficace que celui d'une équation du premier ordre (souligné par Størmer). On voit aussi que, dès 1855, avait émergé la trame générale de méthodes de différences plus précises que celles de Runge-Heun-Kutta, qui devaient voir le jour quarante ans plus tard. La méthode de Différence Finie due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18^{ième} Siècle (*Euler, Taylor, ...*).

3.2 Le principe de la méthode

Cette méthode consiste à

- (Discrétisation du domaine) Posons $N = n + 1$ est le nombre de points donc n est le nombre de la subdivision de l'intervalle, on fait une subdivision du domaine d'étude du problème continue $[0, L]$ en sous domaines réguliers suivant le pas h

$$[0, L] = [x_0 = 0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n = L],$$

où $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = L$ et le pas $h = \frac{L}{n}$. Les points de la subdivision sont donnés par

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_i = x_{i-1} + h, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

- (Discrétisation de l'équation) Passer du problème continu au problème discret, en utilisant les schémas aux différences finies pour estimer les dérivées qui apparaissent dans l'équation différentielle ordinaire par une combinaison de valeurs de la fonction en un certain nombre de points, ces points proviennent de la discrétisation du domaine d'étude, ces estimations sont basées sur le développement de Taylor.

On définit le schéma aux *différences finies* par :

Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction au moins de classe $C^2(\mathbb{R})$

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

A partir de cette définition, on peut poser

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h}.$$

Ce résultat, on peut le retrouver via le Développement de *Taylor*.

Si $f \in C^{n+1}$ dans un voisinage $I = [0, L] = [x_0, x_n]$ de x_0

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \\ &= u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + u''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ &\quad + \cdots + u^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x) \end{aligned}$$

où

$$R_n(x) = u^{(n+1)}(\zeta) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = O((x - x_0)^{n+1})$$

et $x_0 < \zeta < x$

On suppose que $u(x)$ au moins de classe $C^3(\mathbb{R})$ le développement en série de Taylor de la fonction $u(x+h)$ à l'ordre 3 donne

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) \\ &= u(x) + hu'(x) + h\varepsilon(h) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

comme le reste $R_h = h\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 alors on peut avoir le schéma décentré progressif en tous points x_i tel que $i = 0, \dots, N-1$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} \quad (3.2.2)$$

de la même manière, on a

$$\begin{aligned} u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) \\ &= u(x) - hu'(x) + h\varepsilon(h) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

comme $R_h = h\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, alors on peut avoir le schéma décentré régressif en tous points x_i tel que $i = 1, \dots, N$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - u(x_i-h)}{h}. \quad (3.2.4)$$

Pour obtenir le schéma centré, on soustrait les deux quantités (3.2.1) et (3.2.3)

$$u(x+h) - u(x-h) = 2hu'(x) + h^2\varepsilon(h),$$

de même raisonnement, on trouve en tous points x_i tel que $i = 1, \dots, N - 1$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}. \quad (3.2.5)$$

La formule d'un schéma d'ordre 2 applicable aux nœuds des frontières peut être construite en utilisant trois points au lieu de deux. La procédure est la suivante, pour tout $i = 2, \dots, N$

$$u'(x_i) = \frac{au(x_i) + bu(x_{i-1}) + cu(x_{i-2}))}{h} + \partial(h^2), \quad (3.2.6)$$

à savoir que

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - u'(x_i)h + u''(x_i)\frac{h^2}{2!} - u^3(x_i)\frac{h^3}{6} + \dots \quad (3.2.7)$$

$$u(x_{i-2}) = u(x_i) - u'(x_i)(2h) + u''(x_i)\frac{(2h)^2}{2!} - u^3(x_i)\frac{(2h)^3}{6} + \dots \quad (3.2.8)$$

En multipliant l'équation (3.2.7) par b et l'équation (3.2.8) par c

$$\begin{aligned} & au(x_i) + bu(x_{i-1}) + cu(x_{i-2}) \\ &= (a + b + c)u(x_i) - h(2c + b)u'(x_i) + \frac{h^2}{2}(4c + b)u''(x_i) + \partial(h^3) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

où

$$\partial(h^3) = (b - 8c)\frac{h^3}{6}u^3(x_i).$$

L'identification de l'équation (3.2.9) à l'équation (3.2.6), donne

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2c + b = -1 \\ 4c + b = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équation, donne l'expression suivante pour un schéma régressif de second ordre, en utilisant trois points pour la dérivée première.

$$u'(x_i) = \frac{3u(x_i) - 4u(x_{i-1}) + u(x_{i-2}))}{2h} + \partial(h^2)$$

avec

$$\partial(h^2) = \frac{-h^2}{3}u^3(x_i).$$

On suit la même procédure pour construire les schémas centrés, décentrés de dimension 1.

3.2.1 Quelques schémas en 1D

Les schémas décentrés aux DFs progressif (à droit) d'ordre un

\simeq	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
hu'_i	-1	1	0	0	0
$h^2u''_i$	1	-2	1	0	0
$h^3u_i^{(3)}$	-1	3	-3	1	0
$h^4u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Les schémas décentrés aux (DFs) régressif (à gauche) d'ordre un

\simeq	u_i	u_{i-1}	u_{i-2}	u_{i-3}	u_{i-4}
hu'_i	1	-1	0	0	0
$h^2u''_i$	1	-2	1	0	0
$h^3u_i^{(3)}$	1	-3	3	-1	0
$h^4u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Les schémas centrés aux (DFs) d'ordre deux

\simeq	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2hu'_i$	0	-1	0	1	0
$h^2u''_i$	0	1	-2	1	0
$2h^3u_i^{(3)}$	-1	2	0	-2	1
$h^4u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

D'ailleurs le point de vue géométrique, est la façon la plus évidente et correcte pour comprendre le sens théorique de la dérivée voir ci-dessous.

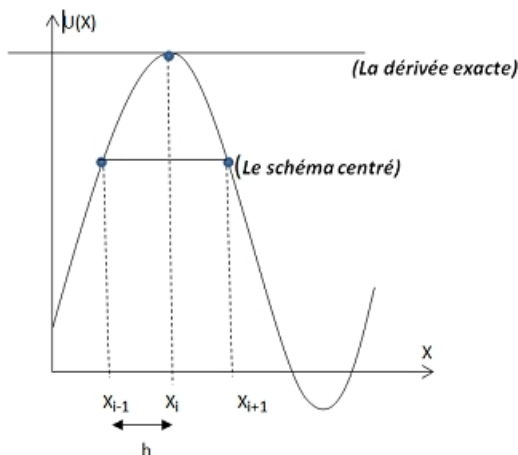


figure 1

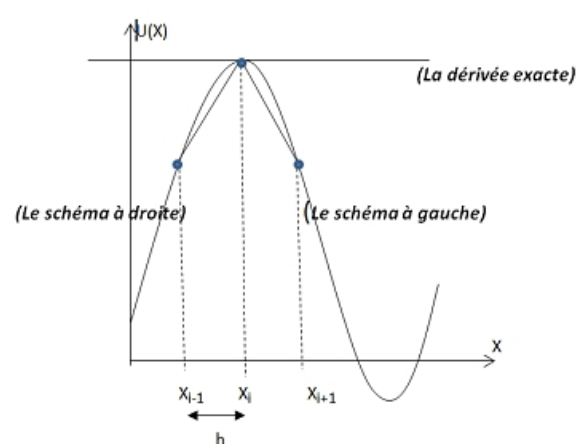


figure 2

Pour estimer la valeur de la dérivée exacte, on dessine la pente en point (x_i, u_i) , et pour les schémas décentré, on les considère comme une variation entre u_i et u_{i+1} , même chose entre u_i et u_{i-1} et entre u_{i-1} et u_{i+1} pour le centré en fonction de la variation spatiale $(x_i - x_{i-1})$.

3.2.2 La convergence de la méthode

Dans cette sous-section, on donne quelques définitions sur la convergence.

Définition 3.2.1 *On dit que la méthode est convergente si pour toute solution exacte $u(x)$ et une fonction d'incrément Φ de trois variables $(x, u, h) \in [x_0, x_N] \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ à valeur dans \mathbb{R} la suite*

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(x_n, u_n, h)$$

vérifie

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - \tilde{u}(x_n)| \rightarrow 0$$

pour N assez grand.

Définition 3.2.2 *Supposons que pour un pas h donné, une méthode numérique donne l'approximation \tilde{u}_h . On dit que la méthode est d'ordre P si*

$$|u(x_n) - \tilde{u}_h(x_n)| = O(h^P) \quad ; \forall n = 0, \dots, N$$

Définition 3.2.3 *On dit que la méthode est convergente à l'ordre p si seulement si*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ u_0 \rightarrow \tilde{u}(x_n)}} \max_n |u_n - \tilde{u}(x_n)| = O(h^p)$$

3.2.3 Motivation

1- La méthode de DFs pour la résolution d'une équation différentielle ordinaire.

On considère le problème de *Cauchy* à coefficient non constant linéaire et affine suivant

$$\begin{cases} u'(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{sur } x \in]0, L] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

La discrétisation du domaine donne

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_i = x_{i-1} + h, & \forall 2 \leq i \leq N, \end{cases}$$

dont $0 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < L$, $h = L/(N - 1)$.

En discrétisant l'EDO précédente suivant le pas h , puis on applique le schéma progressif (3.2.4) au premier point ($i = 1$), le schéma centré (3.2.5) aux points qui sont milieu ($i = 2, \dots, N - 1$) et le schéma régressif (3.2.2) au dernier point ($i = N$). On obtient l'écriture matricielle générale (sans la condition initiale)

$$AU = F$$

ou

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{h} + c_1 & \frac{1}{h} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{2h} & c_2 & \frac{1}{2h} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{-1}{2h} & c_{N-1} & \frac{1}{2h} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} + c_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

En prenant en compte la condition initiale, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \frac{1}{2h} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{-1}{2h} & c_{N-1} & \frac{1}{2h} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} + c_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ f_2 + \frac{u_0}{2h} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Les algorithmes correspondants à la discrétisation de l'équation sont donnés par

algorithme 1 (donne la matrice sans condition initiale)

$$A_{N \times N} = \begin{cases} \frac{-1}{h} + c_1 & \text{si } j = 1 \\ \frac{-1}{h} & \text{si } j = 2 \\ 0 & \text{si } j \geq 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{pour } i = 2 : N - 1 \\
 A(i, j) = \begin{cases} \frac{-1}{2h} & \text{si } j = i - 1 \\ c_j & \text{si } j = i \\ \frac{1}{2h} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\
 A(N - 1, j) = \begin{cases} \frac{-1}{h} + c_N & \text{si } j = N \\ \frac{-1}{h} & \text{si } j = N - 1 \\ 0 & \text{si } j \leq N - 2 \end{cases}
 \end{array} \right|$$

Algorithme2(en prenant le profil initial)

$$A_{N \times N} = \left. \begin{array}{l}
 u(0) = u_0 \\
 \text{pour } i = 1 : n \\
 \text{si } x(i) == 0 \\
 s = i \\
 \text{fin si} \\
 \text{fin pour} \\
 \text{pour } i = 1 : n \\
 \text{si } i == s \\
 A(i, i) = 1 \\
 F(i) = u_0 \\
 \text{fin si} \\
 \text{fin pour} \\
 \text{si } i > 1 \text{ et } i < n \\
 B(i - 1) = F(i - 1) - a(i - 1, i)u_0 \\
 B(i + 1) = F(i + 1) - a(i + 1, i)u_0 \\
 a(i, i + 1 : n) = 0 \\
 a(i, 1 : i - 1) = 0 \\
 a(1 : i - 1, i) = 0 \\
 a(i + 1 : n, i) = 0 \\
 \text{sinon si } i = 1 \\
 B(i + 1) = F(i + 1) - A(i + 1, i)u_0 \\
 A(i, i + 1 : n) = 0 \\
 A(i + 1 : n, i) = 0 \\
 \text{sinon} \\
 B(i - 1) = F(i - 1) - A(i - 1, i)u_0 \\
 A(i, 1 : i - 1) = 0 \\
 A(1 : i - 1, i) = 0 \\
 \text{fin si} \\
 \text{fin sinon} \\
 \text{fin pour} \\
 U = A^{-1}F
 \end{array} \right|$$

2- La méthode de DFs pour la résolution d'un système

Soit le système différentiel défini sur le domaine $x \in]0, L]$

$$\begin{cases} u_1'(x) = F_1(x, u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) \\ u_2'(x) = F_2(x, u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) \\ \vdots \\ u_m'(x) = F_m(x, u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) \end{cases}$$

avec les contraintes données par

$$\begin{cases} u_1(0) = u_{01} \\ u_2(0) = u_{02} \\ \vdots \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases}$$

La technique de découplage et de quasi-linéarisation consiste à découpler et linéariser chaque équation de système précédent comme suit

$$\begin{cases} \text{Etant donné les profils initiaux : } u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, \dots, u_m^{(0)} \\ \left(u_1^{(k+1)}\right)'(x) = F_1(x, u_1^{(k+1)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}) \\ \left(u_2^{(k+1)}\right)'(x) = F_2(x, u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, u_3^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}) \\ \vdots \\ \left(u_m^{(k+1)}\right)'(x) = F_m(x, u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, u_3^{(k+1)}, \dots, u_m^{(k+1)}) \end{cases}$$

où $u_i^{(k+1)}$ et $u_i^{(k)}$ représentent la solution à l'itération $k + 1$ et à l'itération k respectivement pour tout $i = 1, \dots, m$.

A chaque itération on applique la méthode de différences finies (*df*) décrite précédemment pour chaque équation.

La solution de problème est obtenue lorsque la norme euclidienne de la différence entre la solution de l'itération k et l'itération $k + 1$ est plus petite à un certain ε .

Algorithme 3

$$\begin{cases} u_1^{(0)} = 1, u_2^{(0)} = 1, u_3^{(0)} = 1, \dots, u_m^{(0)} = 1 \text{ les profils initiaux, } \varepsilon \text{ une précision de découplage} \\ \text{erreur} = 1 \\ j = 1 \end{cases}$$

tant que Erreur $> \varepsilon$ une précision petite donnée **Faire**

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(j)}(x) &= df F_1 \left(x, u_1^{(j-1)}(x), u_2^{(j-1)}(x), \dots, u_m^{(j-1)}(x) \right) \\ u_2^{(j)}(x) &= df F_2 \left(x, u_1^{(j-1)}(x), u_2^{(j-1)}(x), \dots, u_m^{(j-1)}(x) \right) \\ &\vdots \\ u_m^{(j)}(x) &= df F_m \left(x, u_1^{(j-1)}(x), u_2^{(j-1)}(x), \dots, u_m^{(j-1)}(x) \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Erreur} = \max \left(\left\| u_1^{(j)}(x) - u_1^{(j-1)}(x) \right\|, \left\| u_2^{(j)}(x) - u_2^{(j-1)}(x) \right\|, \dots, \left\| u_m^{(j)}(x) - u_m^{(j-1)}(x) \right\| \right)$$

$j = j + 1$

Fin tant que

Applications numériques

Pour enrichir notre travail, on commence par un exemple illustratif (sa solution analytique est donnée), puis pour l'application numérique on va faire une étude intéressante sur la propagation de la fièvre aphteuse et voir géométriquement l'effet de vaccin pour faire arrêter la dynamique de cette maladie.

On utilise un logiciel de calcul numérique "MATLAB" de haut performance pour la simulation numérique.

4.1 Test de la méthode

Exemple 1 :

Etant le problème de *Cauchy* défini sur le domaine $]0, 2]$

$$\begin{cases} u_1'(x) + u_1(x)u_2(x) = \exp(-x)(\exp(1-x) - 1) \\ u_2'(x) + u_1(x)u_2(x) = \exp(1-x)(\exp(-x) - 1) \end{cases}$$

dont les conditions de *Dirichlet*

$$\begin{cases} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = \exp(1) \end{cases}$$

Sachant que la solution exacte de ce système est

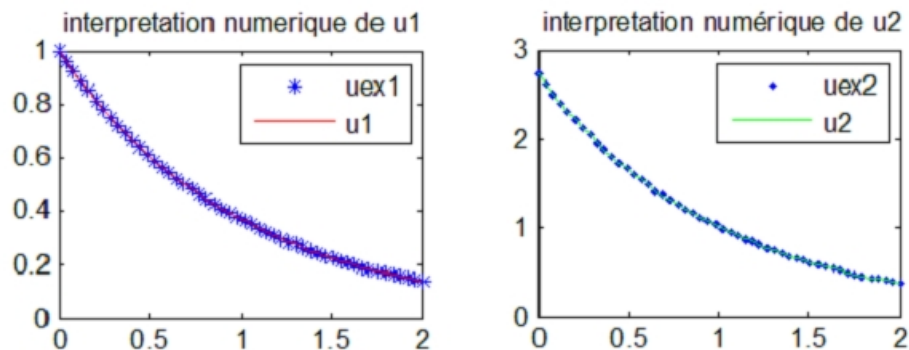
$$u(x) = \begin{pmatrix} \exp(-x) \\ \exp(1-x) \end{pmatrix}$$

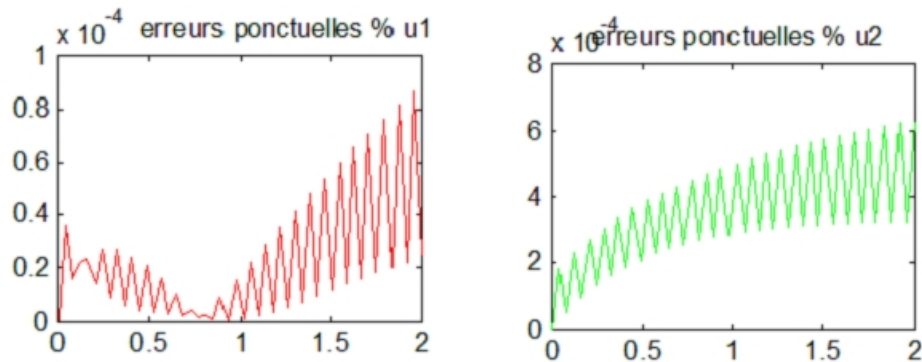
En appliquant la méthode de différence finie (avec la technique de découplage) à ce problème on obtient le résultats suivant.

n	$err1 = \ u_{ex1} - u1\ $	$err2 = \ u_{ex2} - u2\ $	$T \text{ CPU}(en \text{ s})$
100	$7,8126e - 005$	$9,5474e - 004$	0,965052
120	$5,9272e - 005$	$7,2368e - 004$	0,942644
140	$4,6945e - 005$	$5,7281e - 004$	1,003739
160	$3,8368e - 005$	$4,6793e - 004$	1,012742
180	$3,2118e - 005$	$3,9156e - 004$	0,975735
200	$2,7398e - 005$	$3,3392e - 004$	1,000275
220	$2,3731e - 005$	$2,8915e - 004$	1,014176
240	$2,0814e - 005$	$2,5357e - 004$	1,000210
260	$1,8450e - 005$	$2,2472e - 004$	1,063868
280	$1,6501e - 005$	$2,0096e - 004$	1,48437
300	$1,4873e - 005$	$1,8111e - 004$	1,201341
320	$1,3496e - 005$	$1,6433e - 004$	1,183226
340	$1,2319e - 005$	$1,4998e - 004$	1,259935
360	$1,1304e - 005$	$1,3761e - 004$	1,288659
380	$1,0421e - 005$	$1,2685e - 004$	1,381417
1001	$3,8657e - 006$	$2,0088e - 005$	5,491411

Commentaire : Il est bien claire que la Performance apparaît du point de vue de la convergence où on voit que l'erreur globale (l'erreur de la machine+ l'erreur de la méthode+ de découplage) devient de plus en plus petite pour un nombre de points très grand ($n = 100, \dots, 1001$), et l'exécution de ce programme par le computer prend mois temps possible (en secondes).

On peut montrer (sur la figure suivante) cette bonne approximation de la solution exacte, en prenant $n = 50$.





Les erreurs ponctuelles commises sont d'ordre 10^{-4} .

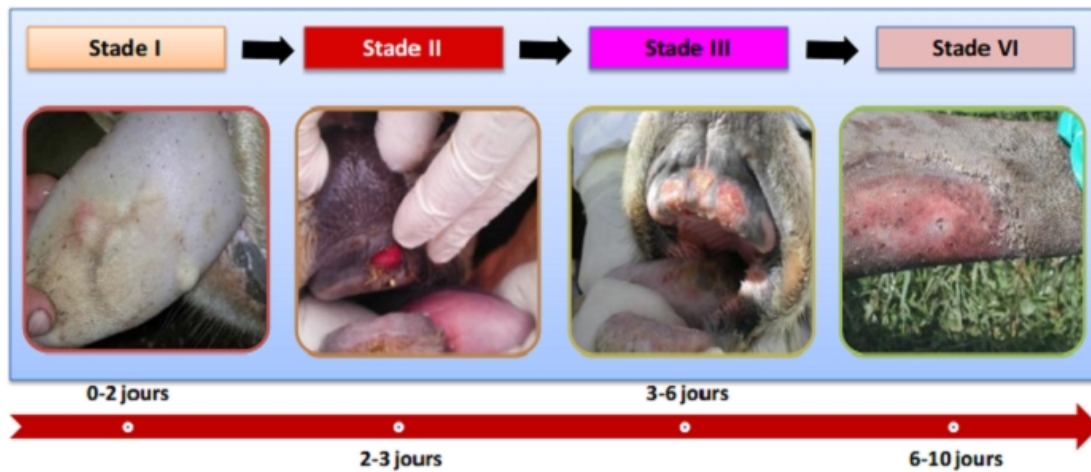
4.2 Simulation de la transmission d'une épidémie avec vaccination(V)

Exemple 2 : La fièvre Aphteuse

Certaines pays, notamment l'Algérie a subi de grave problème de santé animal due à la fièvre Aphteuse en 2014, cette maladie hautement contagieuse qui entraine des pertes économiques considérable dont la mortalité est faible chez les vaches adultes mais souvent élevé chez les vaches jeunes par suite d'une myocardite, elle est transmise par contacte directe ou indirecte. Il est connu que le virus Aphtovirus est véhiculé par l'air, notamment dans les zones tempérées. Les sources de virus sont les animaux chimiquement atteints qu'en période d'incubation, même l'air expiré, la salive, les fèces et les urines. Parmi les signes de cette maladie hyperthermie, anorexie, chute de production de lait et l'apparition des vésicules sur les mamelles, la muqueuse buccale et nasale et où dans les espaces interdigité.

Les principales lésions de la maladie chez les bovins et déterminant la datation des lésions

est décrit dans les schémas suivants



L'évolution de lésions de fièvre aphteuse chez les bovins

En fin, pour faire face à ce qui menace de plus en plus notre cheptel des mesures prise de la prophylaxie sanitaire telle que protection des zones interne par contrôle et surveillance des déplacements des animaux.

Abattage des animaux infecté, des infections des locaux et des mesures de quarantaines, ça implique pour la prophylaxie médical c'est la vaccination par un vaccin actif.

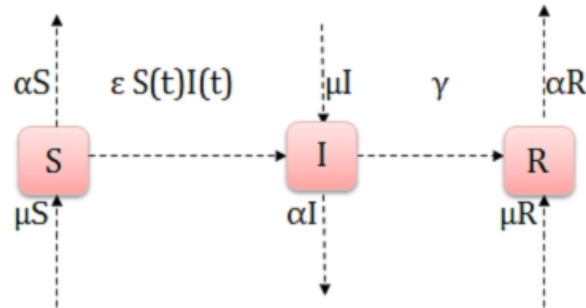
Spécialement pour cette maladie, on va faire une étude générale qui teste l'activité du vaccin (V) contre la fièvre Aphteuse chez les vaches, en utilisant la méthode de différence finie avec la technique de découplage et de quasi-linéarisation".

Soit N est le nombre total de la population bovine donné. Supposons qu'elle est isolée par rapport à le monde externe.

Le premier cas : (le modèle SIR sans vaccination)

Au niveau de cette phase, le modèle épidémiologique correspond est de type *SIR*, on peut le

schématiser par



Le diagramme SIR sans vaccination

Voici l'interprétation mathématique adaptée, pour $t \in]0, 30]$, on a

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon S(t)I(t) + \mu S(t) - \alpha S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon S(t)I(t) + \mu I(t) - \alpha I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) + \mu R(t) - \alpha R(t), \end{cases}$$

où

ε : est le taux de transmission de la maladie.

γ : est le taux de la guérison avec d'acquière une immunisation contre la réinfection soit naturellement ou bien par un traitement médical.

α : est la probabilité que chaque décès appartient à son compartiment.

μ : la probabilité que chaque naissance appartient à son compartiment.

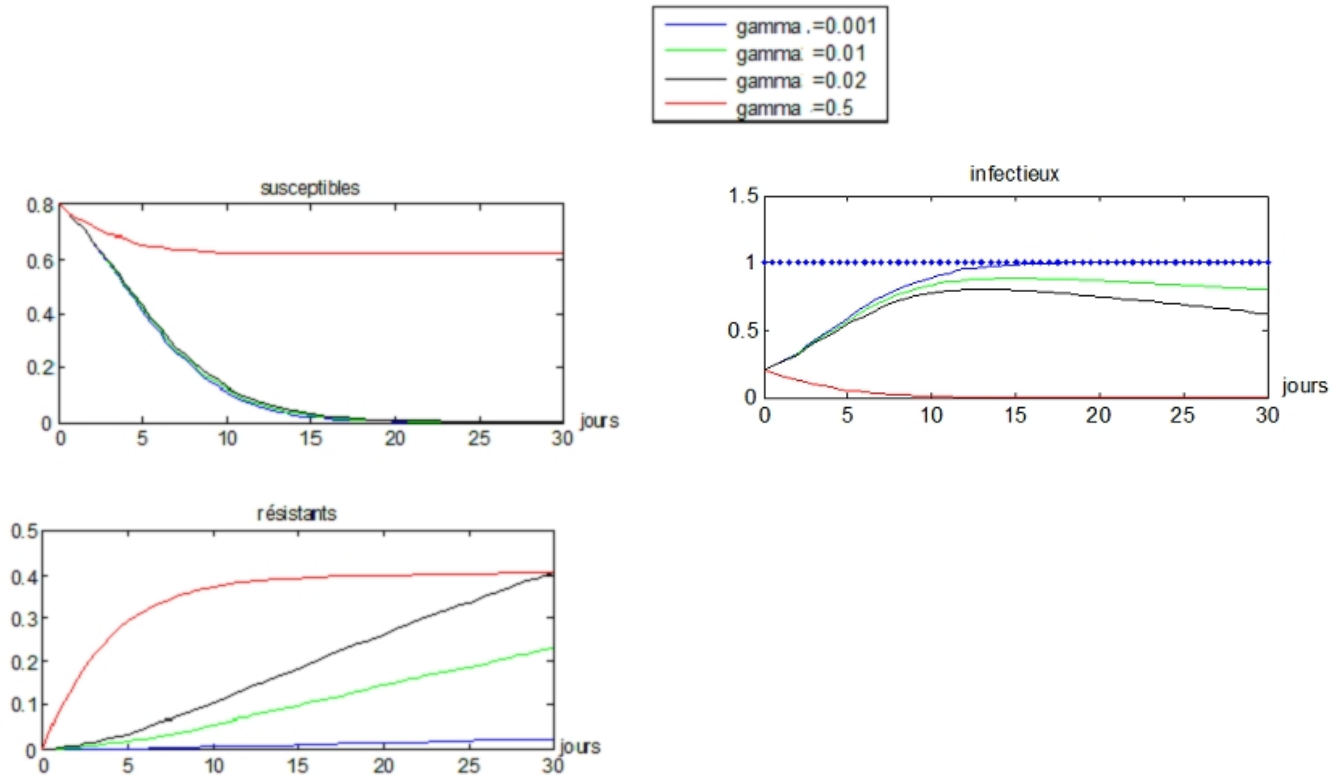
Considérons $N = S_0 + I_0 + R_0$, à l'état initiale on a

$$\begin{cases} S_0 = 0.8 \times N \\ I_0 = 0.2 \times N \\ R_0 = 0, \end{cases}$$

et les proportions

$$\begin{cases} \varepsilon = 0.35 \\ \alpha = 0.005 \\ \mu = 0.006. \end{cases}$$

Ce qui nous intéresse le plus dans cette phase est la proportion γ qui joue le rôle de la guérison.



Indication : la droite qui vaut 1 (voir la population infectieux) pour dire qu'on n'a pas dépassé la population globale proportionnellement.

Lorsque le taux de guérison γ est de l'ordre 50% alors on constate que la maladie disparaît au bout de 15 jours (voir figure infectieux). Si $\gamma = 2\%$ alors le nombre des infectés augmente pour atteindre 80% de la population totale au bout de 13 à 14 jours, en suite commence à diminuer lentement, si γ est plus petite par exemple 0.1%, on constate qu'après 23 jours toute la population deviennent malade.

Remarque 4.2.1 Si $\gamma \geq 50\%$ alors on n'a pas besoin du vaccin.

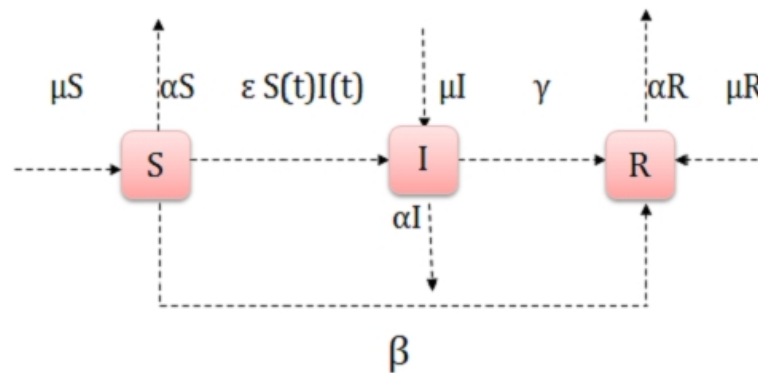
Le deuxième cas : (le modèle SIR avec vaccination)

(Pour le cas de l'Algérie heureusement qu'après quelques mois, ils ont commencés à vacciner pour limiter la propagation de cette épidémie).

Les vaccins contre cette maladie fabriqués conformément aux recommandations de l'OIE (l'organisation mondiale de la santé animale) sont dépourvus des protéines structurales telles

que la protéine 3ABC lors des étapes de purification. La présence d'anticorps dirigés contre la protéine 3ABC est généralement considérée comme l'indicateur le plus fiable de répllication virale. Les anticorps apparaissent dès la première semaine, qui suit l'infection, atteignent leur maximum à la fin de la troisième semaine.

On peut schématiser le modèle SIR avec vaccination par



Le diagramme SIR avec vaccination

La formulation mathématique de ce schéma est donnée par le système différentiel suivant

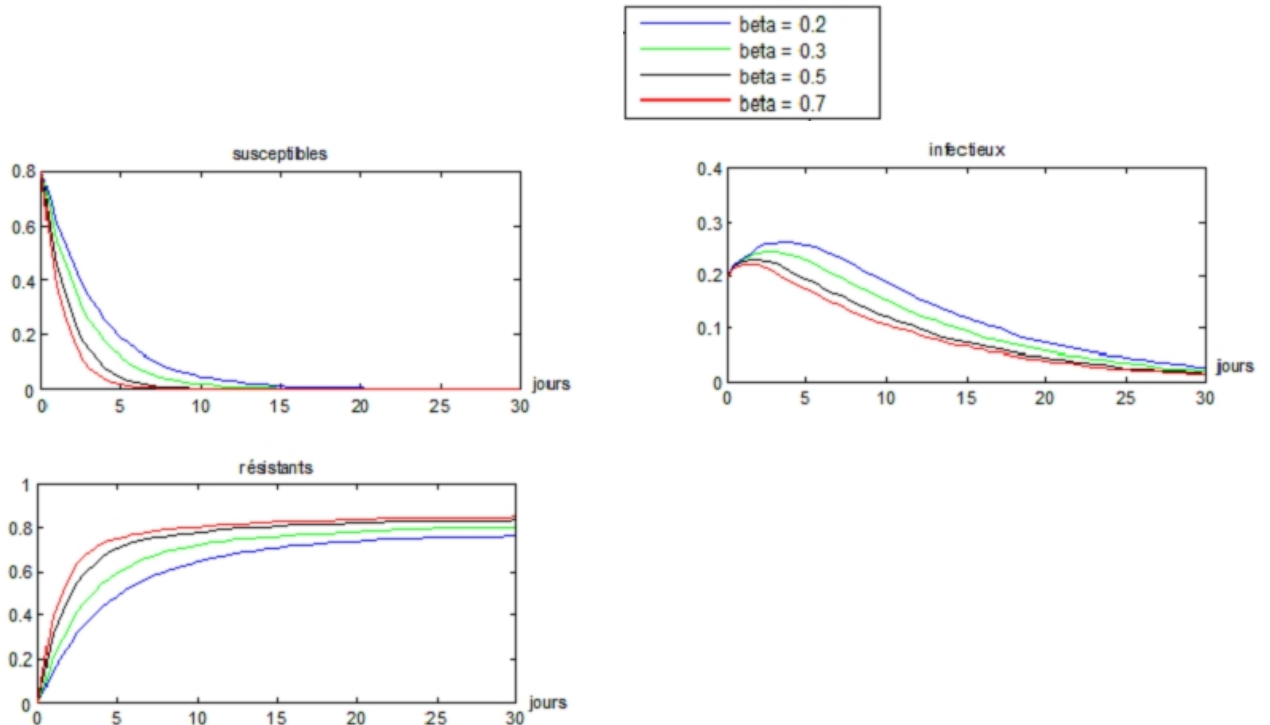
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon S(t)I(t) + \mu S(t) - \alpha S(t) - \beta S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon S(t)I(t) + \mu I(t) - \alpha I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) + \mu R(t) - \alpha R(t) + \beta S(t), \end{cases}$$

où β : est le taux de vaccination au niveau susceptible de la population.

Indication : On suppose que le vaccin est efficace à 100%.

En prenant les données suivantes

$$\begin{cases} \varepsilon = 0.35 \\ \alpha = 0.005 \\ \mu = 0.006 \\ \gamma = 0.1. \end{cases}$$



Lorsque le taux β est de l'ordre 70%, alors, on constate que la maladie atteinte un maximum d'environ 22% de la population totale au bout de 2 à 3 jours (voir figure infectieux), puis elle commence à diminuer, ça veut dire que l'épidémie va disparaître après un certain temps.

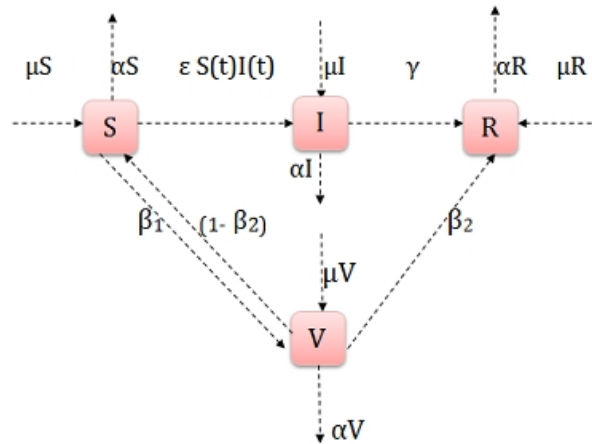
Pour un taux de la vaccination de 20%, alors la maladie atteinte un maximum d'environ 27% de la population totale au bout de 4 à 5 jours.

Remarque 4.2.2 *Dans ce cas il est important de maintenir une couverture vaccinale suffisante chez la population bovine.*

Le troisième cas : (le modèle SIR avec le test du vaccin modifié)

Pour tester l'efficacité de la vaccination atteint après une modification de la substance chimique nous voulons étudier l'impact de ce dernier à arrêter la dynamique de transmission de

la fièvre aphteuse. Voilà le diagramme associé à cette dynamique, pour $t \in]0, 30]$



On peut modéliser ce diagramme par ce système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\varepsilon S(t)I(t) - \beta_1 S(t) + (1 - \beta_2)V(t) + \mu S(t) - \alpha S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon S(t)I(t) - \gamma I(t) - \alpha I(t) + \mu I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) + \beta_2 V(t) - \alpha R(t) + \mu R(t) \\ \frac{dV}{dt} = \beta_1 S(t) - V(t) - \alpha V(t) + \mu V(t). \end{cases}$$

Etant la population bovine étudiée $N = S_0 + I_0 + R_0 + V_0$ fermée, tel que

β_1 : est le taux de la vaccination au niveau susceptible de la population.

β_2 : est la probabilité d'individu vacciné d'acquière l'immunité et devenant résistant.

$(1 - \beta_2)$: la possibilité d'individu vacciné de la perte de l'immunité et devient sensible à la maladie.

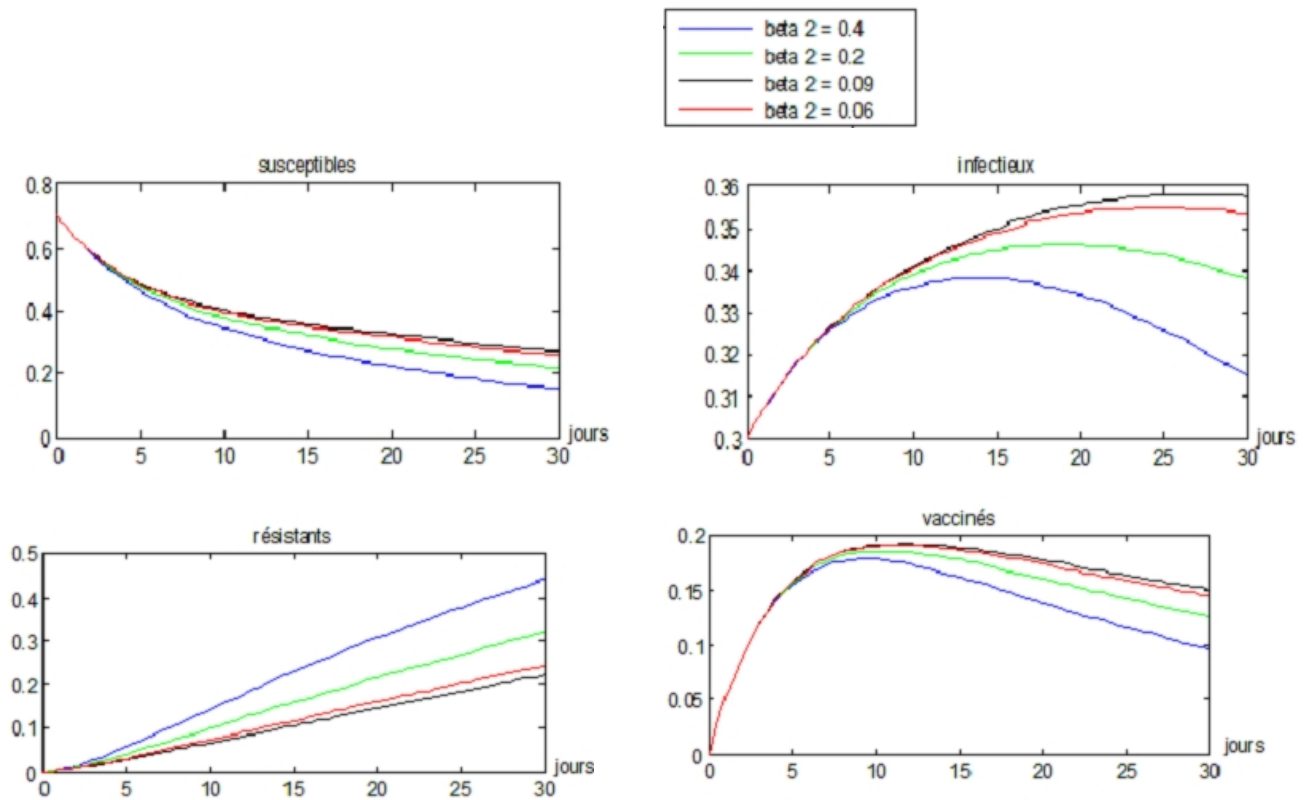
En utilisant les données suivantes

$$\begin{cases} S_0 = 0.8 \times N \\ I_0 = 0.2 \times N \\ R_0 = 0 \\ V_0 = 0. \end{cases}$$

Comme on prend les coefficients

$$\begin{cases} \varepsilon = 0.35 \\ \alpha = 0.005 \\ \mu = 0.006 \\ \gamma = 0, 1 \\ \beta_1 = 0, 5. \end{cases}$$

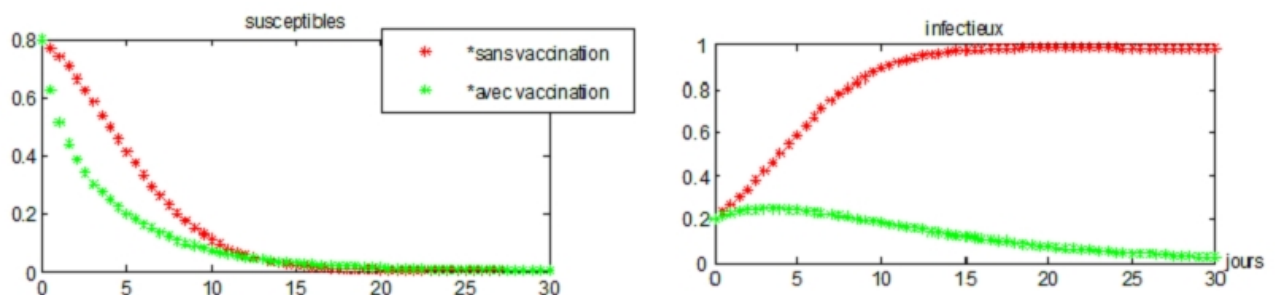
Ici, on veut montrer numériquement l'influence de β_2 sur la dynamique des quatre compartiments.

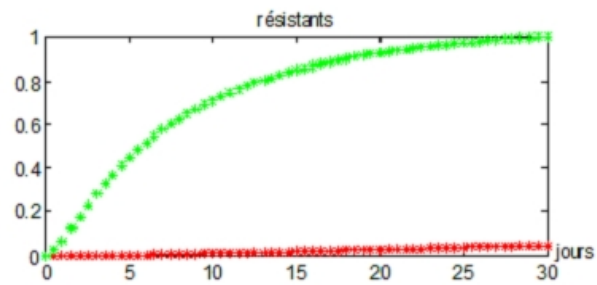


On voit que quand on augmente le β_2 proportionnellement, on remarque que la population résistants va augmenter linéairement au cours de temps, en revanche la population infectieux va diminuer (comme indique la figure résistants, et la figure infectieux).

Exemple comparatif :

On justifie cette comparaison par l'interprétation géométrique suivante





La différence est bien évidente entre les deux cas :

- Dans le premier (sans vaccination) : la fièvre aphteuse se propage exponentiellement, elle Atteindre sa valeur maximale d'environ 99% des vaches infectés au bout de 15 jours. puis elle prend une situation stable dont tout la population seras contaminée la maladie.
- Dans le deuxième (avec vaccination) : La fièvre aphteuse touche presque 21% des vaches, et à partir du quatrième jour cette maladie va disparaître relativement avec la dose de vaccin.

CONCLUSION-PERSPECTIVES

En conclusion, la modélisation mathématique est un outil d'aide à la décision en matière de santé animale, elle permet de simuler numériquement les modèles épidémiologiques de type SIR monodimensionnel par une approche dite «la méthode de différences finies» combinée avec la technique de "découplage et de quasi-linéarisation".

Nous avons également validé l'impact de la vaccination sur la propagation de la maladie de la fièvre aphteuse.

Parmi les perspectives de cette étude, on peut considérer ce problème comme un problème de control optimal et ces modèles comme s'elle dépendent d'espace et de temps.

Bibliographie

- [1] V.Arnold, chapite supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires- "Mir, Mocow",1984.
- [2] Eric, Goncalvès, Institut national polytechnique de Grenoble-Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO, septembre 2005.
- [3] Mazen SAAAd, Analyse Numérique, Ecole centrale de Nantes.
- [4] Université Claude Bernad, Equation ddférentielles ordinaires et partielles, Lyon, 11 novembre 1918.
- [5] Jean-Marc huré, Ddier pelat, Méthodes numériques, Elements d'un premier parcours, 2002/2003
- [6] C.Basdevant, Equation différentielles, Etude théorique et Schémas numèriques, 2003/2004.
- [7] Linell.Walter, Résolution numérique d'équations différentielles chaotiques par algorithme adaptif, Janvier 2005
- [8] Pascal viol. Méthode d'analyse numérique, 2006.
- [9] Abbès Azzi. Méthodes numériques Appliquées Aux calcul des Ecoulements et du tansfert de chaleur, version1, juin 2011
- [10] Kendalle.Atkinson, Weimin.Han, David.Steward, Numerical Solution of Ordinary Differential Equation, 2009
- [11] Pierre Andre Noël, Dynamique de modèles épidémiologiques, Application au cas du virus du nil occidental, 2007.

- [12] Deterministic modeling for human Papillomavirus transmission :impact of vaccination
19 décembre 2012.
- [13] Heni Haj AMMAR, Hajer KILANI, la fièvre aphteuse : maladie à bien connaître, Mars
2014

ANNEXE

Voici quelques termes qui seront fréquemment utilisés au cours de ce mémoire.

- * *Maladie infectieuse* : maladie provoquée par la transmission d'un agent pathogène : virus bactérie, parasite,...etc

- * *Epidémie* : augmentation rapide de l'incidence d'une pathologie. Bien que souvent utilisée dans un contexte de maladies infectieuses

- * *Susceptibles (S)* : les individus qui n'ont pas d'immunité contre l'agent infectieux et qui peuvent s'infecter s'ils sont exposés.

- * *Infectieux (I)* : les individus qui sont actuellement infectés et peuvent transmettre l'infection aux susceptibles avec lesquels ils sont en contact.

- * *Removed (R)* : les individus qui sont immunisés contre l'infection, et de ce fait n'affectent pas la dynamique de la transmission quand ils sont en contact avec les autres individus.

- * *Vaccination (V)* : un procédé consistant à introduire un agent extérieur (*le vaccin*) dans un organisme vivant afin de créer une réaction immunitaire positive contre une maladie infectieuse.