

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**Mémoire**

Présenté à

L'Université Abdel Hamid Ibn Badis de Mostaganem  
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie  
Département de Physique

Pour obtenir le Diplôme de  
**Magister en Physique**

Option : propriétés Optiques linéaires et non linéaires des matériaux  
organiques et leurs applications

Par

**SETTOUF Ahmed**

Sujet

**Caractérisation électrique des matériaux uniaxes.**

Soutenu le

Devant le jury composé de

Terki Hassaine Mounir	M.C.A	Université de Mostaganem	Président
Beghdad Mohamed	M.C.A	Université de Mostaganem	Examineur
Benotsmane Ahmed	M.C.A	Université de Mostaganem	Examineur
Ahmadouche Ahmed	M.C.A	Université de Mostaganem	Encadreur

**Année universitaire : 2011-2012**

## **Remerciements**

Je tiens à remercier mon encadreur Docteur AHMADOUCHE Ahmed pour avoir accepté de diriger ma recherche et l'aide précieuse qu'il m'a apporté tout au long de l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier Docteur BEN OTSMANE Ahmed le responsable de poste graduation pour ses encouragements.

Mes remerciements iront à mes enseignants :

- TERTKI Hassaine Mounir
- BEGHADAD Mohamed

Pour avoir accepté de juger ce travail.

## SOMMAIRE

Introduction .....	06
Chapitre I Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques .....	07
1-1 Equations de Maxwell.....	08
1-2 La permittivité.....	10
2-1 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide .....	11
2-2 Onde plane .....	12
2-3 Propagation à travers la matière .....	14
2-4 Propagation dans les milieux anisotropes .....	15
2-5 Propagation dans un milieu linéaire homogène et anisotrope .....	16
2-6 Structure de l'onde plane dans le milieu anisotrope .....	19
2-7 Modes propres de propagation .....	20
2-8 Propagation dans un milieu uniaxe .....	22
2-9 Structure de l'onde plane dans un cristal uniaxe .....	24
2-10 Propriétés de l'onde .....	24
3- Conclusion .....	26
Chapitre II guide d'onde rectangulaire.....	27
1-1 Réflexion sur un plan conducteur .....	28
1-2 Condition de propagation entre deux plans parallèles.....	29
2-1 Propagation dans un guide d'onde rectangulaire .....	30
2-2 Définition des modes $TE_{m0}$ et $TE_{0n}$ .....	31
3-1 Relation fondamentale de la propagation guidée .....	32
3-2 Longueur d'onde et fréquence de coupure .....	33
3-3- Étude du mode fondamental.....	34
3-4- Longueur d'onde de propagation guidée.....	35
4- Les composantes transversales .....	35
5-1 Détermination des modes TM.....	37

5-2 détermination des modes TE.....	39
6- Guide d'onde rectangulaire rempli d'un matériau anisotrope.....	39
Chapitre III Méthode de caractérisation par une cavité résonnante.....	42
1-Technique de caractérisation .....	44
2- Paramètres géométriques de la cavité avec la ligne micro ruban .....	44
3- Circuit équivalent de la cavité avec la ligne d'accès .....	45
3-1-a paramètre d'une ligne micro-ruban .....	46
3-1-b- Calcul de l'admittance d'entrée du bout de ligne ouverte .....	47
3-2 Modélisation de la fente .....	48
3-2-a-Calcul du champ rayonné par la fente .....	48
3-2-b- Calcule de l'admittance l'entrée de la fente rayonnante .....	50
3-3 Modélisation de la cavité .....	51
3-3-a-Fréquence des oscillations libres .....	52
3-3-b- Oscillations forcées ... ..	53
3-3-c- L'admittance d'entrée de la cavité.....	57
4- Coefficient de réflexion à l'entrée.....	59
Chapitre IV Mesures et résultats numériques.....	60
1- Les mesures.....	61
1-1 L'analyseur de réseau.....	61
1-2 Le dispositif de test.....	61
2- Cavité remplie d'un matériau uniaxe.....	62
2-1 Composantes transversales en fonction des composantes longitudinale.....	63
2-2 Equation de propagation.....	64
2-3-1-Propriétés des oscillations libres.....	67
2-3-2-Problème d'oscillation forcée.....	70
3- Susceptance d'entrée de la cavité.....	74
4- Coefficient de réflexion à l'entrée.....	79

## Sommaire

---

5- Résultats de mesure .....	80
6- Influence des pertes sur les résultats .....	81
7- Comparaison entre fréquences de résonances calculées et celle mesurée. ....	83
Conclusion générale. ....	84
Annexe I. ....	86
Annexe II. ....	88
Organigramme.....	90
Liste des tableaux. ....	93
Liste des figures. ....	94
Références bibliographiques. ....	95

# Introduction

Parmi les applications des micro-ondes, nous avons la caractérisation des matériaux diélectriques. Dans notre sujet, nous nous intéressons aux matériaux uniaxes (détermination de leur tenseur de permittivité).

Dans notre projet, la caractérisation se fait dans une cavité électromagnétique excitée par une ligne de type micro-ruban à travers une fente. Cette structure est reliée par un analyseur de réseau. Ce dernier est utilisé spécifiquement pour mesurer le coefficient de réflexion à l'entrée du dispositif.

Notre travail contient quatre chapitres :

D'abord, le premier chapitre traite des notions de base qui présentent les équations de Maxwell, la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux isotropes puis dans les milieux anisotropes uniaxes.

Ensuite, le deuxième chapitre consiste à étudier le guide d'onde rectangulaire rempli d'un matériau isotrope puis d'un matériau anisotrope dans lequel les ondes se propagent par les réflexions successives sur les parois métalliques internes, en appliquant toujours les équations de Maxwell.

Puis, le troisième chapitre consiste à étudier une cavité électromagnétique vide et remplie du matériau à caractériser. Elle est excitée à travers une fente introduite dans le plan de masse de la ligne micro-ruban.

Nous décomposons ce dispositif en trois éléments (ligne – fente – cavité). Chaque élément est modélisé par son admittance. A partir de ces trois admittances, nous calculons le coefficient de réflexion de l'ensemble du dispositif.

Enfin, le quatrième chapitre consiste à présenter les mesures des fréquences de résonances de la structure avec des paramètres géométriques donnés. A partir de ces fréquences de résonances on peut calculer le tenseur de permittivité du matériau à caractériser

On peut aussi calculer les pertes du diélectrique à caractériser en comparant la cavité vide avec la cavité remplie du matériau à caractériser.

## **CHAPITRE I**

# **PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LES MILIEUX DIELECTRIQUES**

Puisque la caractérisation d'un matériau diélectrique demande une application d'un champ électrique ou électromagnétique sur ce matériau, nous sommes obligés d'étudier les équations de Maxwell.

### Historique

James Clerk Maxwell (1831-1879), physicien écossais de talent exceptionnel, d'avoir unifié en 1865 les deux théories distinctes (électricité, magnétisme) en une seule et unique théorie dite «électromagnétisme». Cette théorie est la base de l'électromagnétisme et donnée par quatre équations de Maxwell.

Le champ électromagnétique dans l'espace est décrit par le vecteur de champ électrique  $\vec{E}$  et le vecteur de champ magnétique  $\vec{H}$  ; et pour tenir compte de l'interaction avec la matière, il faut introduire deux autres vecteurs  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$  (induction électrique et magnétique respectivement).

### 1-1- Equations de Maxwell

Ces quatre vecteurs sont reliés par les quatre **équations de Maxwell [1]** :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \dots\dots\dots 1.1a$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \dots\dots\dots 1.1b$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \dots\dots\dots 1.1c$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \dots\dots\dots 1.1d$$

Equation (1.1a) est appelée équation Maxwell Faraday.

Equation (1.1b) est appelée équation Maxwell Ampère.

Equation (1.1c) est appelée équation Maxwell Gauss.

Equation (1.1d) postule l'absence des charges magnétiques.

Où  $\vec{J}$  est la densité de courant électrique et  $\rho$  est la densité des charges électriques libres jouent le rôle des sources du champ électromagnétique.

Ces quatre équations peuvent être réécrites sous forme d'intégrales :

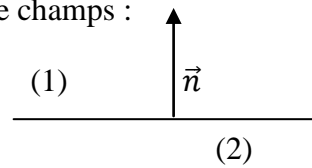
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \dots\dots\dots 1.2a$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot d\vec{s} + J \dots\dots\dots 1.2b$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \dots\dots\dots 1.2c$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \dots\dots\dots 1.2d$$

A la surface de séparation de deux milieux différents (1) et (2) (voir la figure I.1). Dans ce cas il est utile de réécrire les équations de Maxwell afin d'obtenir des conditions aux limites qui expriment la continuité ou la discontinuité des composantes normales et tangentielles des vecteurs de champs :



**Fig. I-1** surface de séparation de deux milieux différents

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \dots\dots\dots 1.3a$$

$$\vec{n} \wedge (H_1 - H_2) = \vec{J}_s \dots\dots\dots 1.3b$$

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \sigma_s \dots\dots\dots 1.3c$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \dots\dots\dots 1.3d$$

On rencontre souvent des problèmes où la densité surfacique du courant électrique  $\vec{J}_s$  et la densité surfacique des charges libres  $\sigma_s$  sont nulles : dans ces cas les équations (1.3a-d) expriment la continuité des composantes tangentielles de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  et de composantes normales de  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$  à l'interface entre les deux milieux:

Aux équations de Maxwell s'ajoutent les relations constitutives qui caractérisent les propriétés électriques de la matière par l'intermédiaire de la permittivité diélectrique  $\varepsilon$  :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \dots\dots\dots 1.4$$

où  $\vec{P}$  est le vecteur de polarisation ;  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide.

La permittivité diélectrique reste alors la seule quantité qui détermine les propriétés physiques des matériaux.

## 1-2- La permittivité

Plus précisément, la permittivité diélectrique est une propriété physique qui décrit la réponse d'un milieu donné à un champ électrique appliqué.

C'est une grandeur macroscopique, essentielle de l'électrostatique, ainsi que de l'électrodynamique des milieux continus. Elle intervient dans de nombreux domaines, notamment dans l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques.

Ainsi, on peut classer les matériaux selon plusieurs critères :

Tableau I.1-classification des matériaux [2]

Isotrope ( $\epsilon$ est un scalaire)	Anisotrope ( $\epsilon$ est un tenseur de rang 2 c'est-à-dire une matrice $[\epsilon]$ ). Dans ce cas le champ de vecteur $\vec{D}$ n'est pas colinéaire à $\vec{E}$ .
Homogène ( $\epsilon$ ne dépend pas de $r$ )	Inhomogène (les coefficients $\epsilon_{ij}$ de la matrice $[\epsilon]$ dépendent des coordonnées de l'espace $x, y$ et $z$ .)
Non absorbant ( $\epsilon$ est réel)	Absorbant ( $\epsilon$ est un complexe)
Linéaire ( $\epsilon$ ne dépend pas de champs)	Non linéaire ( $\epsilon$ dépend de champs)

En addition à la permittivité diélectrique nous avons un autre paramètre connu sous le nom de la susceptibilité diélectrique  $\chi$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \dots\dots\dots 1.5$$

Il s'en suit des équations (1.4) et (1.5) que la relation entre  $\epsilon$  et  $\chi$  s'écrit :

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \dots\dots\dots 1.6$$

On pose  $1 + \chi = \epsilon_r$

Où:  $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{F. m}^{-1}$  appelée la **permittivité du vide** [3].

$\epsilon$  représente la **permittivité du milieu diélectrique** ( $\epsilon > \epsilon_0$ ) parce que le vide est un isolant parfait.

On peut alors déterminer la **permittivité relative**  $\epsilon_r$  que l'on appelle le plus souvent la **constante diélectrique** ( $\epsilon_r > 1$ ).

### Permittivité complexe

Dans un milieu diélectrique non absorbant, il existe toujours à basses fréquences une faible conductivité liée à différents mécanismes microscopiques.

On parle alors de pertes diélectriques. On peut tenir compte de ces pertes en définissant une permittivité complexe :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$$

Ces pertes sont souvent très faibles. La partie imaginaire est donc très petite devant la partie réelle. On parle alors parfois d'angle de perte, exprimé en pourcentage et défini par :

$$\delta_e = \tan \varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}$$

Cette appellation s'explique par le fait que cet angle  $\delta_e$  est l'angle formé par le vecteur champ électrique et le déplacement électrique dans le plan complexe.

## 2- Propagation des ondes électromagnétiques

### 2-1- Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations de Maxwell constituent une série d'équations différentielles couplées ; il convient donc d'en déduire les équations séparées pour chacun des vecteurs du champ.

Dans le vide  $\varepsilon = \varepsilon_0$  ,  $\mu = \mu_0$  ,  $\rho=0$  et  $J=0$ . Nous appliquons l'opérateur rotationnel à l'équation (1.1a) et l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  à (1.1b) ; en comparant les deux équations résultantes nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots 1.7$$

Et, par conséquent, l'équation d'onde pour le champ électrique s'écrit :

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots 1.8a$$

De façon similaire on trouve pour le champ magnétique :

$$\nabla^2 H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots 1.8b$$

où: 
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

La forme mathématique  $f(s, t)$  de la solution de l'équation de propagation est une fonction de la coordonnée spatiale  $s$  et de la coordonnée temporelle  $t$ .

Si un point de l'onde se déplace de  $ds$  après un temps  $dt$  à la vitesse  $v$  alors :

$$f(s + \delta s, t + \delta t) = f(v, t) \text{ avec } v = \frac{\partial s}{\partial t}$$

La solution est :  $f(s, t) = f(vt - s) + f(vt + s)$

Une solution harmonique est en fait une onde monochromatique, définie dans l'espace par sa longueur d'onde  $\lambda$  et dans le temps par sa période  $T$ .

On associe les grandeurs conjuguées :

- Le vecteur d'onde  $\vec{K}$  dirigé suivant la direction de propagation avec son module  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ .
- La pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

L'onde peut s'exprimer alors sous la forme d'une fonction sinusoïdale :

$$f = f_0 \sin(\omega t - kr + \phi_0)$$

La phase de l'onde  $\phi$  :

$$\Phi = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_0 = \omega t - ks + \phi_0$$

$s$  : Coordonnée curviligne parallèle au vecteur  $k$  en chaque point.

### Vitesse de phase

Vitesse d'un point de l'onde à phase constante.

$$v_\phi = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\phi=cte} = \frac{\omega}{k} = c$$

### Amplitude et polarisation

Le champ électromagnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  constituent l'amplitude de l'onde. Dans le cas général on peut décomposer une onde monochromatique sur deux directions orthogonales  $E_x$  et  $E_y$  :

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, t) &= \vec{A}(\vec{r}) \exp[j(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \\ &= f_x(\vec{r}, t)\vec{e}_x + f_y(\vec{r}, t)\vec{e}_y \end{aligned}$$

La direction du champ  $\vec{E}$  constitue la polarisation de l'onde.

### 2-2-Onde plane

$\vec{k}$  Possède une direction fixe, les surfaces à phase constante sont des plans appelés les plans d'onde qui sont perpendiculaires à  $\vec{k}$ .

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \dots\dots\dots 1.9a$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \dots\dots\dots 1.9b$$

Dont la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\vec{K}$  est relié par :  $K = \frac{\omega}{c}$

Le front de l'onde est perpendiculaire à  $\vec{K}$  et il se déplace le long de  $\vec{K}$  avec la vitesse  $c$ . L'application des équations de Maxwell à (1.9a, b) donne la condition de transversalité des champs du rayonnement et une relation entre les amplitudes :

$$\vec{K} \perp \vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{K} \dots\dots\dots 1.10a$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \equiv z_0 \quad , \quad \frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \equiv c \quad \dots\dots\dots 1.10b$$

où:  $z_0 = 377\Omega$  est appelée l'impédance du vide. Il s'en suit que  $H_0$ (ou  $B_0$ ) est complètement déterminé par  $\vec{K}$  et  $E_0$  qui seuls suffisent pour caractériser l'état du champ :

$$\vec{H}_0 = z_0^{-1}(\vec{s} \wedge \vec{E}_0) \quad , \quad \vec{B}_0 = c^{-1}(\vec{s} \wedge \vec{E}_0) \quad \dots\dots\dots 1.11$$

où:  $\vec{s} = \vec{K}/k$  est le vecteur unitaire parallèle à  $\vec{K}$ .

Les solutions indépendantes des équations d'onde (1.8a, b) sont appelées les modes de rayonnement électromagnétique.

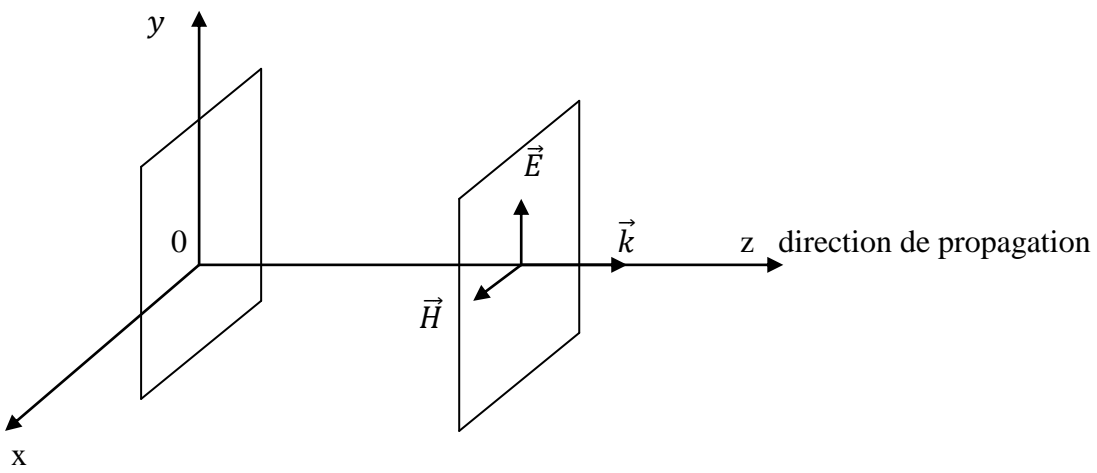


Fig. I-2 : onde plane

### 2-3-Propagation à travers la matière [4]

Nous allons considérer un milieu diélectrique ( $\epsilon \neq \epsilon_0$ ) et non magnétique ( $\mu = \mu_0$ ). Le courant des charges libres est lié au champ électrique et doit satisfaire la loi d'Ohm.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega \left[ \epsilon - \frac{j\sigma}{\omega} \right] \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E} \quad \dots\dots\dots 1.12$$

où:  $\sigma$  est la conductivité du milieu, et il est évident que les effets du courant des charges libres peuvent être simplement inclus dans un paramètre complexe ( $\tilde{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$ ) c'est-à-dire  $\tilde{\epsilon} = \epsilon - \frac{j\sigma}{\omega}$  qui tiendra compte aussi bien des effets diélectriques (charges liées) que des effets ohmiques (charges libres) du matériau.

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \frac{d}{dt} [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}] \quad \dots\dots\dots 1.13$$

En régime harmonique :

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad \dots\dots\dots 1.14$$

$$k^2 = \mu_0 \tilde{\epsilon} \omega \quad \dots\dots\dots 1.15$$

Solution sous forme d'ondes planes

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$K = k' - jk'' = \frac{\omega}{c} N \quad \text{Avec} \quad N = n' - jn'' \quad \dots\dots\dots 1.16$$

Où:  $N$  est l'indice de réfraction complexe.

$$n' = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2} + \epsilon_r')} \quad \text{et} \quad n'' = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2} - \epsilon_r')}$$

$$N^2 = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon \mu_0 c^2$$

La partie réelle  $k'$  et imaginaire  $k''$  du vecteur d'onde sont des vecteurs qui peuvent avoir des directions différentes. Elles dépendent des conditions aux limites : La direction de la partie réelle est perpendiculaire à la surface de la phase constante et celle de la partie imaginaire est perpendiculaire à la surface de l'amplitude constante de l'onde.

### Vitesse de groupe

Considérons la superposition d'ondes harmoniques se propageant suivant l'axe  $oz$  (sous forme d'une impulsion) dans un milieu dispersif :

$$K = \frac{\omega}{c} n(\omega) \dots\dots\dots 1.17$$

L'intensité du champ est donnée par :

$$E(t, z) = \int E_0(k) e^{j[\omega(k)t - kz]} dk \dots\dots\dots 1.18$$

Notre impulsion est caractérisée par sa fréquence centrale (moyenne)  $\omega_0$  et le vecteur d'onde correspondant  $k_0$

Si  $\Delta\omega \ll \omega_0$  et  $\Delta k \ll k_0$  on dit que le phénomène ondulatoire considéré constitue un groupe d'ondes.

On peut développer la fréquence, en tant que fonction du nombre d'onde, au point  $k = k_0$  en série de Taylor:

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\omega}{dk^2} \right) (k - k_0)^2 + \dots \dots\dots 1.19$$

$$\text{Notons par : } v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \text{ et } \beta = \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} \dots\dots\dots 1.20$$

$$\text{Donc : } \omega(k) = \omega_0 + v_g (k - k_0) + \frac{\beta}{2} (k - k_0)^2 + \dots \dots\dots 1.21$$

Les termes non linéaires du développement (1.21) sont négligeables par ce que  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

### 2-4-Propagation dans les milieux anisotropes

#### Milieu anisotrope

Considérons des ondes planes monochromatiques, par définition un milieu est dit anisotrope si lorsqu'on applique une excitation dans une direction donnée  $\vec{u}$  la réponse du milieu dépend de  $\vec{u}$ , c'est-à-dire chaque direction de propagation a une permittivité.

Dans un milieu anisotrope, la relation de constitution est tensorielle.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi} \vec{E} \dots\dots\dots 1.22$$

où:  $\tilde{\chi}$  est un tenseur de rang 2,  $\vec{P}$  est le vecteur de polarisation

$$\tilde{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

$\vec{P}$  n'est plus parallèle à  $\vec{E}$  (en générale).

$\tilde{\chi}$  : Le tenseur de susceptibilité, il est réel (pour les milieux sans pertes) et symétrique (hermétique), il est diagonalisable.

Il existe un système d'axes particuliers ( $Ox, Oy, Oz$ ) appelés axes principaux du milieu, tel que  $\tilde{\chi}$  soit diagonale:

Dans ce système d'axes on a :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1.23$$

L'induction électrique  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \tilde{\varepsilon} \vec{E}$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 (1 + \tilde{\chi}) = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \dots\dots\dots 1.24$$

où  $\tilde{\varepsilon}_r$  est le tenseur diélectrique réduit.

L'anisotropie diélectrique se manifeste sous forme naturelle dans tous les cristaux à symétrie non cubique.

Elle peut aussi être provoquée par un champ électrique (effet Pockels et Kerr).

## 2-5-Propagation dans un milieu linéaire homogène et anisotrope [5]

Nous allons démontrer que dans une direction de propagation donnée, deux ondes planes de polarisations orthogonales peuvent se propager en conservant leur état de polarisation. Ces deux ondes sont appelées les modes propres de propagation dans les milieux anisotropes et se propagent avec des vitesses de phases différentes.

### Relation de dispersion

Soit une onde plane monochromatique de pulsation  $\omega$  :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \dots\dots\dots 1.25$$

Equation de Maxwell pour les ondes planes :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H} \dots\dots\dots 1.26a$$

$$\vec{k} \wedge \vec{H} = -\omega \tilde{\epsilon} \vec{E} \dots\dots\dots 1.26b$$

$\tilde{\epsilon}$  Dans le système d'axes principaux s'écrit:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1.27$$

où  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont les indices principaux du milieu.

- Si  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$  le milieu est isotrope.
- Si  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$  le milieu est uniaxe.
- si  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$  le milieu est biaxe.

L'équation de propagation dans le milieu anisotrope est :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu_0 \vec{E} = 0 = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu_0 \vec{E} \dots\dots\dots 1.28$$

$$\text{avec } \vec{k} = \frac{n\omega}{c} \vec{u}$$

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) = \begin{pmatrix} k_x^2 E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z \\ k_y k_x E_x + k_y^2 E_y + k_y k_z E_z \\ k_z k_x E_x + k_z k_y E_y + k_z^2 E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & k_y^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\text{l'équation d'onde} \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_x^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \frac{\omega^2}{c^2} n_z^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \dots\dots\dots 1.29$$

Les valeurs propres se calculent en annulant le déterminant de la matrice

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_x^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \frac{\omega^2}{c^2} n_z^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots 1.30$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} n_x^2 - k^2\right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 - k^2\right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_z^2 - k^2\right) + k_y^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_x^2 - k^2\right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_z^2 - k^2\right) + k_x^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 - k^2\right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_z^2 - k^2\right) + k_z^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_x^2 - k^2\right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 - k^2\right) = 0 \dots\dots\dots 1.31$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x/k \\ k_y/k \\ k_z/k \end{pmatrix} \text{ direction de propagation}$$

$n$  : Indice effectif dans la direction  $\vec{u}$ .

Pour une direction de propagation donnée, on obtient dans le cas général deux modes propres avec des valeurs d'indice de réfraction  $n$  différents.

Lorsque ces deux solutions sont introduites dans l'équation (1.29) on trouve deux polarisations propres du champ électrique  $\vec{E}$ .

Les deux premières lignes de (1.29) donnent :

$$(n_x^2 - n^2 + u_x^2 n^2) E_x + u_x u_y n^2 E_y = -u_x u_z n^2 E_z$$

$$u_x u_y n^2 E_x + (n_y^2 - n^2 + u_y^2 n^2) E_y = -u_y u_z n^2 E_z$$

$$E_x = \frac{\frac{u_x u_z n^2}{n^2 - n_x^2}}{1 - \frac{u_x n^2}{n^2 - n_x^2} - \frac{u_y n^2}{n^2 - n_y^2}} E_z \dots\dots\dots 1.32a$$

$$E_y = \frac{\frac{u_y u_z n^2}{n^2 - n_y^2}}{1 - \frac{u_x n^2}{n^2 - n_x^2} - \frac{u_y n^2}{n^2 - n_y^2}} E_z \dots\dots\dots 1.32b$$

Avec  $n \neq n_i$  et ( $i = x, y, z$ )

L'équation (1.31) peut être simplifiée

$$\frac{k_x^2}{k^2 C^2 - \omega^2 n_x^2} + \frac{k_y^2}{k^2 C^2 - \omega^2 n_y^2} + \frac{k_z^2}{k^2 C^2 - \omega^2 n_z^2} = \frac{1}{C^2} \dots\dots\dots 1.33$$

$$\text{où: } \frac{u_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{u_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{u_z^2}{n^2 - n_z^2} = \frac{1}{n^2} \dots\dots\dots 1.34$$

L'équation (1.34) est appelée équation de Fresnel

En utilisant (1.34) on obtient

$$E_x = \frac{\frac{u_x}{n^2 - n_x^2}}{\frac{u_z}{n^2 - n_z^2}} E_z \dots\dots\dots 1.35a$$

$$E_y = \frac{\frac{u_y}{n^2 - n_y^2}}{\frac{u_z}{n^2 - n_z^2}} E_z \dots\dots\dots 1.35b$$

Un choix convenable de  $E_z$  permet d'écrire :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{u_x}{n^2 - n_x^2} \\ \frac{u_y}{n^2 - n_y^2} \\ \frac{u_z}{n^2 - n_z^2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1.36$$

Polarisation propre du milieu biréfringent est rectiligne.

## 2-6- Structure de l'onde plane dans le milieu anisotrope :

La propagation d'une onde plane monochromatique est décrite par les équations de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \dots\dots\dots 1.37a$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} \wedge \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \dots\dots\dots 1.37b$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0 \dots\dots\dots 1.37c$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} \wedge \vec{H}_0 = -\omega \vec{D}_0 \dots\dots\dots 1.37d$$

Il convient d'ajouter les relations de constitution du milieu :

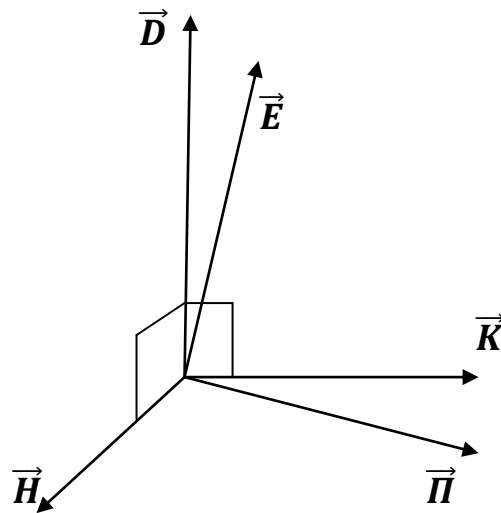
$$\vec{D}_0 = \tilde{\epsilon} \vec{E}_0 \quad \text{et} \quad \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (\vec{H} \text{ et } \vec{B} \text{ sont parallèles})$$

La relation (1.37a) implique que l'onde est transverse magnétique(TM).  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dans le plan d'onde perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

La relation (1.37d) implique que  $\vec{D}$  est perpendiculaire à  $\vec{k}$  et  $\vec{H}$ , il est donc dans le plans d'onde également.  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{k}$  forment un trièdre rectangle direct.

La relation (1.37b) implique que  $\vec{B}$  est perpendiculaire à  $\vec{E}$ , mais en général,  $\vec{E}$  n'est pas parallèle à  $\vec{D}$ , l'onde n'est pas transverse électrique (TE). Le champ électrique est dans le plan défini par  $\vec{k}$  et  $\vec{D}$ .

La structure de l'onde est schématisée sur la figure I.3.



*Fig. I-3 : structure d'une onde plane dans un milieu anisotrope*

Le vecteur de poynting  $\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}^*$ , qui donne la direction de propagation de l'énergie, est perpendiculaire à  $\vec{E}$  mais pas à  $\vec{D}$ , avec  $\vec{H}^*$  et le complexe conjuguai de  $\vec{H}$ .

Les rayons lumineux ne sont pas perpendiculaires aux plan d'onde et n'ont pas la même direction que  $\vec{K}$ .

## 2-7-Modes propres de propagation

La relation (1.37d) donne

$$\vec{D}_0 = -\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\omega \mu_0} = -\frac{\vec{k}}{\omega \mu_0} \wedge \left( \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\omega^2 \mu_0} [k^2 E_0 - (\vec{k} \vec{E}_0) \vec{k}] \quad \dots\dots\dots 1.38$$

Dans le système d'axe  $(o\alpha, o\beta, o\gamma)$  avec  $\vec{k} = k\vec{u}_\gamma$  selon  $o\gamma$  :

$$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 n^2 [\vec{E}_0 - (\vec{u}_\gamma \vec{E}_0) \vec{u}_\gamma] \dots\dots\dots 1.39$$

Dans la relation (1.38), on tient compte des relations  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  et  $k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$ .

En projetant, on trouve :

$$D_{0\alpha} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}_{0\alpha} \dots\dots\dots 1.40a$$

$$D_{0\beta} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}_{0\beta} \dots\dots\dots 1.40b$$

$$D_{0\gamma} = 0 \dots\dots\dots 1.40c$$

$$\text{La composante transversale de } \vec{E} : \vec{E}_{0t} = \frac{1}{\varepsilon_0 n^2} \vec{D}_0 \dots\dots\dots 1.41$$

$$\text{Par ailleurs : } \vec{D}_0 = \tilde{\varepsilon} \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \vec{E}_0$$

Le champ électrique peut donc s'écrire :

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\varepsilon}_r^{-1} \vec{D}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\eta} \vec{D}_0 \dots\dots\dots 1.42$$

où:  $\tilde{\eta} = \tilde{\varepsilon}_r^{-1} = [\frac{1}{n^2}]$  est appelé le tenseur d'imperméabilité électrique.

$$(1.41) \iff \tilde{\eta}_t \vec{D}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0 \iff \begin{bmatrix} \eta_{11} - \frac{1}{n^2} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} - \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots 1.43$$

Où:  $\tilde{\eta}_t$  est la restriction du tenseur d'imperméabilité au sous-espace  $(o\alpha, o\beta)$ .  $\vec{D}_0$  est donc vecteur propre de  $\tilde{\eta}_t$  avec  $\frac{1}{n^2}$  valeur propre.

Conséquences :

- Il existe deux vecteurs propres orthogonaux et réels:  $\vec{D}'_0$  et  $\vec{D}''_0$ .
- Les deux valeurs propres sont réelles:  $\frac{1}{n'^2}$  et  $\frac{1}{n''^2}$ .
- Dans une direction donnée  $\vec{u}$ , deux ondes planes différentes peuvent se propager. Les modules de leurs vecteurs d'ondes sont:  $k' = \frac{n'\omega}{c}$  et  $k'' = \frac{n''\omega}{c}$ .
- $\vec{D}'_0$  et  $\vec{D}''_0$  sont réels il s'ensuit que les champs  $\vec{E}'_0$  et  $\vec{E}''_0$  sont polarisés rectilignement.
- Les vitesses de phases  $\frac{c}{n'}$  et  $\frac{c}{n''}$  sont différentes.

**2-8- Propagation dans un milieu uniaxe :**

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 1.44$$

L'axe oz est un axe optique du milieu.

L'équation (1.31) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 - k^2 \right) \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} - \frac{k_z^2}{n_0^2} \right) = 0 \\ \text{Ou} \\ \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \left( \frac{1}{n^2} - \frac{u_x^2 + u_y^2}{n_e^2} - \frac{u_z^2}{n_0^2} \right) = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots 1.45$$

Où:  $\vec{u} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  et  $\vec{u}_x^2 + \vec{u}_y^2 + \vec{u}_z^2 = 1$

Il existe deux solutions :

- $\frac{1}{n'^2} = \frac{1}{n_0^2}$  et  $k' = \frac{n_0 \omega}{c}$ , l'onde  $\vec{E}'_0$  se propage à la vitesse de phase  $\frac{c}{n_0}$  indépendante de la direction  $\vec{u}$ .
- $\frac{1}{n''^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n_e^2} + \frac{\gamma^2}{n_0^2}$  l'onde  $\vec{E}''_0$  se propage à la vitesse de phase  $\frac{c}{n''}$  qui dépend de  $\vec{u}$ .

La surface des indices se décompose en deux nappes :

- Une sphère de rayon  $n_0$  appelée l'indice ordinaire.
- Un ellipsoïde de révolution autour de l'axe oz d'équation :
 
$$\frac{x^2 + y^2}{n_e^2} + \frac{z^2}{n_0^2} = 1 \text{ et } n_e = n_z : \text{appelé indice extraordinaire principal.}$$
  - Si  $n_0 > n_e$ , le cristal est uniaxe négatif.
  - Si  $n_e > n_0$ , le cristal est uniaxe positif.

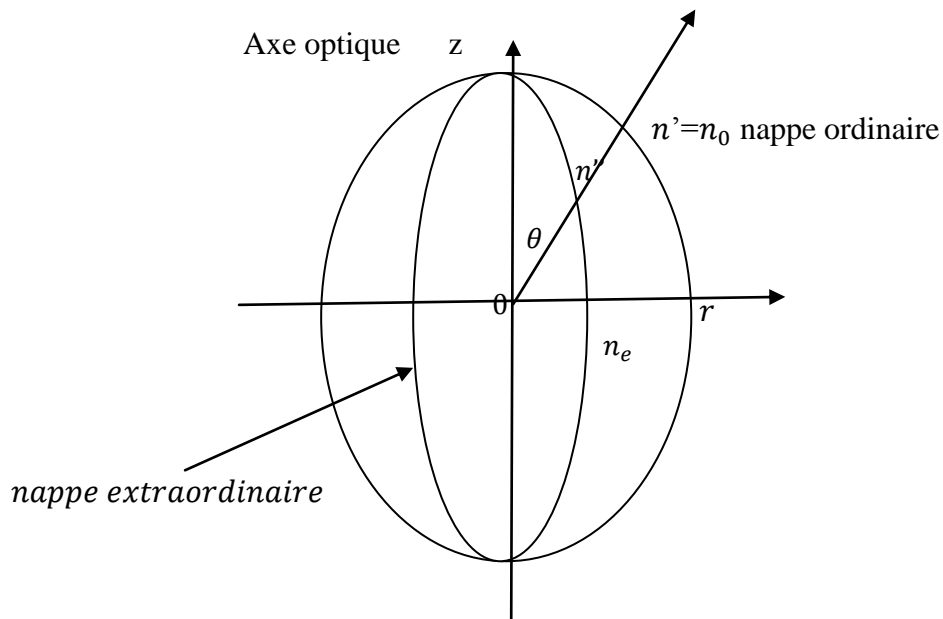


Fig. I-4 : section méridienne de la surface des indices dans un milieu uniaxe

**Exemple**

Surface des indices pour un cristal uniaxe négatif ( $n_o > n_e$ ).

On a  $MN' = n' = n_o$  et  $MN'' = n''$

$$\text{Avec : } \frac{1}{n''^2} = \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{n_o^2}$$

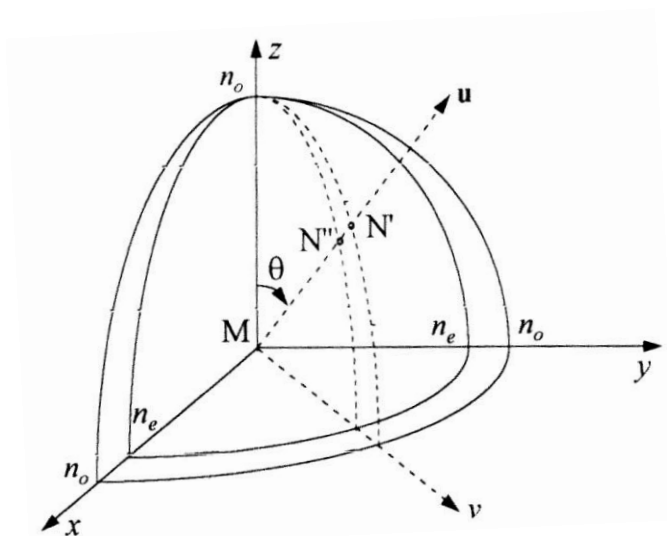


Fig. I-5: surface des indices dans un cristal uniaxe négatif.

### 2-9-Structure de l'onde plane dans un cristal uniaxe

- L'onde  $\vec{E}'_0$  a pour vitesse de phase  $v_\Phi = \frac{c}{n_0}$  quelle que soit la direction de propagation  $\vec{u}$ : on l'appelle l'onde ordinaire.

- L'onde  $\vec{E}''_0$  a pour vitesse de phase  $v_\Phi = \frac{c}{n''}$  dépendant de  $\vec{u}$ : on l'appelle l'onde extraordinaire.

Pour décrire leur structure, on utilise la relation (1.39)

$$\vec{D}_0 = \tilde{\epsilon} \vec{E}_0 = \epsilon_0 n^2 [\vec{E}_0 - (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}]$$

$$\epsilon_0 \begin{bmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix} \vec{E}_0 = \epsilon_0 n^2 [\vec{E}_0 - (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}]$$

En projetant, on trouve :

$$\begin{cases} n_0^2 \vec{E}_x = n^2 \vec{E}_x - n^2 (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}_x \\ n_0^2 \vec{E}_y = n^2 \vec{E}_y - n^2 (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}_y \\ n_e^2 \vec{E}_z = n^2 \vec{E}_z - n^2 (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}_x = (1 - \frac{n_0^2}{n^2}) \vec{E}_x & (a) \\ (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}_y = (1 - \frac{n_0^2}{n^2}) \vec{E}_y & (b) \dots\dots\dots 1.46 \\ (\vec{u} \vec{E}_0) \vec{u}_z = (1 - \frac{n_e^2}{n^2}) \vec{E}_z & (c) \end{cases}$$

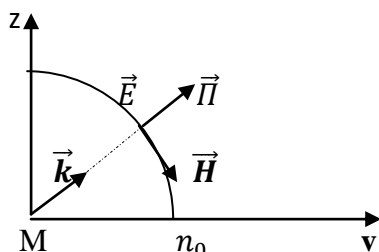
### 2-10- Propriétés de l'onde

#### a-Propriétés de l'onde ordinaire :

- $v_c = \frac{c}{n_0}$  est indépendante de  $\vec{u}$ .
- Pour  $n = n_0$ , les relations (1.45.a, b) donnent  $\vec{u} \vec{E}'_0 = 0 \Rightarrow$  l'onde ordinaire est donc TE (direction de propagation perpendiculaire à  $\vec{E}'_0$ ).
- La relation (1.46.c) donne  $\vec{E}_z = \vec{0} \Rightarrow$  l'onde ordinaire est polarisée perpendiculairement à l'axe optique (oz).

- $\vec{E}_z = \vec{0} \Rightarrow \vec{D}_z = \vec{0} \Rightarrow \vec{D}'_0 = \varepsilon_0 n_0^2 \vec{E}'_0 \Rightarrow$  l'onde ordinaire a les mêmes propriétés qu'une onde plane progressive dans un milieu isotrope.
- Le vecteur de poynting  $\vec{\Pi}$  est parallèle au vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

La structure de cette onde est schématisée sur la figure ci-dessous.

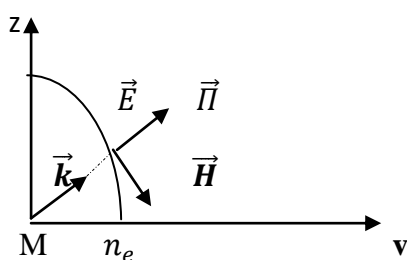


**Fig. I-6-a-** structure de l'onde ordinaire dans un milieu uniaxe.

### b-Propriété de l'onde extraordinaire

- $v_c = \frac{c}{n'}$  dépend de la direction  $\vec{u}$ .
- Les relations (1.46.a, b) donnent  $\frac{\vec{E}_x}{\vec{u}_x} = \frac{\vec{E}_y}{\vec{u}_y} \Rightarrow \frac{\vec{E}_x}{\vec{k}_x} = \frac{\vec{E}_y}{\vec{k}_y} \Rightarrow$  les projections de  $\vec{E}$  et  $\vec{k}$  sur le plan  $Mxy$  sont proportionnelles  $\Rightarrow$  l'onde extraordinaire est polarisée dans le plan défini par l'axe optique (oz) et le vecteur d'onde, la direction de  $\vec{E}$  est tangente à la nappe extraordinaire.
- $\vec{\Pi}$  et  $\vec{k}$  ne sont pas parallèles.  $\vec{\Pi}$  a pour direction de normale en N'' à la nappe extraordinaire de la surface des indices.

La structure de l'onde extraordinaire est schématisée par la figure ci-dessous.



**Fig. I-6-b-** structure de l'onde extraordinaire dans un milieu uniaxe.

**Remarque**

Dans le cas biaxe les trois indices de réfractions principaux sont différents et l'expression (1.31) ne peut pas être simplifiée dans le cas général.

**3-Conclusion sur la propagation des ondes planes dans un milieu anisotrope linéaire**

Dans les diélectriques anisotropes linéaires sans pertes, les caractéristiques principales de la propagation des ondes planes monochromatiques sont les suivantes :

- Pour chaque direction de propagation caractérisée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$ , il existe en général deux ondes planes qui peuvent se propager sans déformation.
- Ces ondes sont polarisées rectilignement et leurs états de polarisation sont orthogonaux.
- Les directions de polarisation sont données par les axes de l'ellipse section de l'ellipsoïde des indices par le plan d'onde.
- Les vitesses de phase de ces ondes sont différentes et les indices normaux  $n'$  et  $n''$  correspondant sont donnés, soit en résolvant l'équation de FRESNEL, soit en utilisant les propriétés de l'ellipsoïde des indices.
- Dans le cristal uniaxe, il existe un état de polarisation ordinaire dont l'indice normal ne dépend pas de la direction de propagation et un état de polarisation extraordinaire dont l'indice dépend de cette direction. L'état extraordinaire est polarisé suivant la direction de la projection de l'axe optique sur le plan d'onde.

## **CHAPITRE II**

# **GUIDE D'ONDE RECTANGULAIRE**

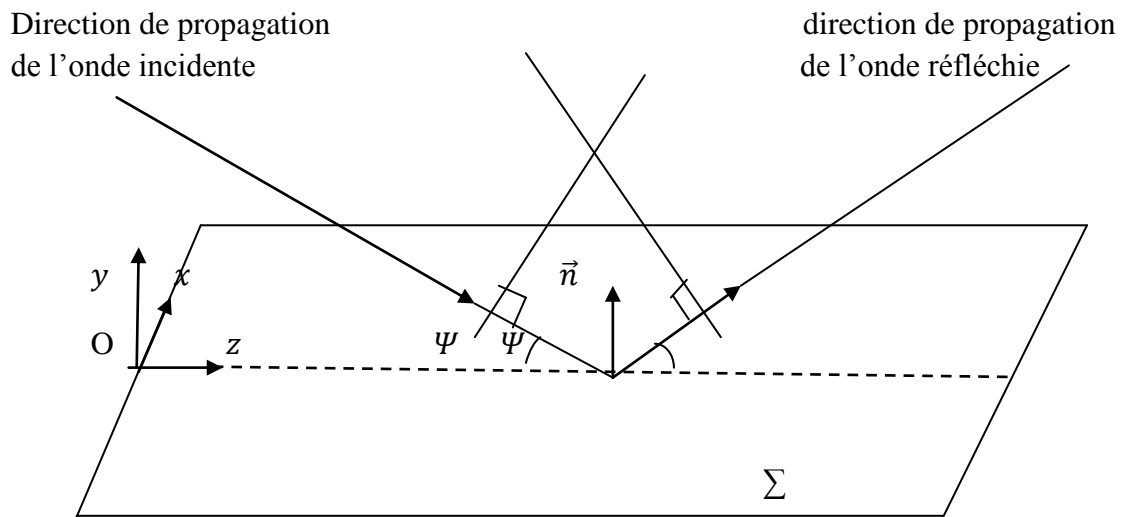
## Introduction

Nous étudierons les guides d'onde rectangulaires pour comprendre la cavité parallélépipède rectangulaire (chapitre III), tout d'abord nous étudierons le guide d'onde rectangulaire à parois métalliques qui est très utilisé en micro-onde, deux plans parallèles entre eux et perpendiculaires aux deux autres plans afin de constituer un guide d'onde rectangulaire. Nous mettrons aussi bien les caractéristiques de la propagation qui s'effectue par réflexion successives sur les parois du guide que les longueurs d'ondes de propagation guidée et de coupure.

Nous étudierons les modes de propagation, notamment le mode fondamental ainsi que les modes supérieurs.

### 1-1-Réflexion sur un plan conducteur

Une onde électromagnétique (O.E.M) incidente obliquement sur un plan conducteur  $\Sigma$ .



**Fig. II-1.** Réflexion sous incidence oblique

En un point quelconque du diélectrique, les amplitudes complexes des composantes des champs résultants sont [6] :

- Si le champ électrique  $\vec{E}$  est perpendiculaire au plan d'incidence (cas TE) :

$$E_x = -jE \sin(Ky \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.1.a$$

$$H_y = -jH \cos \Psi \sin(Ky \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.1.b$$

$$H_z = -jH \sin \Psi \cos(Ky \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.1.c$$

- Si le champ magnétique  $\vec{H}$  est perpendiculaire au plan d'incidence (cas TM) :

$$H_x = -H \cos(Ky \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.2.a$$

$$E_y = E \cos \Psi \cos(Ky \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.2.b$$

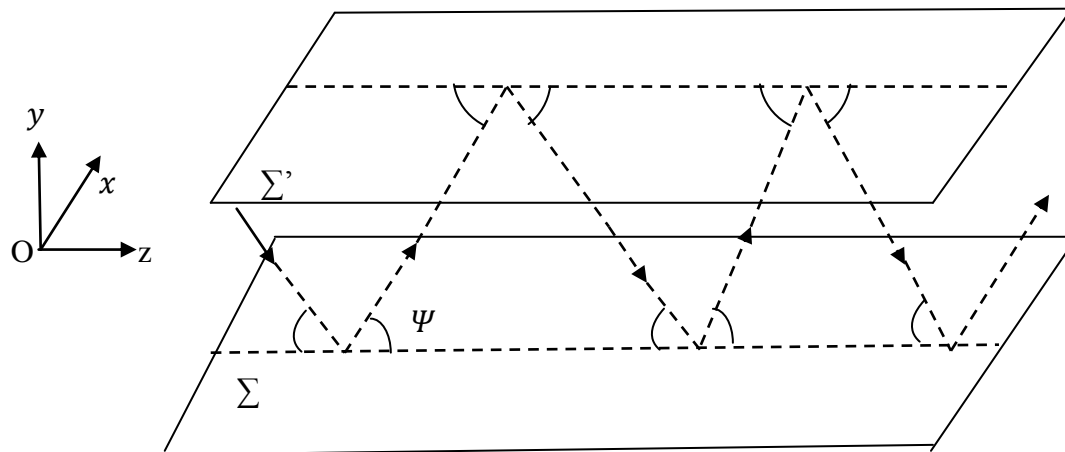
$$E_z = jE \sin \Psi \sin(Ky \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.2.c$$

**1-2-Condition de propagation entre deux plans parallèles**

Nous ne pourrions introduire un plan  $\Sigma'$  parallèle à  $\Sigma$  sans perturber la propagation que si les conditions de continuité sont vérifiées sur ce plan, à savoir :

$$E_T = 0 \mapsto E_x = 0 \text{ et } E_z = 0,$$

$$H_N = 0 \mapsto H_y = 0 \quad \forall x \text{ et } z.$$



*Fig. II.2. Propagation entre deux plans parallèles*

$$E_x = 0 \text{ et } E_z = 0 \text{ et } H_y = 0 \iff \sin(Ky \sin \Psi) = 0$$

$$\iff Ky \sin \Psi = n\pi$$

- Si  $\Psi = \Psi_0 \iff \frac{2\pi}{\lambda} y \sin \Psi_0 = n\pi$

$$\iff y = \frac{n\lambda}{2 \sin \Psi_0} \quad (n, \text{ entier } \neq 0) \dots\dots\dots 2.3$$

Cette dernière relation nous permet de déterminer les distances auxquelles on doit placer le plan  $\Sigma'$  parallèle à  $\Sigma$  :

$$y = \frac{\lambda}{2 \sin \Psi_0}, \quad y = \frac{\lambda}{\sin \Psi_0}, \quad y = \frac{3\lambda}{2 \sin \Psi_0}, \text{ etc.}$$

- Si la distance entre  $\Sigma'$  et  $\Sigma$  est fixée à une valeur  $b$  il ne pourra y avoir propagation entre  $\Sigma'$  et  $\Sigma$  que si :

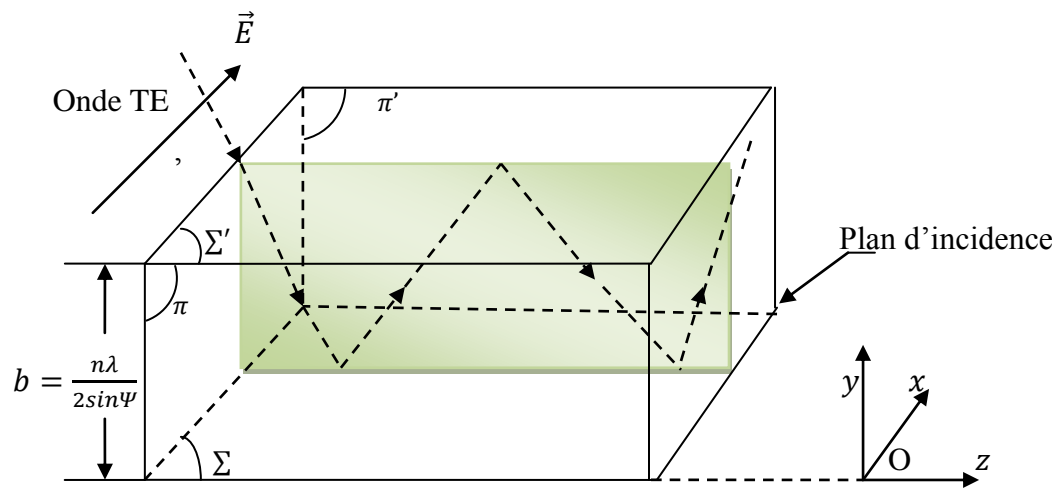
$$\sin\Psi = \frac{n\lambda}{2b} \quad \text{avec} \quad 1 > \frac{n\lambda}{2b} > 0 \quad \dots\dots\dots 2.4$$

**2-1-Propagation dans un guide d'onde rectangulaire [6]**

**Condition de propagation**

a- Voyons maintenant qu'il est possible d'adjoindre deux plans  $\pi$  et  $\pi'$  parallèles à  $yoZ$  et perpendiculaires à  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sans perturber cette propagation (fig.II.3). Les conditions de continuité à leur surface s'expriment par :

$$E_y = 0 \text{ et } E_z = 0 \text{ et } H_x = 0 \quad \forall y \text{ et } z.$$



**Fig. II.3. Propagation en mode  $TE_{0n}$**

Dans le cas où le champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence (onde TE), ces conditions sont toujours vérifiées puisque nous avons :  $E_y = 0, E_z = 0 \text{ et } H_x = 0 \quad \forall y \text{ et } z$ . La seule condition est que les deux plans  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  soient distance de

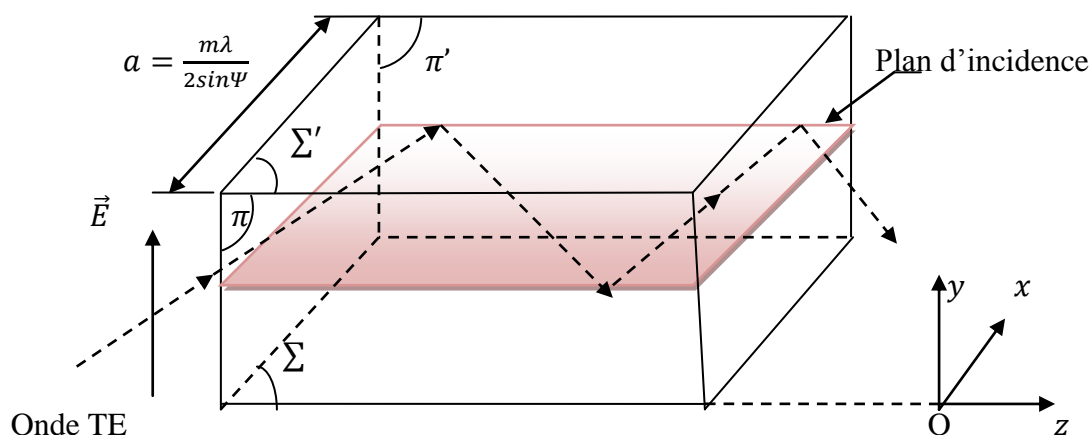
$$b = \frac{n\lambda}{2\sin\Psi} \quad \dots\dots\dots 2.5$$

Par contre, dans le cas de l'onde TM, il n'est pas possible que les conditions de continuité soient satisfaites sur les deux plans  $\pi$  et  $\pi'$  puisque

$$E_y \neq 0, E_z \neq 0 \text{ et } H_x \neq 0 \quad \forall y \text{ et } z.$$

b- L'autre cas de propagation (fig.II.4) est celui qui se ferait par réflexions successives sur  $\pi$  et  $\pi'$  ; il faudrait, pour cela, que le plan d'incidence soit parallèle à  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  et que les deux plans  $\pi$  et  $\pi'$  soient distance de

$$a = \frac{m\lambda}{2\sin\Psi} \dots\dots\dots 2.6$$



**Fig. II.4.** Propagation en mode  $TE_{m0}$

Dans ce cas, la propagation n'est possible que si le champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence (onde TE).

**Remarque**

La remarque que l'on peut en tirer est la suivante :

La propagation d'une onde O.E.M à l'intérieur d'un guide d'onde rectangulaire sera possible si le champ électrique de l'onde incidente est parallèle aux faces sur lesquelles cette onde va se réfléchir successivement.

**2-2-Définition des modes  $TE_{m0}$  et  $TE_{0n}$**

**a- Modes  $TE_{0n}$**

$$b = \frac{n\lambda}{2\sin\Psi}$$

Les expressions des champs pour un tel mode  $TE_{0n}$  sont données par les relations (2.1.a), (2.1.b) et (2.1.c).

**b- modes  $TE_{m0}$**

$$a = \frac{m\lambda}{2\sin\Psi}$$

Les expressions des champs pour ce mode  $\mathbf{TE}_{m0}$  se déduisent des relations (2.1.a), (2.1.b), (2.1.c) du mode  $\mathbf{TE}_{0n}$  en remplaçant  $x$  par  $y$  et  $y$  par  $-x$  pour les variables et en remplaçant  $\vec{x}$  par  $\vec{y}$  et  $\vec{y}$  par  $-\vec{x}$  pour les vecteurs unitaires des axes. on obtient :

$$E_y = jE \sin(Kx \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.7.a$$

$$H_x = -jH \cos \Psi \sin(Kx \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.7.b$$

$$H_z = -H \sin \Psi \cos(Kx \sin \Psi) e^{-jKz \cos \Psi} \dots\dots\dots 2.7.c$$

### 3-1- Relation fondamentale de la propagation guidée

En guide d'onde rectangulaire nous pouvons définir des longueurs d'onde de phase.

a- Dans le cas (fig. II.3), mode  $\mathbf{TE}_{0n}$  on a :

- Une longueur d'onde de phase  $\lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \Psi}$ , correspondant à la propagation de puissance active selon  $OZ$ .
- Une longueur d'onde de phase  $\lambda_y = \frac{\lambda}{\sin \Psi}$  avec  $\sin \Psi = \frac{n\lambda}{2b}$  correspondant à la propagation de puissance active selon  $Oy$ .

D'où la relation :

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_y}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2 \dots\dots\dots 2.8.a$$

b- Dans le cas (fig. II.4), mode  $\mathbf{TE}_{m0}$  on a :

- Une longueur d'onde de phase  $\lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \Psi}$ , correspondant à la propagation de puissance active selon  $OZ$ .
- Une longueur d'onde de phase  $\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \Psi}$  avec  $\sin \Psi = \frac{m\lambda}{2a}$  correspondant à la propagation de puissance active selon  $Ox$ .

$$D'où la relation : \left(\frac{\lambda}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2 \dots\dots\dots 2.8.b$$

$\lambda$  est la longueur d'onde de propagation en espace libre dans le diélectrique constituant le guide  $\lambda = \frac{v}{f}$  avec  $v$  est la vitesse de propagation.

$\lambda_z$  est la longueur d'onde apparente dans la direction de propagation de la puissance active : on l'appelle longueur d'onde de propagation guidée et on la note  $\lambda_g$ .où

$\lambda_z = \frac{v_z}{f}$ . c'est la longueur d'onde qui intervient dans le terme de phase  $e^{-jKz\cos\Psi}$  des relations donnant les champ. En effet :

$$Kz\cos\Psi = \frac{2\pi}{\lambda} z\cos\Psi = 2\pi \frac{z}{\lambda_z} \dots\dots\dots 2.9$$

### 3-2- Longueur d'onde et fréquence de coupure

Tout d'abord quelle est la valeur de  $\lambda_x$  :

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin\Psi} \text{ et } \sin\Psi = \frac{m\lambda}{2a} \Rightarrow \lambda_x = \frac{2a}{m} \dots\dots\dots 2.10$$

$\lambda_x$  est donc fixé par les dimensions du guide. Pour comprendre la signification, il est bon de réécrire la relation fondamentale (2.8.b) en faisant intervenir la fréquence  $f$  de l'O.E.M. se propageant dans le guide :

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2$$

- Si  $f/v > m/2a \Rightarrow \lambda_z$  réel, l'exponentielle  $e^{-j2\pi\frac{z}{\lambda_z}}$  est bien un terme de phase et il y a propagation de l'onde sans affaiblissement.
- Si  $f/v < m/2a \Rightarrow \lambda_z$  imaginaire pur. Donc dans tous les termes  $e^{-j2\pi\frac{z}{\lambda_z}}$ , sont de la forme  $e^{-Az}$ , avec  $A$  réel positif. Cela signifie que les champs s'affaiblissent exponentiellement lorsque  $z$  augmente. Dans ce cas l'onde ne se propage pas plus loin que quelques longueurs d'onde.

#### Relation concernant $\lambda$ , $\lambda_c$ et $\lambda_g$

Dorénavant, nous écrivons  $\lambda_z = \lambda_g$  et  $\lambda_x$  ou  $\lambda_y = \lambda_c$

La relation fondamentale de la propagation guidée s'écrivent :

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 \dots\dots\dots 2.11$$

$$\lambda = v/f \text{ avec } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ et } c=3.10^8 m/s.$$

$\epsilon_r$  est la permittivité relative du diélectrique du guide onde.  $\lambda_c = \frac{2a}{m}$  en mode

$$\mathbf{TE}_{m0} ; \lambda_c = \frac{2b}{n} \quad \mathbf{TE}_{0n}$$

- Si  $\lambda < \lambda_c$ , il y a propagation de mode considéré.
- Si  $\lambda > \lambda_c$ , il n'y a pas propagation de mode considéré.

### 3-3- Étude du mode fondamental

#### Expressions des champs

Les champs du mode  $\mathbf{TE}_{m0}$  sont donnés par les relations (2.7.a), (2.7.b) et (2.7.c). pour le mode  $\mathbf{TE}_{10}$ , nous avons :

$$\sin\Psi = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{\lambda}{2a} \dots\dots\dots 2.12$$

$$\cos\Psi = \frac{\lambda}{\lambda_g} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}} \dots\dots\dots 2.13$$

d'où l'on déduit :  $k_x \sin\Psi = \frac{2\pi}{\lambda} x \frac{\lambda}{2a} = \frac{\pi x}{a}$

$$k_z \cos\Psi = \frac{2\pi}{\lambda} z \frac{\lambda}{\lambda_g} = \frac{2\pi z}{\lambda_g}$$

et les expressions des champs deviennent :

$$E_y = jE \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j2\pi z/\lambda_g} \dots\dots\dots 2.14.a$$

$$H_x = -jH\left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j2\pi z/\lambda_g} \dots\dots\dots 2.14.b$$

$$H_z = -H\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j2\pi z/\lambda_g} \dots\dots\dots 2.14.c$$

#### Coupes transversales

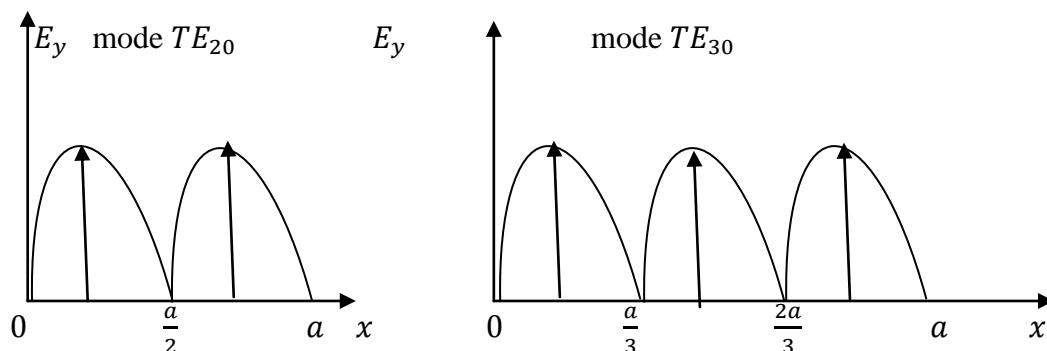


Fig. II.5. coupes transversale des modes  $TE_{20}$  et  $TE_{30}$

#### Longueur d'onde de coupure

Nous avons toujours  $\lambda_c = \frac{\lambda}{\sin\Psi}$  ; mais ici :

- Pour un mode  $TE_{m0}$  :  $a = \frac{m\lambda}{2\sin\Psi}$

D'où  $\lambda_c = \frac{2a}{m}$  .....2.15

- Pour un mode  $TE_{0n}$  :  $b = \frac{n\lambda}{2\sin\Psi}$

D'où  $\lambda_c = \frac{2b}{n}$  .....2.16

Pour m=1 (mode  $TE_{10}$ )  $\mapsto \lambda_c = 2a$

Pour m=2 (mode  $TE_{20}$ )  $\mapsto \lambda_c = a$

Pour m=3 (mode  $TE_{30}$ )  $\mapsto \lambda_c = 2a/3$ , etc.

- Pour un mode  $TE_{mn}$  (m et n $\neq$ 0) :

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \dots\dots\dots 2.17$$

### 3-4- Longueur d'onde de propagation guidée

$$(2.11) \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_g} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

- Pour un mode  $TE_{m0}$  :  $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 m^2}{4a^2}}}$  .....2.18

- Pour un mode  $TE_{0n}$  :  $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 n^2}{4b^2}}}$  .....2.19

### 4- Les composantes transversales

On applique les équations de Maxwell, en régime sinusoïdal ; dans un milieu diélectrique de permittivité  $\epsilon$ , et de perméabilité magnétique  $\mu$  et de conductivité  $\sigma = 0$ .

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \dots\dots\dots 2.20.a$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \dots\dots\dots 2.20.b$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \vec{H} = 0 \quad \dots\dots\dots 2.20.c$$

En coordonnées rectangulaires, en remarquant que  $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$  et en sous-entendant les facteurs  $e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$  les équations de Maxwell s'écrivent, sous forme différentielle :

$$(1.20.a) \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad \dots\dots\dots 2.21$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x = j\omega\mu H_y \quad \dots\dots\dots 2.22$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad \dots\dots\dots 2.23$$

$$(1.20.b) \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad \dots\dots\dots 2.24$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma H_x = j\omega\varepsilon E_y \quad \dots\dots\dots 2.25$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \quad \dots\dots\dots 2.26$$

Les éliminations de  $H_y$  entre (2.22) et (2.24) et de  $H_x$  entre (2.21) et (2.25) permettent d'obtenir  $E_x$  et  $E_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . De même, les éliminations de  $E_y$  entre (2.21) et (2.25) et de  $E_x$  entre (2.22) et (2.24) permettent d'obtenir  $H_x$  et  $H_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . En posant

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu = k_c^2$$

On obtient :

$$k_c^2 E_x = -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad \dots\dots\dots 2.27$$

$$k_c^2 E_y = -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \dots\dots\dots 2.28$$

$$k_c^2 H_x = -\gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} + j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \dots\dots\dots 2.29$$

$$k_c^2 H_y = -\gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} - j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \dots\dots\dots 2.30$$

Remarquant que les composantes transversales ne peuvent être calculées en fonction des composantes longitudinales que si  $k_c^2 \neq 0$ .

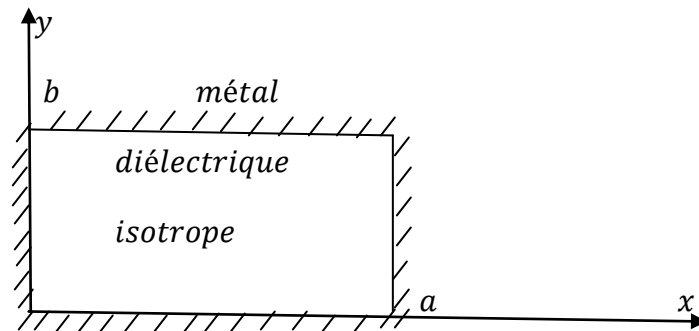
**5-1-détermination des modes TM**

Dans ce cas  $H_z(x, y) = 0$  et il faut trouver une fonction génératrice  $E_z(x, y)$  :

- Qui soit solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \dots\dots\dots 2.31$$

- Qui satisfasse à la condition aux limites  $E_z = 0$  sur les parois du guide (fig.II.6),



*Fig. II.6. guide d'onde rectangulaire*

$E_z = 0$  sur les plans  $x = 0$  et  $x = a$

$E_z = 0$  sur les plans  $y = 0$  et  $y = b$

**a- Recherche de la solution de (1.31)**

Nous allons supposer que la fonction  $E_z(x, y)$  est le produit d'une fonction de  $x$  seul par une fonction de  $y$  seul :

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y)$$

(1.31) devient :  $X''Y + Y''X + k_c^2 XY = 0 \dots\dots\dots 2.32$

(1.31)  $\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k_c^2$

$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - k_c^2$

Posons donc :  $\frac{X''}{X} = -k_x^2$  et  $\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$

avec  $k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \dots\dots\dots 2.33$

Dans ces conditions, la solution de (1.28) est de la forme :

$$E_z(x, y) = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \dots\dots\dots 2.34$$

**b- Les constantes sont déterminées d'après les conditions aux limites**

- $E_z = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = b \quad \forall x$

$$0 = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)C \text{ d'où } \underline{C = 0}$$

$$0 = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)D \sin k_y b$$

D ne peut être nul, sinon  $E_z(x, y) = 0 \quad \forall x \text{ et } y$

$$\text{Donc :} \quad D \sin k_y b = 0 \text{ d'où } k_y = \frac{n\pi}{b} \dots\dots\dots 2.35$$

- $E_z = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = a \quad \forall y$

$$0 = A(D \sin k_y y) \quad \text{Comme } D \neq 0, \quad A = 0$$

$$0 = (B \sin k_x a)(D \sin k_y y) \text{ D'où } k_x = \frac{m\pi}{a} \dots\dots\dots 2.36$$

Par conséquent, la fonction génératrice est donnée par :

$$E_z(x, y) = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots 2.37$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_c^2 \dots\dots\dots 2.38$$

$n$  et  $m$  sont deux entiers positifs quelconques.

Les composantes transversales du champ sont ensuite obtenues au moyen des formules (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) qui se simplifient du fait que  $H_z = 0$ .

$$E_x(x, y) = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots 2.39.a$$

$$E_y(x, y) = -E_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots 2.39.b$$

$$H_x(x, y) = E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots 2.39.c$$

$$H_y(x, y) = -E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots 2.39.d$$

### 5-2-Détermination des modes TE

De façon similaire

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad \dots\dots\dots 2.40$$

Les conditions aux limites :  $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$  sur les parois du guide.

La fonction génératrice que l'on obtient ainsi est :

$$H_z(x, y) = H_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots 2.41$$

En portant cette expression de  $H_z$  dans les formules (2.27), (2.28), (2.29), (2.30), et en tenant compte de  $E_z = 0$ , on obtient les composantes transversales du champ des ondes TE.

$$E_x(x, y) = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots 2.42.a$$

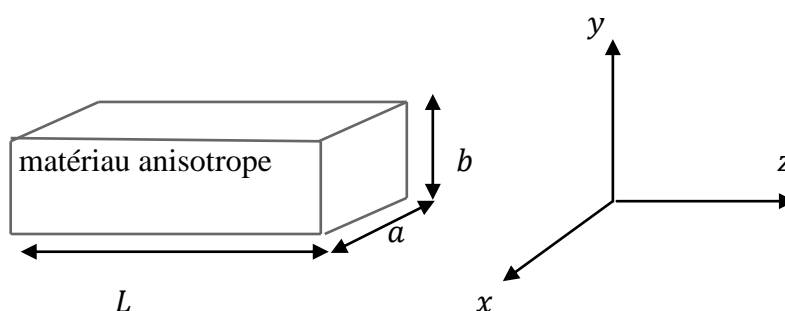
$$E_y(x, y) = -H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots 2.42.b$$

$$H_x(x, y) = H_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots 2.42.c$$

$$H_y(x, y) = H_0 \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots 2.42.d$$

### 6- Guide d'onde rectangulaire rempli d'un matériau anisotrope

Soit un guide d'onde rectangulaire rempli d'un diélectrique anisotrope comme le montre sur la figure ci-dessous (Fig. II .6):



*Fig. II .6 : Cavité coupée dans un guide onde rectangulaire*

#### Composantes transversales en fonction des composantes longitudinales

Supposons que la propagation est selon (OZ) et on exprime les composantes selon  $x$  et  $y$  en fonction des composantes  $H_z$  et  $E_z$  :

**Equation de Maxwell**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \quad (2.20.a)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega\tilde{\epsilon}\vec{E} \quad (2.20.b)$$

$$diV\vec{D} = 0, \quad diV\vec{B} = 0 \quad (2.20.c)$$

$$(2.20.a) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_x & a \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y & b \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z & c \end{cases}$$

$$(2.20.b) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon_0\epsilon_x E_x & c \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon_0\epsilon_y E_y & d \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon_0\epsilon_z E_z & d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (b) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} &= -j\omega\mu_0 \left[ \frac{\partial H_z}{\partial y} - j\omega\epsilon_0\epsilon_x E_x \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon_x E_x &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \Rightarrow E_x &= \frac{1}{k_0^2\epsilon_x - k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \dots\dots\dots 2.43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= -j\omega\mu_0 \left[ \frac{\partial H_z}{\partial x} + j\omega\epsilon_0\epsilon_y E_y \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon_y E_y &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \Rightarrow E_y &= \frac{1}{k_0^2\epsilon_y - k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \dots\dots\dots 2.44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\epsilon_0\epsilon_x \left[ \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega\mu_0 H_y \right] \\ \Rightarrow H_y &= \frac{1}{k_0^2\epsilon_y + k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} - j\omega\epsilon_0\epsilon_x \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \dots\dots\dots 2.45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \Rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_y \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu_0 H_x \right] \\ \Rightarrow H_x &= \frac{1}{k_0^2\epsilon_y - k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} + j\omega\epsilon_0\epsilon_y \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \dots\dots\dots 2.46 \end{aligned}$$

Avec  $k_0^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$  et  $k_z^2 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

**Mode de propagation**

Supposons que  $b \ll a$  et  $L$  (voir chapitre III).

**Mode TE** ( $E_z = 0$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = a \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = b \end{cases} \dots\dots\dots 2.47$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \Lambda(\vec{\nabla} \Lambda \vec{H}) &= \overline{\text{grad}}(diV \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = j\omega \vec{\nabla} \Lambda(\vec{\varepsilon} \vec{E}) \\ diV \vec{H} = 0 &\Rightarrow -\nabla^2 \vec{H} = j\omega \vec{\nabla} \Lambda(\vec{\varepsilon} \vec{E}) \dots\dots\dots 2.48 \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \Lambda(\vec{\varepsilon} \vec{E}) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x & \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y & \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z \end{pmatrix}$$

Cas où l'onde se propage selon (oz)

$$\begin{aligned} -\nabla^2 H_y &= j\omega(\varepsilon_0 \varepsilon_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - \varepsilon_0 \varepsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial y}) \\ &= j\omega(\varepsilon_0 \varepsilon_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - \varepsilon_0 \varepsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + \varepsilon_0 \varepsilon_y \frac{\partial E_x}{\partial y} - \varepsilon_0 \varepsilon_y \frac{\partial E_x}{\partial y}) \\ &= j\omega(\varepsilon_0 \varepsilon_y (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) + \varepsilon_0 (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \frac{\partial E_x}{\partial y}) \\ &= j\omega \left( \varepsilon_0 \varepsilon_y (-j\omega \mu_0 H_z) + \varepsilon_0 (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \left( \frac{1}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \left( \frac{\partial^3 E_z}{\partial y \partial z \partial x} - j\omega \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} \right) \right) \right) \\ &= k_0^2 \varepsilon_y H_z + \frac{k_0^2 (\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}, \quad E_z = 0 \text{ (Mode TE)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_y H_z + \frac{k_0^2 (\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \left( 1 + \frac{k_0^2 (\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \right) \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon_y H_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + A \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon_y H_z &= 0 \dots\dots\dots 2.49 \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } A = 1 + \frac{k_0^2 (\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2}$$

## **CHAPITRE III**

# **METHODE DE CARACTERISATION PAR UNE CAVITE RESONNANTE**

## Introduction

Nous présentons l'étude d'une cavité (vide puis remplie du matériau diélectrique à caractériser). Et nous cherchons ensuite à optimiser les paramètres géométriques du couplage pour avoir un coefficient de qualité  $Q$  très élevé. Le couplage entre la ligne et la cavité est étudié et optimisé.

Tout d'abord, nous étudierons la ligne micro-ruban et la ligne à fente pour exciter la cavité.

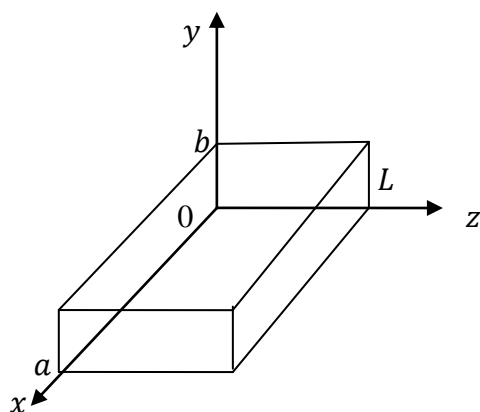
La deuxième partie est consacrée à étudier une cavité remplie d'un matériau isotrope puis anisotrope uniaxe, la réponse de cette cavité, les équations de Maxwell et la répartition du champ électrique dans la cavité.

En pratique, nous mesurons le coefficient de réflexion du dispositif. Pour remonter à la permittivité relative, nous devons chercher à exprimer le coefficient de réflexion en fonction des paramètres de la structure, dont la permittivité relative.

### Structure générale de la cavité [7]

Une cavité électromagnétique métallique est un volume vide ou rempli de diélectrique, délimité par des murs de type électrique (interface avec un conducteur), dans laquelle les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  peuvent prendre certaines configurations spatiales à des fréquences particulières.

Dans notre cas la cavité a une forme parallélépipède. (Fig.III.1) travaillant en mode  $TE_{101}$ . Nous en avons calculé la fréquence de résonance.



**Fig.III.1.** Structure d'une cavité

On est amené à exciter la cavité à l'aide d'une fente et une ligne de type micro-ruban, il peut alors s'y produire à l'intérieur des ondes stationnaires lorsque les conditions de résonance sont vérifiées.

### 1-Technique de caractérisation



**cavité**



**Ligne avec fente**



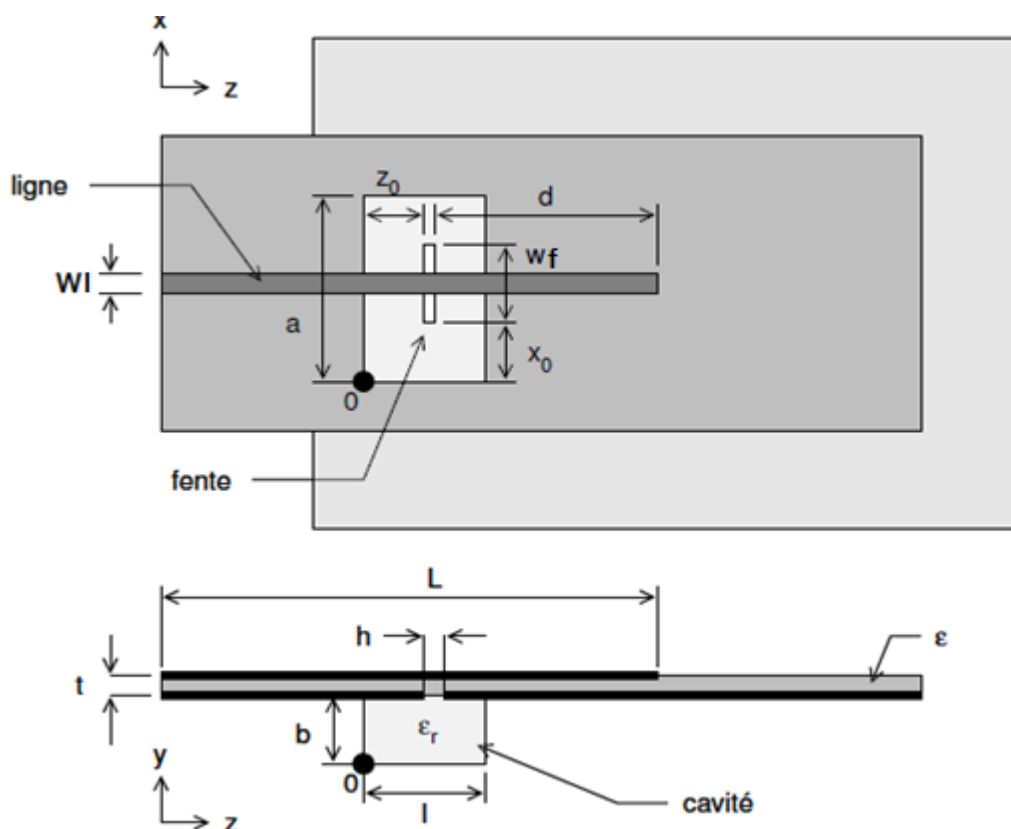
**Structure complète**

**Fig III.2. Dispositif de caractérisation**

Le dispositif de caractérisation diélectrique. A gauche le socle où est creusée la cavité supportant la carte de verre téflon. La photo du milieu montre la fente dans le plan de masse de la carte. La photo de droite montre l'assemblage, avec la ligne micro-ruban.

### 2-Paramètres géométriques de la cavité avec la ligne micro ruban

La cavité avec la ligne sont présentées sur la figure III.6.

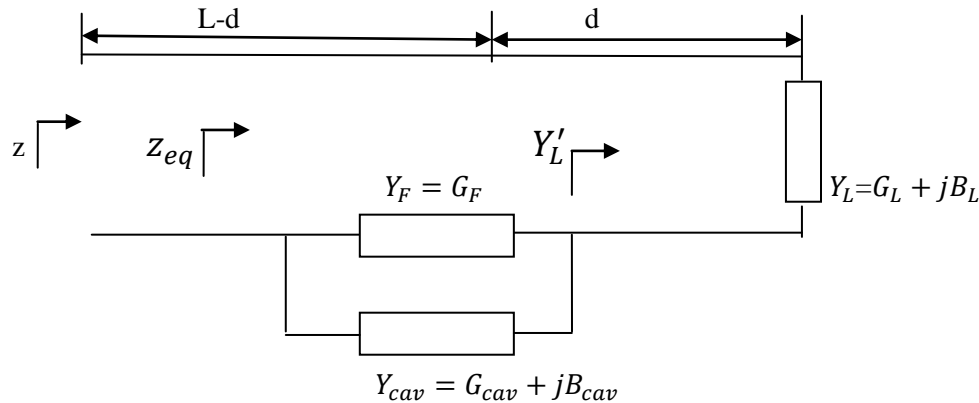


**Fig. III.3. Paramètres géométriques de la cavité avec la ligne d'accès.**

L'origine du repère est prise dans le coin inférieur gauche de la cavité sur les deux figures. La réalisation nécessite un arrondi des coins de la cavité qui n'est pas pris en compte.

### 3-Circuit équivalent de la cavité avec la ligne d'accès

Pour déterminer la permittivité relative du matériau, nous mesurons le coefficient de réflexion à l'entrée de la ligne. Le modèle adopté pour simuler la géométrie étudiée est schématisée sur la figure.III.7.



**Fig.III.4.** Circuit équivalent de la cavité avec la ligne d'accès

La fente, la cavité et le bout de ligne sont représentés comme des admittances.

La démarche que nous avons adoptée consiste à calculer l'admittance équivalente de chacun de ces éléments pour déterminer le coefficient de réflexion à l'entrée du dispositif.

Les trois éléments de la structure sont l'extrémité de la ligne micro ruban (indice L), la fente de couplage (indice F) et la cavité (indice *cav*). Ceux-ci sont modélisés par leur admittance respective :

- Le circuit ouvert de la ligne est modélisé par une admittance  $Y_L = G_L + jB_L$  où  $G_L$  représente les pertes par rayonnement et  $B_L$  l'effet de bout de ligne.  $Y_L$  donne  $Y'_L$  lorsque l'admittance est ramenée au niveau de la fente.

- la fente est représentée par l'admittance  $Y_F = G_F$  où  $G_F$  modélise les pertes par rayonnement de celle-ci.
- et en parallèle avec la fente, la cavité représentée par l'admittance  $Y_{cav} = G_{cav} + jB_{cav}$  avec  $G_{cav}$  représentant les pertes diélectriques et métalliques de la cavité et  $B_{cav}$  sa susceptance.

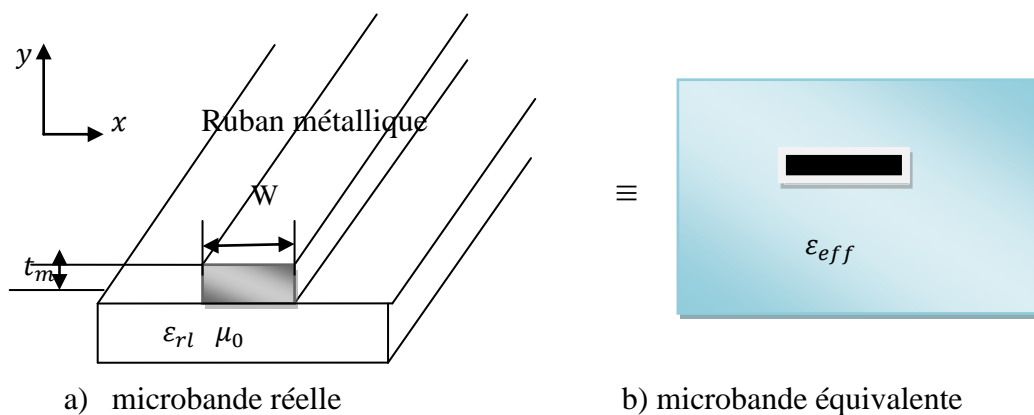
L'impédance équivalente à l'ensemble (bout de ligne ouverte, fente et cavité) est ramenée à l'entrée pour donner l'impédance  $Z$ . A partir de ces trois éléments, nous calculons le coefficient de réflexion de l'ensemble.

### 3-1-a-Paramètre d'une ligne micro ruban ou microstrip [8]

La ligne micro ruban est une structure de base, elle permet de transmettre un signal hyperfréquence sur de courtes distances. C'est une ligne planaire, ouverte et inhomogène constituée de deux conducteurs séparés par un matériau diélectrique

Le milieu de propagation est donc pas homogène, une partie des lignes de champ est située dans le substrat, l'autre partie dans l'air.

Ses propriétés de propagation dépendent de ses dimensions ainsi que la permittivité du substrat et la technique employée pour sa réalisation est celle des circuits imprimés. Cette ligne représentée sur la figure.III.2.



**Fig.III.5.** Paramètre d'une ligne micro ruban

La ligne peut être définie par son impédance caractéristique  $Z_c$  ainsi que sa permittivité effective  $\epsilon_{eff}$  où ces grandeurs varient avec la fréquence.

#### Constante diélectrique effective et impédance caractéristique

Si la ligne était située dans le vide, en appliquant la théorie classique étudiée, on écrirait son impédance caractéristique

$$Z_{c0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \text{ et sa vitesse de propagation } c_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

$L_0$  et  $C_0$  étant les constantes linéiques.

Supposons la ligne, perturbée par l'introduction du diélectrique support  $\epsilon_{rl}$ . Nous pouvons calculer sa nouvelle impédance caractéristique et sa vitesse de propagation toujours par la théorie classique en mode **T.E.M.** L'introduction du diélectrique, modifie la capacité et non l'inductance. Appelons  $C$  la nouvelle capacité linéique et posons

$$\epsilon_{eff} = \frac{C}{C_0}, \text{ où } \epsilon_{eff} \text{ est la permittivité effective de la ligne.}$$

La nouvelle vitesse de propagation est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{eff} L_0 C_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}$$

L'impédance caractéristique, la vitesse de propagation et la constante diélectrique effectif dépendent de la permittivité du diélectrique et de la géométrie de la ligne.

La longueur d'onde guidée  $\lambda$  dans le micro ruban, s'exprime en fonction de la longueur d'onde dans l'air par la relation :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\varepsilon_{eff}}$$

D'après Schneider et Hammerstad [7], nous donnons ci-dessous l'expression, de la permittivité effective  $\varepsilon_{eff}$  et de l'impédance caractéristique  $Z_c$ .

$$\varepsilon_{eff} = \frac{\varepsilon_{rl}+1}{2} + \frac{\varepsilon_{rl}-1}{2\sqrt{1+12\frac{t_m}{W_l}}} \quad \text{pour } \frac{W_l}{t_m} \geq 1 \quad \dots\dots\dots 3.1$$

$$Z_c = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}} \left[ \frac{W_l}{t_m} + 1,393 + 0,667 \log\left(\frac{W_l}{t_m} + 1,444\right) \right]^{-1} \quad \text{Pour } \frac{W_l}{t_m} \geq 1 \quad \dots\dots 3.2$$

avec :  $120\pi = Z_0 = 377\Omega$  impédance caractéristique du vide.

### 3-1-b- Calcul de l'admittance d'entrée du bout de ligne ouverte

La partie réelle de l'admittance équivalente au circuit ouvert de la ligne ruban  $G_L$  constitue la conductance de rayonnement de la ligne ouverte.

La susceptance  $B_L$  est équivalente à une capacité de longueur  $\Delta l$ .

$G_L$  et  $B_L$  sont données par les formules suivantes [9]:

$$G_L = \frac{1}{120\pi^2} \int_0^\pi \sin^2 \left( k_0 \frac{W_l}{2} \cos \theta \right) \tan^2 \theta \sin \theta d\theta \quad \dots\dots\dots 3.3.a$$

$$B_L = c\omega = k_0 \Delta l \frac{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}{Z_c} \quad \dots\dots\dots 3.3.b$$

où

$\Delta l$  : L'effet de bout de la ligne (voir annexe I).

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad \dots\dots\dots 3.4$$

L'admittance équivalente au circuit ouvert ramenée au niveau de la fente

$$Y'_L = G_e + jB_e$$

$$\text{on a [8], } Z_e = Z_c \frac{Z_l + jZ_c \operatorname{tg}(\beta d)}{Z_c + jZ_l \operatorname{tg}(\beta d)}$$

$$\text{donc } y'_l = y_c \frac{Z_c + jZ_l \operatorname{tg}(\beta d)}{Z_l + jZ_c \operatorname{tg}(\beta d)}$$

$$y_l' = y_c \frac{\frac{1}{y_c} + j \frac{tg(\beta d)}{y_l}}{\frac{1}{y_l} + j \frac{tg(\beta d)}{y_c}}$$

$$y_l' = y_c \frac{\frac{1}{y_c} + j \frac{tg(\beta d)}{G_L + jB_L}}{\frac{1}{G_L + jB_L} + j \frac{tg(\beta d)}{y_c}}$$

$$y_l' = y_c \frac{(G_L + jB_L) + jy_c tg(\beta d)}{y_c + j(G_L + jB_L)tg(\beta d)} = y_c \frac{G_L + j(B_L + y_c tg(\beta d))}{y_c - B_L tg(\beta d) + jG_L tg(\beta d)}$$

$$y_l' = y_c \frac{[G_L + j(B_L + y_c tg(\beta d))][y_c - B_L tg(\beta d) - jG_L tg(\beta d)]}{(y_c - B_L tg(\beta d))^2 + (G_L tg(\beta d))^2}$$

Et finalement :

$$G_e = Y_C \frac{G_L[Y_C - B_L \tan(\beta d)] + [B_L + Y_C \tan(\beta d)]G_L \tan(\beta d)}{[Y_C - B_L \tan(\beta d)]^2 + [G_L \tan(\beta d)]^2} \dots\dots\dots 3.5$$

$$B_e = Y_C \frac{[Y_C - B_L \tan(\beta d)][B_L + Y_C \tan(\beta d)] - G_L^2 \tan(\beta d)}{[Y_C - B_L \tan(\beta d)]^2 + [G_L \tan(\beta d)]^2} \dots\dots\dots 3.6$$

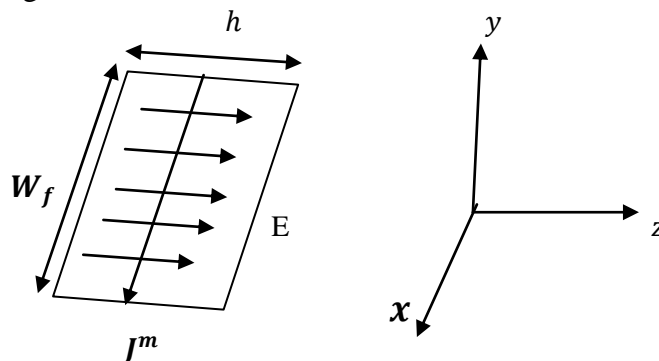
avec  $\beta = k_0 \sqrt{\epsilon_{eff}}$ .

**3-2-Modélisation de la fente**

Pour obtenir la conductance, il faut passer par deux étapes. Dans un premier temps le courant dans la fente doit être établi, pour ensuite déterminer la résistance de rayonnement.

**3-2-a-Calcul du champ rayonné par la fente**

La fente peut-être modélisée par un courant surfacique de type magnétique [9] comme indiqué dans la Figure.III.8 :



**Fig.III.6. Modélisation des courants de la fente**

$$J^m \left( \frac{V}{m} \right) = -\vec{y} \wedge \vec{E}_z = \vec{E}_x$$

Comme  $h \ll \lambda$  et que  $\vec{E}$  est constante selon cette longueur  $h$ , nous pouvons donc assimiler le rayonnement de la fente à celui d'un courant magnétique :

$$\vec{J}^m(V) = \vec{J}_s^m h = \vec{E}_x h = V \vec{x}$$

$V$  : représente la tension entre les deux côtés de la fente.

Le champ électromagnétique rayonné, en zone lointaine, par un doublet électrique de hauteur  $dx$ , parcouru par un courant  $I_0(A)$  est [9] :

$$E_\theta = j \frac{Z}{2} \frac{1}{\lambda R} I_0 dx \sin \theta e^{-jkR}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$H_\varphi = \frac{E_\theta}{Z}$$

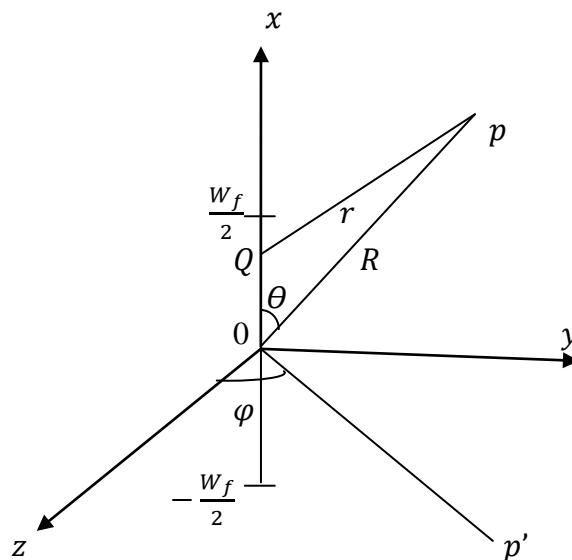


Fig.III.7. Coordonnées et notation pour un courant magnétique de longueur  $W$

Le champ électromagnétique rayonné par un doublet magnétique parcouru par un courant constant  $V$  (volts) a deux composantes qui sont déduites des deux précédentes par le principe de dualité :

$$H_\theta = j \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\lambda R} V dx \sin \theta e^{-jkR}$$

$$E_\varphi = H_\theta Z_0 = j \frac{1}{\lambda R} V dx \sin \theta e^{-jkR}$$

Calculons maintenant le champ électrique rayonné par le courant magnétique  $\vec{J}^m = V \vec{x}$  de longueur  $W_f$ . Prenons un point variable tel que  $Qp = r$ :

$$E_\varphi = j \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{W_f}{2}}^{+\frac{W_f}{2}} V(x) \sin \theta_\varphi \frac{e^{-jkr}}{r} dx$$

$$\begin{aligned}\vec{R} = \vec{x} + \vec{r} &\Rightarrow r = R\sqrt{1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2 - 2\frac{x}{R}\cos\theta} \\ &= R\left[1 - \frac{x}{R}\cos\theta + \frac{x^2}{2R^2}(1 - \cos^2\theta) + 0\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Dans le terme d'amplitude :  $r \approx R$

Dans le terme de phase :  $r = R - x\cos\theta$

Un calcul approché consiste à faire l'hypothèse que  $V(x)$  est la même que sur une ligne sans pertes en court circuit :

$$V(x) = V_M \sin k\left(\frac{W_f}{2} - |x|\right)$$

$$E_\varphi = j \frac{1}{\lambda R} \sin\theta e^{-jkR} \int_{-\frac{W_f}{2}}^{\frac{W_f}{2}} V_M \sin\left[k\left(\frac{W_f}{2} - |x|\right)\right] e^{jkx\cos\theta} dx$$

$$E_\varphi = j \frac{V_M}{\lambda R} \sin\theta e^{-jkR} \left\{ \int_0^{\frac{W_f}{2}} \sin\left[k\left(\frac{W_f}{2} - x\right)\right] e^{jkx\cos\theta} dx + \int_{-\frac{W_f}{2}}^0 \sin\left[k\left(\frac{W_f}{2} + x\right)\right] e^{jkx\cos\theta} dx \right\}$$

$$\begin{aligned}E_\varphi &= j \frac{V_M}{\lambda R} \sin\theta e^{-jkR} \left\{ \int_0^{\frac{W_f}{2}} \sin\left[k\left(\frac{W_f}{2} - x\right)\right] \cos(kx\cos\theta) dx + \right. \\ &\quad + j \int_0^{\frac{W_f}{2}} \sin\left[k\left(\frac{W_f}{2} - x\right)\right] \sin(kx\cos\theta) dx + \\ &\quad + \int_{-\frac{W_f}{2}}^0 \sin\left[k\left(\frac{W_f}{2} + x\right)\right] \cos(kx\cos\theta) dx + \\ &\quad \left. + j \int_{-\frac{W_f}{2}}^0 \sin\left[k\left(\frac{W_f}{2} + x\right)\right] \sin(kx\cos\theta) dx \right\}\end{aligned}$$

### Calcul de l'intégrale

Après les calculs on trouve :

La partie imaginaire de l'intégrale est nulle.

La partie réelle de l'intégrale est égale à  $\frac{2\left[\cos\left(k\frac{W_f}{2}\cos\theta\right) - \cos k\frac{W_f}{2}\right]}{k\sin^2\theta}$

Donc :

$$E_\varphi = j \frac{2V_M}{k\lambda R} e^{-jkR} \frac{\cos\left(k\frac{W_f}{2}\cos\theta\right) - \cos k\frac{W_f}{2}}{\sin\theta}$$

### 3-2-b-Calcul de l'admittance l'entrée de la fente rayonnante

La puissance rayonnée par la fente, par unité de surface, en point  $(R, \theta)$  du plan  $yo_x$  est donnée par :

$$p(R, \theta) = \frac{1}{2Z_0} E_\varphi^2$$

La puissance rayonnée par unité d'angle solide, est :

$$p(\theta) = p(R, \theta)R^2 = \frac{V_M^2}{2Z_0\pi^2} \left( \frac{\cos\left(k\frac{W_f}{2}\cos\theta\right) - \cos k\frac{W_f}{2}}{\sin\theta} \right)^2$$

La puissance rayonnée dans l'espace est :

$$p_r = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} p(\theta) \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{V_M^2}{Z_0 \pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{\cos(k \frac{W_f}{2} \cos\theta) - \cos k \frac{W_f}{2}}{\sin\theta} \right)^2 \sin\theta d\theta$$

La conductance de rayonnement de la fente est trouvée d'après :

$$(1 - K)^2 p_r = \frac{1}{2} V_M^2 G_F \left( \sin k - \frac{W_f}{2} \right)^2$$

$$G_F = (1 - K)^2 \frac{2}{\pi Z_0 \left( \sin k - \frac{W_f}{2} \right)^2} \int_0^{\pi} \left( \frac{\cos(k \frac{W_f}{2} \cos\theta) - \cos k \frac{W_f}{2}}{\sin\theta} \right)^2 \sin\theta d\theta \dots\dots 3.7$$

avec  $K = \tan^{-1} \left[ \frac{kh}{\pi} \log \left( \frac{4W_f}{h} \right) - 1.7 \right] \dots\dots\dots 3.8$

Où K représente le facteur correcteur.

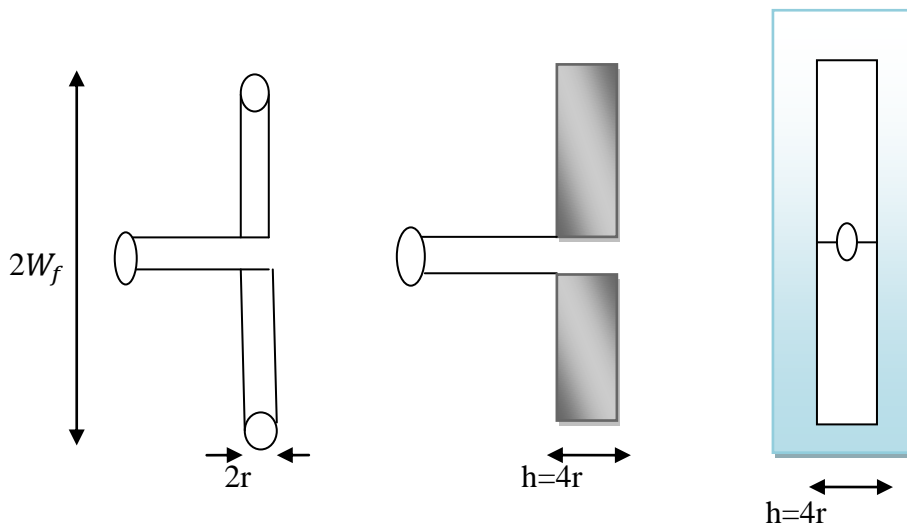
**Remarque [10]**

$$G_F = 4R_d / (\mu_0 / \epsilon_0) \dots\dots\dots 3.9$$

Avec  $R_d$  la résistance de rayonnement.

Pour obtenir  $R_d$ , il faut remarquer qu'un doublet plaque infiniment mince à même impédance de rayonnement que le doublet cylindrique dont le diamètre  $2r$  est sensiblement égal à la moitié de la largeur  $h$  de la plaque, ce qu'illustre la figure.III.10.cette résistance de rayonnement vaut :

$$R_d = Z_0 \frac{(1-K)^2}{2\pi \sin^2(k \frac{W_f}{2})} \int_0^{\pi} \frac{[\cos(k \frac{W_f}{2} \cos\theta) - \cos(k \frac{W_f}{2})]^2}{\sin\theta} d\theta \dots\dots\dots 3.10$$



**Fig.III.8:** correspondance doublet/fente

**3-3-Modélisation de la cavité**

Pour modéliser l'admittance de la cavité, il faut connaitre tout d'abord la propagation dans un guide d'onde rectangulaire puis on passe par deux étapes. La

première consiste à déterminer les oscillations libres, sans considérer l'ouverture constituée par la fente.

De cette façon nous obtenons la susceptance de la cavité. Dans une seconde étape, pour déterminer la conductance, nous prenons en compte la perturbation apportée par la fente, ainsi que les pertes du dispositif.

### 3-3-a-Fréquence des oscillations libres

Une cavité métallique peut être obtenue en fermant un guide d'onde rectangulaire par deux plaques métalliques perpendiculaires à l'axe longitudinal du guide sans perturber la propagation.

La cavité, représentée sur la Figure.III.11 est remplie de diélectrique isotrope.  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

A partir des équations de Maxwell, nous pouvons montrer que pour les modes TE, les composantes du champ sont :

$$H_z = H_0 \cos(k_x x) \cos k_y y \cos k_z z \dots\dots\dots 3.11$$

$$H_x = -H_0 \frac{k_z k_x}{k_c^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \dots\dots\dots 3.12$$

$$H_y = -H_0 \frac{k_z k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$

$$E_x = H_0 \frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \dots\dots\dots 3.13$$

$$E_y = -H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \dots\dots\dots 3.14$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad k_z = \frac{p\pi}{L}$$

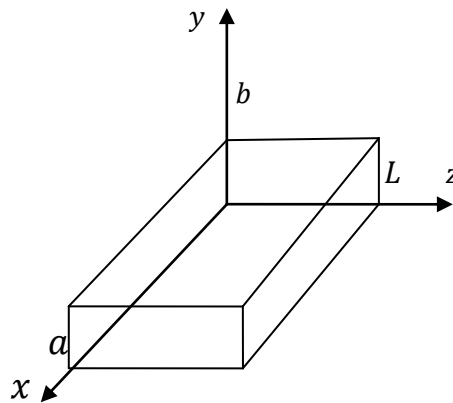
$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \dots\dots\dots 3.15$$

La fréquence des oscillations libres en modes  $mnp$  est donnée par :

$$f_{mnp} = v \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}$$

$$f_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2} \dots\dots\dots 3.16$$

$$f_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2L}\right)^2} \text{ puisque } b \ll a \text{ et } L \dots\dots\dots 3.17$$



**Fig. III.9:** Cavité sans fente.

**Mode fondamental**

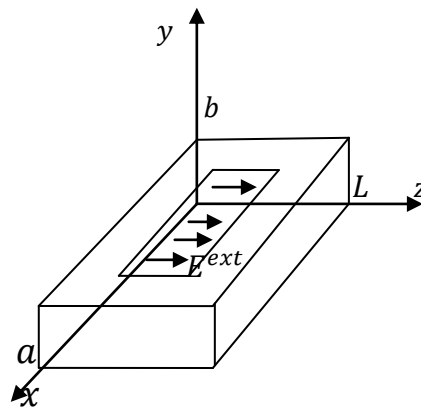
La cavité étudiée a une dimension  $b$  selon  $y$  très faible. Le mode fondamental est donc le mode  $TE_{101}$ .

La fréquence de résonance de ce mode est :

$$f_{101} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2} \dots\dots\dots 3.18$$

**3-3-b-Oscillations forcées**

Ces oscillations sont induites par la présence de la fente.



**Fig.III.10.** Rayonnement de la fente à l'extérieur de la cavité

**Énoncé du problème**

Celui-ci se fonde sur le système d'équations de Maxwell (dans le volume) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E} \dots\dots\dots 3.19.a$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \dots\dots\dots 3.19.b$$

Sur toute la surface de la cavité moins celle de la fente  $S - \Sigma$  nous avons  $\vec{E}_{tang} = 0$ . D'autre part, sur la surface de la fente  $\Sigma$   $E_{tang}$  le champ électrique est égal à celui présent à l'extérieur de la cavité :

$$\Sigma \vec{E}_{\text{tang}} = \vec{E}_{\text{ext}} \text{ (Fig.III.13).}$$

Le champ inconnu des oscillations forcées  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  est représenté sous la forme d'une superposition de modes :

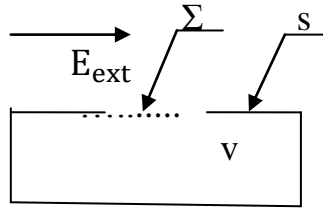
$$\vec{E}^N = \sum_{n=1}^N a_n \vec{E}_n \quad \text{et} \quad \vec{H}^N = \sum_{n=1}^N b_n \vec{H}_n \quad \dots\dots\dots 3.20$$

Pour  $N \rightarrow 1$  ces sommes convergent vers  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ .

Les fonctions  $\vec{E}_k$  et  $\vec{H}_k$  (chaque mode) vérifient les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_k = j\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_k \quad \dots\dots\dots 3.21.a$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_k = -j\omega \mu_0 \vec{H}_k \quad \dots\dots\dots 3.21.b$$



**Fig.III.11** : Sur les parois métalliques  $S$  de la cavité le champ électrique tangential est nul, tandis que dans la fente  $\Sigma$ , le champ électrique tangential est identique au champ électrique extérieur  $E_{\text{ext}}$

A partir des relations (23.a et b) il est possible d'ecrire, avec  $k = 1, 2, ..$  :

$$\oint_V (\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - j\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E}) \vec{E}_k^* dV = 0 \quad \dots\dots\dots 3.22$$

$$\oint_V (\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + j\omega \mu_0 \vec{H}) \vec{E}_k^* dV = 0 \quad \dots\dots\dots 3.23$$

Puisque le champ électrique tangential est nul sur les surfaces conductrices

$$\vec{E}_{\text{tang}}^* = 0 \text{ sur } S, \text{ nous avons}$$

$$\begin{aligned} \oint_V \vec{E}_k^* (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) dV &= \oint_V [\vec{\nabla}(\vec{H} \wedge \vec{E}_k^*) + \vec{H}(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_k^*)] dV \\ &= \oint_V \vec{H}(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_k^*) dV - \oint_V j\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \vec{E}_k^* dV = 0 \quad \dots\dots\dots 3.24 \end{aligned}$$

Et de même pour le champ magnétique, où le champ électrique tangential est nul dans la fente  $E_{\text{tang}} = 0$  sur  $S-\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \oint \vec{H}_k^* (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) dV &= \oint [\vec{\nabla}(\vec{E} \wedge \vec{H}_k^*) + \vec{E}(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_k^*)] dV \\ &= \int \oint_{\Sigma} \vec{E}_{\text{ext}} \wedge \vec{H}_k^* dS + \oint_V \vec{E}(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_k^*) dV \quad \dots\dots\dots 3.25 \end{aligned}$$

En utilisant (3.24), nous obtenons :

$$\int \oint_{\Sigma} \vec{E}_{\text{ext}} \wedge \vec{H}_k^* dS + \oint_V \vec{E}(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_k^*) dV + \oint_V j\omega \mu_0 \vec{H} \vec{H}_k^* dV = 0 \quad \dots\dots\dots 3.26$$

En remplaçant dans (3.24) et (3.26)  $E$  et  $H$  par leur décomposition en modes (3.20) et  $E_k$  et  $H_k$  par (3.21) :

$$\sum_{n=1}^N -\omega \varepsilon_0 \varepsilon a_n \int_V E_n E_k^* dV + \omega_k^* \mu_0 b_n \int_V H_n H_k^* dV = 0$$

$$\sum_{n=1}^N \omega_k^* \varepsilon_0 \varepsilon^* a_n \int_V E_n E_k^* dV + \omega \mu_0 b_n \int_V H_n H_k^* dV +$$

$$j \int \oint_{\Sigma} \vec{E}_{ext} \wedge \vec{H}_k^* dS = 0$$

En faisant usage de la relation d'orthogonalité [11] :

$$\varepsilon_0 |\varepsilon| \int_V E_n E_m^* dV = \mu_0 \int_V H_n H_m^* dV = \delta_{mn} \dots\dots\dots 3.27$$

Où  $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$  est le symbole de Kronecker. Viennent alors les deux équations :

$$\omega \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} a_k - \omega_k b_k = 0$$

$$\omega_k^* \frac{\varepsilon^*}{|\varepsilon|} a_k - \omega b_k = -j \int \oint_{\Sigma} \vec{E}_{ext} \wedge \vec{H}_k^* dS$$

desquelles sont déduites les coefficients de la décomposition :

$$a_k = \frac{j \omega_k^* |\varepsilon|}{\omega^2 - \omega_k^2 \varepsilon} \int \oint_{\Sigma} \vec{E}_{ext} \wedge \vec{H}_k^* dS \dots\dots\dots 3.28$$

$$b_k = \frac{j \omega}{\omega^2 - \omega_k^2} \int \oint_{\Sigma} \vec{E}_{ext} \wedge \vec{H}_k^* dS \dots\dots\dots 3.29$$

Pour obtenir le facteur de qualité, qui sera nécessaire pour le calcul de la susceptance d'entrée de la cavité, nous devons prendre en compte les pertes. Pour cela, considérons la pulsation complexe  $\omega_k = \omega' + j\omega''$ . L'énergie et la puissance du système se manifestent comme des fonctions du temps de la forme  $e^{-\omega''t}$ . Avec l'énergie

$W(t) = W(0) e^{-2\omega''t}$  et la puissance perdue  $P = dW/dt = 2\omega''W$ , le facteur de qualité  $Q$  est défini par :

$$Q = \frac{\omega'W}{P} = \frac{\omega'}{2\omega''} \quad \text{donc} \quad \omega = \omega' \left(1 + \frac{j}{2Q}\right) \dots\dots\dots 3.30$$

La puissance perdue  $P = P_d + P_c + P_r$  avec :

$P_d$  : La puissance absorbée dans le diélectrique, coefficient de qualité relatif  $Q_d$ .

$P_c$  : La puissance absorbée dans le métal, coefficient de qualité relatif  $Q_c$ .

$P_r$  : La puissance rayonnée, prise en compte dans la conductance de rayonnement de la fente, coefficient de qualité relatif  $Q_r$ .

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_r} \dots\dots\dots 3.31$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\varepsilon' + j\varepsilon'') \dots\dots\dots 3.32$$

$$Q_d = \omega' \frac{W}{P_d} = \frac{\omega' \oint_V \varepsilon_0 \varepsilon' \frac{EE^*}{2} dV}{\frac{\omega'}{2} \oint_V \varepsilon_0 \varepsilon'' EE^* dV} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\tan \delta}$$

avec  $\delta$  l'angle de perte du diélectrique

$$Q_c = 2\omega' \frac{W_m}{P_c} = \frac{\omega' \oint_V \mu_0 \frac{HH^*}{2} dV}{\frac{R_m}{2} \oint_V H_{tan} H_{tan}^* dS}$$

avec  $R_m$  la résistance de surface du métal.

### b-Calcul des amplitudes des oscillations forcées

On a une possibilité de décomposer le champ électromagnétique dans la cavité en une série de modes. Nous allons maintenant calculer l'expression de l'amplitude de ces modes.

Jusqu'à une fréquence donnée, suffisante pour cette étude, les champs  $E$  et  $H$  à l'intérieur de la cavité sont considérés comme résultant uniquement de la superposition des premiers modes  $TE_{m0p}$ .

$$E = \sum_m \sum_p a_{m0p} E_{m0p} \dots\dots\dots 3.33$$

$$E_{m0p} = \frac{-2}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r abL}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) y \dots\dots\dots 3.34$$

$$H = \sum_m \sum_p b_{m0p} H_{m0p} \dots\dots\dots 3.35$$

$$H_{m0p} = \frac{2j}{\sqrt{\mu_0 abL}} \left[ \frac{k_x}{k'} \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) z + \right. \\ \left. - \frac{k_z}{k'} \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) x \right] \dots\dots\dots 3.36$$

où  $k_x = \frac{m\pi}{a}$ ,  $k_z = \frac{p\pi}{L}$  et  $k' = k_x^2 + k_z^2$ .

A partir de (3.27) viennent :

$$a_{m0p} = \frac{j\omega_{m0p}^*}{\omega^2 - \omega_{m0p}^2} \frac{|\epsilon|}{\epsilon} \int_{z_0}^{z_0+h} \int_{x_0}^{x_0+\omega} (\vec{E}^{ext} x \wedge \vec{H}_{m0p}^*) y dx dz \dots\dots 3.37$$

$$b_{m0p} = \frac{j\omega}{\omega^2 - \omega_{m0p}^2} \int_{z_0}^{z_0+h} \int_{x_0}^{x_0+w} (E^{ext} z \wedge \vec{H}_{m0p}^*) y dx dz \dots\dots 3.38$$

$$\vec{E}^{ext} = \frac{V_M}{h} \sin\left(\frac{\omega}{2} - \left|x - x_0 - \frac{\omega}{2}\right|\right) \dots\dots\dots 3.39$$

En résultent les termes suivants :

$$a_{m0p} = \frac{-\omega_{m0p}^*}{\omega^2 - \omega_{m0p}^2} \frac{|\epsilon|}{\epsilon} \frac{V_M}{hk' \sqrt{\mu_0 abL}} A_m B_p \dots\dots\dots 3.40$$

$$b_{m0p} = \frac{-\omega}{\omega^2 - \omega_{m0p}^2} \frac{V_M}{hk'^* \sqrt{\mu_0 abL}} A_m B_p \dots\dots\dots 3.41$$

$$A_m = \sin[k_z(z_0 + h)] - \sin(k_z z_0) \dots\dots\dots 3.42$$

$$B_p = \frac{1}{k_x^2 - k^2} \left\{ -2k \left[ \sin\left(k_x \left(x_0 + \frac{W_f}{2}\right) - k \frac{W_f}{2}\right) + \sin\left(k_x \left(x_0 + \frac{W_f}{2}\right) + k \frac{W_f}{2}\right) \right] \right. \\ \left. - (k_x - k) \sin\left[k_x \left(x_0 + \frac{W_f}{2}\right) - k \frac{W_f}{2} - (k + k_x) \frac{W_f}{2}\right] \right. \\ \left. + (k_x + k) \sin\left[k_x \left(x_0 + \frac{W_f}{2}\right) - k \frac{W_f}{2} + (k - k_x) \frac{W_f}{2}\right] \right. \\ \left. + (k_x + k) \sin\left[k_x \left(x_0 + \frac{W_f}{2}\right) + k \frac{W_f}{2} - (k - k_x) \frac{W_f}{2}\right] \right. \\ \left. - (k_x - k) \sin\left[k_x \left(x_0 + \frac{W_f}{2}\right) + k \frac{W_f}{2} + (k + k_x) \frac{W_f}{2}\right] \right\} \dots\dots 3.43$$

Donc pour les modes TE<sub>m0p</sub>, le champ électrique  $\vec{E}$  est donné par :

$$E = \sum_m \sum_p \frac{2\omega_{m0p}}{\omega^2 - \omega_{m0p}^2} \frac{V_M}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r^* \mu_0} abLh} A_m B_p \sin(k_x x) \sin(k_z z) y$$

$$= \sum_m \sum_p E_{mp} \sin(k_x x) \sin(k_z z) y \dots\dots\dots 3.44$$

avec :

$$E_{mp} = \frac{2\omega_{m0p}}{\omega^2 - \omega_{m0p}^2} \frac{V_M}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_y^* \mu_0} abLh} A_m B_p$$

Et le champ magnétique et H :

$$H = \sum_m \sum_p \frac{-j\omega}{\omega_{m0p}^*} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0}} E_{mp} \left\{ \frac{k_x}{k'} \sin(k_z z) \cos(k_x x) z + \right.$$

$$\left. - \frac{k_z}{k'} \cos(k_z z) \sin(k_x x) x \right\} \dots\dots\dots 3.45$$

où :

$$\omega_{m0p} = \frac{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}}$$

**3-3-c- L'admittance d'entrée de la cavité**

**Susceptance d'entrée de la cavité**

La susceptance d'entrée de la cavité B<sub>caV</sub> est donnée [12] comme fonction de la puissance et du module de la tension :

$$B_{caV} = -4\omega \frac{W_m - W_e}{VV^*} \dots\dots\dots 3.46$$

Avec :

$$VV^* = V_m^2 \sin^2\left(k \frac{\omega}{2}\right)$$

$$W_e = \frac{\epsilon_0 \epsilon_y}{4} \oint_V EE^* dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r abL}{16} \sum_m \sum_p |E_{mp}|^2 \dots\dots\dots 3.47$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{4} \oint_V HH^* dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r abL}{16} \sum_m \sum_p |E_{mp}|^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{m0p}}\right)^2 \dots\dots\dots 3.48$$

W<sub>e</sub> et W<sub>m</sub> sont respectivement l'énergie électrique et l'énergie magnétique emmagasinées dans la cavité.

La susceptance d'entrée de la cavité est alors :

$$B_{caV} = -\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_r abL}{4V_m^2 \sin^2\left(k \frac{\omega}{2}\right)} \sum_m \sum_p |E_{mp}|^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_{m0p}}\right)^2 - 1\right] \dots\dots\dots 3.49$$

$$B_{caV} = -\frac{\omega}{abLh^2 \mu_0 \sin^2\left(k \frac{\omega}{2}\right)} \sum_m \sum_p \frac{A_m^2 B_p^2}{(\omega^2 - \omega_{m0p}^2) k'^2} \dots\dots\dots 3.50$$

### Les pertes diélectriques et métalliques de la cavité

Pour tenir compte des pertes, nous remplaçons dans l'expression précédente  $\omega_{mop}$  par  $\omega_{nom}(1 + \frac{j}{2Q})$ . L'admittance d'entrée de la cavité au premier ordre devient :

$$Y_{cav} = jB = j(B_r + jB_i) = G_{cav} + jB_{cav} \dots\dots\dots 3.51$$

$$G_{cav} = -B_i = \frac{\omega}{abLh^2\mu_0\sin^2(k\frac{\omega}{2})} \sum_m \sum_p \frac{A_m^2 B_p^2}{(\omega^2 - \omega_{mop}^2) + \frac{\omega_{mop}^4}{Q^2}} \dots\dots\dots 3.52$$

$$B_{cav} = B_r = -\frac{\omega}{abLh^2\mu_0\sin^2(k\frac{\omega}{2})} \sum_m \sum_p \frac{A_n^2 B_m^2 (\omega^2 - \omega_{mop}^2)}{(\omega^2 - \omega_{nom}^2) + \frac{\omega_{mop}^4}{Q^2}} \dots\dots\dots 3.53$$

Q est le facteur de qualité de la cavité :  $\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c}$ .  $Q_c$  et  $Q_d$  sont respectivement les facteurs de qualité relatifs aux pertes métalliques et diélectriques dans la cavité.

Pour les modes  $TE_{m0p}$ , ils sont donnés par :

$$Q_c = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0^2 a^3 b L^3 m^2 \omega_{m0p}^3}{2m^2 \pi^2 (m^2 a L^3 + p^2 L a^3 + 2m^2 B L^3 + 2p^2 b a^3) R_m} \dots\dots\dots 3.54$$

Avec la résistance de surface du métal

$$R_m = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_{m0p}}{2\sigma}}$$

et  $\sigma$  représentant la conductivité du métal.

$$Q_d = \frac{1}{\tan\delta} \dots\dots\dots 3.55$$

#### Mode fondamental (Mode $TE_{101}$ )

$$Q_c = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0^2 a^3 b L^3 m^2 \omega_{101}^3}{2m^2 \pi^2 (m^2 a L^3 + p^2 L a^3 + 2m^2 B L^3 + 2p^2 b a^3) R_m}$$

$$R_m = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_{101}}{2\sigma}}$$

$$G_{cav} = \frac{\omega}{abLh^2\mu_0\sin^2(k\frac{\omega}{2})} \frac{A^2 B^2 \frac{\omega_{101}^2}{Q}}{(\omega^2 - \omega_{101}^2) + \frac{\omega_{101}^4}{Q^2}} \dots\dots\dots 3.56$$

$$B_{cav} = -\frac{\omega}{abLh^2\mu_0\sin^2(k\frac{\omega}{2})} \frac{A_n^2 B_m^2 (\omega^2 - \omega_{101}^2)}{(\omega^2 - \omega_{101}^2) + \frac{\omega_{101}^4}{Q^2}} \dots\dots\dots 3.57$$

#### 4- Coefficient de réflexion à l'entrée

Ce paramètre se détermine à partir de l'impédance complexe équivalente

$Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$  de la structure, c'est à dire l'ensemble ligne + fente + cavité...

$$\frac{1}{y_{eq}} = \frac{1}{y_L} + \frac{1}{y_{cav} + y_f}$$

$$\frac{1}{y_{eq}} = \frac{1}{G_e + jB_e} + \frac{1}{(G_{cav} + G_f) + jB_{cav}}$$

$$\frac{1}{y_{eq}} = \frac{G_e - jB_e}{G_e^2 + B_e^2} + \frac{G_{cav} + G_f - jB_{cav}}{(G_{cav} + G_f)^2 + B_{cav}^2}$$

$$\frac{1}{y_{eq}} = \frac{G_e}{G_e^2 + B_e^2} + \frac{G_{cav} + G_f}{(G_{cav} + G_f)^2 + B_{cav}^2} - j \left[ \frac{B_e}{G_e^2 + B_e^2} + \frac{B_{cav}}{(G_{cav} + G_f)^2 + B_{cav}^2} \right]$$

$$R_{eq} = \frac{G_e}{G_e^2 + B_e^2} + \frac{G_f + G_{cav}}{B_{cav}^2 + (G_f + G_{cav})^2} \dots\dots\dots 3.58$$

$$X_{eq} = -\frac{B_e}{G_e^2 + B_e^2} - \frac{B_{cav}}{(G_f + G_{cav})^2 + B_{cav}^2} \dots\dots\dots 3.59$$

L'impédance ramenée à l'entrée vaut  $Z = R + jX$ , avec L la distance de l'entrée à la fente (Fig.III.4) :

$$Z = Z_c \frac{Z_{eq} + jZ_c \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_c + jZ_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)}$$

$$Z = Z_c \frac{R_{eq} + j(X_{eq} + Z_c \operatorname{tg}(\beta l))}{Z_c - X_{eq} \operatorname{tg}(\beta l) + jR_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)}$$

$$Z = Z_c \frac{R_{eq} + j(X_{eq} + Z_c \operatorname{tg}(\beta l))}{[Z_c - X_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)]^2 + [R_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)]^2}$$

$$Z = Z_c \frac{R_{eq}[Z_c - X_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)] + R_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)(X_{eq} + Z_c \operatorname{tg}(\beta l))}{[Z_c - X_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)]^2 + [R_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)]^2} + jZ_c \frac{[X_{eq} + Z_c \operatorname{tg}(\beta l)][Z_c - X_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)] - R_{eq}^2 \operatorname{tg}(\beta l)}{[Z_c - X_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)]^2 + [R_{eq} \operatorname{tg}(\beta l)]^2}$$

$$R = Z_c \frac{R_{eq}(Z_c - X_{eq} \tan(\beta L)) + (X_{eq} + Z_c \tan(\beta L))R_{eq} \tan(\beta L)}{(Z_c - X_{eq} \tan(\beta L))^2 + (R_{eq} \tan(\beta L))^2} \dots\dots\dots 3.60$$

$$X = Z_c \frac{(Z_c - X_{eq} \tan(\beta L))(X_{eq} + Z_c \tan(\beta L)) - R_{eq}^2 \tan(\beta L)}{(Z_c - X_{eq} \tan(\beta L))^2 + (R_{eq} \tan(\beta L))^2} \dots\dots\dots 3.61$$

Le module du coefficient de réflexion est donné par :

$$\Gamma = \frac{\sqrt{(R-50)^2 + X^2}}{\sqrt{(R+50)^2 + X^2}} \dots\dots\dots 3.62$$

## **CHAPITRE IV**

### **MESURES ET RESULTATS NUMERIQUES**

## 1 - Les mesures

Un matériau diélectrique est caractérisé par sa permittivité diélectrique. En micro-onde on utilise les propriétés d'une cavité électromagnétique pour obtenir cette propriété physique.

Par l'intermédiaire d'une fente et d'une ligne micro-ruban, un champ électromagnétique excité à l'intérieur de la cavité. Cette dernière emmagasine alors une certaine quantité d'énergie électromagnétique.

Pour certaines fréquences (fréquences de résonance), notre structure absorbe l'énergie et la rejette. Et pour mesurer les fréquences de résonance nous avons utilisé un analyseur de réseau qu'il fait le rapport de l'énergie envoyée vers la cavité et celle réfléchi par celle-ci (coefficient de réflexion).

### 1-1- L'analyseur de réseau

L'analyseur de réseau est un appareil de mesure, très utilisé dans les laboratoires de micro-ondes, qui permet de comparer les amplitudes complexes de deux ondes pour fournir le rapport de leurs modules et la différence de leurs phases. Il est principalement de deux types connus sous les noms d'analyseur de réseau vectoriel et d'analyseur de réseau scalaire [13].

**Les analyseurs de réseau scalaire (SNA : scalar network analyzer)** sont conçus spécifiquement pour mesurer l'amplitude des coefficients de transmission et réflexion des appareils hyperfréquences. Les résultats sont affichés avec la fréquence sur l'axe horizontal.

**Les analyseurs de réseau vectoriels (VNA : vector network analyzer)** mesurent les caractéristiques de transmission et de réflexion complexes des appareils hyperfréquences.

Ceci est obtenu en comparant le signal qui parvient à l'appareil avec le signal qui le traverse, ou qu'il renvoie. Ils contiennent des détecteurs à faible bande passante, réglés sur la fréquence du signal généré et permettent un lecteur directe des quatre coefficients dans une matrice de dispersion- les paramètres de dispersion ou paramètres 's', chacun d'eux représenté par un module et un argument. Le coefficient de réflexion peut être affiché dans un abaque de Smith représentant ainsi l'impédance complexe ( $Z = R + jX$ ) ou affichée numériquement.

Les analyseurs de réseau vectoriels sont largement utilisés dans la phase de conception des produits.

### 1-2 Le dispositif de test

Une cavité parallélépipédique remplie du matériau diélectrique uniaxe à caractériser est excitée par une ligne micro-ruban à travers une fente (voir chapitre III).

L'objectif de cette structure est de caractériser un matériau à perte.

Les différents paramètres de la structure étudiée (voir chapitre III Fig. III.6) :

**Tableau IV.1- Différents paramètres géométriques en (mm)**

Longueur du cavité	a	25
Largeur du cavité	b	15
Hauteur du cavité	L	20
Le bout de la ligne micro-ruban	d	04
Largeur de la ligne	$Wl$	4.4
L'épaisseur du ruban	t	1.56
Longueur de la fente	$W_f$	4.4
Largeur de la fente	h	0.5
Longueur de la ligne micro-ruban	l	36-38-44-64
Distance entre la fente et le 1 <sup>er</sup> bord du cavité selon $ox$	$x_0$	7.5
Distance entre la fente et le 1 <sup>er</sup> bord du cavité selon $oz$	$z_0$	09
Permittivité du diélectrique de la ligne	$\epsilon_{rl}$	2.55

Plusieurs mesures de coefficient de réflexion sont effectuées avec différents paramètres de la ligne et la fente. Ces différents paramètres correspondent à une énergie électromagnétique maximum au niveau de la fente.

Les parois de la cavité, le plan de masse et le ruban métallique sont en cuivre. La fente est gravée dans le plan de masse. Le matériau utilisé comme substrat diélectrique pour la ligne micro-ruban est le verre téflon ( $\epsilon_{rl} = 2.55$ ) [8].

Pour valider cette méthode de caractérisation, un matériau témoin ( $\epsilon_r = 10$ ) est utilisé également.

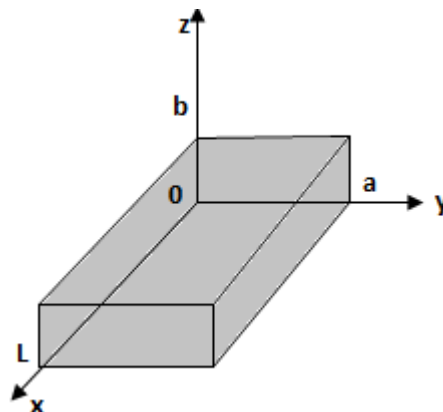
## 2-Cavité remplie d'un matériau uniaxe

Equation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \dots\dots\dots 4.1$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \dots\dots\dots 4.2$$

$$diV\vec{D} = 0 \text{ et } diV\vec{B} = 0 \dots\dots\dots 4.3$$



*Fig. IV-1 Cavité coupée dans un guide d'onde rectangulaire*

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

### 2-1- Composantes transversales en fonction des composantes longitudinales

Exprimons les composantes selon x et y en fonction des composantes  $\vec{E}_y$  et  $\vec{H}_y$

$$1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_x & a \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y & b \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_x E_x & c \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_y E_y & d \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_z E_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (b) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} &= -j\omega\mu_0 \left[ \frac{\partial H_z}{\partial y} - j\omega\varepsilon_0\varepsilon_x E_x \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_x E_x &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ \Rightarrow E_x &= \frac{1}{k_0^2\varepsilon_x - k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \dots\dots\dots 4.4.a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= -j\omega\mu_0 \left[ \frac{\partial H_z}{\partial x} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_y E_y \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_y E_y &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \Rightarrow E_y &= \frac{1}{k_0^2\varepsilon_y - k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] \dots\dots\dots 4.4.b \end{aligned}$$

$$\text{Avec } k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \quad \text{et} \quad k_z^2 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} (c) \Rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_x \left[ \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega\mu_0 H_y \right] \\ \Rightarrow H_y &= \frac{1}{k_0^2\varepsilon_y + k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial y} - j\omega\varepsilon_0\varepsilon_x \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \dots\dots\dots 4.4.c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \Rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_y \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu_0 H_x \right] \\ \Rightarrow H_x &= \frac{1}{k_0^2\varepsilon_y - k_z^2} \left[ \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_y \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \dots\dots\dots 4.4.d \end{aligned}$$

**2-2-Equation de propagation :**

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) - \nabla^2\vec{H} = j\omega\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\varepsilon}\vec{E}) \quad \dots\dots\dots 4.5$$

$$\text{div}\vec{H} = 0 \Rightarrow -\nabla^2\vec{H} = j\omega\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\varepsilon}\vec{E}) \quad \dots\dots\dots 4.6$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\varepsilon}\vec{E}) &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varepsilon_0\varepsilon_x E_x & \varepsilon_0\varepsilon_y E_y & \varepsilon_0\varepsilon_z E_z \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_z E_z - \frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_y E_y \\ \frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_x E_x - \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_z E_z \\ \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_y E_y - \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon_x E_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En projetant sur  $OZ$

$$-\nabla^2 H_y = j\omega\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\varepsilon}\vec{E})|_z$$

$$\text{Si } \varepsilon_x = \varepsilon_y \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\varepsilon}\vec{E})|_z = \varepsilon_0\varepsilon_x\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}|_z = \varepsilon_0\varepsilon_x(-j\omega\mu_0 H_z)$$

Matériau uniaxe ( $\varepsilon_y = \varepsilon_x$ ) axe optique selon  $OZ$ .

Donc :

$$\begin{aligned} -\nabla^2 H_z &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_x(-j\omega\mu_0 H_z) \\ &= \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_x H_z = k_0^2\varepsilon_x H_z \text{ avec } k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 \end{aligned}$$

D'où

$$\nabla^2 H_z + k_0^2\varepsilon_x H_z = 0 \quad \dots\dots\dots 4.7$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_x H_z = 0 \quad \dots\dots\dots 4.8$$

$$H_z = X(x)Y(y)Z(z) \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_x = 0 \quad \dots\dots\dots 4.9$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0 \Rightarrow X = A'\cos k_x x + B'\sin k_x x \quad \dots\dots\dots 4.10.a$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y = 0 \Rightarrow Y = C'\cos k_y y + D'\sin k_y y \quad \dots\dots\dots 4.10.b$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z = 0 \Rightarrow Z = E'\cos k_z z + F'\sin k_z z \quad \dots\dots\dots 4.10.c$$

$$\text{Avec } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2\varepsilon_x \quad \dots\dots\dots 4.11$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -j\omega\mu_0\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \quad 12$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}(\varepsilon^{-1}\vec{D})$$

$$\varepsilon^{-1}\vec{D} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{D_x}{\varepsilon_x} \\ \frac{D_y}{\varepsilon_y} \\ \frac{D_z}{\varepsilon_z} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div}(\varepsilon^{-1}\vec{D}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_y} \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right]$$

Matériau uniaxe ( $\varepsilon_y = \varepsilon_x$ )

$$\text{Donc } \text{div}(\varepsilon^{-1}\vec{D}) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_x} \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_x} \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_z} \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\text{div}\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_x} + \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\varepsilon_z} - \frac{1}{\varepsilon_x} \right] \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\text{div}(\vec{D}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\varepsilon^{-1}\vec{D}) = \left(1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right) \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$(15) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \left(1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right) \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})|_z = \left(1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \nabla^2 \vec{E}_z$$

$$= -j\omega\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H})|_z$$

$$= -j\omega\mu_0 [j\omega\varepsilon_0\varepsilon_z E_z]$$

$$= \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_z E_z$$

$$= k_0^2\varepsilon_z E_z$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E}_z - \left(1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_z E_z = 0 \dots\dots\dots 4.12$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_z E_z = 0 \dots\dots\dots 4.13$$

$$E_z = X(x)Y(y)Z(z) \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon_z}{Z\varepsilon_x} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_z = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 \Rightarrow X = A\cos k_x x + B\sin k_x x \dots\dots\dots 4.14.a$$

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 \Rightarrow Y = C\cos k_y y + D\sin k_y y \dots\dots\dots 4.14.b$$

$$\frac{\varepsilon_z}{Z\varepsilon_x} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} k_z^2 \Rightarrow Z = E\cos k_z z + F\sin k_z z \dots\dots\dots 4.14.c$$

$$\text{Avec } k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} k_z^2 = k_0^2\varepsilon_z \dots\dots\dots 4.15$$

**Mode TM<sub>mnl</sub>** ( $H_z = 0$ )

$$E_z = 0 \text{ Pour } x = 0 \text{ et } x = L \Rightarrow \begin{cases} X(0) = A = 0 \\ \text{et} \\ X(L) = B\sin k_x L = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{L} \quad m = 1, 2, \dots \dots\dots 4.16$$

$$E_z = 0 \text{ Pour } Y=0 \text{ et } Y=a \Rightarrow Y(y) = D\sin k_y y$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots\dots 4.17$$

$$E_z = \sin k_x x \sin k_y y [E\cos k_z z + F\sin k_z z]$$

$$E_x = \frac{1}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} [k_x \cos k_x x \sin k_y y] [F k_z \cos k_z z - k_z E \sin k_z z]$$

$$E_x = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = b \Rightarrow F = 0 \text{ et } k_z = \frac{l\pi}{b} \quad l = 0, 1, 2 \dots \quad \dots\dots\dots 4.18$$

$$E_z = E \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \quad \dots\dots\dots 4.19.a$$

$$E_x = -E \frac{k_x k_z}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \quad \dots\dots\dots 4.19.b$$

$$E_y = -E \frac{k_y k_z}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \quad \dots\dots\dots 4.19.c$$

$$H_x = \frac{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_y}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} k_y E \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \quad \dots\dots\dots 4.20.a$$

$$H_y = -\frac{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_x}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} k_x E \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \quad \dots\dots\dots 4.20.b$$

Le premier mode  $TM_{110}$  mode fondamentale si  $b \ll a$  et  $L$

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} k_z^2 = k_0^2 \varepsilon_z$$

$$k_{mnl}^2 = \frac{1}{\varepsilon_z} \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] + \frac{1}{\varepsilon_x} \left( \frac{l\pi}{b} \right)^2 \quad \dots\dots\dots 4.21$$

$$\omega_{mnl}^2 = c^2 k_{mnl}^2 \quad \dots\dots\dots 4.22$$

**Mode TE<sub>mnl</sub>** ( $E_z = 0$ )

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = L$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -k_x A' \sin k_x x + k_x B' \cos k_x x = 0$$

$$\text{pour } x = 0 \Rightarrow B' = 0$$

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=L} = -k_x A' \sin k_x L = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{L} \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = a$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0 \Rightarrow D' = 0 \text{ et } k_y = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$H_z = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = b \Rightarrow E' = 0 \text{ et } k_z = \frac{l\pi}{b} \quad l = 1, 2 \dots$$

$$H_z = H \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \quad \dots\dots\dots 4.23.a$$

$$\text{Avec } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \varepsilon_x$$

$$H_x = \frac{-H k_x k_z}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \quad \dots\dots\dots 4.23.b$$

$$H_y = \frac{-H k_y k_z}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \quad \dots\dots\dots 4.23.c$$

$$E_x = \frac{jH\omega\mu_0 k_y}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \quad \dots\dots\dots 4.24.a$$

$$E_y = -\frac{jH\omega\mu_0 k_x}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \quad \dots\dots\dots 4.24.b$$

$$k_{mnl}^2 = \frac{1}{\varepsilon_x} \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{b} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots 4.25$$

$$= \frac{\omega_{mnl}^2}{c^2}$$

Le premier mode  $\mathbf{TE}_{011}$  si  $a \gg b$  ou  $\mathbf{TE}_{101}$  si  $L \gg a$

**2-3-1-Propriétés des oscillations libres**

Pour des oscillations du mode n et du mode k :

$$\begin{array}{l} \text{rot}E_n = -j\omega_n\mu_0 H_n \\ \text{rot}H_n = j\omega\tilde{\epsilon}\epsilon_0 E_n \end{array} \quad \begin{array}{l} 26 \\ 27 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \text{rot}E_k^* = j\omega_k^*\mu_0 H_k^* \\ \text{rot}H_k^* = -j\omega_k^*\epsilon_0\tilde{\epsilon}^* E_k^* \end{array}$$

$$(26) \Rightarrow \begin{cases} H_k^* \text{rot}E_n = -j\omega_n\mu_0 H_n H_k^* \\ E_n \text{rot}H_k^* = -j\omega_k^*\epsilon_0\tilde{\epsilon}^* E_k^* E_n \end{cases}$$

$$\int_v \text{div}[E_n \wedge H_k^*] dv = \int_v j(\omega_k^*\epsilon_0\tilde{\epsilon}^* E_k^* E_n - \omega_n\mu_0 H_n H_k^*) dv$$

$$\int_s [E_n \wedge H_k^*] ds = 0$$

$$j\omega_k^*\epsilon_0 \int_v \tilde{\epsilon}^* E_k^* E_n dv - j\omega_n\mu_0 \int_v H_n H_k^* dv = 0$$

Car E tangentiel est nul sur la surface de la cavité s

Donc :

$$\omega_n\mu_0 \int_v H_n H_k^* dv - \omega_k^*\epsilon_0 \int_v \tilde{\epsilon}^* E_k^* E_n dv = 0 \dots\dots\dots (4.26.a)$$

De même en considérant le groupe d'équations (37)

$$(27) \Rightarrow \omega_k^*\mu_0 \int_v H_n H_k^* dv - \omega_n\epsilon_0 \int_v \tilde{\epsilon} E_k^* E_n dv = 0 \dots\dots\dots (4.27.a)$$

Posons dans (36.a) et (37.a) k=n

$$\begin{aligned} (\mu_0 \int_v H_n H_n^* dv)^2 &= \epsilon_0^2 [\int_v \tilde{\epsilon}^* E_n^* E_n dv] [\int_v \tilde{\epsilon} E_n^* E_n dv] \\ &= \epsilon_0^2 \left[ \int_v (\epsilon_x^* E_x^2 + \epsilon_y^* E_y^2 + \epsilon_z^* E_z^2) dv \right] \times \\ &\quad \left[ \int_v (\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2) dv \right] \end{aligned}$$

$$\mu_0 \int_v H_n H_n^* dv = \epsilon_0 \sqrt{\int_v (\epsilon_x^* E_x^2 + \epsilon_y^* E_y^2 + \epsilon_z^* E_z^2) dv} \times \sqrt{\int_v (\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2) dv} \dots\dots\dots 4.28$$

**Mode TE :** ( $E_z = 0$ ) et comme matériaux uniaxe ( $\epsilon_y = \epsilon_x$ )

Donc :

$$\mu_0 \int_v H_n H_n^* dv = \epsilon_0 |\epsilon_x| \int_v E_n^* E_n dv \dots\dots\dots 4.29$$

**Mode TM :** ( $H_z = 0$ )

$$\mu_0 \int_v H_n H_n^* dv = \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_x^* \int_v (E_x^2 + E_y^2) dv + \epsilon_z^* \int_v E_z^2 dv} \times \sqrt{\epsilon_x \int_v (E_x^2 + E_y^2) dv + \epsilon_z \int_v E_z^2 dv}$$

Sans pertes

$$\mu_0 \int_v H_n H_n^* dv = \epsilon_0 [\epsilon_x \int_v (E_x^2 + E_y^2) dv + \epsilon_z \int_v E_z^2 dv] \dots\dots\dots 4.30$$

Construction des systèmes  $\{E_n\}$  et  $\{H_n\}$

Mode **TE** :

$$1 = \mu_0 \iiint_{000}^{Lab} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) dx dy dz$$

$$= \varepsilon_0 |\varepsilon_x| \iiint_{000}^{Lab} (E_x^2 + E_y^2) dx dy dz$$

$$\mu_0 \iiint_{000}^{Lab} H_x^2 dv = \mu_0 \iiint_{000}^{Lab} \left( \frac{-H k_x k_z}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} \right)^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \cos^2 k_z z dx dy dz$$

$$\mu_0 \iiint_{000}^{Lab} H_x^2 dv = \mu_0 \left( \frac{H k_x k_z}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} \right)^2 \int_0^L \sin^2 k_x x dx \times$$

$$\int_0^a \cos^2 k_y y dy \int_0^b \cos^2 k_z z dz$$

$$= \mu_0 \left( \frac{H k_x k_z}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} \right)^2 \int_0^L \frac{1 - \cos 2k_x x}{2} dx \times$$

$$\int_0^L \frac{1 + \cos 2k_y y}{2} dy \int_0^L \frac{1 + \cos 2k_z z}{2} dz$$

Les modes **TE**<sub>011</sub> et **TE**<sub>101</sub>

$$\mu_0 \iiint_{000}^{Lab} H_x^2 dv = \mu_0 \left( \frac{H k_x k_z}{k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2} \right)^2 \frac{abL}{4}$$

$$\mu_0 \iiint_{000}^{Lab} H_y^2 dv = \mu_0 \left( \frac{H k_y k_z}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} \right)^2 \frac{abL}{4}$$

$$\mu_0 \iiint_{000}^{Lab} H_z^2 dv = \mu_0 \frac{abLH^2}{4}$$

Donc

$$\mu_0 \iiint_{000}^{Lab} H_n^2 dv = \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \left( \frac{k_x^2 k_z^2}{(k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2)^2} + \frac{k_y^2 k_z^2}{(k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2)^2} + 1 \right)$$

$$= \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \frac{k_x^2 k_z^2 + k_y^2 k_z^2 + (k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2)^2}{(k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2)^2}$$

$$= \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \frac{k_x^2 k_z^2 + k_y^2 k_z^2 + k_0^4 \varepsilon_y^2 + k_z^4 - 2\varepsilon_y k_0^2 k_z^2}{(k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2)^2}$$

$$= \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \frac{k_z^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + k_0^4 \varepsilon_x^2 - 2\varepsilon_x k_0^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2}$$

$$= \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \frac{\varepsilon_x k_0^2 k_z^2 + k_0^4 \varepsilon_x^2 - 2\varepsilon_x k_0^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2}$$

$$= \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \frac{k_0^4 \varepsilon_x^2 - \varepsilon_x k_0^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2}$$

$$= \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \frac{k_0^2 \varepsilon_x (k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2)}{(k_x^2 + k_y^2)^2}$$

$$= \mu_0 \frac{abLH^2}{4} \frac{k_0^2 \varepsilon_x}{k_x^2 + k_y^2} \dots\dots\dots 4.31$$

Normalisation en mode TE

$$\begin{aligned} \mu_0 \int_V H_n H_n^* dv &= 1 \Rightarrow \mu_0 \frac{abLH^2}{4 \times 2^p} \frac{k_0^2 \varepsilon_x}{k_x^2 + k_y^2} = 1 \\ \Rightarrow H &= 2 \sqrt{\frac{(k_x^2 + k_y^2) 2^p}{\mu_0 abLk_0^2 \varepsilon_x}} = B_z \dots\dots\dots 4.32 \\ p &= \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{si } m = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H_y &= -2 \sqrt{\frac{(k_x^2 + k_y^2) 2^p}{\mu_0 abLk_0^2 \varepsilon_x}} \frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \\ &= \frac{-2k_y k_z \sqrt{2^p}}{k_0 \sqrt{\mu_0 abL \varepsilon_x} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{aligned} \dots\dots\dots 4.33.a$$

$$H_y = B_y \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \dots\dots\dots 4.33.a$$

$$B_y = \frac{-2k_y k_z \sqrt{2^p}}{k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}}$$

$$H_x = B_x \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \dots\dots\dots 4.33.b$$

$$B_x = \frac{-2k_x k_z \sqrt{2^p}}{k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}}$$

$$E_x = A_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \dots\dots\dots 4.34.a$$

$$A_x = j2 \sqrt{\frac{(k_x^2 + k_y^2) 2^p}{\mu_0 abLk_0^2 \varepsilon_x}} \frac{\omega \mu_0 k_y}{k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2} = 2j \sqrt{\frac{\mu_0 2^p}{\varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \frac{\omega k_y}{k_0}$$

$$E_y = A_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \dots\dots\dots 4.34.b$$

$$A_y = -2j \sqrt{\frac{\mu_0 2^p}{\varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \frac{\omega k_x}{k_0}$$

**Mode TM**

$$\mu_0 \iiint_{000}^{Lab} H_n H_n^* dx dy dz = 1$$

$$\mu_0 \frac{\omega^2 \varepsilon_0^2 |\varepsilon_y^*|^2 k_y^2}{(k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2)^2} E^2 \frac{abL}{4} + \mu_0 \frac{\omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon_x^2 k_x^2}{(k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2)^2} E^2 \frac{abL}{4} = 1$$

$$\mu_0 \frac{\omega^2 \varepsilon_0^2 abL \varepsilon_x^2 E^2}{(k_0^2 \varepsilon_y - k_z^2)^2} [k_y^2 + k_x^2] = 1$$

Or

$$\begin{aligned} \varepsilon_x (k_y^2 + k_x^2) + \varepsilon_z k_z^2 &= k_0^2 \varepsilon_x \varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_x (k_y^2 + k_x^2) = \varepsilon_z (k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2) \\ &\Rightarrow k_0^2 \varepsilon_x - k_z^2 = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} (k_y^2 + k_x^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\mu_0 \frac{\omega^2 \varepsilon_0^2 abL \varepsilon_x^2 E^2}{\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}\right)^2 (k_y^2 + k_x^2)^2} [k_y^2 + k_x^2] = 1 \Rightarrow \mu_0 \frac{\omega^2 \varepsilon_0^2 abL \varepsilon_z^2 E^2}{4(k_x^2 + k_y^2)} = 1$$

$$E = \frac{2 \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_z \sqrt{\mu_0 abL}} = A_z \text{ et } E_z = A_z \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \dots\dots\dots 4.35$$

$$E_x = A_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \dots\dots\dots 4.36.a$$

$$A_x = \frac{-2k_x k_z}{\omega \epsilon_0 \epsilon_x \sqrt{\mu_0 a b L (k_x^2 + k_y^2)}}$$

$$E_y = A_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \dots\dots\dots 4.36.b$$

$$A_y = \frac{-2k_y k_z}{\omega \epsilon_0 \epsilon_x \sqrt{\mu_0 a b L (k_x^2 + k_y^2)}}$$

$$H_x = B_x \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \dots\dots\dots 4.37.a$$

$$B_x = \frac{2jk_y}{\sqrt{\mu_0 a b L (k_x^2 + k_y^2)}}$$

$$H_y = B_y \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \dots\dots\dots 4.37.b$$

$$B_y = \frac{-2jk_x}{\sqrt{\mu_0 a b L (k_x^2 + k_y^2)}}$$

**2-3-2-Problème d'oscillation forcée par un champ extérieur appliqué à travers une fente**  
 Ces oscillations sont induites par la présence de la fente.

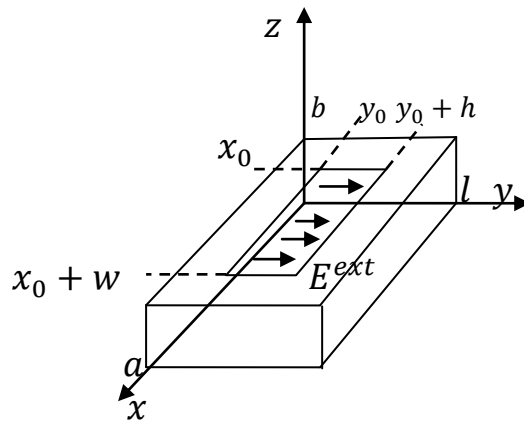


Figure .IV.2. Rayonnement de la fente à l'extérieur de la cavité  
 Celui-ci se fonde sur le système d'équations de Maxwell (dans le volume de la cavité)

:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \vec{\epsilon} \vec{E} \\ \text{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \end{cases} \dots\dots\dots 4.38$$

Sur toute la surface de la cavité moins celle de la fente  $S - \Sigma$  nous avons  $E_{\text{tang}} = 0$ .  
 D'autre part, sur la surface de la fente  $\Sigma$   $E_{\text{tang}}$  le champ électrique est égal à celui présent à l'extérieur de la cavité :

$$\Sigma E_{\text{tang}} = E_{\text{ext}} \text{ (Fig.8).}$$

$$(38) \Leftrightarrow \begin{cases} \int_V (\text{rot} \vec{H} - j\omega \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \vec{E}) E_k^* dv = 0 \\ \int_V (\text{rot} \vec{E} + j\omega \mu_0 \vec{H}) H_k^* dv = 0 \end{cases}$$

$E_k^*$  et  $H_k^*$  Sont des fonctions quelconques appartenant aux systèmes complets  $\{E_n\}$   
Or

$$\oint_V (E_k^* \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} E_k^*) dv = \int_V \text{div}(H \wedge E_k^*) dv \\ = \int_S (H \wedge E_k^*) ds = 0$$

Car  $E_k^* \text{ tang} = 0$  sur  $S$

$$\oint_V (H_k^* \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} H_k^*) dv = \int_V \text{div}(E \wedge H_k^*) dv \\ = \int_S (E \wedge H_k^*) ds = 0 \\ = \int_S (E \wedge H_k^*) ds + \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_k^*) ds \\ = \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_k^*) ds$$

Car  $E_{tang} = 0$  sur  $S$

$$(38) \Leftrightarrow \begin{cases} \int_V \vec{H} \text{rot} E_k^* dv - \int_V j\omega \varepsilon_0 \vec{\varepsilon} \vec{E} E_k^* dv = 0 \\ \int_V \vec{E} \text{rot} H_k^* dv - \int_V j\omega \mu_0 \vec{H} H_k^* dv + \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_k^*) ds = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 4.39$$

Le champ inconnu des oscillations forcées  $E$  et  $H$  sera représenté par :

$$E^N = \sum_{n=1}^N a_n E_n \quad \text{et} \quad H^N = \sum_{n=1}^N b_n H_n \quad \dots\dots\dots 4.40$$

Remplaçant (4.40) dans (4.39) on obtient

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \omega_k^* \mu_0 b_n \int_V H_n H_k^* dv - \omega \varepsilon_0 a_n \int_V \varepsilon E_n E_k^* dv = 0 \\ \sum_{n=1}^N \omega_k^* \varepsilon_0 a_n \int_V \varepsilon^* E_n E_k^* dv - \omega \varepsilon_0 b_n \int_V H_n H_k^* dv + j \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_k^*) ds = 0 \end{cases}$$

En utilisant la relation d'orthogonalité [11]

$$b_k \omega_k^* - \frac{\omega}{\omega_k} \omega_k^* a_k = 0 \Leftrightarrow \omega_k b_k - \omega a_k = 0$$

$$\omega_k a_k - \omega b_k = -j \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_k^*) ds$$

$$b_k = \frac{\omega}{\omega_k} a_k$$

$$a_k \left[ \omega_k - \frac{\omega^2}{\omega_k} \right] = -j \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_k^*) ds$$

$$b_k = -j \frac{\omega}{\omega_k^2 - \omega^2} \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_k^*) ds$$

$$\omega_k = \omega_{mnl} \left( 1 + \frac{j}{2Q_k} \right)$$

$$\frac{1}{Q_k} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{ck}} + \frac{1}{Q_r}$$

**Modes  $\mathbf{TM}_{110}$** 

$$\vec{E} = a_{110} \vec{E}_{110}$$

$$\vec{E}_{110} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_z \sqrt{\mu_0 abL}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \vec{z}$$

$$a_{110} = -\frac{j\omega_{110}(1+\frac{j}{2Q})}{\omega_{101}^2(1+\frac{j}{2Q})^2 - \omega^2} \int_{x_0}^{x_0+w} \int_{y_0}^{y_0+h} (E^{ext} \vec{y} \wedge \vec{H}_{110}^*) dx dz$$

$$\vec{H}_{110} = \frac{2jk_y}{\sqrt{\mu_0 abL \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \vec{x} +$$

$$+ \frac{2jk_x}{\sqrt{\mu_0 abL \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]}} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \vec{y}$$

$$H = b_{110} \vec{H}_{110}$$

$$b_{110} = \frac{-j\omega}{\omega_{110}^2(1+\frac{j}{2Q})^2 - \omega^2} \int_{\Sigma} (E^{ext} \wedge H_{110}^*) ds \vec{x} = \frac{\omega}{\omega_{110}(1+\frac{j}{2Q})} a_{110}$$

$$E^{ext} \vec{y} \wedge H_{110}^* = -E^{ext} H_{110}^* x \vec{z}$$

$$= \frac{2j\pi/a}{\sqrt{\mu_0 abL \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]}} E^{ext} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \vec{z}$$

$$E^{ext} = \frac{V_M}{h} \sin k_0 \left( \frac{w}{2} - \left| x - x_0 - \frac{w}{2} \right| \right)$$

$$\text{On pose } x' = x - x_0 - \frac{w}{2} \Leftrightarrow x = x' + x_0 + \frac{w}{2}$$

$$a_{110} = -\frac{j\omega_{110}(1+\frac{j}{2Q})}{\omega_{101}^2(1+\frac{j}{2Q})^2 - \omega^2} \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} \int_{y_0}^{y_0+h} \frac{j\pi V_M}{a h \sqrt{\mu_0 abL \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]}} \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{L}\left(x' + x_0 + \frac{w}{2}\right) - k_0\left(\frac{w}{2} - x'\right)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{L}\left(x' + x_0 + \frac{w}{2}\right) + k_0\left(\frac{w}{2} - x'\right)\right] \right\} dx dy$$

$$a_{110} = \frac{\omega_{110}(1+\frac{j}{2Q})}{\omega_{101}^2(1+\frac{j}{2Q})^2 - \omega^2} \frac{V_M}{h \sqrt{\mu_0 abL \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]}} \left\{ \sin\frac{\pi}{a}(y_0 + h) - \sin\frac{\pi}{a}y_0 \right\}$$

$$\int_{-\frac{w}{2}}^0 \left\{ \cos\left[x' \left(\frac{\pi}{L} - k_0\right) + \frac{\pi}{L}\left(x_0 + \frac{w}{2}\right) - k_0\frac{w}{2}\right] - \cos\left[x' \left(\frac{\pi}{L} + k_0\right) + \frac{\pi}{L}\left(x_0 + \frac{w}{2}\right) + k_0\frac{w}{2}\right] \right\} dx' +$$

$$\int_0^{+\frac{w}{2}} \left\{ \cos\left[x' \left(\frac{\pi}{L} + k_0\right) + \frac{\pi}{L}\left(x_0 + \frac{w}{2}\right) - k_0\frac{w}{2}\right] - \cos\left[x' \left(\frac{\pi}{L} - k_0\right) + \frac{\pi}{L}\left(x_0 + \frac{w}{2}\right) + k_0\frac{w}{2}\right] \right\} dx'$$

$$a_{110} = A \frac{B}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2}$$

$$\text{où } A = \frac{\omega_{110}(1+\frac{j}{2Q})}{\omega_{101}^2(1+\frac{j}{2Q})^2 - \omega^2} \frac{V_M}{h \sqrt{\mu_0 abL \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]}} \left\{ \sin\frac{\pi}{a}(y_0 + h) - \sin\frac{\pi}{a}y_0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
A' &= \sin \frac{\pi}{a} (y_0 + h) - \sin \frac{\pi}{a} y_0 \\
B &= \left\{ 2 k_0 \left[ \sin \left( \frac{\pi}{L} \left( x_0 + \frac{w}{2} \right) - k_0 \frac{w}{2} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{L} \left( x_0 + \frac{w}{2} \right) + k_0 \frac{w}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad - \left( \frac{\pi}{L} + k_0 \right) \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( x_0 + \frac{w}{2} \right) - k_0 \frac{w}{2} + \left( k_0 - \frac{\pi}{L} \right) \frac{w}{2} \right] \\
&\quad + \left( \frac{\pi}{L} - k_0 \right) \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( x_0 + \frac{w}{2} \right) + k_0 \frac{w}{2} - \left( \frac{\pi}{L} + k_0 \right) \frac{w}{2} \right] \\
&\quad + \left( \frac{\pi}{L} - k_0 \right) \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( x_0 + \frac{w}{2} \right) - k_0 \frac{w}{2} + \left( \frac{\pi}{L} + k_0 \right) \frac{w}{2} \right] \\
&\quad \left. - \left( \frac{\pi}{L} + k_0 \right) \sin \left[ \frac{\pi}{L} \left( x_0 + \frac{w}{2} \right) + k_0 \frac{w}{2} + \left( \frac{\pi}{L} - k_0 \right) \frac{w}{2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\vec{E} = a_{110} \vec{E}_{110}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= a_{110} \frac{2 \sqrt{\left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_z \sqrt{\mu_0 a b L}} \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{z} \\
&= \frac{2 \omega_{110} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)}{\left[ \omega_{101}^2 \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)^2 - \omega^2 \right] \omega \varepsilon_0 \varepsilon_z \mu_0 a b L \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]} \frac{V_M}{h} A' B \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{z}
\end{aligned}$$

$$E_M = \frac{2 \omega_{110} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)}{\left[ \omega_{101}^2 \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)^2 - \omega^2 \right] \omega \varepsilon_0 \varepsilon_z \mu_0 a b L \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]} \frac{V_M}{h} A' B$$

$$H = b_{110} H_{110} = \frac{\omega}{\omega_{110} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)} a_{110} H_{110}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\omega}{\omega_{101}^2 \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)^2 - \omega^2} \frac{V_M A' B}{h \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right] \sqrt{\mu_0 a b L \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]}} \times \\
&\quad \left[ \frac{2j\pi/a}{\sqrt{\mu_0 a b L \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]}} \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{x} + \right. \\
&\quad \left. \frac{-2j\pi/a}{\sqrt{\mu_0 a b L \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]}} \cos \left( \frac{\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{y} \right] \\
&= \frac{\omega}{\omega_{101}^2 \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)^2 - \omega^2} \frac{2jV_M A' B}{h \mu_0 a b L \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]} \times \\
&\quad \left\{ \frac{\pi}{a} \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{x} + \frac{\pi}{L} \cos \left( \frac{\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{y} \right\} \\
H &= jE_M \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_z}{\left[ \omega_{110} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right) \right] \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]} \left\{ \frac{\pi}{a} \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{L} \cos \left( \frac{\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} y \right) \vec{y} \right\}
\end{aligned}$$

$$H_M = jE_M \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_z}{\left[ \omega_{110} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right) \right] \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]}$$

**Mode TM**

$$\vec{E} = a_{mnl} \vec{E}_{mnl}$$

$$E_{mnl} = A_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \vec{x} + A_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \vec{y} + A_z \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \vec{z}$$

$$a_{mnl} = -j \frac{\omega'_{mnl}}{\omega'^2_{mnl} - \omega^2} \int_{x_0}^{x_0+w} \int_{y_0}^{y_0+h} (E^{ext} \vec{y} \wedge H^*_{mnl}) \Big|_{z=b} dx dy$$

$$H_{mnl} = B_x \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \vec{x} + B_y \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \vec{y}$$

$$E^{ext} \vec{y} \wedge H^*_{mnl} \Big|_{z=b} = -E^{ext} H^*_{mnl} \Big|_x \vec{z}$$

$$= \frac{2jk_y}{\sqrt{\mu_0 abL [k_x^2 + k_y^2]}} E^{ext} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \vec{z}$$

$$a_{mnl} = \frac{\omega'_{mnl}}{\omega'^2_{mnl} - \omega^2} \frac{V_{MA'B}}{h[k_x^2 - k_0^2] \sqrt{\mu_0 abL [k_x^2 + k_y^2]}}$$

$$H = b_{mnl} H_{mnl}$$

$$b_{mnl} = \frac{\omega}{\omega'_{mnl}} a_{mnl}$$

**3- Susceptance d'entrée de la cavité**

La susceptance d'entrée de la cavité  $B_{cav}$  est donnée [12] comme fonction de la puissance et du module de la tension :

$$B_{cav} = -4\omega \frac{W_m - W_e}{VV^*}$$

$$VV^* = V_M^2$$

$$Y_{cav} = G_{cav} + jB_{cav} = \frac{p_L - 2j\omega(w_m - w_e)}{\frac{1}{2}V_M^2}$$

$$w_e = \frac{1}{4} \int_v ED^* dv = \frac{\epsilon_0}{4} \int_v (\epsilon_x^* E_x^2 + \epsilon_y^* E_y^2 + \epsilon_z^* E_z^2) dv$$

**Mode TM**

$$E_z = E_M \sin k_x x \sin k_y y$$

$$w_e = \frac{1}{16} \epsilon_0 \epsilon_z^* abL |E_M|^2$$

$$w_m = \frac{\mu_0}{4} \int_v HH^* dv$$

$$= \frac{\mu_0 abL |E_M|^2}{16} \left| \frac{\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_z}{[\omega_{110} (1 + \frac{j}{2Q})] \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]} \right|^2 \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]$$

$$= \mu_0 \frac{abL |E_M|^2}{16} \frac{\omega^4 \epsilon_0^2 |\epsilon_z|^2}{\left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right] \left[ \omega_{110} (1 + \frac{j}{2Q}) \right]^2}$$

$$B_{cav} = -\frac{\omega abL |E_M|^2}{4V_M^2} \epsilon_0 \epsilon_z^* \left[ \frac{\mu_0 \omega^4 \epsilon_0 \epsilon_z}{\left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right] \left[ \omega_{110} (1 + \frac{j}{2Q}) \right]^2} - 1 \right]$$

$$\omega_{110} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$B_{cav} = -\frac{\omega abL|E_M|^2}{4V_M^2} \varepsilon_0 \varepsilon_z^* \left[ \frac{\omega^4}{\omega_{110}^4 |1 + \frac{j}{2Q}|^2} - 1 \right]$$

$$\varepsilon_z^* = \varepsilon_z' + j\varepsilon_z''$$

$p_L$  : représente les pertes conducteur

$$p_L = \frac{1}{2} \int_v \sigma E E^* dv$$

$$p_L = \frac{R_m}{2} \int_{mnrs} \mathcal{J}_s \mathcal{J}_s^* ds \quad \vec{\mathcal{J}}_s = \vec{n} \wedge \vec{H} = \frac{E}{\sigma}$$

$\vec{n}$  : Normale à la surface et dirigée dans la cavité.

$$R_m = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_{110}}{2\sigma}} : \text{Résistance de surface.}$$

$\sigma$  : Conductivité du métal.

$$p_L = \frac{R_m}{2} \left[ 2 \int_0^a \int_0^b (\vec{x} \wedge \vec{H})^2 \Big|_{x=0} dy dz + \right. \\ \left. + 2 \int_0^b \int_0^L (\vec{y} \wedge \vec{H})^2 \Big|_{y=0} dz dx + 2 \int_0^a \int_0^L (\vec{z} \wedge \vec{H})^2 \Big|_{z=0} dx dy \right]$$

$$p_L = R_m \left\{ b \int_0^a (H_n)^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} y dy + \right. \\ \left. b \int_0^L (H_n)^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{L} x dx + \int_0^a \int_0^L (H_n)^2 \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{L} x \right. \right. \\ \left. \left. \cos^2 \frac{\pi}{a} y + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{L} x \sin^2 \frac{\pi}{a} y \right] dx dy \right\}$$

$$p_L = R_m (H_n)^2 \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{ab}{2} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{bL}{2} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{aL}{4} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{aL}{4} \right]$$

$$G_{cav} = \frac{p_L}{\frac{1}{2} V_M^2}$$

$$G_{cav} = 2R_m \left| \frac{2j\omega A'B}{\omega_{110}^2 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right)^2 - \omega^2 \mu_0 abLh \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right] \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2 \right]} \right|^2 \times \\ \left\{ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{ab}{2} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{bL}{2} + \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right] \frac{aL}{4} \right\} + \text{Im}g\{B\}$$

**L'admittance de la cavité**

$$Y_{cav} = G_{cav} + jB_{cav} = \frac{p_L - 2j\omega(w_m - w_e)}{\frac{1}{2} V_M^2}$$

$$w_e = \frac{1}{4} \int_v E D^* dv = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_v (\varepsilon_x^* E_x^2 + \varepsilon_y^* E_y^2 + \varepsilon_z^* E_z^2) dv \\ = |a_{mnl}|^2 \frac{\varepsilon_0 abL}{16 \cdot 2^p} (\varepsilon_x^* |A_x|^2 + \varepsilon_y^* |A_y|^2 + \varepsilon_z^* |A_z|^2) \\ \begin{cases} p = 0 \text{ si } l = 0 \\ p = 1 \text{ si } l \neq 0 \end{cases}$$

$$w_m = \frac{\mu_0}{4} \int_v H H^* dv = \mu_0 \left| \frac{\omega}{\omega_{mnl}^2} \right|^2 |a_{mnl}|^2 \frac{|B_x|^2 + |B_y|^2}{16 \cdot 2^p} abL$$

$$\begin{aligned}
W_m &= \mu_0 \left| \frac{\omega}{\omega'_{mnl}} \right|^2 |a_{mnl}|^2 \frac{abL}{16.2^p} \left[ \frac{4k_x^2 + 4k_y^2}{(k_x^2 + k_y^2)\mu_0 abL} \right] \\
W_e &= |a_{mnl}|^2 \frac{\varepsilon_0 abL}{16.2^p} \left\{ \frac{4k_x^2 k_z^2 \varepsilon_x^* + 4k_y^2 k_z^2 \varepsilon_y^*}{(k_x^2 + k_y^2)\varepsilon_0^2 |\varepsilon_x|^2 \omega^2 \mu_0 abL} + \varepsilon_z^* \frac{(k_x^2 + k_y^2)^4}{\varepsilon_0^2 |\varepsilon_z|^2 \omega^2 \mu_0 abL} \right\} \\
&= \frac{|a_{mnl}|^2}{\omega^2 \mu_0 16.2^p} \left[ \frac{4k_z^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_x} + \frac{4(k_x^2 + k_y^2)}{\varepsilon_0 \varepsilon_z} \right] \\
W_m - W_e &= \frac{|a_{mnl}|^2}{4.2^p} \left| \frac{\omega}{\omega'_{mnl}} \right|^2 \left[ 1 - \left( \frac{k_z^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_x} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_z} \right) \frac{|\omega'_{mnl}|^2}{\omega^4 \mu_0} \right] \\
W_m - W_e &= \frac{|a_{mnl}|^2}{4.2^p} \left[ \left| \frac{\omega}{\omega'_{mnl}} \right|^2 - \left| \frac{1}{\omega} \right|^2 \left( \frac{k_z^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_x \mu_0} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_z \mu_0} \right) \right] \\
W_m - W_e &= \frac{|\omega'_{mnl}|^2}{|\omega'_{mnl} - \omega|^2} \left( \frac{V_M}{h} \right)^2 \frac{(A'B)^2}{\mu_0 abL (k_x^2 + k_y^2) (k_x^2 - k_0^2)^2} \left| \frac{\omega}{\omega'_{mnl}} \right|^2 \\
&\quad \left\{ 1 - \frac{|\omega'_{mnl}|^2}{\omega^4 \varepsilon_0 \mu_0} \left( \frac{k_z^2}{\varepsilon_x} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_z} \right) \right\} \frac{1}{4.2^p} \\
B_{cav} &= -2 \frac{\omega (W_m - W_e)}{\frac{V_M^2}{2}} \\
B_{cav} &= - \sum \frac{\omega^3}{2^p |\omega'_{mnl} - \omega|^2} \frac{(A'B)^2}{\mu_0 abL h (k_x^2 + k_y^2) (k_x^2 - k_0^2)^2} \times \\
&\quad \left\{ 1 - \frac{|\omega'_{mnl}|^2}{\omega^4 \varepsilon_0 \mu_0} \left( \frac{k_z^2}{\varepsilon_x} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_z} \right) \right\} \dots\dots\dots 4.41
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_L &= \frac{R_m}{2} \int \mathcal{J}_s \mathcal{J}_s^* ds \quad \vec{\mathcal{J}}_s = \vec{n} \wedge \vec{H} \quad R_m = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_{mnl}}{2\sigma}} \\
p_L &= b_{mnl}^2 \frac{R_m}{2} \left[ 2 \int_0^a \int_0^b (\vec{x} \wedge \vec{H})^2 \Big|_{x=0} dy dz + \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^b \int_0^L (\vec{y} \wedge \vec{H})^2 \Big|_{y=0} dx dz + 2 \int_0^a \int_0^L (\vec{z} \wedge \vec{H})^2 \Big|_{z=0} dx dy \right] \\
p_L &= R_m \left[ \frac{ab}{4} B_y^2 + \frac{bL}{4} B_x^2 + \frac{aL}{4} (B_x^2 + B_y^2) \right] \\
p_L &= R_m \left[ \frac{abk_x^2 + bLk_y^2 + aL(k_x^2 + k_y^2)}{(k_x^2 + k_y^2)\mu_0 abL} \right] b_{mnl}^2 \\
G_{cav} &= \frac{p_L}{\frac{1}{2} V_M^2} \\
G_{cav} &= \sum \frac{2\omega^2 R_m (A'B)^2}{(\omega'_{mnl} - \omega^2)\mu_0 abL h (k_x^2 + k_y^2) (k_x^2 - k_0^2)} \left[ \frac{abk_x^2 + bLk_y^2 + aL(k_x^2 + k_y^2)}{(k_x^2 + k_y^2)\mu_0 abL} \right] \dots\dots 4.42
\end{aligned}$$

**Mode TE**

$$H = \sum b_{mnl} H_{mnl}$$

$$H_{mnl} = 2 \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{\mu_0 \varepsilon_x k_0^2 abL}} \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \vec{z}$$

$$- 2 \frac{k_y k_z}{k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \vec{y}$$

$$- 2 \frac{k_x k_z}{k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \vec{x}$$

$$\text{où } k_x = \frac{m\pi}{L}, \quad k_y = \frac{n\pi}{a}, \quad k_z = \frac{l\pi}{b}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$l = 1, 2, \dots$$

$$b_{mnl} = \frac{\omega}{\omega'_{mnl}} a_{mnl}$$

$$a_{mnl} = -j \frac{\omega'_{mnl}}{\omega'^2_{mnl} - \omega^2} \int_{x_0}^{x_0+w} \int_{y_0}^{y_0+h} (E^{ext} \vec{y} \wedge H^*_{mnl}) \vec{z} dx dy$$

$$E_{mnl} = 2j\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_x abL}} \frac{k_y}{k_0 \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \vec{x} +$$

$$\frac{-2j\omega k_x \sqrt{\mu_0}}{k_0 \sqrt{\varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \vec{y}$$

$$E^{ext} \vec{y} \wedge H^*_{mnl} = 2E^{ext} \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{\mu_0 \varepsilon_x k_0^2 abL}} \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \vec{x} +$$

$$2E^{ext} \frac{k_x k_z}{k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \vec{z}$$

$$(E^{ext} \vec{y} \wedge H^*_{mnl}) \vec{z} = \frac{2E^{ext} k_x k_z}{k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \Big|_{z=b}$$

$$E^{ext} = \frac{V_M}{h} \sin k_0 \left( \frac{w}{2} - \left| x - x_0 - \frac{w}{2} \right| \right)$$

$$\text{Avec } x' = x - x_0 - \frac{w}{2} \Rightarrow x = x' + x_0 + \frac{w}{2}$$

$$a_{mnl} = -j \frac{\omega'_{mnl}}{\omega'^2_{mnl} - \omega^2} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{y_0}^{y_0+h} \frac{2(-1)^l k_x k_z}{k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)}} \frac{V_M}{\pi} \cos k_y y \times$$

$$\left\{ \cos \left[ k_x \left( x' + x_0 + \frac{w}{2} \right) - k_0 \left( \frac{w}{2} - |x'| \right) \right] + \right.$$

$$\left. - \cos \left\{ \cos \left[ k_x \left( x' + x_0 + \frac{w}{2} \right) - k_0 \left( \frac{w}{2} - |x'| \right) \right] \right\} dx dy \right.$$

$$= j \frac{-2(-1)^l \omega_{mnl} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right) A' B k_z}{\left[ \omega'^2_{mnl} \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right)^2 - \omega^2 \right] k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_x abL (k_x^2 + k_y^2)} \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]} \frac{V_M}{h}$$

$$\vec{E} = \sum a_{mnl} \vec{E}_{mnl}$$

$$\vec{E} = \sum (-1)^l \frac{4\omega\omega_{mnl}k_z A'B}{(\omega'_{mnl}-\omega^2)abL\varepsilon_x k_0^2(k_x^2+k_y^2)} \frac{V_M}{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2\right]} \times$$

$$\{k_y \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \vec{x} - k_x \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \vec{z}\}$$

$$\vec{H} = \sum a_{mnl} \vec{H}_{mnl}$$

$$= -2(-1)^l j \frac{\omega}{(\omega'_{mnl}-\omega^2)} \frac{V_M}{h\sqrt{\mu_0\varepsilon_x}abL} \frac{k_z}{k_0\sqrt{k_x^2+k_y^2}} \frac{A'B}{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2\right]} \times$$

$$\frac{2}{k_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_x}abL(k_x^2+k_y^2)} \begin{cases} (k_x^2+k_y^2)\cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \vec{z} \\ -k_y k_z \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \vec{y} \\ -k_x k_z \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \vec{x} \end{cases}$$

L'admittance de la cavité

$$Y_{cav} = G_{cav} + jB_{cav} = \frac{pL-2j\omega(w_m-w_e)}{\frac{1}{2}V_M^2}$$

**Mode TE**

$$w_e = \frac{1}{4} \int_v ED^* dv = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_v (\varepsilon_x^* E_x^2 + \varepsilon_y^* E_y^2 + \varepsilon_z^* E_z^2) dv, \quad E_y = 0$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{16\omega^2 |\omega'_{mnl}|^2}{|\omega'_{mnl}-\omega^2|^2} \frac{V_M^2 k_z^2 (A'B)^2}{(abL)^2 \varepsilon_x^2 k_0^4 (k_x^2+k_y^2)^2 h^2 \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2\right]^2} \times$$

$$\int_v [\varepsilon_x^* k_y^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y \sin^2 k_z z + \varepsilon_y^* k_x^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \sin^2 k_z z] dx dy dz$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{16\omega^2 |\omega'_{mnl}|^2}{|\omega'_{mnl}-\omega^2|^2} \frac{V_M^2 k_z^2 (A'B)^2}{(abL)^2 \varepsilon_x^2 k_0^4 (k_x^2+k_y^2)^2 h^2 \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2\right]^2} \times \frac{\varepsilon_x^* k_y^2 + \varepsilon_y^* k_x^2}{2^p}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} p = 3 \text{ pour } n \neq 1 \text{ et } m \neq 1 \\ p = 2 \text{ pour } n \neq 0 \text{ ou } m \neq 0 \end{cases}$$

$$w_m = \frac{\mu_0}{4} \int_v HH^* dv$$

$$= \frac{\mu_0}{4} \frac{16\omega^2}{|\omega'_{mnl}-\omega^2|^2} \frac{V_M^2 k_z^2 (A'B)^2}{(abL)^2 \varepsilon_x^2 \mu_0^2 k_0^4 (k_x^2+k_y^2)^2 h^2 \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2\right]^2} \times$$

$$\left[ \frac{(k_x^2+k_y^2)^2 + k_y^2 k_z^2 + k_x^2 k_z^2}{2^p} \right]$$

$$\left[ \frac{(k_x^2+k_y^2)^2 + k_y^2 k_z^2 + k_x^2 k_z^2}{2^p} \right] = \frac{(k_x^2+k_y^2)(k_x^2+k_y^2+k_z^2)}{2^p} = \frac{(k_x^2+k_y^2)k_0^2 \varepsilon_x}{2^p}$$

Donc

$$w_m = \frac{4\omega^2}{(\omega'_{mnl}-\omega^2)^2} \frac{V_M^2 k_z^2 (A'B)^2}{h^2 k_0^2 (k_x^2+k_y^2) \varepsilon_x \mu_0 (abL)^2 \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - k_0^2\right]^2 2^p}$$

$$B_{cav} = -4\omega \frac{w_m - w_e}{V_M^2}$$

$$B_{cav} = \frac{-16\omega^3}{|\omega_{mnl}'^2 - \omega^2|^2} \frac{k_z^2 (A'B)^2}{(abL)^2 \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]^2 h^2 \varepsilon_x k_0^2 (k_x^2 + k_y^2) \mu_0 2^p} \dots\dots\dots 4.43$$

$$p_L = \frac{R_m}{2} \left[ 2 \int_0^a \int_0^b |\vec{x} \wedge \vec{H}|^2_{x=0} dydz + 2 \int_0^b \int_0^L |\vec{y} \wedge \vec{H}|^2_{y=0} dzdx \right. \\ \left. + 2 \int_0^a \int_0^L |\vec{z} \wedge \vec{H}|^2_{z=0} dxdy \right]$$

$$|\vec{x} \wedge \vec{H}|^2 = |-H_z \vec{y} + H_y \vec{z}|^2 = H_z^2 + H_y^2$$

$$|\vec{y} \wedge \vec{H}|^2 = |+H_z \vec{x} - H_x \vec{z}|^2 = H_z^2 + H_x^2$$

$$|\vec{z} \wedge \vec{H}|^2 = |-H_y \vec{x} + H_x \vec{y}|^2 = H_y^2 + H_x^2$$

$$G_{cav} = \frac{p_L}{\frac{1}{2} V \dot{M}}$$

$$G_{cav} = 2 \sum R_m \left| \frac{4\omega}{(\omega_{mnl}'^2 - \omega^2)} \frac{k_z A'B}{hk_0^2 (k_x^2 + k_y^2) \mu_0 \varepsilon_x abL \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]} \right|^2 \times$$

$$\left[ \int_0^a \int_0^b (k_x^2 + k_y^2)^2 \cos^2 k_y y \sin^2 k_z z dydz + \right. \\ \left. + \int_0^a \int_0^b k_y^2 k_z^2 \sin^2 k_y y \cos^2 k_z z dydz + \right. \\ \left. + \int_0^b \int_0^L (k_x^2 + k_y^2)^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_z z dx dz + \right. \\ \left. + \int_0^b \int_0^L k_x^2 k_z^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_z z dx dz + \right. \\ \left. + \int_0^a \int_0^L k_y^2 k_z^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y dx dy + \right. \\ \left. + \int_0^a \int_0^L k_x^2 k_z^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y dx dy \right]$$

$$G_{cav} = \sum 2R_m \left| \frac{4\omega}{|\omega_{mnl}'^2 - \omega^2|} \frac{k_z A'B}{hk_0^2 (k_x^2 + k_y^2) \mu_0 \varepsilon_x abL \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]} \right|^2 \times$$

$$\left\{ \frac{ab}{4} (k_x^2 + k_y^2)^2 + \frac{ab}{4} k_y^2 k_z^2 + \frac{bL}{4} (k_x^2 + k_y^2)^2 + \frac{bL}{4} k_x^2 k_z^2 + \frac{aL}{4} (k_y^2 k_z^2 + k_x^2 k_z^2) \right\}$$

$$G_{cav} = \sum 2R_m \left| \frac{4\omega}{|\omega_{mnl}'^2 - \omega^2|} \frac{k_z A'B}{hk_0^2 (k_x^2 + k_y^2) \mu_0 \varepsilon_x abL \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]} \right|^2 \times$$

$$\left\{ \frac{ab}{4} \left[ (k_x^2 + k_y^2)^2 + k_y^2 k_z^2 \right] + \frac{bL}{4} \left[ (k_x^2 + k_y^2)^2 + k_x^2 k_z^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{aL}{4} (k_x^2 + k_y^2) k_z^2 \right\}$$

#### 4- Coefficient de réflexion à l'entrée

Nous pouvons maintenant procéder au calcul du coefficient de réflexion à l'entrée du dispositif.

L'impédance ramenée à l'entrée vaut  $Z = R + jX$ , avec L la distance de l'entrée à la fente (voir chapitre III page 58 et 59)

Le module du coefficient de réflexion est donné par :

$$\Gamma = \frac{\sqrt{(R-50)^2 + X^2}}{\sqrt{(R+50)^2 + X^2}}$$

$$\Gamma(\text{dB}) = 20 \text{Log} \frac{\sqrt{(R-50)^2 + X^2}}{\sqrt{(R+50)^2 + X^2}}$$

### 5- Résultats de mesure

Les graphes ci-dessous, représentent les variations de coefficient de réflexion en fonction de la fréquence pour différents matériaux.

Ces graphes sont réalisés par logiciel Matlab 6.1

Les pics représentent les fréquences de résonances de la cavité.

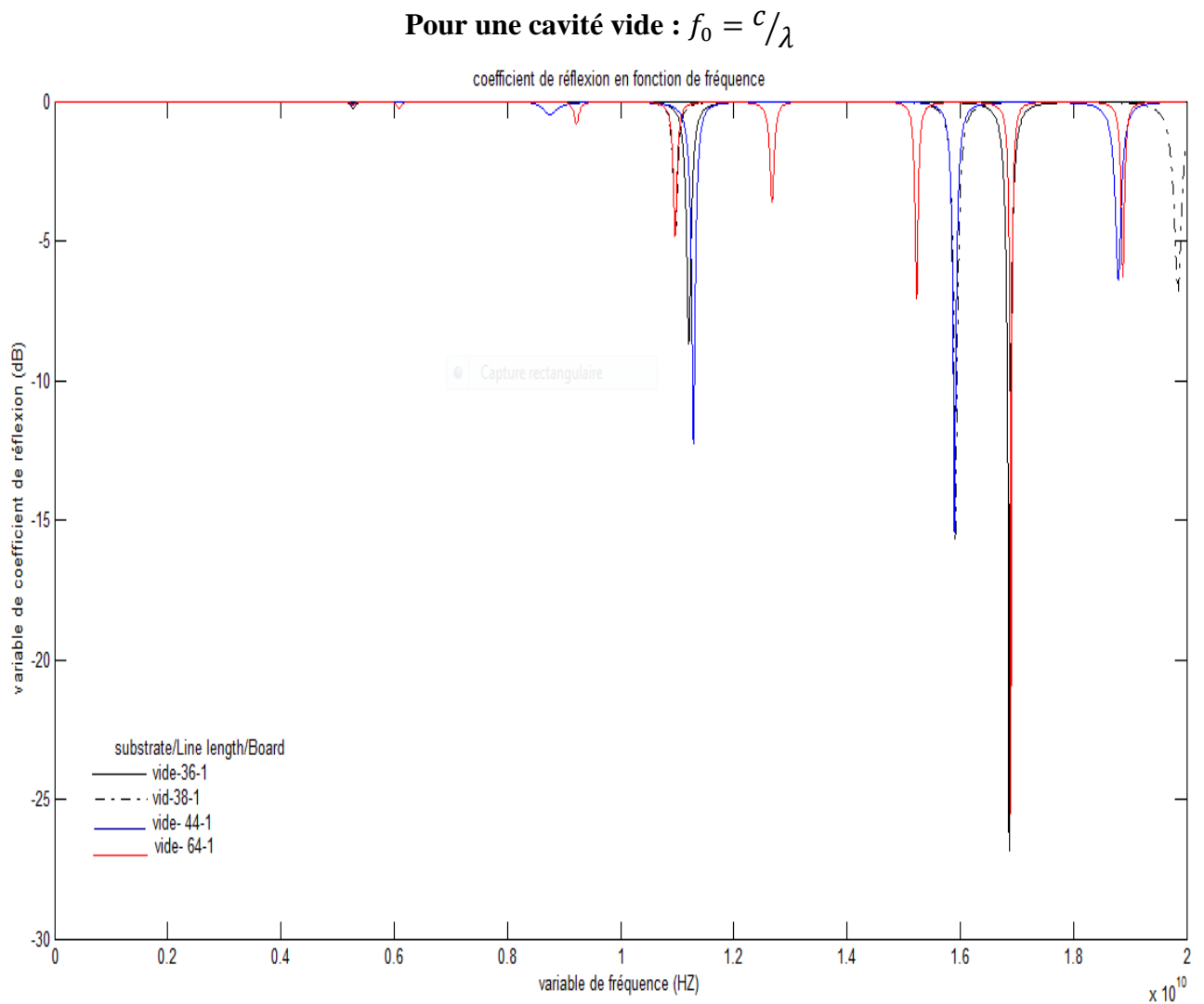


Fig. IV.3. coefficients de réflexions mesurés (cavité vide).

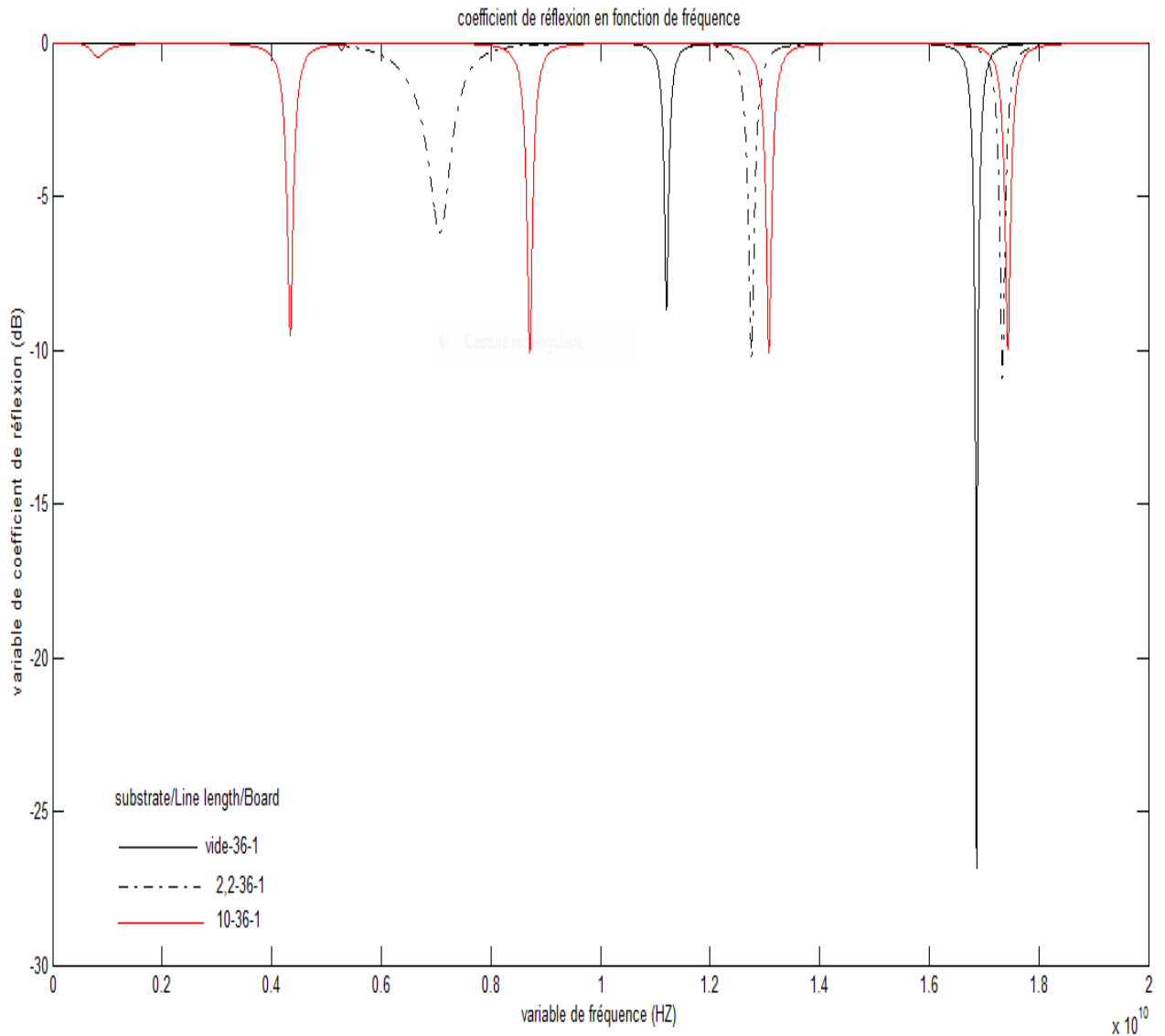


Fig. IV.4. coefficients de réflexions mesurés.

## 6- Influence des pertes sur les résultats

### Puissance moyenne perdue dans la cavité

Les pertes de la structure sont :

$P_d$  : Pertes dans le diélectriques à caractérisé.

$P_c$  : Pertes dans les parois de la cavité.

$P_r$  : Pertes par rayonnement.

Le coefficient de qualité correspond est donc [6] :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_r} \quad (\text{voir chapitre III}).$$

### Pertes diélectriques

On parle alors de pertes diélectriques. Alors la permittivité complexe est:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon' - j\varepsilon'')$$

$$Q_d = \omega \frac{W}{P_d} = \frac{\omega \oint_V \varepsilon_0 \varepsilon' \frac{EE^*}{2} dV}{\omega \oint_V \varepsilon_0 \varepsilon'' \frac{EE^*}{2} dV} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\tan \delta}$$

Où :  $\delta$  est l'angle de perte de diélectrique.

Application numérique :

$$Q_d = 10^4 \quad [6]$$

### Pertes dans le conducteur

$$Q_c = \omega \frac{W}{P_c} = \frac{\omega \oint_V \mu_0 \frac{HH^*}{2} dV^*}{\frac{R_m}{2} \oint_V H_{tan} H_{tan}^* ds}$$

Avec  $R_m = \frac{1}{\sigma \delta}$  résistance de surface de métal.

On peut écrire  $Q_c$  sous la forme [14]:

$$Q_c = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0^2 a^3 b L^3 m^2 \omega_{mnl}^3}{2m^2 \pi^2 (m^2 a L^3 + p^2 L a^3 + 2m^2 B L^3 + 2p^2 b a^3) R_m}$$

### Calcul de $Q_r$

$$\text{On a } Q_r = \frac{2\omega_{mnl} W_e}{P}$$

$$Q_r = \frac{\frac{2}{16} \varepsilon_0 \varepsilon_z^* a b L |E_M|^2}{\frac{1}{2} V_M^2 G_F \sin^2 k_0 \frac{W_f}{2}}$$

$$Q_{110} = \frac{Q_{110}^2 A^2 B^2}{\omega_{110}'^2 G_F \mu_0 h^2 a b L k^2 \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]^2 \sin^2 k_0 \frac{W_f}{2}}$$

$$Q_{110} = \frac{\omega_{110}' G_F \mu_0 h^2 a b L k^2 \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - k_0^2 \right]^2 \sin^2 k_0 \frac{W_f}{2}}{(AB)^2}$$

Avec  $k_0 = \omega_{110} \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_{eff}}$  nombre d'onde de la ligne à fente (slot line).

$$k^2 = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2$$

$G_F$  Les pertes par rayonnement de la fente (voir chapitre III).

## 7- Comparaison entre fréquences de résonances calculées et celle mesurée

IV-2-Tableau de comparaison

	Le vide ( $\epsilon_r = 1$ )	$\epsilon_z = 10$	$\epsilon_o = 2,15$ $\epsilon_e = 2,22$
<b>1<sup>er</sup> fréquence de résonance calculée. (GH)</b>	<b>11,66</b>	<b>3,69</b>	<b>7,86</b>
<b>1<sup>er</sup> fréquence de résonance mesurée. (GH)</b>	<b>11,33</b>	<b>4,33</b>	<b>7,08</b>
<b>Facteur de qualité (Q) Mesurée pour le 1<sup>er</sup> pic</b>	<b>165,82</b>	<b>50,18</b>	<b>14,053</b>
<b>2<sup>em</sup> fréquence de résonance calculée. (GH)</b>			<b>12,98</b>
<b>2<sup>em</sup> fréquence de résonance mesurée. (GH)</b>	<b>16,86</b>	<b>8,71</b>	<b>12,75</b>
<b>Facteur de qualité (Q) Mesurée pour le 2<sup>em</sup> pic</b>	<b>2036,67</b>	<b>113,45</b>	<b>159,01</b>
$Q_d$		$Q_{d1} = 71,95$ $Q_{d2} = 120,14$	$Q_{d1} = 15,35$ $Q_{d2} = 172,47$

- Pour une cavité vide :

$$\frac{1}{Q_{vide}} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_r}$$

- Pour une cavité remplie du diélectrique

$$\frac{1}{Q_{remplie}} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_r}$$

Alors 
$$\frac{1}{Q_d} = \frac{1}{Q_{remplie}} - \frac{1}{Q_{vide}}$$

### Remarques

- Plus la cavité vide plus les pertes augment, plus la cavité remplie plus les pertes diminuent.
- La fréquence de chaque résonance est donnée par les dimensions de la structure, et surtout est généralement directement proportionnelle à la permittivité du matériau à caractérisé.
- Plus la permittivité augmente plus la fréquence de résonance diminue.
- La largeur de ces pics dépend des pertes de la structure.

## **CONCLUSION GENERALE**

L'objectif de ce travail était de pouvoir caractériser électriquement des matériaux nouveaux pour des applications en électro-optique (modulation électro-optique) et ainsi pouvoir remplacer le niobate de lithium qui coute très cher. Le choix est porté sur les matériaux organiques polymères, bon marché, dont les épaisseurs sont très faibles. Une méthode exploitant les fréquences de résonances d'une cavité remplie du matériau à caractériser a été mise en place.

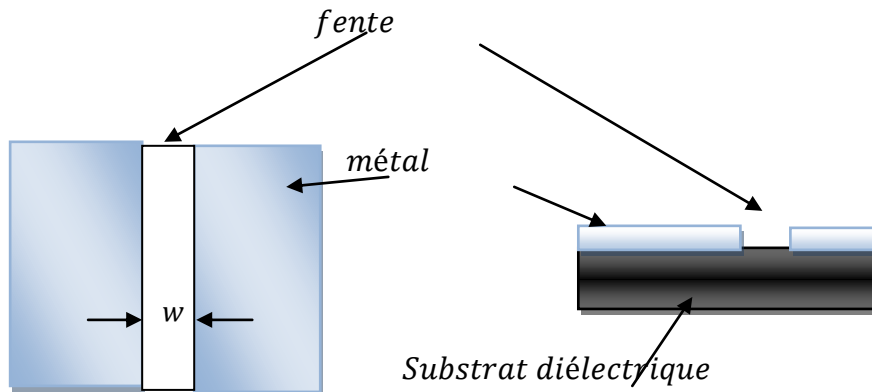
Un modèle du dispositif complet renfermant la cavité résonante, la fente à travers laquelle elle est excitée et la ligne de transmission alimentant l'ensemble a été élaboré. La simulation du coefficient de réflexion à l'entrée de la ligne permet remonter au tenseur de permittivité en notant les pics de résonance.

Le modèle est validé par la simulation et des mesures sur des matériaux dont le tenseur de permittivité est connu.

Dans l'ensemble, les résultats de simulation sont en bon accord avec ceux issus de la pratique. Des limites apparaissent lorsque les dimensions de la cavité sont très faibles car l'erreur devient de l'ordre de grandeur de l'imprécision de fabrication.

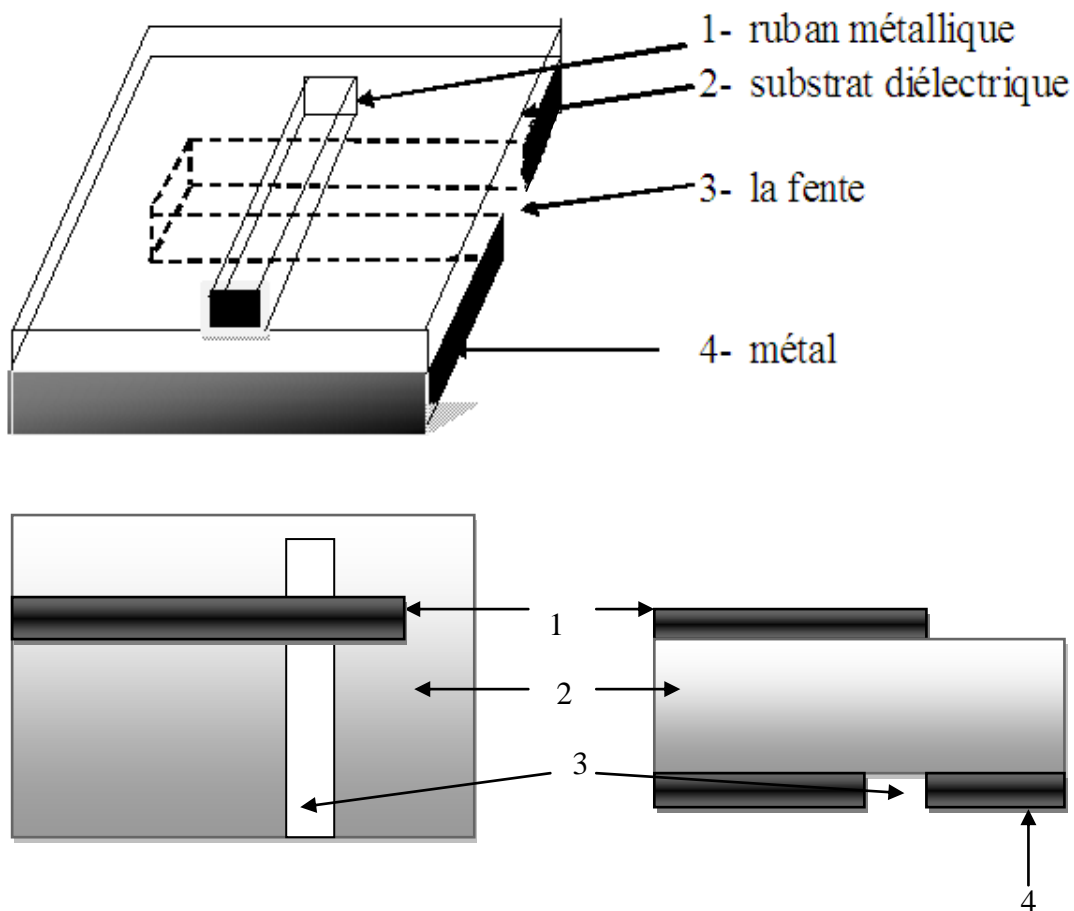
### La ligne à fente (slot line)

La ligne à fente (introduite en 1969), est un élément de transmission des micro-ondes. Elle est utilisée surtout pour les circuits intégrés micro-ondes, et elle se prête bien à la mise en court circuit. Pour que la ligne à fente ait peu de pertes par rayonnement (voir la figure.III.3).



**Fig.III.12.** la ligne à fente

La ligne à fente peut être utilisée seule, comme on peut l'utilisée en combinaison avec la ligne micro ruban sur le coté opposé du substrat comme le montre la figure suivante []



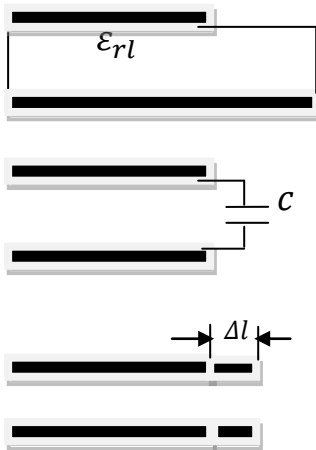
**Fig.III.13.** Couplage d'une ligne à fente et une ligne microbande [15]

### Effet capacitif à l'extrémité ouverte d'un micro ruban

L'effet de bout se traduit par l'existence d'une capacité  $C$  à l'extrémité du microruban. Cet effet capacitif peut se mettre sous forme d'une longueur de ligne excédentaire  $\Delta l = \frac{C}{C_1}$

Où :  $C_1$  est la capacité linéique de la ligne. La suivante formule est due à Hammerstad et Bekkadal [2] :

$$\Delta l = 0,412t \frac{(\epsilon_{eff} + 0,3) \left(\frac{W}{t} + 0,264\right)}{(\epsilon_{eff} - 0,258) \left(\frac{W}{t} + 0,8\right)} \quad 3.3$$



*Figure.III.5. Effet capacitif à l'extrémité ouverte d'un micro ruban*

Les micro-ondes sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence est comprise entre 0.3GHZ et 300GHZ.

La fréquence  $f$  d'une onde est reliée à sa longueur d'onde  $\lambda_0 = \frac{c}{f}$  où  $c = 3.10^8 m/s$ .

### A-1- Classification des rayonnements électromagnétiques en fonction de la fréquence et de la longueur d'onde [8]

Fréquence (HZ)	Longueur d'ondes (m)	Spectre
$3.10^4$ à $3.10^{11}$	$10^4$ à $10^{-3}$	Ondes Hertziennes
$3.10^{11}$ à $3.10^{14}$	$10^{-3}$ à $10^{-6}$	Infrarouge
$3,75.10^{14}$ à $7,50.10^{14}$	$8.10^{-7}$ à $4.10^{-7}$	Visible
$7,50.10^{14}$ à $3.10^{16}$	$4.10^{-7}$ à $10^{-8}$	Ultraviolet
$3.10^{16}$ à $3.10^{19}$	$10^{-8}$ à $10^{-11}$	Rayons X
$3.10^{19}$ à $3.10^{21}$	$10^{-11}$ à $10^{-13}$	Rayons $\gamma$
$3.10^{20}$ à $3.10^{25}$	$10^{-13}$ à $10^{-17}$	Rayons cosmiques

### A-2- Classification des micro-ondes de 0.3GH à 300GH

Fréquence	Longueur d'ondes	Dénominations	Exemple d'application
0,3-3GH	1m-10cm	Ondes décimétriques UHF (ultra high frequencies)	Radar, TV, GPS, GSM
3-30GH	10cm-1cm	Ondes centimétriques SHF (super high frequencies)	Radar, communication, satellites
30-300GH	1cm-1mm	Ondes millimétriques EHF (extremely high frequencies)	Radar

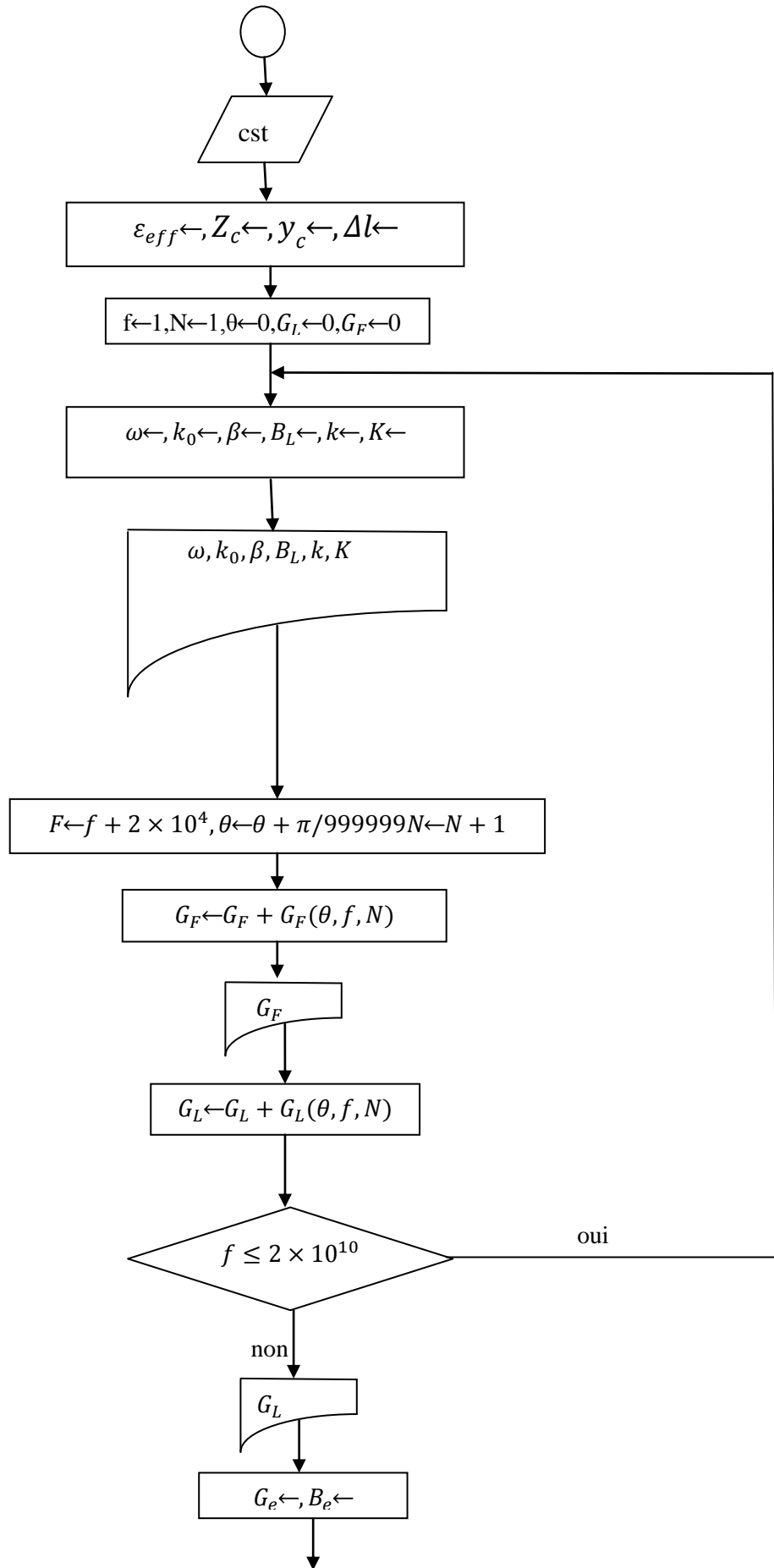
### Applications des micro-ondes

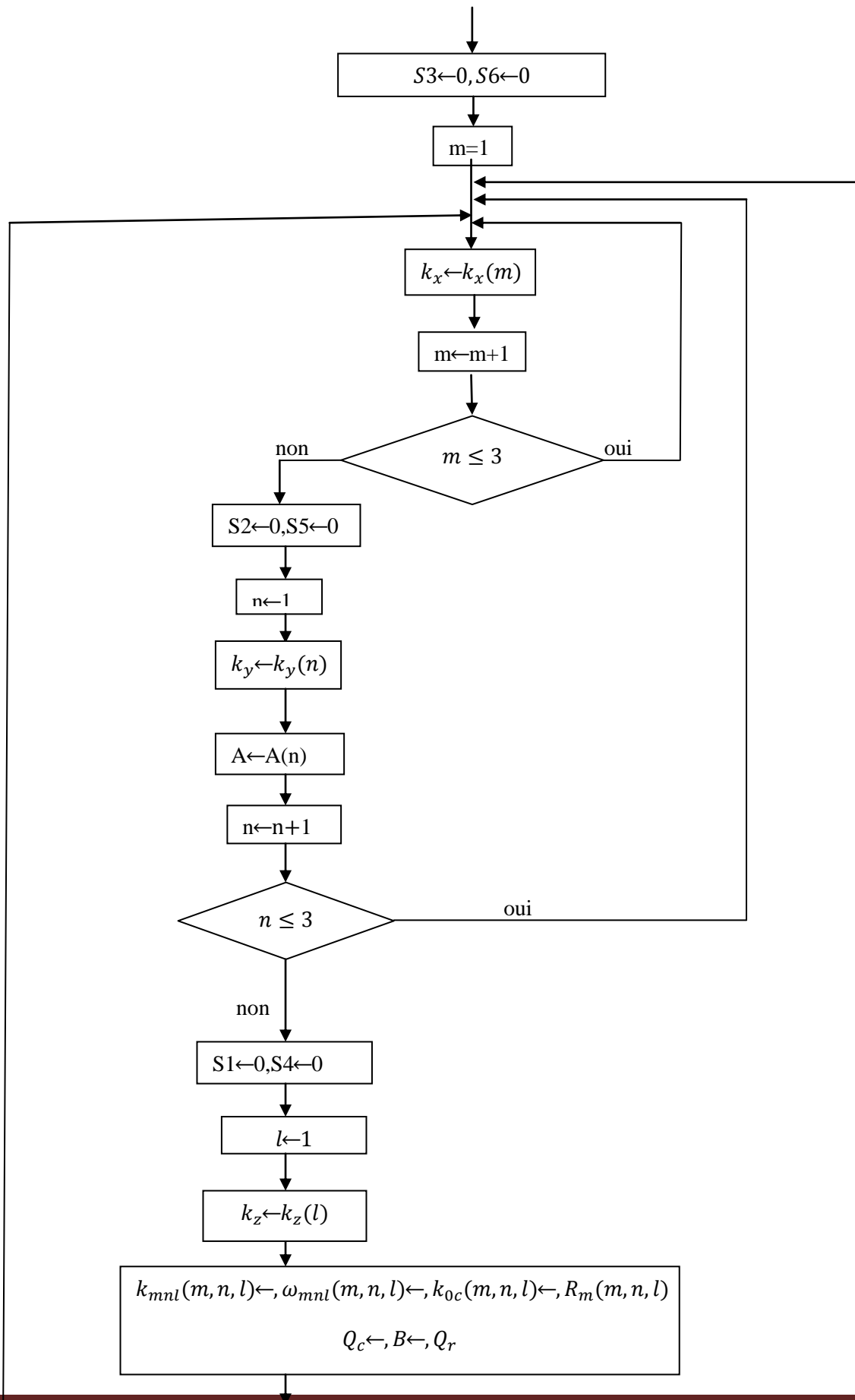
Les micro-ondes se sont beaucoup développées depuis les années 1940 et elles ont actuellement des applications nombreuses et très importantes :

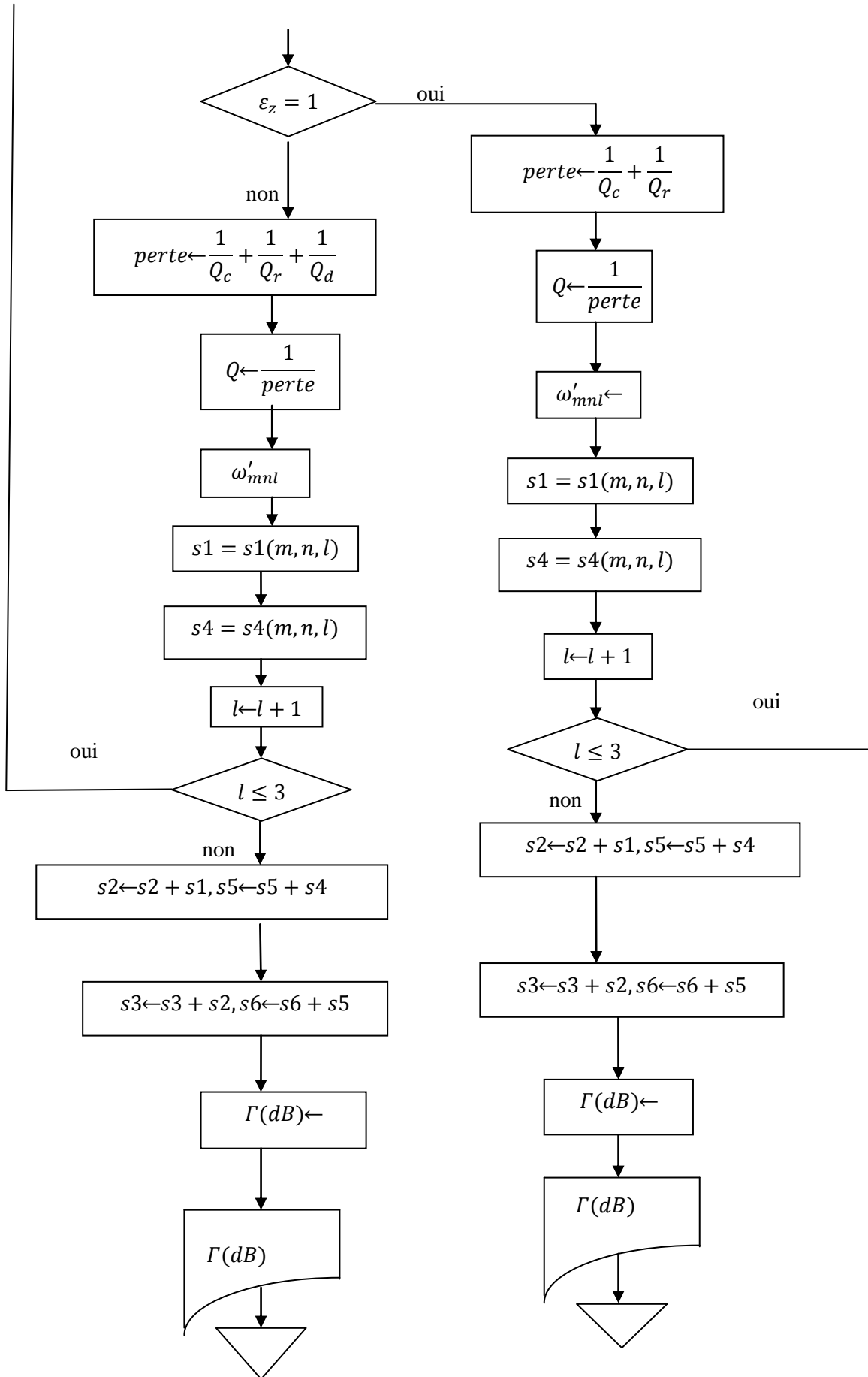
- Chauffages industriel et domestique (fours à micro-ondes) [16].
  - Médecine (traitement de tumeurs cancéreuses) [16].
  - Radioastronomie [17].
  - Electronique [18].
  - Radiométrie micro-onde [119].
  - Radionavigation [20], [21].
  - Accélérateurs de particules.
  - Les recherches physiques (notre sujet)
- Cette technique permet de mesurer la permittivité diélectrique des matériaux, notamment les matériaux diélectriques à l'aide de cavités résonantes.

## A-3- Matériau utilisés en hyperfréquence et en U H F [8]

matériaux	$\epsilon_r$	$10^4 \tan \delta$
Alumine $Al_2O_3$	9,8	1-2
Saphyr	9,4-11,6	1
AsGa	13	6
Silicium Si	12	10-100
Verre téflon	2,4-2,6	15
Téflon	2,1	4
Polystyrène	2,53	5
Verre polystyrène	2,62	10
Polystyrène céramique	3-15	40
Polyoléfine	2,32	5
Polyoléfine céramique	3-10	10
Résines céramique	1,7-25	$99.10^{-3}$







---

## LISTE DES TABLEAUX

➤ Tableau I.1-classification des matériaux. ....	10
➤ Tableau IV-1- différents paramètres géométriques en (mm). ....	62
➤ Tableau IV-2- tableau de comparaison. ....	82
➤ Tableau A-1- Classification des rayonnements électromagnétiques en fonction de la fréquence et de la longueur d'onde. ....	88
➤ Tableau A-2- Classification des micro-ondes de 0.3GH à300GH. ....	88
➤ A-3- Matériau utilisés en hyperfréquence et en U H F. ....	89

---

## LISTE DES FIGURES

➤ Fig. I-1 surface de séparation de deux milieux différents. ....	9
➤ Fig. I-2 : onde plane. ....	13
➤ Fig. I-3 : structure d'une onde plane dans un milieu anisotrope. ....	20
➤ Fig. I-4 : section méridienne de la surface des indices dans un milieu uniaxe. ....	23
➤ Fig. I-5: surface des indices dans un cristal uniaxe négatif. ....	23
➤ Fig. I-6-a- structure de l'onde ordinaire dans un milieu uniaxe. ....	25
➤ Fig. I-6-b- structure de l'onde extraordinaire dans un milieu uniaxe. ....	25
➤ Fig. II-1. Réflexion sous incidence oblique. ....	28
➤ Fig. II.2.Propagation entre deux plans parallèles. ....	29
➤ Fig. II.3.Propagation en mode $TE_{0n}$ .....	30
➤ Fig. II.4.Propagation en mode $TE_{m0}$ . ....	31
➤ Fig. II.5.coupes transversale des modes $TE_{20}$ et $TE_{30}$ .....	34
➤ Fig. II.6.guide d'onde rectangulaire. ....	37
➤ Fig. II.6 : Cavité coupée dans un guide onde rectangulaire. ....	39
➤ Fig.III.1. Structure d'une cavité. ....	43
➤ Fig III.2. Dispositif de caractérisation.....	44
➤ Fig. III.3. Paramètres géométriques de la cavité avec la ligne d'accès. ....	44
➤ Fig.III.4. Circuit équivalent de la cavité avec la ligne d'accès. ....	45
➤ Fig.III.5. Paramètre d'une ligne micro ruban. ....	46
➤ Fig.III.6. Modélisation des courants de la fente. ....	48
➤ Fig.III.7.coordonnées et notation pour un courant magnétique de longueur $W$ . ....	49
➤ Fig.III.8: correspondance doublet/fente. ....	51
➤ Fig. III.9: Cavité sans fente.. ....	53
➤ Fig.III.10. Rayonnement de la fente à l'extérieur de la cavité. ....	53
➤ Fig.III.11 : les parois métalliques de la cavité. ....	54
➤ Fig.III.12 : la ligne à fente.....	86
➤ Fig.III.13 : Couplage d'une ligne à fente et une ligne microbande.....	86
➤ Fig. IV-1 Cavité coupée dans un guide d'onde rectangulaire. ....	62
➤ Figure .IV.2. Rayonnement de la fente à l'extérieur de la cavité. ....	70
➤ Fig. IV.3.coefficients de réflexions mesurés (cavité vide).....	80
➤ Fig. IV.4.coefficients de réflexions mesurés.....	81

*Références bibliographiques*

- ❖ [1] <http://IESE.EIVD.CH/Enseignement/cours/GAILLE/2LECTROMAGN2TISME.pdf> .
- ❖ [2] Les micro-ondes 1- circuit-microrubans-fibres. R.BADOUAL 1984.
- ❖ [3] physique des polymères. P.COMBETTE et ERNOULT Tome II propriétés.
- ❖ [4] OPTIQUE Licence de Physique, Institut Galilée. Université Paris Nord. 2000/2001. P.KUŽEL.
- ❖ [5] Optique non-linéaire. Cours et problèmes résolus FRANCOIS SANCHEZ. 1999.
- ❖ [6] Micro-ondes. 1. Lignes, guides et cavités. Cours et exercices – PAUL.F.COMBES.1996.
- ❖ [7] slotline on un diélectrique substrat, SEYMOURB.COHN, FELLOW, IEEE octobre1969.
- ❖ [8] Les micro-ondes 1- circuit-microrubans- fibres. R.BADOUAL – Ch. MARTIN – et S.JACQUET. 2<sup>em</sup> édition 1993
- ❖ [9] Combes. – Microondes. – Dunod, 1997.
- ❖ [10] Dubost (G.) et Zisler (S.). – Antennes à large bande : théorie et application. – Paris, Dunod, 1976.
- ❖ [11] Nikolski (V.). – Electrodynamique et propagation des ondes-radioélectriques. – Moscou, Editions Mir, 1978.
- ❖ [12] Collin (Robert E.). – Foundation for microwave engeneering. – Wiley and Son, 1992.
- ❖ [13] [http://www.microlease.com/fr/helpdesk/pages/analyseur\\_reseau.html](http://www.microlease.com/fr/helpdesk/pages/analyseur_reseau.html).
- ❖ [14] Arnaud GARDELEIN novembre 2006 l'Ecole polytechnique de l'université de Nantes.
- ❖ [15] Generalized Micrstrip-slotline Transsition : theorie and simulation vs. Experiment, Mathew M.Radmanesh and Bradford W. Arnold California state university. June 1993.
- ❖ [16] they (J.) Industrial, scientific and medical applications of microwaves Artech House, Boston, London (1992).
- ❖ [17] Kraus (J.D) Radio-astronomy. Cygnus Quasar Books, Poweell Ohio, USA (2e éd.1988)
- ❖ [18] Combes (P.-F), Graffeuil (J.), sautereau (J.-F). Composants, dispositifs et circuits actifs micro-ondes. Dunod, Paris (1985).
- ❖ [19] ulaby (F.T), moore (R.K.), Fung (A.K.). microwave remote sensing, vol. 1,2 et3 Addison-wesley, reading, Massachusetts (USA) (1984).
- ❖ [20] Darriau (J.). physique et théorie du RADAR, vol. 1,2 et 3. Sodipe, Paris (3<sup>e</sup> édition1993).
- ❖ [21] Fombonne (P.). « Radiolocalisation-Radionavigation ». in Traité d'électronique-Fascicule E.6600. Techniques de l'ingénieur, Paris.

## Résumé :

Les micro-ondes présentent une application très importante en physique, c'est la caractérisation des matériaux. Dans notre projet, nous nous intéressons aux matériaux uniaxes (détermination de leur tenseur de permittivité).

Le dispositif de test est une cavité électromagnétique excitée par une ligne de type micro-ruban à travers une fente.

Cette structure est reliée avec un analyseur de réseau qui nous permet de mesurer le coefficient de réflexion.

Ce dispositif a été décomposé en trois éléments (ligne-fente -cavité). Nous avons modélisé chaque élément par son admittance. A partir de ces trois admittances nous avons mesuré le coefficient de réflexion de l'ensemble de notre dispositif.

Grace à ces mesures nous sommes arrivés au tenseur de permittivité des milieux étudiés.

Les résultats sont en bon accord avec l'expérience.

## Summary:

The microwaves present a very significant application in physics, it is the characterization of materials. In our project, we are interested in uniaxial materials (determination of their tensor of permittivity).

The test device is an electromagnetic cavity excited by a micro strip line through a slot.

This structure is connected with a network analyzer that allows us to measure the coefficient of reflexion.

This device was divided up into three elements (line-slot - cavity). We modelled each element by its admittance. From these three admittances we measured the coefficient of reflexion of the set of our device.

In virtue of these measurements we arrived at the tensor of permittivity of the studied middle.

The results are in concord with the experiment.

ملخص:

الأمواج ذات الترددات العالية تقدم لنا تطبيقا جد مهم في الفيزياء، إنه تمييز المواد حيث نهتم في مشروعنا هذا بالمواد الأحادية المحور (تعيين تنسور السماحية لهذه المواد).

تركيبية الفحص عبارة عن فجوة كهرومغناطيسية محرّضة بواسطة خط من نوع الشريط الرقيق به شق.

هذه البنية موصلة بمحلل الشبكة الذي يمكننا من قياس معامل الإنعكاس.

لقد قمنا بتقسيم التركيبية إلى ثلاث عناصر (خط - شق - فجوة)، كل عنصر منمذج بمسامحته. إنطلاقا من هذه المسامحات الثلاث، تمكنا من قياس معامل الإنعكاس للتركيبية ككل.

بفضل هذه القياسات توصلنا إلى إيجاد تنسور السماحية للمواد المدروسة. حيث كانت النتائج المحصل عليها جد متقاربة مع النتائج التجريبية.