

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

Présenté par :

Kheira ZITOUNI

Résolution Numérique de l'Équation de la Chaleur

Soutenu publiquement le 12/06/2025 devant le jury composé de :

Président :	ABLAOUI Naima	MCB	UMAB
Examineur :	BECHAOUI Khadidja	MAA	UMAB
Encadrant :	BENSIKADDOUR Djemaia	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2024 / 2025

**M
A
S
T
E
R**

Table des matières

Remerciements	i
Liste de figures	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Introduction	1
1 Préliminaires	4
1 Température, chaleur et flux de chaleur	4
2 Applications pratiques de l'équation de la chaleur	5
3 Méthodes de résolution numérique	6
3.1 Principe de la méthode des différences finies	7
3.2 Analyse du schéma discrétisé	10
2 Résolution de l'équation de la chaleur instationnaire	12
1 Résolution analytique de l'équation de la chaleur	13
2 Résolution numérique de l'équation de la chaleur non stationnaire par la méthode DF	17
3 Méthode SM	22

1	Principes fondamentaux de la méthode SM	22
2	Applications de la méthode SM	23
3	Résolution numérique de l'équation de la chaleur instationnaire par la méthode	
	SM	23
4	Exemple d'une équation de la chaleur non stationnaire	27
1	Maillage uniforme et maillage aléatoire	28
2	Solution numérique de l'équation de la chaleur non stationnaire	29
3	Convergence de la solution numérique de l'équation de la chaleur non stationnaire	30
	Conclusion	32
	Bibliographie	33
	Annexe 1	34
	Annexe 2	36
	Annexe 3	38
	Annexe 4	41
	Annexe 5	44

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrante, Dr D. BENSIKADDOUR, pour sa patience, sa disponibilité et surtout, pour la pertinence de ses conseils, qui ont grandement nourri ma réflexion tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier Mme N. ABLAOUI, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury et d'avoir accepté d'évaluer mon mémoire.

Je remercie très vivement Mme K. BECHAOUI, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie du fond du cœur mon père, dont le soutien indéfectible, les encouragements constants et les sacrifices ont été une source précieuse de motivation tout au long de mon parcours. Ce mémoire est aussi le fruit de sa présence et de sa confiance.

Je tiens à remercier chaleureusement ma mère, mes sœurs, mes frères ainsi que toute ma famille, pour leur amour, leur soutien indéfectible et leurs prières, qui m'ont accompagné tout au long de ce parcours. Leur présence à mes côtés a été une source inestimable de force, de motivation et de réconfort.

Je remercie également l'ensemble de mes enseignants, qui m'ont accompagné tout au long de mon parcours universitaire. Leurs enseignements, leurs conseils et leur dévouement ont largement contribué à ma formation et à mon évolution personnelle et académique.

Je remercie mes collègues et mes amis pour leur soutien et les bons moments partagés durant ce parcours, et j'adresse une mention spéciale à mon amie BL.Nesrine pour sa présence précieuse, son aide et son amitié sincère.

Liste de figures

- Figure 1 :* Domaine $\Omega = [0, a] \times [0, n]$.
- Figure 2 :* Maillage du domaine Ω .
- Figure 3 :* Barre de longueur L .
- Figure 4 :* Maillages (uniforme et aléatoire) 10×10 points.
- Figure 5 :* Maillages (uniforme et aléatoire) 20×20 points.
- Figure 6 :* Maillages (uniforme et aléatoire) 30×30 points.
- Figure 7 :* Solution exacte et solution numérique de l'équation de la chaleur par DF.
- Figure 8 :* Solution exacte et solution numérique de l'équation de la chaleur par SM.
- Figure 9 :* Graphes d'erreurs (DF et SM).

Résumé

Ce travail consiste à résoudre l'équation de la chaleur non stationnaire unidimensionnel par la méthode de différence finies (MDF), en utilisant deux processus de génération du maillage différents. Le premier repose sur des grilles uniformes, qui sont couramment utilisées pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) définies sur des domaines réguliers et qui nécessite un plus grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence de la solution numérique. Le second est une idée novatrice proposée par Sanaullah Mastoi et ses collaborateurs ([2]), repose sur des grilles aléatoires.

L'utilisation de la méthode de différence finies sur une grille générée aléatoirement peut offrir de meilleures performances en termes de précision et de temps de calcul. Elle permet une convergence plus rapide de la solution numérique pour un problème donné. Cette méthode est comparée à celle des grilles uniformes afin de vérifier sa validité et son potentiel pour minimiser l'erreur commise et réduire le temps de calcul.

Mots clés : *Équation aux dérivées partielles, méthode de différences finies, méthode de Sanaullah Mastoi, grille uniforme, grille aléatoire.*

Abstract

This work involves solving the one-dimensional unsteady heat equation using the finite difference method (FDM), applying two different mesh generation processes. The first approach relies on uniform grids, which are commonly used to solve partial differential equations (PDEs) defined over regular domains. However, this method generally requires a higher number of iterations to achieve convergence of the numerical solution. The second approach is an innovative idea proposed by Sanaullah Mastoi and his collaborators ([\[2\]](#)), which is based on randomly generated grids.

Using the finite difference method on a randomly generated grid can offer better performance in terms of accuracy and computational time. It allows for faster convergence of the numerical solution for a given problem. This method is compared with the uniform grid approach to verify its validity and its potential in minimizing error and reducing computation time.

Keywords : *Partial differential equation, finite difference method, Sanaullah Mastoi method, uniform grid, random grid.*

INTRODUCTION

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 de classe parabolique introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier. Elle est utilisée pour décrire les phénomènes physiques de conceptions thermiques, elle modélise la diffusivité thermique dans un milieu au cours du temps et elle permet d'exprimer le principe de conservation de l'énergie thermique dans un corps.

L'équation de la chaleur dans un espace unidimensionnel est

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$$

où

- * $U(x, t)$: la température au point $x \in \mathbb{R}$ et au temps $t \in \mathbb{R}^+$.*
- * $D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$: la diffusivité thermique ou coefficient de diffusion thermique). Elle dépend de la constante λ qui est le coefficient de la conductivité thermique du matériau, son unité de mesure dans le système international est Watt/(mètre.Kelvin) "w/(mk)", la constante c_p est la capacité thermique massique à pression constante et $\rho = \frac{m}{V}$ est la masse volumique du matériau.*
- * $\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}$: les variations de la température en fonction du temps.*
- * $\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$: la courbure de la température.*

Dans un espace de dimension $n > 1$ (en général on prend $n = 2$ ou $n = 3$), l'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = D \Delta U(x, t)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien défini par

$$\Delta U(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x_i^2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

L'équation de la chaleur est l'un des piliers des mathématiques appliquées, sa résolution a fait l'objet de nombreux travaux fondamentaux, tant anciens que récents, car elle se situe à

l'intersection de plusieurs disciplines telles que la physique, les mathématiques, l'ingénierie, le traitement d'images et même les sciences médicales.

La résolution de l'équation de la chaleur ne se fait pas toujours par des méthodes analytiques, ces dernières sont puissantes mais souvent limitées à des cas idéalisés, où les domaines sont simples : barres, rectangles, cylindres ou sphères et les conditions (initiales et aux limites) sont bien choisies. Pour cette raison, on privilège les méthodes numériques qui permettent de traiter des situations réelles et pratiques.

Ce travail est consacré à la résolution numérique de l'équation de la chaleur par la méthode de différences finies, il est composé de quatre chapitres.

Dans le premier, nous commençons par présenter des généralités sur l'équation de la chaleur et ses applications dans quelques domaines scientifiques. Ensuite, nous rappelons quelques méthodes numériques de résolution des équations différentielles, et nous développons celle de différences finies. En dernier, nous exposons les différentes propriétés de la solution numérique.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution de l'équation de la chaleur non stationnaire. Nous commençons par appliquer la méthode analytique de séparation des variables afin de déterminer la solution exacte. Nous résolvons ensuite l'équation numériquement à l'aide de la méthode des différences finies sur un maillage uniforme. Enfin, nous étudions les propriétés de la solution numérique obtenue : la consistance, la stabilité et la convergence.

Dans le troisième chapitre, nous recherchons la solution numérique du même problème étudié dans le chapitre précédent, cette fois en utilisant la méthode des différences finies sur un maillage aléatoire. Cette nouvelle approche est appelée méthode de Sanaullah Mastoi, ou méthode SM.

Enfin, l'objectif du dernier chapitre est d'appliquer la méthode SM pour résoudre numériquement l'équation de la chaleur instationnaire dans un domaine unidimensionnel. Nous comparerons les performances de cette méthode avec celles des maillages réguliers, en termes de convergence, de précision et de coût computationnel.

Ce mémoire se termine par une conclusion dans laquelle nous soulignons l'importance des méthodes numériques, en particulier la méthode SM, dans la résolution de nombreux problèmes mathématiques modélisant des phénomènes physiques. Enfin, nous présentons une

bibliographie regroupant les articles et ouvrages de référence utilisés.

Préliminaires

La modélisation des phénomènes de transfert thermique joue un rôle central en physique, ingénierie, sciences de la Terre, et bien d'autres domaines. Ce chapitre introductif aborde les concepts fondamentaux de la chaleur, de la température et du flux thermique, ainsi que leur formalisation mathématique à travers l'équation de la chaleur, une équation aux dérivées partielles parabolique qui décrit la diffusion de l'énergie thermique dans un milieu, que ce soit dans un solide, un fluide ou un gaz.

Les applications pratiques de cette équation sont vastes : conduction dans les matériaux, géothermie, refroidissement électronique, ou même traitement d'images. Cependant, sa résolution analytique reste limitée à des cas idéalisés. Pour les configurations complexes, des méthodes numériques s'imposent, comme la méthode des différences finies, qui discrétise les dérivées spatiales et temporelles à l'aide de développement de Taylor. Ce chapitre explore également les critères de consistance, stabilité et précision des schémas numériques, essentiels pour garantir la fiabilité des solutions approchées.

Enfin, une attention particulière est portée à la construction des schémas aux différences finies, depuis le maillage du domaine jusqu'à l'approximation des dérivées d'ordre supérieur, en s'appuyant sur les outils mathématiques clés comme la formule de Taylor.

1 Température, chaleur et flux de chaleur

Définition 1.1 *La température se définit en chaque point d'un corps liquide, solide ou gazeux. C'est une fonction scalaire de l'espace et du temps lorsque le problème est instationnaire. L'unité de température est le degré Kelvin $[K]$ ou encore le degré Celsius $[^{\circ}C]$.*

Remarque 1.1 *La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules.*

Définition 1.2 *On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur Q transmise sur une surface S par unité de temps :*

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}.$$

Définition 1.3 *La chaleur est une énergie thermique utilisée dans de nombreux processus industriels : chauffage, cuisson, fusion. Elle s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur*

$$\varphi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$$

où S est l'aire de la surface.

Définition 1.4 *La quantité de chaleur est mesurée en unités identiques à celles de l'énergie et du travail, à savoir les joules (J). On fait aussi appel à la calorie (Cal), qui est définie comme la quantité de chaleur requise pour augmenter la température de 1 g d'eau de 14,5°C à 15,5°C sous une pression d'1 atm, (1 atm = 101 325 Pa).*

2 Applications pratiques de l'équation de la chaleur

Le flux thermique est un concept important en thermodynamique, en physique et en sciences d'ingénierie. Ses applications sont nombreuses et se retrouvent dans plusieurs aspects de notre vie quotidienne. Dans cette section, nous explorons quelques applications du flux thermique dans notre monde actuel.

1/ Physique et ingénierie

- * *Conduction thermique : Modélisation de la propagation de la chaleur dans les solides (bâtiments, moteurs, métaux).*
- * *Étude des isolants thermiques.*

* *Refroidissement des systèmes électroniques.*

2/ Sciences de la terre

* *Transfert thermique dans les couches terrestres (géothermie).*

* *Refroidissement des planètes.*

3/ Médecine

* *Simulation de la diffusion thermique lors de traitements thermiques (par exemple, laser en dermatologie).*

4/ Traitement d'images

* *La diffusion thermique est utilisée dans les algorithmes de floutage ou de nettoyage d'images (équation de la chaleur discrétisée sur une grille de pixels).*

3 Méthodes de résolution numérique

Les équations aux dérivées partielles (EDP) jouent un rôle fondamental dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, tels que la propagation de la chaleur, la dynamique des fluides, l'électromagnétisme ou encore les processus quantiques. Ces équations traduisent les relations entre les dérivées partielles d'une fonction inconnue, par rapport à plusieurs variables indépendantes.

Cependant, dans la grande majorité des cas, il est impossible d'obtenir des solutions analytiques exactes pour ces équations, en particulier lorsqu'elles sont non linéaires ou qu'elles s'appliquent à des domaines géométriquement complexes. C'est pourquoi le recours aux méthodes numériques s'impose comme une alternative incontournable.

Les méthodes numériques de résolution des EDP consistent à approximer les solutions en remplaçant les dérivées par des équivalents discrets, permettant ainsi la mise en œuvre de schémas calculables par ordinateur. Parmi les approches les plus courantes figurent les méthodes des différences finies, des éléments finis, et des volumes finis, chacune ayant ses propres avantages selon la nature du problème traité.

Cette étude vise à présenter les principes de base de la méthode des différences finies, à évaluer ses performances, et à illustrer sa mise en œuvre à travers un cas concret de résolution de l'équation de la chaleur.

3.1 Principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies (DF) est une technique numérique utilisée pour approximer les solutions d'équations différentielles, en particulier des équations aux dérivées partielles. Elle repose sur la discrétisation du domaine continu en un maillage régulier de points, appelés nœuds, et sur l'approximation des dérivées (ou dérivées partielles) en ces points par des schémas en différences finies, implicites, centrés ou explicites.

Étapes de discrétisation d'un système différentiel par la méthode des différences finies

Soit un phénomène modélisé par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} PU(x, y) = f(x, y), \text{ sur } \Omega, \\ \text{des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann ou mixtes,} \end{cases} \quad (S)$$

où P est un opérateur différentiel et $U(x, y)$ est la fonction inconnue définie sur un domaine rectangulaire $\Omega = [0, a] \times [0, b]$.

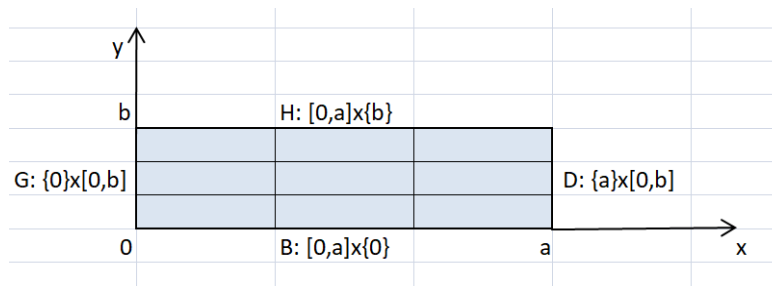


Figure 1 : Domaine Ω

1/ Maillage uniforme : On commence tout d'abord par introduire une grille uniforme définie par ses sommets de coordonnées (x_i, y_j) avec deux pas $h_x = \frac{a}{n_x}$ et $h_y = \frac{b}{n_y}$ tels que

$$x_i = ih_x \text{ et } y_j = jh_y \text{ pour } i = 0, \dots, n_x \text{ et } j = 0, \dots, n_y$$

Cette grille est appelée maillage du domaine Ω , elle contient $(n_x + 1)(n_y + 1)$ nœuds.

Pour tout $i = 0, \dots, n_x$ et $j = 0, \dots, n_y$ on a, $x_{i+1} = x_i + h_x$ et $y_{j+1} = y_j + h_y$.

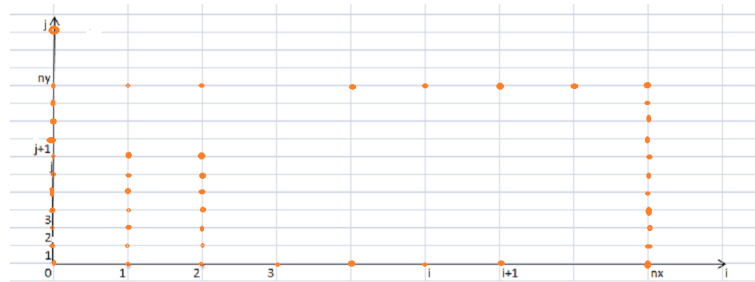


Figure 2 : Maillage

U_{ij} sont les valeurs de la fonction inconnue (recherchée) $U \in C^n(\Omega)$, $n > 1$ au point (x_i, y_j) ,

$$U(x_i, t_j) = U_i^j, \quad \forall i = \overline{0, \dots, n_x + 1} \text{ et } \forall j = \overline{0, \dots, n_y + 1}.$$

2/ L'approximation numérique de l'opérateur différentiel P : On approxime numériquement les valeurs des dérivées partielles de la fonction $U(x, y)$ intervenant dans l'opérateur P par la méthode des différences finies, au moyen de son développement de Taylor.

Théorème 3.1 Développement de Taylor ([8]) Soit la fonction $U : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{n+1}([a, b])$. Pour tout $x_0 \in]a, b[$ tel que $x_0 + h < b$, on a

$$U(x_0 + h) = U(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{U^{(i)}(x_0)}{i!} h^i + \mathcal{O}(h^{n+1}).$$

2.1/ Dérivées partielles du premier ordre

* "Différences finies décentrées à droite d'ordre 1"

$$\frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h_x}$$

et

$$\frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{h_y}.$$

* *"Différences finies décentrées à gauche d'ordre 1"*

$$\frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h_x}$$

et

$$\frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{h_y}.$$

* *"Différences finies centrées d'ordre 1"*

$$\frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial x} \simeq \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h_x}$$

et

$$\frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial y} \simeq \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2h_y}.$$

2.2/ Dérivées partielles du second ordre

* *"Différences finies centrées d'ordre 2"*

$$\frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x^2} \simeq \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h_x^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial y^2} \simeq \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{h_y^2}$$

* *"Différences finies centrées d'ordre 2 de la dérivée seconde croisée"*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U(x_i, y_j)}{\partial y} \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2h_y} \right) \\ &\simeq \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1} - U_{i+1}^{j-1} + U_{i-1}^{j-1}}{4h_x h_y}. \end{aligned}$$

3/ Approximation de l'équation principale du système (S)

$$PU_i^j = f_i^j, \quad \forall i = \overline{1, \dots, n_x} \text{ et } \forall j = \overline{1, \dots, n_y}.$$

L'opérateur P peut contenir des dérivées partielles premières et secondes (exp : l'équation de la chaleur et l'équation de Schrödinger en dimension 1) ou uniquement des dérivées partielles secondes (exp : l'équation des ondes, Laplace, Poisson...). En remplaçant les dérivées partielles par leurs approximations, on obtient le schéma numérique.

4/ Approximation des conditions aux limites imposées.

Remarque 3.1 *La méthode des différences finies est simple à mettre en œuvre et particulièrement adaptée aux problèmes linéaires sur des domaines réguliers. Toutefois, elle peut présenter certaines limites, notamment en termes de précision ou de flexibilité pour des géométries complexes, ce qui justifie parfois le recours à d'autres méthodes numériques.*

3.2 Analyse du schéma discrétisé

Les propriétés nécessaires lors de la résolution numérique des équations différentielles ou aux dérivées partielles et qui permettent de relier les solutions exactes de ces équations aux solutions numériques de leurs schémas numériques sont :

- 1/ **"La consistance"** ([8]) *Un schéma numérique est dit consistant si la solution exacte des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation (h_x, h_y) tendent vers $0_{\mathbb{R}^2}$. Cependant, L'erreur de consistance R_i est l'erreur commise en remplaçant les dérivées partielles de l'opérateur différentiel P par leurs approximations. Cette erreur peut être évaluée si la fonction U est suffisamment régulière en effectuant son développement de Taylor.*
- 2/ **"La stabilité"** ([8]) *Un schéma numérique est dit stable si la différence entre la solution numérique et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.*
- 3/ **"La convergence"** ([8]) *est la propriété la plus importante dans l'analyse d'un schéma numérique, ce dernier est dit convergent si l'écart au sens d'une norme entre la solution approchée (numérique) $\tilde{U}_h$ et la solution exacte U_h tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation $h = (h_x, h_y)$ tend vers $0_{\mathbb{R}^2}$, on utilise fréquemment $\|\cdot\|_\infty$*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \tilde{U}_h - U_h \right\|_\infty = 0.$$

Les écarts entre la solution approchée et la solution exacte d'un schéma numérique représentent les erreurs commises lors de la discrétisation, on distingue trois types d'erreur :

- * *L'erreur d'arrondi : imposée par celui qui fait les calculs.*
- * *L'erreur de troncature ou de consistance : elle est commise lors de l'approximation des opérateurs différentiels par la formule de Taylor.*

* *L'erreur de méthode : due à un mauvais choix de conditions aux limites.*

Théorème 3.2 ([1]) "*Théorème de Lax*" *Un schéma numérique linéaire consistant et stable, est convergent.*

Résolution de l'équation de la chaleur instationnaire

Il existe deux méthodes pour déterminer le flux de chaleur à travers un objet, la première est dérivée des propriétés de l'objet, et la seconde est obtenue en mesurant le flux de chaleur à travers les frontières de l'objet.

Considérons une barre fine à laquelle nous donnons une distribution initiale de température, puis que nous isolons sur les côtés. Les extrémités de la barre sont maintenues à une température fixe.

Par exemple, supposons qu'au début de l'expérience, les deux extrémités soient immédiatement plongées dans de l'eau glacée. Nous nous intéressons à la façon dont les températures le long de la barre évoluent au cours du temps. Supposons que la barre ait une longueur L (en mètres), et que nous établissions un système de coordonnées le long de la barre, comme illustré ci-dessous.

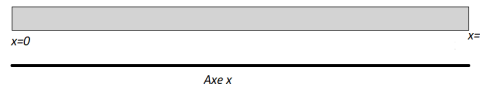


Figure 3 : Barre de longueur L

Le terme $U(x, t)$ représente la température au point situé à x mètres le long de la barre, au temps t (en secondes). L'équation aux dérivées partielles

$$U_t(x, t) = DU_{xx}(x, t), \quad (\text{E})$$

est utilisée pour modéliser l'évolution de la température en une dimension spatiale. Les éléments les plus importants de cette équation sont la dérivée seconde par rapport à l'espace $U_{xx}(x, t)$, et la dérivée première par rapport au temps $U_t(x, t)$. La constante positive D représente la diffusivité thermique de la barre.

La fonction $U(x, t)$ qui modélise le flux de chaleur doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles (E). Cependant, nous nous attendons également à ce qu'elle vérifie deux autres conditions. Premièrement, nous fixons la température aux extrémités de la barre, c'est-à-dire que nous spécifions $U(0, t)$ et $U(L, t)$. Dans notre exemple, nous supposons que les deux extrémités sont maintenues à 0 degré Celsius,

$$U(0, t) = U(L, t) = 0, \text{ pour tout } t > 0. \quad (C1)$$

Ceci est appelé une condition aux limites, car elle est imposée sur les valeurs de la fonction recherchée aux frontières du domaine spatial. Nous supposons deux conditions initiales :

1/ Une distribution initiale de température

$$U(x, 0) = f(x) \quad (C2)$$

où $f(x)$ est la température à la position x à l'instant $t = 0$.

En résumé, la fonction modèle $U(x, t)$ que nous cherchons doit satisfaire le problème

$$\begin{cases} U_t(x, t) = DU_{xx}(x, t), \text{ pour } x \in]0, L[\text{ et } t \in \mathbb{R}^{*,+}, & (E) \\ U(0, t) = U(L, t) = 0, & (C1) \\ U(x, 0) = f(x), & (C2) \end{cases} \quad (0.1)$$

Dans ce chapitre, nous allons étudier la résolution analytique et numérique de ce problème. Nous commençons par la résolution analytique en utilisant la méthode de séparation de variables, puis nous abordons la méthode des différences finies pour le résoudre numériquement. Enfin, nous étudions les propriétés de la solution numérique et sa convergence.

1 Résolution analytique de l'équation de la chaleur

Supposons que la barre est d'un matériau de diffusivité thermique $D = 1$, le problème (0.1) devient

$$\begin{cases} U_t(x, t) = U_{xx}(x, t), \text{ pour } x \in]0, L[\text{ et } t \in \mathbb{R}^{*,+}, & (E) \\ U(0, t) = U(L, t) = 0, & (C1) \\ U(x, 0) = f(x), & (C2) \end{cases} \quad (P)$$

Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode de séparation des variables. Nous supposons que la solution s'écrit sous la forme

$$U(x, t) = X(x)T(t),$$

dont les deux fonctions $X(x)$ et $T(t)$ ne sont pas nulles.

En substituant cette forme dans l'équation de la chaleur, nous obtenons

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

En divisant les deux côtés par $X(x)T(t)$, nous obtenons

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (1.1)$$

Le terme à gauche de l'équation (1.1) dépend uniquement de t et le terme à droite dépend uniquement de x , alors, il existe λ une constante telle que

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \\ \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda. \end{cases}$$

Cela implique le système différentiel,

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \dots (E_1) \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \dots (E_2) \end{cases} \quad (1.2)$$

Commençons par résoudre la première équation du système (1.2), qui est une équation différentielle ordinaire du second ordre. En vérifiant les conditions frontières, nous obtenons

$$\begin{aligned} U(0, t) &= X(0)T(t) = 0 \\ U(L, t) &= X(L)T(t) = 0 \end{aligned} \Rightarrow X(0) = X(L) = 0$$

parceque nous cherchons des solutions non identiquement nulles ($T \neq 0$).

Résolvons maintenant le problème

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(L) = 0. \end{cases}$$

Multiplications la première équation du système ci-dessus par $X(x)$ puis nous intégrons sur $[0, L]$, nous obtenons

$$\underbrace{\left(X'(x)X(x) \right)_0^L}_{=0} - \int_0^L X'^2(x)dx = \lambda \int_0^L X^2(x)dx.$$

cela implique

$$-\int_0^L X'^2(x)dx = \lambda \int_0^L X^2(x)dx.$$

d'où $\lambda \leq 0$, donc nous distinguons deux cas

i) 1^{ier} cas :

$$\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = \alpha x + \beta; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

en vérifiant les conditions

$$X(0) = X(L) = 0,$$

nous trouvons

$$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

ainsi, la solution du problème $(\bar{P})$ dans ce cas est nulle $U(x, y) = 0$.

ii) 2^{ème} cas :

$$\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -w^2, \quad w \in \mathbb{R}^*.$$

Le problème à résoudre est

$$\begin{cases} X''(x) + w^2 X(x) = 0, & \dots (I) \\ X(0) = X(L) = 0. & \dots (d_1) \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée à (I) est

$$r^2 + w^2 = 0 \Rightarrow r = iw \text{ ou } r = -iw$$

et la solution de (I) s'écrit :

$$X(x) = A \cos(wx) + B \sin(wx); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

En vérifiant les conditions (d_1) , nous obtenons

$$\begin{cases} A & = & 0 \\ B \sin(Lw) & = & 0 \end{cases}.$$

Comme $U \neq 0$, alors

$$\begin{cases} A &= 0 \\ \sin(Lw) &= 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} A &= 0 \\ w &= \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

donc les valeurs propres sont

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad B_n \in \mathbb{R}^*.$$

Les fonctions T_n sont solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$T'_n(t) - \lambda_n T_n(t) = 0 \tag{1.3}$$

qui implique

$$\frac{T'_n(t)}{T_n(t)} = \lambda_n.$$

En intégrant les deux cotés par rapport à t , nous trouvons

$$\ln |T_n(t)| = \lambda_n t + c,$$

où c est une constante d'intégration. Ainsi,

$$T_n(t) = C e^{\lambda_n t},$$

où $C = \pm e^c$ est une constante. Enfin, nous obtenons

$$T_n(t) = C e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad C \in \mathbb{R}^*,$$

et la solution générale du problème $((E), (C_1))$ est

$$U(x, t) = \sum_{n \geq 1} K_n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \quad K_n \in \mathbb{R}^*.$$

Vérifions maintenant la conditions (C_2) , nous trouvons

$$K_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

2 Résolution numérique de l'équation de la chaleur non stationnaire par la méthode DF

Le problème

$$(P) : \begin{cases} U_t(x, t) = U_{xx}(x, t), \text{ for } x \in]0, L[\text{ et } t \in]0, T[& (E) \\ U(0, t) = U(L, t) = 0 & (C1) \\ U(x, 0) = f(x) & (C2) \end{cases}$$

peut être résolu par la méthode des différences finies en procédant selon les étapes ci-dessous.

1/ **Maillage** : Tout d'abord, nous discrétisons l'intervalle spatial $[0, L]$ et l'intervalle temporel $[0, T]$. Nous considérons deux pas h_x et h_t avec $h_x \neq h_t$. Cela donne :

* Les points spatiaux : $x_i = ih_x$, avec $h_x = \frac{L}{n_x+1}$ pour $i = \overline{0, \dots, n_x+1}$.

* Les points temporels : $t_j = jh_t$, avec $h_t = \frac{T}{n_t+1}$ pour $j = \overline{0, \dots, n_t+1}$.

Pour tout $0 \leq i \leq n_x + 1$ et $0 \leq j \leq n_t + 1$, les points (x_i, t_j) appelés nœuds forment une grille uniforme et la température au point (x_i, t_j) est notée par U_i^j ,

$$U(x_i, t_j) = U_i^j, \quad \forall i = \overline{0, \dots, n_x+1} \text{ et } \forall j = \overline{0, \dots, n_t+1}.$$

Les conditions aux bords (C1) imposent que $U(0, t) = U(L, t) = 0$, ce qui se traduit numériquement par :

$$U_0^j = 0 \text{ et } U_{n_x+1}^j = 0, \quad \forall j = \overline{0, \dots, n_t+1}.$$

La condition initiale (C2) impose,

$$U_i^0 = f(x_i), \quad \forall i = \overline{0, \dots, n_x+1}.$$

2/ **Approximations des dérivées partielles** : Nous utilisons des approximations par différences finies pour les dérivées partielles dans l'équation de la chaleur.

* La dérivée temporelle $U_t(x, t)$ est approximée par une différence finie progressive,

$$U_t(x_i, t_j) \simeq \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{h_t}. \quad (2.1)$$

* La dérivée spatiale seconde $U_{xx}(x, t)$ est approximée par une différence finie centrée

$$U_{xx}(x_i, t_j) \simeq \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h_x^2}. \quad (2.2)$$

En substituant les approximations (2.1) et (2.2) dans l'équation (E), nous obtenons

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{h_t} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h_x^2}.$$

Réarrangeons cette équation pour exprimer U_i^{j+1} en fonction des valeurs au temps précédent t_j , nous trouvons

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{h_t}{h_x^2} (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j).$$

En discrétisant les conditions initiales et les conditions aux limites, le schéma numérique du problème (P) est :

$$\begin{cases} U_i^{j+1} = \alpha U_{i+1}^j + (1 - 2\alpha)U_i^j + \alpha U_{i-1}^j, \quad \forall i = \overline{1, \dots, n_x} \text{ et } \forall j = \overline{1, \dots, n_t + 1} & (E) \\ U_0^j = U_{n_x+1}^j = 0, \quad \forall j = \overline{0, \dots, n_t + 1} & (C1) \\ U_i^0 = f_i, \quad \forall i = \overline{0, \dots, n_x + 1} & (C2) \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\alpha = \frac{h_t}{h_x^2}$ et $f_i = f(x_i)$. Ce schéma est explicite, car U^{j+1} est calculé directement à partir des valeurs de U^j au temps précédent.

3/ Discrétisation des conditions aux limites et conditions initiales :

1. Les conditions aux bords $U_0^j = U_{n_x+1}^j = 0$, $\forall j = \overline{0, \dots, n_t + 1}$ sont appliquées à chaque pas de temps.
2. La condition initiale $U_i^0 = f(x_i)$, $\forall i = \overline{0, \dots, n_x + 1}$ est utilisée pour initialiser le système.

4/ Forme matricielle : Le terme U_i^{j+1} est obtenu directement en fonction des termes précédents. Ainsi, la forme matricielle du système (2.3) est

$$\begin{pmatrix} U_0^{j+1} \\ U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ U_3^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{n_x-1}^{j+1} \\ U_{n_x}^{j+1} \\ U_{n_x+1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1-2\alpha & \alpha & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & 0 & & & \\ 0 & \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & & 0 & \alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ 0 & & \cdot & \cdot & 0 & \alpha & 1-2\alpha & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^j \\ U_1^j \\ U_2^j \\ U_3^j \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{n_x-1}^j \\ U_{n_x}^j \\ U_{n_x+1}^j \end{pmatrix}$$

Propriétés de la solution numérique

Stabilité Analyse de stabilité de Fourier-Von Neuman : La solution $U_{i,j}$ du schéma discrétisé (S) approxime la solution analytique $U(x, t)$ du problème (P) sur les nœuds (x_i, t_j) .

L'erreur d'arrondi : est donnée par

$$\varepsilon_{i,j} = E_{i,j} - U_{i,j}$$

où $U_{i,j}$ est la solution du problème discrétisé (système (2.3)) et $E_{i,j}$ est la solution numérique obtenue par précision arithmétique finie. Comme la solution exacte doit vérifier la solution discrétisée, l'erreur $\varepsilon_{i,j}$ doit elle aussi la vérifier. Donc,

$$\varepsilon_{i,j+1} = \varepsilon_{i,j} + \alpha (\varepsilon_{i+1,j} - 2\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i-1,j}). \quad (2.4)$$

Cette dernière expression est une relation de récurrence pour l'erreur.

La variation spatiale de l'erreur peut être décomposée en une série de Fourier finie sur l'intervalle $[0, L]$ par :

$$\varepsilon(x) = \sum_{m=1}^M A_m \exp(ik_m x)$$

où le nombre d'ondes $k_m = \frac{\pi m}{L}$, $m = 1, 2, \dots, M$ et $M = \frac{L}{h_x}$.

En supposant que l'amplitude de l'erreur A_m est une fonction du temps et qui varie exponentiellement par rapport au temps, on écrit

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=1}^M \exp(at) \exp(ik_m x)$$

où a est une constante.

Puisque l'équation des différences de l'erreur est linéaire, il suffit de considérer la croissance de l'erreur pour un terme choisi :

$$\varepsilon(x, t) = \exp(at) \exp(ikx). \quad (2.5)$$

Remarque 2.1 On peut étudier les caractéristiques de stabilité du schéma numérique en utilisant la forme de l'erreur (2.5), sans perte de généralité.

Nous avons

$$\varepsilon_i^j = \exp(at) \exp(ikx),$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \exp(a(t + h_t)) \exp(ikx),$$

$$\varepsilon_{i+1}^j = \exp(at) \exp(ik(x + h_x)),$$

et

$$\varepsilon_{i-1}^j = \exp(at) \exp(ik(x - h_x)).$$

En injectant ces expressions dans (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \exp(ah_t) &= 1 + \frac{h_t}{h_x^2} [\exp(ikh_x) + \exp(-ikh_x) - 2] \\ &= 1 - \frac{4h_t}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{kh_x}{2}\right). \end{aligned}$$

Parce que

$$\cos(kh_x) = \frac{\exp(ikh_x) + \exp(-ikh_x)}{2} \text{ et } \sin^2\left(\frac{kh_x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(kh_x)}{2}.$$

Le facteur d'amplification : est donné par

$$F_a = \frac{\varepsilon_i^{j+1}}{\varepsilon_i^j}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{j+1} &= \exp(ah_t) \varepsilon_i^j \\ &= \left[1 - \frac{4h_t}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{kh_x}{2}\right)\right] \varepsilon_i^j. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'erreur d'arrondi est le terme général d'une suite géométrique de raison réelle

$$r = 1 - \frac{4h_t}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{kh_x}{2}\right).$$

La suite $(\varepsilon_i^j)_j$ est convergente si et seulement si

$$|r| < 1 \Rightarrow \left|1 - \frac{4h_t}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{kh_x}{2}\right)\right| < 1.$$

Ainsi, le schéma numérique est stable si $\frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}$.

Remarque 2.2 La valeur h_t doit être assez petite pour que la condition de stabilité $\frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}$ soit vérifiée.

Consistance

Proposition 2.1 *Le schéma numérique explicite (2.3) est consistant d'ordre 1 en h_t et d'ordre 2 en h_x .*

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young pour calculer l'erreur commise en remplaçant les dérivées $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$ par leurs approximations. $\square$

Convergence

Corollaire 2.1 *Le schéma numérique explicite (2.3) est stable et consistant, donc il est convergent (théorème (3.2)).*

Méthode SM

La méthode de Sanaullah Mastoi "SM method", est une technique itérative innovante développée par Dr Sanaullah Mastoi et ses collaborateurs pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Elle repose sur l'utilisation de maillages non uniformes générés aléatoirement, contrairement aux méthodes traditionnelles qui utilisent des grilles régulières. Cette approche permet de mieux capturer les comportements complexes des solutions numériques, notamment dans des domaines où les variations sont irrégulières.

1 Principes fondamentaux de la méthode SM

Les étapes générales de la méthode SM incluent la génération aléatoire du maillage, l'application des différences finies sur ce maillage et l'itération pour obtenir la solution numérique.

1/ **Maillage aléatoire** : *Au lieu d'utiliser des pas d'intégration fixes, la méthode SM génère des maillages dont les tailles sont déterminées aléatoirement (les pas de discrétisation du domaine ne sont pas constants), ([\[3\]](#)).*

2/ **Méthode des différences finies** : *La méthode SM s'appuie sur la méthode des différences finies pour discrétiser les EDP, en appliquant les équations aux points du maillage généré.*

3/ **Itération** : *Le calcul de la solution numérique en tout point de la grille aléatoire.*

La mise en œuvre de la méthode SM nécessite des compétences en programmation, notamment en MATLAB.

2 Applications de la méthode SM

La méthode SM a été appliquée avec succès dans divers domaines scientifiques et techniques, notamment :

- * Équations différentielles fractionnaires ([4]) : Pour modéliser des phénomènes complexes où les dérivées d'ordre non entier sont pertinentes.
- * Équation de la chaleur stationnaire bidimensionnelle (équation de Laplace) ([2]) : Utilisée pour modéliser la répartition de température dans un domaine donné, lorsque cette répartition ne change pas dans le temps (régime stationnaire). Par exemple : la conduction thermique dans les solides, la distribution de pression ou de vitesse dans des écoulements bidimensionnels, et la diffusion anisotrope ou les interpolations d'images.
- * Équations de Poisson ([3]) : Utilisées en électrostatique, mécanique des fluides et autres domaines de la physique.

3 Résolution numérique de l'équation de la chaleur instationnaire par la méthode SM

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la méthode SM pour résoudre numériquement l'équation de la chaleur instationnaire dans un domaine unidimensionnel.

Considérons le problème :

$$(P) : \begin{cases} U_t(x, t) = U_{xx}(x, t), \text{ pour } x \in]0, L[\text{ et } t \in]0, T], & (E) \\ U(0, t) = U(L, t) = 0, & (C1) \\ U(x, 0) = f(x), & (C2) \end{cases}$$

où la fonction $U(x, t)$ qui modélise le flux de chaleur, solution du problème (P) est supposée assez régulière.

1/ **Maillage aléatoire** : Nous divisons l'intervalle $[0, L]$ en N sous-intervalles irréguliers en choisissant une grille aléatoire,

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x} = L.$$

Soit trois points voisins x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , les espacements sont :

$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i \text{ et } h_i = x_i - x_{i-1} \text{ avec } h_i \neq h_{i+1}.$$

2/ Discrétisation des dérivées partielles : À l'aide d'un développement de Taylor, nous avons

$$U(x_{i+1}, t_j) = U(x_i, t_j) + h_{i+1}U_x(x_i, t_j) + \frac{h_{i+1}^2}{2}U_{xx}(x_i, t_j) + \mathcal{O}(h_{i+1}^3)$$

et

$$U(x_{i-1}, t_j) = U(x_i, t_j) - h_iU_x(x_i, t_j) + \frac{h_i^2}{2}U_{xx}(x_i, t_j) + \mathcal{O}(h_i^3).$$

Ce qui implique

$$\frac{U(x_{i+1}, t_j) - U(x_i, t_j)}{h_{i+1}} \simeq U_x(x_i, t_j) + \frac{h_{i+1}}{2}U_{xx}(x_i, t_j)$$

et

$$\frac{U(x_i, t_j) - U(x_{i-1}, t_j)}{h_i} \simeq U_x(x_i, t_j) - \frac{h_i}{2}U_{xx}(x_i, t_j).$$

D'où,

$$U_{xx}(x_i, t_j) \simeq \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left[\frac{U(x_{i+1}, t_j) - U(x_i, t_j)}{h_{i+1}} - \frac{U(x_i, t_j) - U(x_{i-1}, t_j)}{h_i} \right].$$

Ainsi,

$$U_{xx}(x_i, t_j) \simeq \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left[\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h_{i+1}} - \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h_i} \right]. \quad (3.1)$$

Pour discrétiser le domaine temporel, nous choisissons des instants $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t}$ et les pas

$$k_j = t_{j+1} - t_j, \quad j = \overline{1, \dots, N_t}.$$

La dérivée temporelle $U_t(x, t)$ est approximée par une différence finie progressive,

$$U(x_i, t_{j+1}) = U(x_i, t_j) + k_j U_t(x_i, t_j) + \mathcal{O}(k_j^2).$$

Cela implique,

$$U(x_i, t_{j+1}) - U(x_i, t_j) = k_j U_t(x_i, t_j) + \mathcal{O}(k_j^2).$$

Ainsi,

$$U_t(x_i, t_j) \simeq \frac{U(x_i, t_{j+1}) - U(x_i, t_j)}{k_j}.$$

Nous avons donc,

$$U_t(x_i, t_j) \simeq \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k_j} \quad (3.2)$$

3/ Discretisation du problème (P) : En substituant les approximations (3.1) et (3.2) dans l'équation principale du problème (P), nous obtenons

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k_j} = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left[\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h_{i+1}} - \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h_i} \right].$$

En discrétisant les conditions aux limites et les conditions initiales (C1), (C2), et (C3) respectivement, nous obtenons

$$U_0^j = U_N^j = 0 \text{ et } U_i^0 = f_i.$$

Le schéma numérique du problème (P) est donc,

$$\begin{cases} \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k_j} = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left[\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h_{i+1}} - \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h_i} \right], \forall i = \overline{1, \dots, N_x - 1} \text{ et } \forall j = \overline{1, \dots, N_t} & (E) \\ U_0^j = U_N^j = 0, \quad \forall j = \overline{0, \dots, N_t} & (C1) \\ U_i^0 = f_i, \quad \forall i = \overline{0, \dots, N_x} & (C2) \end{cases} \quad (3.3)$$

4/ La forme matricielle du problème (P) : De l'équation principale du schéma numérique (E), nous calculons le terme U_i^{j+1} pour tout $i = \overline{1, \dots, N_x - 1}$ en fonction de son précédent U_i^j ,

$$U_i^{j+1} = \frac{\beta_{i,j}}{h_{i+1}} U_{i+1}^j + \left(1 - \frac{\beta_{i,j}}{h_{i+1}} - \frac{\beta_{i,j}}{h_i} \right) U_i^j + \frac{\beta_{i,j}}{h_i} U_{i-1}^j$$

où

$$\beta_{i,j} = \frac{2k_j}{h_{i+1} + h_i},$$

le vecteurs U_i^j et U_i^{j+1} sont définis par :

$$U_i^j = \begin{pmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^j \end{pmatrix}, \quad U_i^{j+1} = \begin{pmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^{j+1} \end{pmatrix}.$$

Enfin, le schéma numérique de l'équation (E) s'écrit sous la forme matricielle

$$U_i^{j+1} = AU_i^j.$$

Pour $i = 1$:

$$U_1^{j+1} = \frac{\beta_{1,j}}{h_2} U_2^j + \left(1 - \frac{\beta_{1,j}}{h_2} - \frac{\beta_{1,j}}{h_1}\right) U_1^j + \frac{\beta_{1,j}}{h_1} U_0^j.$$

Pour $i = 2$:

$$U_2^{j+1} = \frac{\beta_{2,j}}{h_3} U_3^j + \left(1 - \frac{\beta_{2,j}}{h_3} - \frac{\beta_{2,j}}{h_2}\right) U_2^j + \frac{\beta_{2,j}}{h_2} U_1^j.$$

Pour $i = N_x - 1$:

$$U_{N_x-1}^{j+1} = \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x}} U_{N_x}^j + \left(1 - \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x}} - \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x-1}}\right) U_{N_x-1}^j + \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x-1}} U_{N_x-2}^j.$$

Ainsi, la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{1,j}}{h_1} & 1 - \frac{\beta_{1,j}}{h_2} - \frac{\beta_{1,j}}{h_1} & \frac{\beta_{1,j}}{h_2} & & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{2,j}}{h_2} & 1 - \frac{\beta_{2,j}}{h_3} - \frac{\beta_{2,j}}{h_2} & \frac{\beta_{2,j}}{h_3} & 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & 0 & & & & & & & \\ \vdots & 0 & & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 \dots & \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x-1}} & 1 - \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x}} - \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x-1}} & \frac{\beta_{N_x-1,j}}{h_{N_x}} \end{pmatrix}$$

5/ Convergence améliorée de la solution numérique : Les maillages aléatoires permettent une adaptation plus flexible aux caractéristiques locales du problème. De plus, la taille des pas dans le processus itératif peut être ajustée dynamiquement, ce qui favorise une convergence plus rapide en évitant des ajustements trop fins ou trop grossiers.

Exemple d'une équation de la chaleur non stationnaire

Dans ce chapitre, nous présentons une application pratique des méthodes numériques étudiées précédemment pour résoudre l'équation de la chaleur unidimensionnelle non stationnaire. L'objectif est de comparer la méthode classique des différences finies à la méthode SM, à l'aide d'un exemple dont la solution exacte est connue.

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_t(x, t) = U_{xx}(x, t), \text{ pour } x \in]0, L[\text{ et } t \in]0, T], & (E) \\ U(0, t) = U(L, t) = 0, & (C1) \\ U(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), & (C2) \end{array} \right. \quad (0.1)$$

La solution exacte de $(E + C1)$ est :

$$U(x, t) = \sum_{n \geq 1} K_n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}, \quad K_n \in \mathbb{R}.$$

En vérifiant la condition initiale $(C2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= \sum_{n \geq 1} K_n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

D'où

$$K_1 = 1 \text{ et } K_n = 0, \quad \forall n > 1.$$

Finalement,

$U(x, t) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).$

Cette solution nous permet de comparer la précision des méthodes numériques mises en œuvre. La première est la méthode des différences finies classiques, qui repose sur un schéma explicite bien connu, avec un maillage uniforme en espace et en temps. La seconde est une méthode des différences finies innovée par Sanaullah Mastoi, qui utilise un schéma basé sur un maillage aléatoire en espace et en temps.

1 Maillage uniforme et maillage aléatoire

Les figures ci-dessous obtenues à l'aide d'un code Matlab (voir Annexe 1) représentent quelques cas de grilles uniformes et de grille aléatoires :

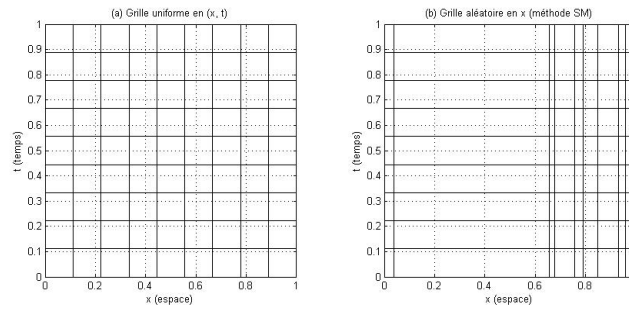


Figure 4 : 10×10 points

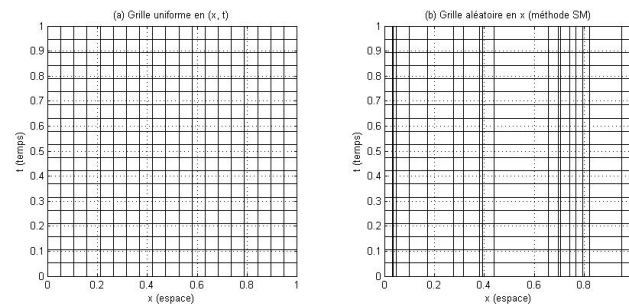
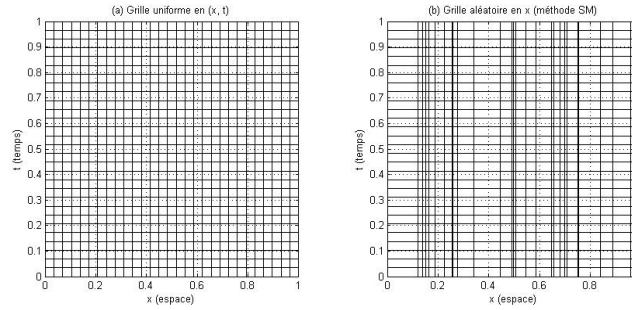


Figure 5 : 20×20 points

Figure 6 : 30×30 points

2 Solution numérique de l'équation de la chaleur non stationnaire

1/ Le schéma numérique du problème (0.1) par la méthode des différences finies avec un maillage uniforme

$$\begin{aligned}
 U_i^{j+1} &= \alpha U_{i+1}^j + (1 - 2\alpha)U_i^j + \alpha U_{i-1}^j, \quad \forall i = \overline{1, \dots, n_x} \text{ et } \forall j = \overline{1, \dots, n_t + 1} & (E) \\
 U_0^j &= U_{n_x+1}^j = 0, \quad \forall j = \overline{0, \dots, n_t + 1} & (C1) \\
 U_i^0 &= f_i, \quad \forall i = \overline{0, \dots, n_x + 1} & (C2)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les figures ci-dessous représentent les graphes de la solution exacte et la solution numérique du problème (0.1) discrétisée sur une grille uniforme de 20×20 points.

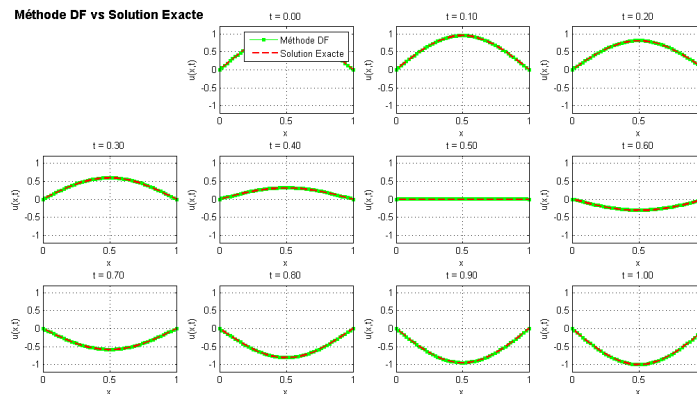


Figure 7 : Solution exacte et solution numérique (DF)

2/ Le schéma numérique du problème (0.1) par la méthode des différences finies avec un maillage aléatoire (méthode SM)

$$\begin{cases} U_i^{j+1} = \frac{2k_j}{(h_{i+1}+h_i)h_{i+1}} U_{i+1}^j + \left[1 - \frac{2k_j}{(h_{i+1}+h_i)h_{i+1}} - \frac{2k_j}{(h_{i+1}+h_i)h_i} \right] U_i^j + \frac{2k_j}{(h_{i+1}+h_i)h_i} U_{i-1}^j & (E) \\ U_0^j = U_{N_x}^j = 0, \quad \forall j = 0, \dots, N_t & (C1) \\ U_i^0 = f_i, \quad \forall i = 0, \dots, N_x & (C2) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les figures ci-dessous représentent les graphes de la solution exacte et la solution numérique du problème (0.1) discrétisée sur une grille aléatoire de 20×20 points.

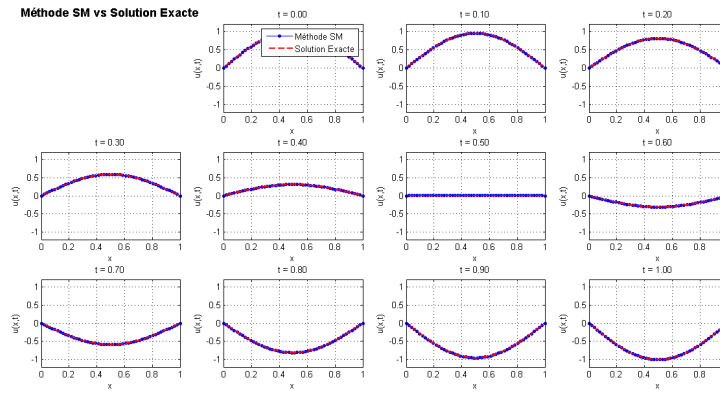


Figure 8 : Solution exacte et solution numérique (SM)

Remarque 2.1 Les calculs ont été effectués avec un maillage composé de 20 points dans l'espace. Le pas de temps a été choisi suffisamment petit pour assurer la stabilité des deux méthodes. Il est clair que les deux méthodes reproduisent bien la solution exacte, avec toutefois quelques écarts visibles selon les instants et la densité du maillage.

3 Convergence de la solution numérique de l'équation de la chaleur non stationnaire

À l'aide d'un code Matlab (voir Annexe 5), nous avons calculé les erreurs commises lors de la résolution numérique du problème (0.1) à l'aide des deux méthodes : les différences finies (DF) sur une grille uniforme et la méthode SM. Les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-dessous.

t	$RMSE\ SM$	$Erreur\ max\ SM$	$RMSE\ DF$	$Erreur\ max\ DF$
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.000010	0.000014	0.001709	0.002440
0.2	0.000038	0.000055	0.003270	0.004668
0.3	0.000079	0.000113	0.004527	0.006462
0.4	0.000124	0.000177	0.005353	0.007641
0.5	0.000163	0.000232	0.005662	0.008081
0.6	0.000186	0.000265	0.005416	0.007731
0.7	0.000184	0.000263	0.004634	0.006615
0.8	0.000153	0.000218	0.003387	0.004834
0.9	0.000091	0.000129	0.001792	0.002558
1.00	0.000000	0.000000	0.000003	0.000004

où $RMSE$ est l'erreur quadratique moyenne.

Les graphes d'erreur sont présentés dans la figure 9.

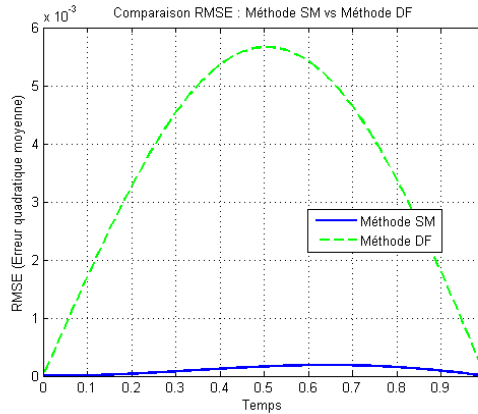


Figure 9 : Graphes d'erreur

Les graphes d'erreur confirment visuellement la supériorité de la méthode SM en termes de précision. Ainsi, la méthode SM constitue une alternative très intéressante aux approches classiques pour la résolution numérique de l'équation de la chaleur.

Cette étude numérique montre que la méthode SM offre une précision supérieure à celle de la méthode des différences finies, tout en nécessitant un nombre réduit de points de calcul. Cela en fait une méthode particulièrement avantageuse lorsque l'on cherche à réduire les coûts de calcul tout en conservant une bonne exactitude. Elle est donc particulièrement adaptée aux problèmes où la précision est primordiale et les ressources limitées.

CONCLUSION

Ce mémoire a été consacré à l'étude de la résolution numérique de l'équation de la chaleur unidimensionnelle, une équation aux dérivées partielles fondamentale dans la modélisation de phénomènes de diffusion thermique. Après avoir rappelé les notions de base et les propriétés analytiques de cette équation, nous avons présenté différentes approches numériques permettant d'obtenir des solutions approchées lorsque la solution exacte est difficile, voire impossible, à déterminer.

Nous avons tout d'abord étudié la méthode classique des différences finies, en mettant en œuvre un schéma explicite. Cette méthode, bien que simple à implémenter et largement utilisée, présente certaines limitations, notamment en termes de stabilité et de précision sur des maillages non uniformes ou pour des temps de calcul plus longs. Afin de surmonter certaines de ces limitations, nous avons ensuite appliqué la méthode SM (Sanaullah Mastoi), une technique plus récente qui repose sur une construction différente des approximations et se révèle particulièrement efficace pour améliorer la précision, même sur des maillages non uniformes. Les comparaisons numériques réalisées dans ce travail ont montré que la méthode SM offre de meilleurs résultats en termes d'erreur numérique, tout en restant relativement simple à implémenter. Ainsi, la méthode SM constitue une alternative prometteuse aux méthodes classiques pour la résolution de l'équation de la chaleur. Elle mérite d'être approfondie et étendue à d'autres types d'équations aux dérivées partielles, notamment en dimension supérieure ou dans des contextes plus complexes.

Pour conclure, ce travail ouvre plusieurs perspectives, notamment l'étude de la stabilité et de la convergence rigoureuse de la méthode SM, son application à des problèmes avec conditions aux limites non homogènes ou encore son extension à des équations non linéaires.

Bibliographie

- [1] B. Lucquin, Equations aux Dérivées partielles et leurs Approximations, Ellips, (2004).
- [2] S. Mastoi, A.B.Ganie, A.M.Saeed, U.Ali, U.A.Rajput, W.A.M Othman, Numerical, Solution for Two-dimensionnal Partial Differential Equation Using SM' Methode, Open Physics, 20, (142-154), (2004).
- [3] S. Mastoi, N.B. Kalhor, S. A. Rajput, W. A. M. Othman, K. Nallasamy, A Simple Introduction to the SM's Method, Sciencetech, Vol 3, Issue (2), 42-43, (2022).
- [4] S. Mastoi, W. A. M. Othman, K. Nallasamy, Numerical Solution of Second order Fractional PDE's by using Finite difference Method over randomly generated grids, International Journal of Advanced Science and Technology, Vol 29, 373-381, (2020).
- [5] S. Mastoi, Finite Difference Method on Randomly Generated Non-Uniform Meshes for Poisson Equation, PQDT-Global, University of Malaya (Malaysia), (2021).
- [6] G. D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods (Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series), 3rd Edition, (1986).
- [7] M.H. Vignal, Cours Equations aux Dèrivées Partielles Elliptiques et Paraboliques en Master 1 Mathématiques fondamentales, (2003-2008).
- [8] Ch. j. Zarowski, An Introduction to Numerical Analysis for Electrical and Computer Engineers, John Wiley & Sons, University of Alberta, Canada, (2004).

ANNEXE 1 : MAILLAGE UNIFORME ET MAILLAGE ALEATOIRE

```
% Paramètres du domaine
L = 1; % Longueur de la barre (x)
T = 1; % Temps final
Nx = 20; % Nombre de points spatiaux
Nt = 20; % Nombre de points temporels
%% (a) Grille UNIFORME en (x, t)
x_uniform = linspace(0, L, Nx);
t_uniform = linspace(0, T, Nt);
[Xu, Tu] = meshgrid(x_uniform, t_uniform); % Grille régulière (x,t)
%% (b) Grille ALÉATOIRE en x, uniforme en t
x_random = sort(rand(1, Nx-2)); % Points intérieurs aléatoires
x_random = [0, x_random, 1]; % Ajout des bornes x = 0 et x = 1
[Xr, Tr] = meshgrid(x_random, t_uniform); % Grille (x aléatoire, t régulier)
%% AFFICHAGE des deux grilles dans une seule figure
figure;
% (a) Grille uniforme
subplot(1,2,1)
plot(Xu, Tu, 'k'); hold on;
plot(Xu', Tu', 'k');
title('(a) Grille uniforme en (x, t)');
xlabel('x (espace)'); ylabel('t (temps)');
axis([0 1 0 T]); axis equal tight; grid on;
% (b) Grille aléatoire en x
subplot(1,2,2)
plot(Xr, Tr, 'k'); hold on;
plot(Xr', Tr', 'k');
```

```
title('(b) Grille aléatoire en x (méthode SM)');  
xlabel('x (espace)'); ylabel('t (temps)');  
axis([0 1 0 T]); axis equal tight; grid on;  
% Taille de la figure  
set(gcf, 'Position', [100 100 1000 400]);
```

ANNEXE 2 : LA RESOLUTION NUMERIQUE DF

```
% Résolution 1D de l'équation de la chaleur  $U_t = U_{xx}$  (schéma explicite)
L = 1; % longueur du domaine [0,L]
T = 1; % temps final
Nx = 50; % nombre de sous-intervalles spatiaux
dx = L/Nx; % pas spatial
dt = 0.0002; % pas temporel (choisi pour satisfaire la stabilité)
r = dt/dx^2; % paramètre numérique (doit être  $\leq 0.5$  pour stabilité)
% Coordonnées spatiales et temporelles
x = linspace(0, L, Nx+1)'; % vecteur des mailles spatiales  $x_i$ 
Nt = round(T/dt); % nombre de pas de temps (arrondi)
t = linspace(0, T, Nt+1); % vecteur temps  $t^n$ 
% Initialisation de la solution numérique  $U(i,n)$ 
U = zeros(Nx+1, Nt+1); % matrice  $(i,n)$  initialisée à zéro
% Condition initiale  $U(x,0) = \sin(\pi x)$ 
U(:,1) = sin(pi * x);
% Boucle en temps du schéma explicite
for n = 1:Nt
    % Conditions aux bords (Dirichlet homogènes)
    U(1,n) = 0; %  $i=0$ 
    U(Nx+1,n) = 0; %  $i=Nx$ 
    % Calcul de  $U(:,n+1)$  pour  $i=1..Nx-1$ 
    for i = 2:Nx
        U(i,n+1) = U(i,n) + r * ( U(i+1,n) - 2*U(i,n) + U(i-1,n) );
    end
end
```

```

% Calcul de la solution exacte et de l'erreur à chaque pas
U_exact = zeros(Nx+1, Nt+1);
for n = 1 :Nt+1
    U_exact(:,n) = exp(-pi^2 * t(n)) * sin(pi * x);
end
% Erreur max. (norme infinie) entre solution numérique et exacte
err = max(abs(U - U_exact), [], 1);
% Visualisation des résultats
% 1) Solution numérique en fonction de (x,t) (par exemple avec imagez ou mesh)
figure;
imagesc(t, x, U); % ou pcolor/mesh selon préférence
colorbar;
xlabel('Temps t'); ylabel('Position x');
title('Solution numérique U(x,t) (schéma explicite)');
% 2) Graphique de l'erreur maximale vs t
figure;
plot(t, err, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Temps t'); ylabel('Erreur max');
title('Erreur |U_{num} - U_{exact}| en fonction du temps');
grid on;
% Comparaison DF / solution exacte à l'instant final t = T
figure;
plot(x, U(:,end), 'b-o', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(x, U_exact(:,end), 'r-', 'LineWidth', 1.5);
legend('Solution numérique (DF)', 'Solution exacte', 'Location', 'northeast');
xlabel('Position x'); ylabel('Température u(x,T)');
title(['Comparaison DF vs exacte à t = ', num2str(T)]);
grid on;

```

ANNEXE 3 : LA RESOLUTION NUMERIQUE SM

```
L = 1; % Longueur spatiale
T = 1; % Temps final
Nx = 50; % Nombre de points spatiaux
Nt = 200; % Nombre de pas temporels
dx = L / (Nx+1);
dt = T / Nt;
c = 1;
r = c * dt / dx; % Nombre de Courant (CFL)
x = linspace(0, L, Nx+2)';
t_vec = 0 :0.1 :T; % Instants d'affichage
t_indices = round(t_vec / dt) + 1;
% Conditions initiales
u0 = sin(pi * x); % u(x,0)
v0 = zeros(size(x)); % ut(x,0)
% Solution exacte
uexact = @(x,t) sin(pi*x) .* cos(pi*t);
% Initialisation de la solution numérique (Méthode SM)
u_SM = zeros(Nx+2, Nt+1); % Matrice solution SM
% Conditions initiales
u_SM(:,1) = u0;
% Calcul de u(:,2) via Euler explicite (initialisation pour SM)
for i = 2 :Nx+1
    u_SM(i,2) = u0(i) + dt*v0(i) + 0.5*(r^2)*(u0(i+1) - 2*u0(i) + u0(i-1));
end
% Boucle temporelle (Méthode SM)
for n = 2 :Nt
```

```

for i = 2 :Nx+1
u_SM(i,n+1) = 2*u_SM(i,n) - u_SM(i,n-1) + r^2*(u_SM(i+1,n) - 2*u_SM(i,n) + u_SM(i-1,n));
end
% Conditions de Dirichlet homogènes
u_SM([1,end],n+1) = 0;
end
% Calcul de l'erreur globale (RMSE)
rmse_SM = zeros(1, Nt+1);
for n = 1 :Nt+1
u_ex = uexact(x, (n-1)*dt);
rmse_SM(n) = sqrt(mean((u_SM( :,n) - u_ex).^2));
end
% Tracé de l'erreur RMSE en fonction du temps
figure;
plot(0 :dt :T, rmse_SM, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Temps'); ylabel('RMSE');
title('Erreur quadratique moyenne (RMSE) - Méthode SM');
grid on;
% Affichage graphique : Méthode SM vs Solution Exacte
figure('Units','normalized','Position',[0.05 0.1 0.9 0.8]);
% Titre global personnalisé (compatible avec toutes les versions)
subplot(3,4,1);
title('Méthode SM vs Solution Exacte', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
axis off; % Désactive les axes pour ce subplot
% Réinitialise les subplots normaux à partir de k=2
for k = 1 :length(t_vec)
t_k = t_vec(k);
j = t_indices(k);
subplot(3,4,k+1); % On commence à k+1 car k=1 est utilisé pour le titre

```

```

plot(x, u_SM(:,j), 'b-o', 'MarkerFaceColor', 'b', 'MarkerSize', 4, 'LineWidth', 1.2); hold on;
plot(x, uexact(x, t_k), 'r-', 'LineWidth', 1.5);
title(sprintf('t = %.2f', t_k), 'FontSize', 10);
xlabel('x'); ylabel('u(x,t)');
ylim([-1.2 1.2]);
grid on;
if k == 1
legend('Méthode SM', 'Solution Exacte', ...
'Location', 'bestoutside', 'FontSize', 9);
end
end
% Tableau comparatif dans la console
fprintf('Comparaison Méthode SM vs Solution Exacte à chaque instant :\n\n');
fprintf(' t | RMSE SM | Valeur max erreur\n');
fprintf('-----\n');
for k = 1 :length(t_vec)
t_k = t_vec(k);
j = t_indices(k);
rms_sm = rmse_SM(j);
u_ex = uexact(x, t_k);
max_err = max(abs(u_SM(:,j) - u_ex));
fprintf(' %.2f | %.6f | %.6f\n', t_k, rms_sm, max_err);
end

```

ANNEXE 4 : COMPARAISON DF ET SM

```
clc;
clear;
close all;
% Paramètres
L = 1; % Longueur spatiale
T = 1; % Temps final
Nx = 50; % Nombre de points spatiaux
Nt = 200; % Nombre de pas temporels
dx = L / (Nx+1);
dt = T / Nt;
c = 1;
r = c * dt / dx; % Nombre de Courant (CFL)
x = linspace(0, L, Nx+2)';
t_vec = 0 : 0.1 : T; % Instants d'affichage
t_indices = round(t_vec / dt) + 1;
% Conditions initiales
u0 = sin(pi * x); % u(x,0)
v0 = zeros(size(x)); % ut(x,0)
% Solution exacte
uexact = @(x,t) sin(pi*x) .* cos(pi*t);
% Initialisation de la solution numérique (Méthode DF - Euler explicite)
u_DF = zeros(Nx+2, Nt+1); % Matrice solution DF
% Conditions initiales
u_DF(:,1) = u0;
u_DF(:,2) = u0 + dt * v0; % Initialisation pour schéma à deux niveaux
% Boucle temporelle (schéma explicite - DF)
```

```

for n = 2 :Nt
for i = 2 :Nx+1
u_DF(i,n+1) = 2*u_DF(i,n) - u_DF(i,n-1) + r^2*(u_DF(i+1,n) - 2*u_DF(i,n) + u_DF(i-1,n));
end
% Conditions de Dirichlet homogènes
u_DF([1,end],n+1) = 0;
end
% Calcul de l'erreur globale (RMSE)
rmse_DF = zeros(1, Nt+1);
for n = 1 :Nt+1
u_ex = uexact(x, (n-1)*dt);
rmse_DF(n) = sqrt(mean((u_DF(:,n) - u_ex).^2));
end
% Tracé de l'erreur RMSE en fonction du temps
figure;
plot(0 :dt :T, rmse_DF, 'g-', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Temps'); ylabel('RMSE');
title('Erreur quadratique moyenne (RMSE) - Méthode DF');
grid on;
% Affichage graphique : Méthode DF vs Solution Exacte
figure('Units','normalized','Position',[0.05 0.1 0.9 0.8]);
% Titre global personnalisé (compatible avec toutes les versions)
subplot(3,4,1);
title('Méthode DF vs Solution Exacte', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
axis off; % Désactive les axes pour ce subplot
% Réinitialise les subplots normaux à partir de k=2
for k = 1 :length(t_vec)
t_k = t_vec(k);
j = t_indices(k);

```

```

subplot(3,4,k+1); % On commence à k+1 car k=1 est utilisé pour le titre
plot(x, u_DF( :,j), 'g-s', 'MarkerFaceColor', 'g', 'MarkerSize', 4, 'LineWidth', 1.2); hold on;
plot(x, uexact(x, t_k), 'r-', 'LineWidth', 1.5);
title(sprintf('t = %.2f', t_k), 'FontSize', 10);
xlabel('x'); ylabel('u(x,t)');
ylim([-1.2 1.2]);
grid on;
if k == 1
legend('Méthode DF', 'Solution Exacte', ...
'Location', 'bestoutside', 'FontSize', 9);
end
end
% Tableau comparatif dans la console
fprintf('Comparaison Méthode DF vs Solution Exacte à chaque instant :\n\n');
fprintf(' t | RMSE DF | Valeur max erreur\n');
fprintf('-----\n');
for k = 1 :length(t_vec)
t_k = t_vec(k);
j = t_indices(k);
rms_df = rmse_DF(j);
u_ex = uexact(x, t_k);
max_err = max(abs(u_DF( :,j) - u_ex));
fprintf(' %.2f | %.6f | %.6f\n', t_k, rms_df, max_err);
end

```

ANNEXE 5 : LES ERREURS DE SM ET DF

```
clc;
clear;
close all;
% Paramètres
L = 1; % Longueur spatiale
T = 1; % Temps final
Nx = 50; % Nombre de points spatiaux
Nt = 200; % Nombre de pas temporels
dx = L / (Nx+1);
dt = T / Nt;
c = 1;
r = c * dt / dx; % Nombre de Courant (CFL)
x = linspace(0, L, Nx+2)';
t_vec = 0 : 0.1 : T; % Instants d'affichage
t_indices = round(t_vec / dt) + 1;
% Conditions initiales
u0 = sin(pi * x); % u(x,0)
v0 = zeros(size(x)); % ut(x,0)
% Solution exacte
uexact = @(x,t) sin(pi*x) .* cos(pi*t);
% Initialisation des solutions numériques
u_SM = zeros(Nx+2, Nt+1); % Méthode SM
u_DF = zeros(Nx+2, Nt+1); % Méthode DF
% Conditions initiales communes
u_SM(:,1) = u0;
u_DF(:,1) = u0;
```

```

% Initialisation pour SM : Euler explicite pour u( :,2)
for i = 2 :Nx+1
u_SM(i,2) = u0(i) + dt*v0(i) + 0.5*(r^2)*(u0(i+1) - 2*u0(i) + u0(i-1));
end
% Pour DF : initialisation avec Euler explicite
u_DF( :,2) = u0 + dt*v0;
% Boucle temporelle
for n = 2 :Nt
% Méthode SM
for i = 2 :Nx+1
u_SM(i,n+1) = 2*u_SM(i,n) - u_SM(i,n-1) + r^2*(u_SM(i+1,n) - 2*u_SM(i,n) + u_SM(i-1,n));
end
u_SM([1,end],n+1) = 0;
% Méthode DF
for i = 2 :Nx+1
u_DF(i,n+1) = 2*u_DF(i,n) - u_DF(i,n-1) + r^2*(u_DF(i+1,n) - 2*u_DF(i,n) + u_DF(i-1,n));
end
u_DF([1,end],n+1) = 0;
end
% Calcul de l'erreur globale (RMSE)
rmse_SM = zeros(1, Nt+1);
rmse_DF = zeros(1, Nt+1);
for n = 1 :Nt+1
u_ex = uexact(x, (n-1)*dt);
rmse_SM(n) = sqrt(mean((u_SM( :,n) - u_ex).^2));
rmse_DF(n) = sqrt(mean((u_DF( :,n) - u_ex).^2));
end
% Tracé des deux erreurs sur le même graphe

```

```

figure;
plot(0 :dt :T, rmse_SM, 'b-', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(0 :dt :T, rmse_DF, 'g-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
xlabel('Temps');
ylabel('RMSE (Erreur quadratique moyenne)');
title('Comparaison RMSE : Méthode SM vs Méthode DF');
legend('Méthode SM', 'Méthode DF', 'Location', 'best');
hold off;

% Tableau comparatif dans la console
fprintf('Comparaison RMSE : Méthode SM vs Méthode DF\n\n');
fprintf(' t | RMSE SM | RMSE DF | SM meilleure?\n');
fprintf('-----\n');
for k = 1 :length(t_vec)
    t_k = t_vec(k);
    j = t_indices(k);
    rms_sm = rmse_SM(j);
    rms_df = rmse_DF(j);
    if rms_sm < rms_df
        reponse = 'Oui';
    else
        reponse = 'Non';
    end
    fprintf(' %.2f | %.6f | %.6f | %s\n',...
        t_k, rms_sm, rms_df, reponse);
end

```

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم -
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية
لإنجاز البحث

أنا الممضي أدناه،
الطالب(ة): ز. بن شويبة
الجامعي: 370.28.6.5.2
الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم: 163021520004
والصادرة بتاريخ: 11.0.0.2.0
عن بلدية جرد بن
المسجل ب: كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي / قسم:
شعبة: / التخصص:
modélisation contrôle
et optimisation

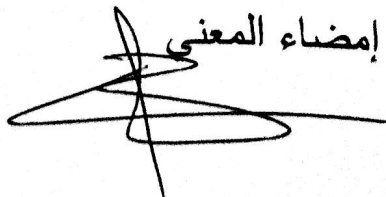
والمكلف بإنجاز مذكرة ماستر بعنوان:

Résolution numérique de l'équation

de Poisson

أصرح بشرفي أنني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات العلمية
والنزاهة الأكاديمية المطلوبة في إنجاز البحث ، وأتحمل المسؤولية الشخصية عن كل
المحتوى المتضمن في البحث المذكور أعلاه .

التاريخ: 30.1.0.6.1.2023
إمضاء المعني



* ملحق القرار الوزاري رقم 933 المؤرخ في 28 جويلية 2016 الذي يحدد القواعد المتعلقة بالوقاية من السرقة العلمية ومكافحتها.