



UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM ABDELHAMID IBN BADIS
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

THÈSE

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM ABELHAMID IBN BADIS

Spécialité

Mathématiques

Option : Analyse Harmonique et Équations aux Dérivées Partielles

Présentée par

Souâad LAZERGUI

Titre :

**Expression asymptotique de la solution de l'équation
de Helmholtz sur un obstacle convexe
à haute fréquence**

soutenue publiquement le 21/06/2018 devant le jury composé de :

Président : M. Mohand OULD ALI	MCA	UMAB.
Examineur : M. Berabah BENDOUKHA	Professeur	Univ-Tissemsilt.
Examineur : M. Bekkai MESSIRDI	Professeur	ENSGEE-Oran.
Encadreur : M. Sidi Mohamed BAHRI	Professeur	UMAB.
Co-encadreur : M. Yassine BOUBENDIR	Professeur	NJIT-USA.

REMERCIEMENTS

Je suis vraiment convaincue qu'une thèse de doctorat est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un certain nombre de personnes.

Il y a six ans, je recevais un mail de la part Monsieur le Professeur **Yassine BOUBENDIR** pour la première fois. Il m'avait proposé le sujet sur lequel je travaille maintenant. Je me souvenais, il m'avait dit que ce sujet de recherche dont il venait de me le proposer était difficile. J'étais vraiment excité de travailler sur ce projet de recherche dans le but d'avoir des résultats intéressants sur un tel sujet d'actualité. Je venais de rencontrer une personne profondément humaine qui a fait exaucer mes vœux. Trois ans plus tard, il m'accueillait au sein de l'*institut de Technologie de New Jersey* au USA. Nos rencontres se firent alors plus fréquentes et nous commençâmes à travailler ensemble sur mon sujet de thèse et bien d'autres sujet en rapport. Il m'accorda toujours sa confiance, il a sut me rassurer et m'encourager. Ses idées et sa motivation était toujours le moteur de notre réussite. Durant nos nombreuses réunions et séances de travail, j'ai pu profiter de son expérience dont je confirme les tonnes d'idées et de notions appris lors de nos discussions. J'aurais en outre eu, grâce à lui, l'opportunité d'approfondir mes connaissances mathématiques et de pouvoir garder la confiance en mes capacités. C'est donc avec un grand respect, une profonde amitié et une immense gratitude que je remercie Monsieur le Professeur **Yassine BOUBENDIR** d'être mon directeur de recherche et pour tous ses encouragements. Je tiens aussi à remercier sa femme qui était toujours derrière moi comme une sœur. Elle a sut m'encourager en tout moment.

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Monsieur le Professeur **Sidi Mohamed BAHRI** pour la confiance qu'il m'accorde en acceptant d'être

mon encadreur à l'Université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié son soutien.

Je souhaiterais exprimer mes plus vifs remerciements et ma plus grande gratitude à Monsieur le Professeur **Omar BELHAMITI** pour ses multiples conseils et ses orientations. Il était toujours à mes côtés en tous moments. Je lui remercie pour toutes les heures qu'il a consacré à me diriger, à me soutenir et à m'encourager. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de mes années d'études.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux à tous ceux qui jouent un rôle important pour que je puisse soutenir, je commence par :

Monsieur le Doyen de la Faculté des Sciences Exactes et de Informatique, Monsieur le Professeur **Houari BELMEKKI**, je lui suis vraiment reconnaissante d'avoir cru en mes capacités.

Monsieur le vice-doyen chargé de la poste de graduation et de la recherche, Monsieur le Professeur **Mohamed El Amine BENMALTI** qui m'a vraiment soutenu et encouragé.

Monsieur le vice-doyen chargé d'études et de la pédagogie, Monsieur le Professeur **Belkacem ABSAR**.

Monsieur le chef de conseil scientifique de la faculté, Monsieur le Professeur **Djillali BOUAGADA**.

Monsieur le chef de conseil scientifique du département, Monsieur le Professeur **Ahmed MEDEGRI**.

Monsieur le chef de département le Docteur **Mohammed Amine GHAZZAR**.

En parallèle, je remercie tous les membres de mon université Abdelhamid Ibn Badis (UMAB) qui m'ont encouragé et soutenu.

Je souhaiterais exprimer ma vive reconnaissance envers Monsieur **Berrabah BENDOUKHA**, Professeur à l'université de Tissemsilt, pour son enthousiasme mathématiques et pour le bagage scientifique qu'il m'avait transmis durant mes cinq années universitaires.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Bekkai MESSIRDI**, Professeur à l'école National Supérieure de Génie Électrique et Énergétique d'Oran et Monsieur **Mohaned OULD ALI**, Professeur à l'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis, pour leurs soutien durant mon travail doctoral et leurs réponses sur mes questions que j'avais pour comprendre quelques ambiguïtés sur le sujet.

Je remercie infiniment ces messieurs d'avoir accepté d'être les examinateurs de cette thèse, ainsi que pour leurs examen attentif de ce travail. Je suis très honorée qu'ils aient pu donner leurs avis des spécialistes sur mon travail de recherche.

Je tiens à remercier Madame **Naima ABLAOUI**, Docteur à l'université de Mostaganem Addelhamid Ibn Badis pour son soutien, son encouragement et pour ses sourires qui me donnaient le courage.

Merci à mes parents pour leurs appui incondtionnel depuis ma naissance, ils m'ont offert plus que tout ce que je pouvais désirer et mériter, et ils jouent un rôle primaire et dominant dans ma vie. Évidement tout ce que j'ai acquis grâce à mon papa et ma maman.

Je remercie ainsi la présence et le soutien de toute ma famille. Merci à mes amies surtout Zineb et Nassima qui m'ont soutenu au long de la thèse.

Je confirme que sans votre soutien ma thèse n'aurait pas été si plaisante !.

En dernier Merci a vous tous.

Souaad

RÉSUMÉ

Expression asymptotique de la solution de l'équation de Helmholtz à haute fréquence sur un obstacle convexe

Dans ce travail, nous nous intéressons à la diffraction des ondes par un obstacle strictement convexe. Notre objectif consiste à déterminer le développement asymptotique du champ diffracté de l'équation de Helmholtz à haute fréquence avec une condition sur le bord laquelle est définie par l'opérateur de Dirichlet to Neumann DtN . Le champ diffracté peut être déterminé en utilisant la méthode des équations intégrale à haute fréquence. Lequel est lié relativement au calcul de l'approche associé à la dérivée normale du champ total sur le bord de l'obstacle.

Les expansions originales ont été obtenues en utilisant la décomposition pseudo-différentielle de l'opérateur DtN au voisinage du point singulier. À partir de cette technique nous obtenons une approximation de Kirchhoff corrigée qui est l'approximation du champ total. Cette approximation est valable seulement dans la région illuminée.

Dans cette thèse, nous utilisons des approximations de premier et second ordre de l'opérateur DtN qui nous permettent d'obtenir des nouvelles expressions asymptotiques de la dérivée normale du champ total. Ces dernières nous aident à produire des approximations de la solution de l'équation de Helmholtz à haute fréquence sur toutes les régions de l'obstacle, et plus précisément autour de l'ombre et la région de l'ombre profonde.

Mots clés : L'équation des ondes, L'équation de Halmholtz, L'opérateur Dirichlet to Neumann, L'opérateur intégrale de Fourier.

ABSTRACT

Asymptotic expression of the Helmholtz equation solution at high frequency on a convex obstacle

This thesis is concerned with new results of the waves diffraction by a strictly convex obstacle. Our objective is to produce the high frequency asymptotic expansion of the Helmholtz equation solution providing a boundary condition given by the Dirichlet to Neumann operator DtN . As it is known, after using the high frequency integral equations method, the scattered field everywhere exterior to the obstacle can be determined by computing the approach associated to the total field on the boundary of the scatterer.

The original expansions were obtained by using the pseudo-differential decomposition of the operator DtN in the neighborhood of singular point this allows M. Taylor and R.B. Melrose to provide a corrected version of the Kirchhoff approximation such it is only available on the illuminated region.

This work uses first and second order approximations of the DtN operator to derive new asymptotic expressions of the normal derivative of the total field. The resulting expansions can be used to appropriately choose the ansatz in the design of high frequency numerical solvers, such as those based on integral equations, in order to produce more accurate approximation of the solutions of the Helmholtz equation on all regions of the obstacle more precisely around the shadow and deep shadow regions .

Keywords : Wave equation, Helmholtz equation, Dirichlet to Neumann operator, Fourier integral operator.

Table des matières

<i>Introduction Générale</i>	11
1. L'étude de la propagation	19
1.1 Introduction	19
1.2 Transformation de Fourier dans \mathcal{S} et \mathcal{S}'	20
1.2.1 Notion de base sur les distributions	21
1.2.2 Transformation de Fourier dans \mathcal{S}'	23
1.3 La méthode de phase stationnaire	26
1.3.1 Le cas non stationnaire	27
1.3.2 Le cas stationnaire	27
1.4 La fonction d'Airy	30
1.4.1 Le développement asymptotique de la fonction d'Airy	32
1.4.2 Quelques estimations de la fonction d'Airy	33
1.5 La solution de L'équation de Helmholtz	34
1.5.1 La formule de Green	34
1.5.2 Le champ lointain	36
2. Les opérateurs intégraux de Fourier et les singularités	38
2.1 Introduction	38
2.2 Rappels de géométrie symplectique	39
2.2.1 Notions de base sur la géométrie symplectique	40
2.2.2 Les relations canoniques et les singularités	42
2.2.3 La fonction génératrice de la transformation canonique	45
2.3 Généralités sur les opérateurs intégraux de Fourier	47
2.3.1 Symboles et fonction de phase	48

2.3.2	Les opérateurs intégraux de Fourier	51
2.3.3	Front d'onde et la propagation des singularités	56
2.4	Les opérateurs intégraux de Fourier associés à des relations de pliage	61
2.5	Les opérateurs de Fourier-Airy	64
3.	<i>L'amplitude de Kirchhoff en utilisant la décomposition de DtN</i>	69
3.1	Introduction	69
3.2	L'étude de propagation d'une onde au voisinage de la région de transition	72
3.3	La décomposition microlocale des opérateurs intégraux de Fourier associés à des relations de pliage	79
3.4	L'amplitude de Kirchhoff a_Q	82
3.5	L'approximation de Kirchhoff Corrigée	85
4.	<i>L'amplitude de Kirchhoff en utilisant les approximations de DtN</i>	88
4.1	Introduction	88
4.2	L'amplitude de Kirchhoff en utilisant l'approximation de DtN d'ordre 1	89
4.2.1	Le noyau de l'opérateur de Kirchhoff κ_Q	90
4.2.2	L'amplitude de Kirchhoff a_Q	96
4.2.3	Quelques estimations de développement asymptotique de a_Q	103
4.3	L'amplitude de Kirchhoff en utilisant l'approximation de DtN d'ordre 2	106
4.3.1	Le noyau de l'opérateur Kirchhoff κ_Q	107
4.3.2	L'amplitude de Kirchhoff a_Q	112
	<i>Conclusion</i>	117
5.	Annexe	119
5.1	La comparaison numérique entre les solutions	119
5.2	L'erreur entre la solution exacte et notre solution	121

NOTATIONS

\mathbb{N}	: L'ensemble des entiers naturels.
\mathbb{Z}	: L'ensemble des entiers relatifs.
\mathbb{R}	: L'ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}_+	: L'ensemble des nombres réels positifs.
\mathbb{R}^n	: L'espace des vecteurs à n composantes réelles.
$T_m(M)$: L'espace tangent à $M \subset \mathbb{R}^n$ au point m .
$T(M)$: Le fibré tangent de $M \subset \mathbb{R}^n$ sachant que $T(M) = \bigcup_{m \in M} T_m(M)$.
$T_m^*(M)$: L'espace dual de $T_m(M)$, il est appelé l'espace cotangent.
$T^*(M)$: Le fibré cotangent de M sachant que $T^*(M) = \bigcup_{m \in M} T_m^*(M)$.
\mathcal{C}^∞ (resp. \mathcal{C}^n)	: L'ensemble des fonctions infiniment dérivable (resp. l'ensemble des fonctions n fois dérivable).
$\mathcal{C}_0^\infty(M)$: L'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact sur M .
$L^1(\mathbb{R}^n)$: L'espace des fonctions intégrable à valeurs dans \mathbb{R}^n .
$L_{Loc}^1(\mathbb{R}^n)$: L'espace des fonctions localement intégrable à valeurs dans \mathbb{R}^n .
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: L'espace de Schwartz qui désigne l'espace des fonctions à décroissance rapide.
$\mathcal{D}(M)$: L'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans M .
$\mathcal{D}'(M)$: L'espace des distributions sur M .
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: L'espace des distributions tempérées.
$\mathcal{E}'(M)$: L'espace des distributions sur M à support compact.
$H^m(\mathbb{R}^n)$: L'espace de sobolev d'ordre m sur \mathbb{R}^n . On dit $w \in H^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\{w \in L^2(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha w \in L^2(\mathbb{R}^n), \alpha \leq m\}$
$H_{Loc}^m(\mathbb{R}^n)$: L'espace des distributions w , telles que $\varphi w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$S_{\rho,\delta}^m$: La classe des symboles d'ordre m de type (ρ, δ) .
S^m	: La classe des symboles d'ordre m de type $(0, 1)$.
$OPS_{\rho,\delta}^m$: L'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m et de type (ρ, δ) .
OPS^m	: L'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m .
OPN^m	: L'espace des opérateurs d'Airy (resp. opérateurs Fourier d'Airy) d'ordre m .
$Im(X; C)$: L'espace des opérateurs intégraux de Fourier d'ordre m associés à la relation canonique C .
∂_x	: La dérivée partielle par rapport à x .
∂_n	: La dérivée normale.
Δ	: L'opérateur de Laplace scalaire dans \mathbb{R}^n qui est défini par $\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$.
$Supp(f)$: Le support de la fonction f
$Supp\ sing(u)$: Le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel la u est une fonction de \mathcal{C}^∞ .
ω	: La direction d'incidence.
\mathcal{S}^n	: La boule unitaire d'ordre n .
k	: Le nombre d'ordre.
G	: La fonction de Green.
Id	: Désigne l'application identité.
$\eta(\omega, x, k)$: La dérivée normale du champ total sur le bord.
$\mathcal{F}[f]$: La transformation de Fourier de f .
$\mathcal{F}^{-1}[f]$: La transformation de Fourier inverse de f .
T^{-1}	: L'inverse de l'opérateur T .
T^*	: L'opérateur adjoint de T .
$Hess(f)$: La matrice Hesseinne de la fonction $f(x)$.
I	: La matrice unitaire.
$[p]$: La partie entière de p .
$graph(f)$: Le graphe de la fonction f tel que $graph(f) = \{(x, f(x)), x \in X\}$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La diffraction signifie le phénomène de déviation des ondes (lumineuses, acoustiques....) lorsqu'elles passent au voisinage d'un obstacle. Ce phénomène est le résultat de l'interférence des ondes diffractées par chaque point de l'obstacle. Cela nous permet de savoir que la diffraction peut être interprétée comme une diffusion des ondes par les points de bord d'un objet. L'origine de la diffraction est la nature ondulatoire du phénomène de propagation d'une onde et pour l'étudier il faut résoudre l'équation d'onde,

$$\partial_{tt}u(x, t) - v^2\Delta u(x, t) = 0, \quad (0.1)$$

où v est la vitesse d'onde, Δ désigne l'opérateur de Laplace et $u(x, t)$ représente le champ diffracté. Ce type de problème connu généralement sous le nom de scattering consiste à déterminer le champ diffracté engendré par une onde incidente de fréquence élevée. D'un point de vue physique, la théorie de diffraction est consacrée à l'étude de l'amplitude de diffraction liée à un obstacle \mathcal{O} . Le champ diffracté peut être déterminé par le calcul du courant sur la surface de l'obstacle diffuseur qui désigne la dérivée normale du champ total sur le bord de l'obstacle.

Notre problème consiste à déterminer le développement asymptotique de l'amplitude de la solution de l'équation de Helmholtz (0.6) fournissant une condition sur le bord donnée par l'opérateur de Dirichlet to Neumann DtN . Les expansions d'origine ont été obtenues en utilisant la décomposition pseudo-différentiel de l'opérateur DtN [54]. Notre travail nécessite la connaissance du concept de singularité. Dans le cas général, Lebeau [46] a démontré que sur l'obstacle diffuseur, les singularités se concentrent dans la région de transition.

De nos jours, nous utilisons différents outils et techniques en mathématique tels que l'analyse semi-classique et l'analyse harmonique qui nous permettent de

résoudre nos problèmes physiques. L'analyse semi-classique permet de faire le lien entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Cette théorie trouve son origine au 19^e siècle grâce au développement de la physique quantique et la physique ondulatoire dont elle fut utiliser comme outil qui traduit mathématiquement les phénomènes de la mécanique quantique. Actuellement, elle est utilisée régulièrement dans de nombreux domaines de la physique. Cette théorie est combinée avec les conditions de quantification BKW et la méthode de phase stationnaire pour déterminer le modèle asymptotique de la solution d'un problème bien posé. La théorie semi-classique repose essentiellement sur l'analyse microlocale dont il est favorable d'utiliser les opérateurs intégraux de Fourier et la propagation des singularités. Plus précisément, l'analyse microlocale est un outil privilégié de cette théorie qui nous permet de faire des études détaillées pour simplifier le concept des différents phénomènes en utilisant la transformation de Fourier. Il semble que cette analyse prenne naissance dans les années 70 pour des applications sur les équations aux dérivés partielles. Aujourd'hui, l'analyse microlocale est présente dans différents domaines tels que la topologie, la géométrie analytique et différents phénomènes tels que l'effet tunnel et la propagation des ondes.

Dans notre travail, nous allons traiter le phénomène de propagation des ondes qui fait partie des problèmes hyperboliques. Ces équations hyperboliques modélisent les phénomènes ondulatoires. Lax [45] a démontré que les opérateurs qui représentent les solutions des problèmes de Cauchy pour les équations strictement hyperboliques ont des représentations locales tels que les opérateurs intégrales oscillantes. Ces représentations furent concrétisée par la théorie des opérateurs intégraux de Fourier d'Hörmander (OIF) [41, 42], en conduisant entre autres à des résultats sur la propagation des singularités et le concept du front d'onde. (voir [24, 41, 42, 58]).

D'un point de vue mathématique, le front d'onde et sa propagation permettent de comprendre les notions physiques contenues dans le principe de Huygens (voir [24, 41, 42, 58]).

Dans cette thèse, nous allons développer une méthode différente qui représente l'opérateur associé à la solution de notre problème. Dans le cas de la diffraction

d'une onde par un obstacle convexe, la solution de l'équation des ondes au niveau des points de singularité est représentée par une combinaison linéaire de la fonction d'Airy et de sa dérivée.

Comme il a été bien détaillé dans [53],[54],[55] et [62] au voisinage de ces points singuliers, l'opérateur de la solution sera exprimé comme un opérateur intégrale de Fourier associé à une relation canonique singulière. À l'aide de cette nouvelle classe, c'est à dire les opérateurs de type Fourier-Airy, Taylor et Melrose [53], [54] construisent au voisinage du point singulier une paramétrique microlocale pour le système qui définit notre problème. Cette paramétrique rend les choses possibles de pouvoir analyser la propagation des singularités près de ces points.

Dans [54], Taylor et Melrose ont étudié le problème de diffraction des ondes par un obstacle strictement convexe au voisinage du pic de diffraction pour déterminer le développement asymptotique du champ diffracté. Ils ont amélioré une approximation de Kirchhoff corrigée qui est l'approche du champ total. Cette approximation est valide seulement dans la région illuminée.

Notre travail consiste à déterminer une meilleure précision que l'approximation de Kirchhoff corrigée dans toutes les régions, précisément dans la région d'ombre et la région de transition fournissant des approximations de premier ordre et second ordre de l'opérateur DtN de type Bayliss-Turkel [12, 51]. Dans [30, 34], Il a été montré que ces approximations sont valables sur tout le bord de l'obstacle.

Ces approximations ont été employées comme des conditions de radiation sur le bord (voir [6]), celles-ci nous permettent de faire une étude à la fois rapide et efficace pour des problèmes de diffraction. Il existe d'autres approximations telles que celles qui sont développées dans [35] qui peuvent aussi être adaptées à notre analyse sans aucune difficultés.

Pour déterminer des nouvelles expressions asymptotiques de la dérivée normale du champ totale de l'équation de Helmholtz à haute fréquence, nous adaptons la même méthode utilisée par Taylor et Melrose dans [54]. Pour cela nous allons utiliser certains résultats obtenus par Melrose et Taylor [54].

Contrairement à l'approximation de Kirchhoff qui est valide seulement dans la région illuminée, nos expansions résultantes peuvent être utilisées pour construire

de manière appropriée une approche qui permet d'obtenir des solutions asymptotiques dans les trois régions, la région illuminée, la région d'ombre profonde et la région de bord d'ombre (la région de transition).

Organisation de la thèse

Cette thèse se décompose en quatre chapitres suivis d'une annexe et d'une conclusion.

Chapitre 1. *Dans ce chapitre, nous nous intéressons essentiellement aux notions importantes relatives à l'étude de propagation. Nous commençons par rappeler les définitions de la transformation de Fourier et ses propriétés en se focalisant sur les distributions tempérées. Puis, nous détaillons le principe de la méthode de phase stationnaire. Ensuite, nous jetons un coup œil sur la fonction d'Airy, ses approximations et ses estimations possibles. Nous nous attachons dans ce chapitre à établir avec précision les conditions et les formules pour garantir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz.*

Chapitre 2. *Le second chapitre est consacré à l'étude des opérateurs intégraux de Fourier. Nous ne pouvons pas s'intéresser à ce genre d'opérateur sans rappeler quelques notions nécessaires de la géométrie symplectique qui mène à développer le concept des opérateurs intégraux de Fourier. Puis, nous étudions les relations canoniques en jetant la lumière sur les singularités. Cette étude nous donne l'avantage de produire des fonctions génératrices qui définissent la fonction de phase de l'opérateur intégrale de Fourier. Ensuite, nous donnons des notions de base sur ce genre d'opérateur qui sont associés à des relations canoniques régulières. En parallèle, nous présentons quelques résultats nécessaires sur les fronts d'onde et la propagation des singularités. Enfin, nous expliquons le cas où les relations canoniques admettent des points de singularités dont elles donnent naissance à d'autre classe d'opérateur telle que la classe des opérateurs de Fourier-Airy*

Chapitre 3. *Ce chapitre explique les résultats de Taylor et Melrose dans [54]. Avant de citer les techniques suivies par les auteurs dans le papier [54] pour dé-*

terminer le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff, nous commençons d'abord par exposer la solution de l'équation de Helmholtz au voisinage du point singulier sur le bord. Ensuite, nous expliquons comment ils ont déterminé l'approximation de Kirchhoff corrigée.

Chapitre 4. Ce chapitre est le cœur de ce manuscrit où nous citons les différents résultats obtenus concernant la diffraction des ondes par un obstacle strictement convexe \mathcal{O} en adaptant la méthode utilisée par Taylor et Melrose [54] pour l'étude de l'équation de Helmholtz dans une gamme à haute fréquence. Ensuite, nous proposons d'utiliser des approximations d'ordre 1 et d'ordre 2 de l'opérateur DtN pour générer des nouvelles expressions de $\partial_{\mathbf{n}}w^t$, où w^t est la solution de l'équation de Helmholtz. Ce qui nous permet d'obtenir des nouvelles approches et d'améliorer le comportement de la solution. En dernier, Nous citons les estimations de l'expansion obtenue en utilisant l'approximation d'ordre 1 de DtN dans des régions différentes de l'obstacle diffuseur.

Problématique

Le principe de notre travail consiste à examiner l'amplitude de Kirchhoff a_Q qui survient dans la théorie de diffraction d'une onde par corps.

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un obstacle strictement convexe avec une courbure $c(x)$ strictement positive. Nous notons $\partial\mathcal{O} = B$ le bord, ce bord est une hypersurface de \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R}^{n+1} qui se décompose en trois régions; la région illuminée, la région d'ombre et la région de transition (voir la figure (0.1)). Nous définissons l'ouvert Ω de \mathbb{R}^{n+1} par $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}/\mathcal{O}$, le domaine extérieur de propagation. Soit DtN un opérateur Dirichlet to Neumann défini sur l'obstacle \mathcal{O} tel que pour tout $x \in B$ on a

$$DtN : \mathcal{E}'(B \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(B \times \mathbb{R}), \quad DtNu^i(x, t) = -\partial_n u(x, t)|_{B \times \mathbb{R}} \quad (0.2)$$

où n désigne le vecteur extérieur normal et $u^i(x, t)$ est l'onde incidente.

Nous considérons $u(x, t) \in \mathcal{D}'(B \times \mathbb{R})$ la solution de l'équation des ondes qui

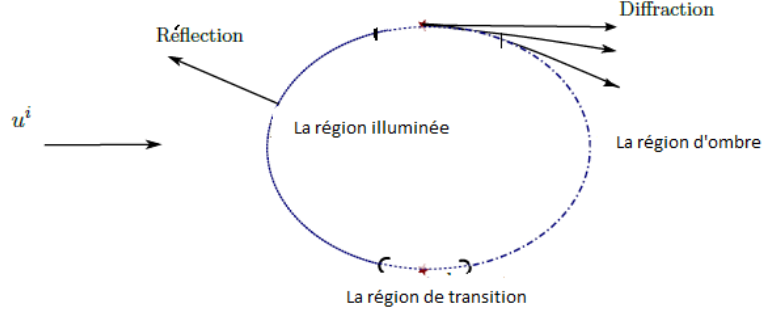


Fig. 0.1: Les régions de l'obstacle diffuseur.

est définie par le système suivant :

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, t) = -\delta(t - x \cdot \omega) = -u^i(x, t) & \text{sur } B \times \mathbb{R}, \\ u(x, t) = 0 & t \ll 0. \end{cases} \quad (0.3)$$

où x, t sont les variables de la position et le temps respectivement, $\Delta = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne l'opérateur de Laplace par rapport à x , $u^i(x, t)$ est l'onde incidente et ω est le vecteur unitaire qui définit le vecteur d'incidence tel que $\omega \in \mathcal{S}^n$ où \mathcal{S}^n est la sphère unitaire qui est définie par

$$\mathcal{S}^n = \{\omega \in \mathbb{R}^{n+1}, |\omega| = 1\}. \quad (0.4)$$

Au point $t = x \cdot \omega$, la solution a une discontinuité sur le bord de l'obstacle qui se comporte sous la forme d'une masse de Dirac $\delta(t - x \cdot \omega)$. Soit $w(x, k)$ définie par

$$w(x, k) = \int e^{ikt} u(t, x) dt. \quad (0.5)$$

Nous appliquons (0.5) dans (0.3). Cela nous permet de réduire le problème (0.3) comme suit :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)w(x, k) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ w(x, k) = -e^{ikx \cdot \omega} = -w^i(x, k) & \text{sur } B \times \mathbb{R}, \\ w(x, k) = O(|x|^{-n/2}) \text{ et } (\partial_{|x|} - ik)w(x, k) = o(|x|^{-n/2}) & \text{pour } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (0.6)$$

où k est le nombre d'onde. La solution de (0.6) est donnée par l'intégrale suivante :

$$w(x, k) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} \eta(x, k) G(x, y) d\sigma(y) \quad x \in \Omega. \quad (0.7)$$

où $G(x, y)$ la fonction de Green (voir la définition (1.5.2)) et σ est la mesure d'intégration sur le bord de \mathcal{O} . La formule intégrale (0.7) nous permet de reconstruire la solution de notre problème de diffraction des ondes dans le domaine extérieur dès que nous déterminons la quantité de $\eta(x, k)$. Cette quantité est le courant de la surface sur l'obstacle diffuseur qui est défini par la dérivée normale du champ total,

$$\eta(x, k) = \partial_n w^t(x, k). \quad (0.8)$$

avec $w^t(x, k)$ est le champ total donné par

$$w^t(x, k) = w^i(x, k) + w^s(x, k). \quad (0.9)$$

où $w^i(x, k) = e^{ikx \cdot \omega}$ est l'onde incidente et $w^s(x, k)$ est la solution sortante (le champ diffracté). La dérivée normale du champ total sur le bord d'un l'obstacle convexe est définie, pour $k \rightarrow \infty$, par

$$\begin{aligned} \partial_n w^t(x, k) &= \mathcal{K}(\omega, x, k) e^{ikx \cdot \omega}, \\ &= a_Q(\omega, x, k). \end{aligned} \quad (0.10)$$

avec a_Q est l'amplitude de Kirchhoff et $\mathcal{K}(\omega, x, k)$ est une fonction qui oscille moins rapidement que l'amplitude a_Q . De plus, nous définissons l'opérateur de Kirchhoff [54] par

$$Q = (DtN + \omega \cdot n \partial_t) F : \mathcal{E}'(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(B \times \mathbb{R}) \quad (0.11)$$

avec $DtN \in OPS^1$ non local et F est un opérateur intégrale de Fourier qui est défini par son noyau $\kappa_F(\omega, x, t) = \delta(t - x \cdot \omega)$ [25, 54] tel que

$$Fu(x, t) = \int_{\mathcal{S}^n \times \mathbb{R}} \delta(t - s - x \cdot \omega) u(\omega, s) d\omega ds \quad (0.12)$$

Les méthodes des équations intégrale à haute fréquence consistent à déterminer la valeur de $\mathcal{K}(\omega, x, k)$, d'où la valeur $a_Q(\omega, x, k)$. Pour déterminer ces inconnus, nous devons remplacer l'opérateur DtN par sa définition dans la formule de l'opérateur

Q . Comme l'opérateur pseudo différentiel DtN est non local, Taylor et Melrose [54] étaient obligé d'utiliser la décomposition microlocale de l'opérateur DtN qui a permis d'améliorer une approximation local de cette opérateur qui est l'approximation de Kirchhoff corrigée et qui est définie par

$$a_Q(\omega, x, k) = -2ikn(x) \cdot \omega e^{ikx \cdot \omega} \quad \text{pour } k \rightarrow +\infty. \quad (0.13)$$

Cette approximation est valable seulement dans la région illuminée.

L'objectif de cette thèse consiste à déterminer des résultats sur la diffraction des ondes par un obstacle convexe \mathcal{O} , en utilisant la méthode Taylor et Melrose dans [54] pour étudier l'équation de Helmholtz à haute fréquence. L'idée principale de ce travail est de fournir des meilleures précisions que l'approximation de Kirchhoff corrigée dans toutes les régions, précisément la région d'ombre et la région de transition fournissant des approximations de premier ordre et de second ordre de l'opérateur DtN de type Bayliss-Turkel[12, 51] telles que

$$\partial_n w^s(x, k) = -ikw^i(x, k) + \frac{c(x)}{2}w^i(x, k), \quad (0.14)$$

$$\partial_n w^s(x, k) = -ikw^i(x, k) + \frac{c(x)}{2}w^i(x, k) - \frac{c(x)^2}{8(c(x) - ik)}w^i(x, k) - \frac{1}{2(c(x) - ik)}\partial_x^2 w^i(x, k), \quad (0.15)$$

En effet, la méthode suivie dans cette thèse consiste à trouver d'abord l'opérateur de Kirchhoff Q fournissant les deux approximations de l'opérateur DtN (0.14,0.15). Ensuite, nous déterminons le noyau $\kappa_Q(\omega, x, t)$ de l'opérateur Q . Puis, nous appliquons la transformation de Fourier inverse par rapport à la variable t sur le noyau de l'opérateur de Kirchhoff Q pour déterminer son amplitude $a_Q(\omega, x, k)$. Enfin, nous utilisons la méthode de la phase stationnaire sur l'intégrale oscillante qui définit l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$ pour obtenir son développement asymptotique. Les résultats obtenus permettent de construire l'approche $\eta(x, k)$ qui est donnée par l'expression (0.8). Cette approche nous permet de déterminer le développement asymptotique de la solution dans les trois régions de l'obstacle, la région illuminée, la région d'ombre et la région de transition.

1. L'ÉTUDE DE LA PROPAGATION

1.1 *Introduction*

Le concept de propagation est le processus de déplacement ou de mouvement d'une onde d'un endroit à l'autre. Cela correspond à un transfert d'énergie. Le problème de propagation des ondes fait partie des problèmes hyperboliques linéaires. Le caractère de la linéarité permet aux spécialistes de traiter la variable temps en utilisant la transformée de Fourier, c'est ce que nous appelons l'étude dans le domaine fréquentiel. Dans notre travail, nous présentons les deux domaines d'application tels que le domaine temporel c'est à dire l'équation des ondes qui est définie par le problème (0.3) et le domaine fréquentiel c'est à dire l'équation d'Helmholtz qui est définie par l'équation (0.6) car ces deux equations sont utilisées dans l'industriel.

Dans ce chapitre, nous introduisons les outils nécessaires de l'analyse harmonique. Tout d'abord, nous commençons par présenter la transformation de Fourier et ses applications dans différents domaines. Nous nous focalisons sur la transformation de Fourier sur les distributions tempérées. Ensuite, nous détaillons les étapes de la méthode de phase stationnaire qui nous permet de déterminer le développement asymptotique d'une fonction définie par une intégrale oscillante. Puis, nous présentons la fonction d'Airy qui décrit le phénomène traité près du point singulier. De plus, nous nous intéressons aux développements asymptotiques et aux estimations possibles de cette fonction spéciale. Enfin, nous abordons l'étude de la solution de l'équation de Helmholtz. Nous expliquons comment il est possible de définir d'une manière naturelle le champ diffracté qui est la solution sortante de l'équation de Helmholtz en s'appuyant sur des arguments physiques. Nous présentons plus particulièrement les outils nécessaire de cette théorie, en se focalisant

sur la formule Green, la condition de Sommerfeld et le champ lointain.

1.2 Transformation de Fourier dans \mathcal{S} et \mathcal{S}'

La théorie des distributions fut formalisée par le mathématicien français **Laurent Schwartz** et lui valut la médaille Fiels en 1950. Son introduction utilise des notions d'algèbre linéaire et de la topologie centrées autour de l'idée de dualité. Son objectif consistait de généraliser la notion de fonction, afin de donner un sens mathématique correct à des objets manipulés par les physiciens. Il fallait en plus garder la possibilité d'appliquer des opérations telles que la dérivation, convolution, transformée de Fourier. De plus, l'intégrale de Fourier fait intervenir un spectre continu de fréquences qui permet de projeter une image dans un espace fréquentiel caractérisé par des fréquences.

Pour toute fonction $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle x . Nous appelons transformée de Fourier de $f(x)$ la fonction complexe de la variable réelle ξ qui est définie par l'intégrale suivante :

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad (1.1)$$

où $x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$. La fonction $\widehat{f}(\xi)$ est continue et bornée dans \mathbb{R}^n . Si $\widehat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nous pouvons exprimer $f(x)$ en terme de $\widehat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ par la formule d'inversion de Fourier qui est définie par l'intégrale suivante :

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi. \quad (1.2)$$

Exemple. La transformation de Fourier la fonction lorentzienne $f(x)$

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} \text{ pour tout } a > 0 \text{ est } \widehat{f}(\xi) = e^{-a|\xi|}. \quad (1.3)$$

La transformation de Fourier inverse de la fonction $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx. \quad (1.4)$$

D'autre part, nous définissons l'espace de Schwartz \mathcal{S} comme étant l'ensemble de

toutes les fonctions de \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R}^n à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, cela veut dire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| < +\infty. \quad (1.5)$$

Exemple. $f(x) = e^{-|x|}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. La transformation de Fourier d'une fonction $f(x)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, reste toujours dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.1 Notion de base sur les distributions

Dans cette thèse, nous nous intéressons beaucoup plus à la transformation de Fourier sur les distributions qui nous permet de définir l'espace des distributions tempérées noté par \mathcal{S}' . Tout d'abord, nous définissons une distribution u sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Cette distribution u est une application linéaire de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans \mathbb{C} telle que : pour tout compact K de Ω , il existe une constante $C_K > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le crochet de dualité qui est complètement différent de la notation de produit scalaire lequel est défini pour tout $u(x) \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ localement intégrable par

$$\langle u, \varphi \rangle = \int u(x) \varphi(x) dx, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K). \quad (1.6)$$

Cela définit exactement l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ et φ représente la fonction de test dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Chaque distribution est définie par son support qui est le complémentaire du plus grand ouvert où la distribution u est nulle, nous le notons par $\text{supp}(u)$. De plus le support d'une fonction est son ensemble de définition. Dans le même concept, nous distinguons que pour toute fonction numérique, son support désigne la partie du domaine où elle n'est pas nulle. D'autre part, il représente la partie du domaine où elle n'est pas invariante par un homéomorphisme.

Il existe certains types de distribution qui sont souvent utilisés dans différentes disciplines scientifiques. La distribution de Dirac ou bien la fonction de la masse de Dirac, qui est un type d'abstraction, représente une charge, une masse ou un électron ponctuel.

L'expression de Dirac ou le pic de Dirac est souvent utilisé par les physiciens qui leurs permet de décrire une fonction ou une courbe qui représente un pique au voisinage d'une valeur donnée.

Définition 1.2.1. *Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la distribution de la masse de Dirac δ_{x_0} au point x_0 in \mathbb{R} est défini par :*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0). \quad (1.7)$$

En particulier, pour $\varphi(x) = 1$, (1.7) devient

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (1.8)$$

Remarque. la formule (1.7) reste valable dans le cas ou $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.2.1. [50][64] *Pour toute fonction de test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nous avons*

$$\delta(x - x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x_0) \cdot \xi} d\xi,$$

et

$$\delta(x) = \delta(-x).$$

Proposition 1.2.2. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, nous avons*

$$\delta(x - y) = \delta(x_1 - y_1) \cdots \delta(x_n - y_n). \quad (1.9)$$

Proposition 1.2.3. [64] *Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et K est un ouvert contenu dans Ω , alors*

$$\langle fu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, f\varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \quad \text{pour toute fonction test } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K).$$

Proposition 1.2.4. [64] Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La dérivée $\partial_x^\alpha u(x)$ sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est définie par,

$$\langle \partial_x^\alpha u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial_x^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Définition 1.2.2. $\mathcal{E}'(\Omega)$ représente l'espace vectoriel sur \mathbb{C} des distributions à support compact.

1.2.2 Transformation de Fourier dans \mathcal{S}'

Nous appelons une distribution tempérée toute application linéaire continue définie sur \mathcal{S} et à valeur dans \mathbb{C} . Cet ensemble est le dual de \mathcal{S} qui est un sous-ensemble de \mathcal{D}' .

La transformée de Fourier de u est la distribution tempérée qui est notée par $\mathcal{F}[u]$ ou bien par \widehat{u} . Elle est définie par la formule suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \mathcal{F}[u], \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \widehat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle u, \mathcal{F}[\varphi] \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (1.10)$$

La transformation de Fourier inverse est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \mathcal{F}^{-1}[u], \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle u, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (1.11)$$

Exemple. La transformation de Fourier de la fonction de masse de Dirac δ_a au point a est

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \mathcal{F}[\delta_a], \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle \delta_a, \mathcal{F}[\varphi] \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \mathcal{F}[\varphi](a), \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixa} \varphi(x) dx, \\ &= \langle e^{-ixa}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

D'où $\mathcal{F}[\delta_a] = e^{-ixa}$. En particulier,

$$\mathcal{F}[\delta_0] = 1. \quad (1.13)$$

Remarque. La transformation de Fourier de la fonction constante existe au sens des distributions dont elle n'existe pas au sens des fonctions.

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](\xi) d\xi, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i0\xi} \mathcal{F}[\varphi](\xi) d\xi, \\
&= \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}[\varphi](0), \\
&= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Les propriétés de la transformation de Fourier

Pour toute distribution tempérée $u(x)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, les transformations de Fourier et de Fourier inverse vérifiant les propriétés suivantes :[64].

Translation : Notre but consiste à trouver la transformation de Fourier de la distribution $u(x - a)$ où a est un réel.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[u(x - a)], \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle u(x - a), \mathcal{F}[\varphi] \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int u(x - a) \widehat{\varphi}(x) dx, \\
&= \int u(x - a) e^{-i\xi \cdot x} \varphi(\xi) d\xi dx,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Nous supposons le changement de variable $x - a = \eta$, d'où $x = \eta + a$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[u(x - a)], \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \int e^{-i\xi \cdot (\eta + a)} u(\eta) \varphi(\xi) d\xi d\eta, \\
&= \int e^{-i\xi \cdot a} \widehat{u}(\xi) \varphi(\xi) d\xi. \\
&= \langle e^{-i\xi \cdot a} \widehat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

d'où

$$\mathcal{F}[u(x - a)](\xi) = e^{-i\xi \cdot a} \mathcal{F}[u](\xi).$$

Modulation : Nous voulons chercher la transformation de Fourier de $e^{ix \cdot a}u(x)$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[e^{ix \cdot a}u(x)], \varphi \rangle_{S', S} &= \langle e^{ix \cdot a}u(x), \mathcal{F}[\varphi] \rangle_{S', S} = \int e^{ix \cdot a}u(x)\widehat{\varphi}(x)dx, \\
&= \int e^{ix \cdot a}u(x)e^{-i\xi \cdot x}\varphi(\xi)d\xi dx, \\
&= \int e^{-ix(\xi - a)}u(x)\varphi(\xi)d\xi dx, \\
&= \int \widehat{u}(\xi - a)\varphi(\xi)d\xi = \langle \widehat{u}(\xi - a), \varphi \rangle_{S', S}. \\
&= \langle \mathcal{F}[u](\xi - a), \varphi \rangle_{S', S} \quad (1.17)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{F}[e^{ix \cdot a}u(x)](\xi) = \mathcal{F}[u](\xi - a).$$

Changement d'échelle : Notre but est de trouver la transformation de Fourier de $u(ax)$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[u(ax)], \varphi \rangle_{S', S} &= \langle u(ax), \mathcal{F}[\varphi] \rangle_{S', S} = \int u(ax)\widehat{\varphi}(x)dx, \\
&= \int e^{-i\xi \cdot x}u(ax)\varphi(\xi)d\xi dx, \quad (1.18)
\end{aligned}$$

Nous supposons le changement de variable $ax = \eta$, d'où $x = \frac{\eta}{a}$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[u(ax)], \varphi \rangle_{S', S} &= \frac{1}{|a|} \int e^{-i\xi \cdot \eta/a}u(\eta)\varphi(\xi)d\eta d\xi, \\
&= \frac{1}{|a|} \langle \mathcal{F}[u(\xi/a)], \varphi \rangle_{S', S}. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{F}[u(ax)](\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[u]\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

Convolution : Soient S et T deux distributions tempérées de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' . nous avons

$$\mathcal{F}[S * T] = \mathcal{F}[S]\mathcal{F}[T], \quad \mathcal{F}[S \cdot T] = \mathcal{F}[S] * \mathcal{F}[T]. \quad (1.20)$$

Dérivation :

$$\mathcal{F}[D_x^n u(x)](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[u](\xi).$$

$$\mathcal{F}[(-x)^m u(x)](\xi) = D_\xi^m \mathcal{F}[u(x)](\xi).$$

D_x et D_ξ dénotent respectivement les dérivations par rapport à x et ξ .

Théorème 1.2.1. [64] *La transformation de Fourier est une application linéaire bijective de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' .*

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[u(x)] = u(x), \quad \mathcal{F}^{-1}[u](\xi) = \mathcal{F}[u](-\xi). \quad (1.21)$$

Remarque. *Les propriétés citées plus haut restent valables pour la transformation de Fourier des fonctions.*

1.3 La méthode de phase stationnaire

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement asymptotique des intégrales du type

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\psi(x)} a(x) dx \quad k \rightarrow +\infty, \quad (1.22)$$

où $\psi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $a(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

Nous allons étudier ce type intégrale moyennant la méthode de la phase stationnaire. Cette méthode permet d'évaluer le comportement asymptotique de ce genre intégrale. C'est l'une parmi les outils essentiels en analyse asymptotique. Le comportement de l'intégrale est approché par son comportement au voisinage des bornes intégration et aussi à celui au voisinage du point où la phase $\psi(x)$ est stationnaire, c'est-à-dire les points où la dérivée de $\psi(x)$ est nulle. Le développement asymptotique de $I(k)$ va dépendre du comportement de $\psi(x)$ dans le support de $a(x)$.

1.3.1 Le cas non stationnaire

C'est exactement quand $\psi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \text{supp}(a(x))$. Autrement dit que la fonction $\psi(x)$ n'admet pas des points critiques par rapport à la variable intégration x , alors $I(k)$ est à décroissance rapide en k . Plus précisément, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que

$$|I(k)| \leq C_N k^{-N}, \quad \text{pour tout } k \geq 1. \quad (1.23)$$

Alors,

$$I(k) = O(k^{-N}) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (1.24)$$

1.3.2 Le cas stationnaire

Dans cette partie, nous allons examiner le cas des points critiques quadratiques. Puis à l'aide du "Lemme de Morse [64]", nous allons passer au cas général. La fonction $\psi(x)$ admet des points stationnaires (critiques) si et seulement s'il existe $x_0 \in \text{supp}(a(x))$ tel que $\psi'(x_0) = 0$. Nous supposons que $\psi(x)$ est non dégénérée ce qui est équivalent à dire que la matrice Hessienne de $\psi(x)$ au point critique est inversible alors le déterminant de cette matrice ne s'annule pas.

$$\det[\text{Hess}(\psi(x_0))] = \det \left[\frac{\partial^2 \psi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n} \neq 0 \quad (1.25)$$

Cela nous permet de dire que le comportement asymptotique de $I(k)$ est décrit par le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. [64] *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe a_0, \dots, a_N dans \mathbb{C} (dépendant de a et de ψ), une fonction d'erreur R_N et une constante $C_N > 0$ tels que pour tout $k \geq 0$, nous avons*

$$I(k) = e^{ik\psi(x_0)} \sum_{j=0}^N a_j k^{-\frac{n}{2}-j} + R_N(k), \quad (1.26)$$

avec

$$|R_N(k)| \leq C_N k^{-\frac{n}{2}-N-1}. \quad (1.27)$$

De plus, $a_0 = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|\det[Hess(\psi(x_0))]|}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[Hess(\psi(x_0))]} a(x_0)$ et $\text{sgn}[Hess(\psi(x_0))]$ représente la signature de la matrice $Hess(\psi(x_0))$ tel que $\text{sgn}[Hess(\psi(x_0))] = \{\text{nombre de valeurs propres strictement positives}\} - \{\text{nombre de valeurs propres strictement négatives}\}$.

Dans ce qui suit, les principales étapes pour la démonstration du théorème de la phase stationnaires sont présentées.

Démonstration. [64] Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, Le développement de Taylor de la fonction $\psi(x)$ au voisinage du point critique est donné par :

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle, \quad (1.28)$$

où $Q = Hess(\psi(x_0))$ est une matrice symétrique de dimension n , son déterminant est différent de zéro. D'après les propriétés des distributions, l'intégrale (1.22) devient

$$I(k) = e^{ik\psi(x_0)} \langle e^{i\frac{k}{2} \langle Qx, x \rangle}, a \rangle. \quad (1.29)$$

La distribution $e^{i\frac{k}{2} \langle Qx, x \rangle}$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id$, alors nous pouvons récrire l'intégrale (1.22) sous la forme :

$$I(k) = e^{ik\psi(x_0)} \langle \mathcal{F} \left[e^{i\frac{k}{2} \langle Qx, x \rangle} \right], \mathcal{F}^{-1}[a] \rangle. \quad (1.30)$$

Pour pouvoir achever la démonstration du théorème de la méthode de phase stationnaire 1.3.1, la transformée de Fourier de $e^{i\frac{k}{2} \langle Qx, x \rangle}$ est requise dans cette démonstration. Cette dernière est décrite pas le lemme suivant :

Lemme 1.3.1. *Soit Q est une matrice symétrique, réelle, non dégénérée de dimension n . La transformation de Fourier de l'application $u : x \mapsto e^{i\frac{k}{2} \langle Qx, x \rangle}$ est donnée par :*

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{(2\pi)^{n/2} k^{-n/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[Q]}}{\sqrt{|\det[Q]|}} e^{-\frac{i}{2k} \langle Q^{-1}\xi, \xi \rangle}. \quad (1.31)$$

Pour poursuivre la démonstration du théorème 1.3.1. Nous remplaçons (1.31) dans (1.30), nous obtenons

$$I(k) = \frac{(2\pi)^{n/2} k^{-n/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[Q]}}{\sqrt{|\det[Q]|}} \langle e^{-\frac{i}{2k} \langle Q^{-1}\xi, \xi \rangle}, \mathcal{F}^{-1}[a] \rangle e^{ik\psi(x_0)}. \quad (1.32)$$

Maintenant, nous utilisons la formule de Taylor avec un reste intégrale qui est donnée pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ par :

$$e^{i\eta} = \sum_{j=0}^N \frac{(i\eta)^j}{j!} + \frac{\eta^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-\tau)^N i^{N+1} e^{i\tau\eta} d\tau. \quad (1.33)$$

Nous en déduisons,

$$e^{-\frac{i}{2k}\langle Q^{-1}\xi, \xi \rangle} = \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} \left(-\frac{i}{2k}\langle Q^{-1}\xi, \xi \rangle \right)^j + k^{-(N+1)} r_N(k, \xi), \quad (1.34)$$

avec

$$|r_N(k, \xi)| \leq C_N |\langle Q^{-1}\xi, \xi \rangle|^{N+1}. \quad (1.35)$$

En particulier, le terme correspondant à $j = 0$ vaut 1. Ainsi, l'application (1.34) dans (1.32) donne

$$I(k) = \frac{(2\pi)^{n/2} k^{-n/2}}{\sqrt{|\det[Q]|}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[Q]} \left[\sum_{j=0}^N \frac{k^{-j}}{j!} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{i}{2}\langle Q^{-1}\xi, \xi \rangle \right)^j \mathcal{F}^{-1} a(\xi) d\xi + k^{-(N+1)} \int_{\mathbb{R}^n} r_N(k, \xi) \mathcal{F}^{-1} a(\xi) d\xi \right] e^{ik\psi(x_0)}. \quad (1.36)$$

Finalement, nous obtenons

$$a_k = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|\det[Q]|}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[Q]} \frac{(-i)^j}{2^j j!} \int_{\mathbb{R}^n} (\langle Q^{-1}\xi, \xi \rangle)^j \mathcal{F}^{-1} a(\xi) d\xi, \quad (1.37)$$

et

$$R_N(k) = \frac{(2\pi)^{n/2} k^{-n/2-N-1}}{\sqrt{|\det[Q]|}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[Q]} e^{ik\psi(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} r_N(k, \xi) \mathcal{F}^{-1} a(\xi) d\xi. \quad (1.38)$$

□

Remarque. *S'il existe plusieurs points stationnaires, la contribution principale de l'intégrale sera donnée uniquement par l'expression approchée de l'intégrale au voisinage de ces points, lorsque $k \rightarrow +\infty$. L'erreur commise par cette méthode est de l'ordre de $O(1/k)$.*

Pour traiter le cas général, nous utilisons le lemme de Morse. Ce dernier permet de reproduire la fonction de phase à une autre forme vérifiant les mêmes conditions du cas particulier.

Lemme 1.3.2. Morse [64] Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $\psi'(x_0) = 0$ et $\det[\text{Hess}(\psi(x_0))] \neq 0$. Il existe alors un voisinage V de x_0 et un difféomorphisme χ de V sur un voisinage U de zéro tels que pour tout $y \in U$, nous avons

$$\psi(\chi^{-1}(x)) = \psi(x_0) + \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_n^2), \quad (1.39)$$

où $\text{sgn}[\text{Hess}(\psi(x_0))] = 2r - n$.

1.4 La fonction d'Airy

La fonction d'Airy est une fonction spéciale qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par l'intégrale suivante :

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\frac{t^3}{3} + xt)} dt. \quad (1.40)$$

L'intégrale (1.40) représente aussi, la transformée de Fourier de la distribution tempérée $e^{i\frac{t^3}{3}}$. La fonction d'Airy est appliquée dans de nombreuses branches de la physique classique et de la physique quantique. Plus particulièrement, elle est largement utilisée pour l'intensité de la lumière au voisinage de la caustique. D'autre part, la fonction d'Airy apparaît en physique optique dans l'étude de la transition entre zone éclairée et la zone d'ombre, ou de la répartition lumineuse autour des caustiques.

Ce genre de fonction est associé précisément à des équations d'onde avec la présence des points singuliers sur le bord. De plus, elle constitue des approximations uniformes dans la région de validité qui inclut le point singulier et son voisinage. D'autre part, les fonctions d'Airy $Ai(x)$ ainsi $A_{\pm}(x)$ tel que

$$A_{\pm}(x) = Ai(e^{\pm 2i\pi/3}x). \quad (1.41)$$

sont les solutions de l'équation différentielle de seconde ordre suivante :

$$y'' + xy = 0. \quad (1.42)$$

L'équation (1.42) est connue sous le nom de l'équation d'Airy. Cette équation différentielle apparaît dans différents phénomènes de la physique et les problèmes des mathématiques appliquées.

Proposition 1.4.1. [55] La fonction d'Airy $A(z)$ est réelle si z est réel. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$A_-(z) = \overline{A_+(\bar{z})}. \quad (1.43)$$

Proposition 1.4.2. [54][55] Les fonctions d'Airy vérifient les relations de Wronskian et qui sont données par

1. $A'_+(x)Ai(x) - A_+(x)Ai'(x) = e^{i\pi/3}$.
2. $A'_-(x)Ai(x) - A_-(x)Ai'(x) = e^{-i\pi/3}$.
3. $A'_+(x)A_-(x) - A_+(x)A'_-(x) = \frac{1}{2i\pi}$.

où Ai' (resp. A'_\pm) est la dérivée de la fonction d'Airy (resp. A_\pm).

La fonction d'Airy $Ai(x)$ tend vers zéro pour x grand et positif, ainsi que sa première dérivée $Ai'(x)$, voir la figure (1.1). La fonction d'Airy et sa dérivée apparaissent souvent comme les solutions des problèmes aux limites.

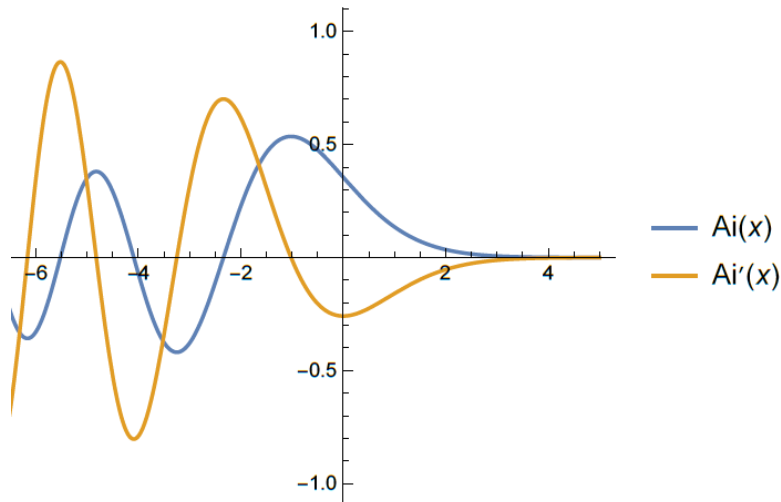


Fig. 1.1: La fonction d'Airy et sa dérivée.

Proposition 1.4.3. *Les fonctions d'Airy sont orthogonales dans le sens que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ai(t+x)Ai(t+y)dt = \delta(x-y). \quad (1.44)$$

1.4.1 Le développement asymptotique de la fonction d'Airy

La fonction d'Airy possède des développements asymptotiques pour $|x|$ grand que prennent deux formes différentes selon les valeurs de x , pour $x > 0$ et pour $x < 0$,

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-1/4}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad x > 0, \quad (1.45)$$

$$Ai(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad x < 0. \quad (1.46)$$

La fonction possède notamment un point d'inflexion en $x = 0$. Dans le domaine $x > 0$, $Ai(x)$ est positive, concave, et décroît exponentiellement vers 0.

Dans le domaine $x < 0$, $Ai(x)$ oscille autour de 0 avec une fréquence de plus en plus forte et une amplitude de plus en plus faible à mesure que $-x$ grandit, voir la figure (1.2).

Remarque. *La fonction d'Airy $Ai(z)$ tend vers zéro quand $z \rightarrow \infty$.*

Proposition 1.4.4. [54] *Soit $\Psi \in S^1(\mathbb{R})$ défini par :*

$$\Psi(\tau) = e^{i\tau^3/3} \int \frac{1}{A_+(s)} e^{-is\tau} ds, \quad (1.47)$$

avec $S^1(\mathbb{R})$ est l'espace des symboles dans \mathbb{R} (voir la définition 2.3.1).

1. $\Psi(\tau)$ à une décroissance rapide lorsque $\tau \rightarrow -\infty$.
2. $\Psi(\tau)$ admet un développement asymptotique lorsque $\tau \rightarrow +\infty$ tel que

$$\Psi(\tau) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \tau^{1-3j} + \mathcal{O}(\tau^{1-3(n+1)}). \quad (1.48)$$

Proposition 1.4.5. *Pour tout $\tau \rightarrow -\infty$, nous avons*

$$\Psi(\tau) = c_0 e^{-i\tau^3/3 - i\tau\beta} (1 - \mathcal{O}(e^{\tau c_1})), \quad (1.49)$$

où $c_0, c_1 > 0$ et $\beta = e^{-2i\pi} \beta_1$ avec β_1 est le plus petit racine de la fonction Ai en valeur absolue.

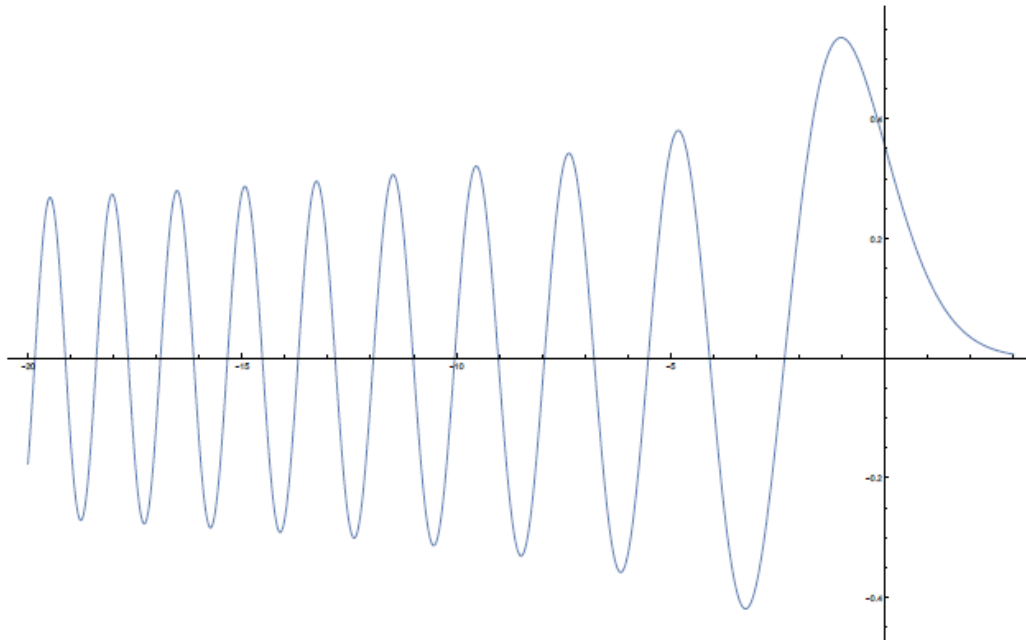


Fig. 1.2: La fonction d'Airy sur l'axe négatif.

1.4.2 Quelques estimations de la fonction d'Airy

Les estimations de la fonction d'Airy, pour le cas réel et le cas complexe sont indiquées dans les deux propositions ci-dessous.

Proposition 1.4.6. [54] *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction d'Airy est bornée et vérifie l'inégalité suivante :*

$$|Ai'(x)| \leq c(1 + |x|)^{\frac{1}{4}}, \quad (1.50)$$

où c est une constante réelle.

Proposition 1.4.7. [54] *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$|xAi(x)| \leq c(1 + |x|)^{\frac{3}{4}}, \quad (1.51)$$

où c est une constante réelle.

Proposition 1.4.8. *Soit D le domaine défini par*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq -C, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq C(1 + |z|)^{-1/2}\}. \quad (1.52)$$

Pour tout $z \in D$, nous avons

$$|Ai(z)|^{-1} \leq C_1(1 + |z|)^{-1/4}|\operatorname{Im}(z)|^{-1}, \quad (1.53)$$

où C_1 est une constante réelle, et

$$|Ai'(z)|^{-1} \leq C(1 + |z|)^{-3/4}|\operatorname{Im}(z)|^{-1}, \quad (1.54)$$

où C est une constante réelle.

Le développement des calculs de diffraction au siècle dernier a suscité l'introduction de nombreuses fonctions spéciales, telles la célèbre fonction d'Airy. Cette fonction s'appelle aussi la fonction des contraintes. La solution du problème de propagation et le problème de diffraction des ondes au voisinage des points singuliers s'écrivent en combinaison ces fonctions d'Airy.

1.5 La solution de L'équation de Helmholtz

1.5.1 La formule de Green

Dans cette partie, nous sommes essentiellement intéressés par la modélisation mathématiques du phénomène de la propagation des ondes en utilisant les propriétés basées sur les fonctions harmoniques. Nous commençons par donner une brève présentation de la méthode des équations intégrales qui nous permet de transformer les problèmes aux limites à ceux qui sont sur le bord du domaine en utilisant le principe des équations intégrales. Enfin, nous nous focalisons sur existence de la solution sortante de l'équation de Helmholtz à l'aide de la fonction de Green et la condition de Sommerfeld. Nous définissons l'espace de Sobolev, $H_{Loc}^1(\mathbb{R}^n)$, par

$$H_{Loc}^1(\mathbb{R}^n) = \{w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi w \in H^1(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}. \quad (1.55)$$

Soient $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ un domaine borné, $\partial\mathcal{O} = B$ une hypersurface de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. L'étude du problème de propagation des ondes passe par la résolution dans $H_{Loc}^1(\mathbb{R}^n)$ de l'équation de Helmholtz qui prend la forme suivante :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)w(x) = 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \\ w(x) = e^{ikx \cdot \omega} + w^s(x) & \text{sur } B. \end{cases} \quad (1.56)$$

où $\omega \in \mathcal{S}^n$ est la direction d'incidence, k est le nombre d'onde, $w^s(x)$ est le champ diffracté (la solution sortante) et $w^i(x) = e^{ikx \cdot \omega}$ est le champ incident.

En général, nous décrivons ce genre de problème en fournissant la condition extérieure de Dirichlet ou la condition de Neumann de l'équation aux dérivées partielles. Il existe d'autres conditions telle que la condition de Sommerfeld. Cette condition consiste à garantir l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz en imposant son comportement à l'infini sous le nom de la condition des ondes sortantes.

Définition 1.5.1. [29] w^s est la solution sortante de l'équation de Helmholtz si et seulement si elle vérifie la condition suivante :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} w^s(r) - ikw^s(r) \right) = 0,$$

avec $r = |x|$, $x = r\theta$, $|\theta| = 1$ et $\theta \in \mathcal{S}^n$. Cette condition est la condition de radiation de Sommerfeld.

Cette condition de rayonnement de Sommerfeld est utilisée pour résoudre uniquement l'équation de Helmholtz. La plupart des propriétés des solutions de l'équation de Helmholtz (1.56) peuvent être déterminées en utilisant la solution fondamentale de l'équation qui est indiquée par la définition suivante :

Définition 1.5.2. [64] La solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz P tel que $P = \Delta + k^2$ est la fonction G qui vérifie

$$\Delta G(x) + k^2 G(x) = \delta_0(x), \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Pour $n \geq 3$, la solution fondamentale est définie par

$$G(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|}. \quad (1.57)$$

avec $G(x)$ est la fonction de Green de l'équation de Helmholtz.

Théorème 1.5.1. [29] Soit \mathcal{O} un domaine borné dans \mathbb{R}^n , n est le vecteur unitaire normal de $\partial\mathcal{O}$ dirigé vers l'extérieur de \mathcal{O} . Soit $w \in H_{Loc}^1(\mathbb{R}^n)$ la solution de (1.56) qui possède une dérivée normale sur le bord

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n(x)} = n(x)\nabla w(x) \quad x \in \partial\mathcal{O}. \quad (1.58)$$

Alors, la solution de l'équation (1.56) est donnée par la formule de Green qui est définie par l'intégrale suivante :

$$w(x) = \int_{\partial\mathcal{O}} \left(w(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial w(y)}{\partial n(y)} G(x, y) \right) d\sigma(y) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}, \quad (1.59)$$

où $d\sigma$ est une mesure positive sur $\partial\mathcal{O}$.

Dès lors, l'idée majeure de la méthode intégrale consiste à traduire le problème (1.56) par l'utilisation des équations intégrale qui est donnée par (1.59) fournissant l'inconnue $\partial_n w(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial n(x)}$ sur le bord.

1.5.2 Le champ lointain

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition du modèle de champ lointain de l'équation de Helmholtz qui nous permet d'éclairer la notion de l'amplitude de diffraction de la solution du problème de diffraction des ondes. Le champ lointain est obtenu quand le nombre d'onde ou le rayon de courbure des ondes sortantes diffractées devient très grande. Il indique exactement le comportement de la solution à l'infini.

Théorème 1.5.2. [29] Soit $w(x)$ le champ total du problème de diffraction des ondes qui est défini par de l'équation de Helmholtz (1.56). Pour $n \geq 3$, nous avons

$$w(x) = w^i(x) - \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial w(y)}{\partial n(y)} G(x, y) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}, \quad (1.60)$$

Le champ lointain est donné par la formule suivante :

$$w_\infty(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial w(y)}{\partial n(y)} e^{-ik\theta \cdot y} d\sigma(y). \quad (1.61)$$

Remarque.

$$|x - y| = \sqrt{|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2}, \quad (1.62)$$

$$= |x| - \theta \cdot y + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (1.63)$$

L'application (1.63) dans (1.57), nous donne

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left[e^{ik\theta \cdot y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right] \quad \text{pour tout } y \in \partial\mathcal{O}. \quad (1.64)$$

La solution de l'équation de Helmholtz admet un développement asymptotique au voisinage de l'infini qui est donné en fonction du champ lointain.

Grâce à la méthode des équations intégrales et les méthodes asymptotique telles que la méthode de phase stationnaire, nous allons donner le développement asymptotique du champ diffracté de l'équation de Helmholtz.

La définition de l'intégrale du champ lointain est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.5.3. [29] Si $w^s(x)$ est la solution sortante de l'équation de Helmholtz (1.56), alors $w^s(x)$ admet le développement asymptotique suivant :

$$w^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left[w_\infty(\theta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \right] \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (1.65)$$

où $\theta = \frac{x}{|x|}$ est la direction réfléchiée avec $|\theta| = 1$. w_∞ est le champ lointain qui est défini par

$$w_\infty(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} \left(w(y) \frac{\partial e^{-ik\theta \cdot y}}{\partial n(y)} - \frac{\partial w(y)}{\partial n(y)} e^{-ik\theta \cdot y} \right) d\sigma(y), \quad (1.66)$$

où $\theta \in \mathcal{S}^n$.

La fonction de Green est utilisée pour résoudre numériquement le problème de propagation des ondes dans un espace qui est perturbé avec une impédance, en employant la technique des équations intégrales. À l'aide de certains théorèmes, nous avons assuré que la connaissance de champ lointain de l'équation de Helmholtz nous permet d'obtenir l'information sur l'amplitude de diffraction de la solution de l'équation de Helmholtz, d'où le développement asymptotique de cette solution.

2. LES OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE FOURIER ET LES SINGULARITÉS

2.1 *Introduction*

Un partiel et rapide survol de l'analyse semi-classique est présenté dans ce chapitre. Cette théorie mathématique est un carrefour entre la géométrie symplectique et l'analyse microlocale .

Le but de ce chapitre est de présenter les opérateurs intégraux de Fourier [24], [41], [42] et [58], et d'éclairer la rigueur mathématique par quelques théorèmes pour acquérir une meilleure compréhension des phénomènes physiques à la base de la théorie de l'analyse semi-classique.

De plus, nous allons profiter d'introduire les opérateurs intégraux de Fourier associés à des relations canoniques de pliage (des relations singulières). Par conséquence, cette catégorie d'opérateurs ne relèvent pas du champ d'application de la théorie classique des opérateurs intégraux de Fourier, comme il est mentionné dans [53], [55] et [62]. L'étude de ce genre d'opérateurs est considérée comme un nouveau file dans la théorie de l'analyse semi-classique qui est encore en plein de traitement. La première représentation de ce modèle d'opérateur intégraux de Fourier était traité par R.B. Melrose et M.E. Taylor dans [54] sous le nom de l'opérateur Fourier-Airy. Ils ont donné les définition leurs relations canoniques au voisinage d'un pli de Whitney. Puis, ils ont réduit ces relations singulières à d'autres relations qui sont définies sous certains formes normales et spéciales.

À l'aide des opérateurs de type Fourier-Airy, Taylor et Melrose [53][54] construisent au voisinage du point diffractif (point singulier sur le bord) une paramétrique microlocale pour le système qui définit notre problème de diffraction des ondes. Il devient alors possible d'analyser avec précision la propagation des singularités au

voisinage des points singuliers. Ce chapitre ne prétend à aucune originalité dans les résultats. Nous allons citer quelques résultats standards sans démonstration, mais nous donnons des références précises.

2.2 *Rappels de géométrie symplectique*

Le mot "symplectique" signifie "complexe". Ce mot traduit l'idée d'entrelacement avec un autre corps. La géométrie symplectique s'est imposée comme une discipline mathématique. Cette théorie est apparue comme des réponses mathématiques à la construction nécessaire de la physique dans la période du vingtième siècle. L'origine de la géométrie symplectique remonte aux mathématiciens et aux physiciens du dix-neuvième siècle quand ils voulaient approfondir de nouvelles idées en physique. Cette géométrie est née de la volonté d'une formulation mathématique naturelle à la mécanique classique. La géométrie symplectique est devenue un cadre par excellence de la mécanique et la physique. Cette géométrie n'est pas seulement un langage de la matière, elle en est l'essence de la matière.

D'où vient la géométrie symplectique ?

La géométrie symplectique permet de traduire et de consulter un système classique. En mécanique, la position d'une particule ou d'un objet en mouvement est représenté par des coordonnées curvilignes (q_1, q_2, \dots, q_n) , où n représente le degré de liberté d'un système. Cet ensemble de points donne la naissance de l'espace de configuration. D'après la Loi de Newton, nous pouvons évoluer un système dès que nous connaissons la position et la vitesse initiale d'un point. Si nous nous intéressons à la vitesse, il faut rajouter d'autre composante tel que $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ qui représente la vitesse angulaire pour que le système soit bien défini. D'où, nous réalisons la naissance de l'espace de phase.

L'espace de phase est représenté par les coordonnées curvilignes et la vitesse angulaire

$$(p_1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_n, q_n).$$

De plus, les trajectoires des solutions d'un système sont tracées dans l'espace de phase. Cela ouvre une autre question importante dans le cas où nous ne pouvons

pas trouver des bonnes trajectoires.

Quelle est le type de géométrie qui peut étudier les trajectoires dans l'espace de phase ?

Au début, on pensait que c'est la géométrie euclidienne qui doit être la bonne réponse. Malheureusement ce n'est pas vrai, elle n'est pas adaptée car les droites ne sont pas conservées lors de l'évolution d'un système mécanique. Par exemple dans le pendule simple si nous partons d'un espace de configuration alignée cette propriété se perd en route. Dans ce cas la géométrie symplectique est la géométrie pertinente. Cela nous permet de considérer que l'espace de phase est une variété symplectique.

2.2.1 Notions de base sur la géométrie symplectique

Notre objectif constitue d'étudier les opérateurs intégraux de Fourier associés à des relations canoniques sur les variétés symplectiques qui provient de la physique, et notamment de la mécanique quantique. L'espace de phase est naturellement une variété symplectique.

La plupart du temps, l'espace de phase est un cotangent T^*M qui est équipé d'une structure canonique. Cette structure qui définit une relation canonique symplectique qui nous permet de généraliser une fonction de phase. Ce genre de fonction donne l'autorisation d'introduire des opérateurs intégraux oscillants.

Définition 2.2.1. [44] Une variété topologique M de dimension n est un espace topologique séparé munit d'une base dénombrable d'ouverts, tel que chaque point de cet espace possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Plus précisément, $\forall m \in M, \exists U_m$ (un voisinage ouvert) et un homéomorphisme (voir la définition (2.2.2))

$$\varphi_m : U_m \rightarrow \varphi_m(U_m) \subset \mathbb{R}^n.$$

En effet, (U_m, φ_m) est une carte locale de M .

Une famille de carte (U_i, φ_i) qui recouvrent entièrement la variété constitue un atlas de la variété M pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2.2. *Un homéomorphisme est une application bijective, continue entre deux espaces topologiques de tel sort que la réciproque de cette application est continue.*

Définition 2.2.3. [44] *Une variété symplectique est une variété différentielle de dimension paire $(2n)$ munie d'une forme différentielle α bilinéaire, antisymétrique, fermée et non dégénérée qui s'appelle la forme symplectique.*

Remarque. *La non dégénérescence de α permet en particulier qu'à chaque point il existe un espace tangent et un espace cotangent via la forme symplectique α . De plus, cette condition confirme l'injectivité de α , ce qui signifie que pour tout point $m \in M$ et tout vecteur non nul $v \in T_m M$ tangent à M au point m , il existe un autre vecteur $w \in T_m M$ tangent à M au même point m tel que*

$$\alpha(v, w)|_m \neq 0.$$

La condition de α soit fermé mène à dire que le différentiable de la forme α est nulle c'est à dire $d\alpha = 0$ où d est la différentielle.

Définition 2.2.4. [44] *Soient U, V deux ouverts de \mathbb{R}^n . $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme sur U si f est bijective, différentiable sur U et sa réciproque est différentiable sur V .*

Remarque. *Un difféomorphisme local est une application de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 0$) d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n dont la différentielle en tout point de l'ouvert est inversible.*

Exemple. *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $z \mapsto z^2$, f est une application difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur lui même, l'application $z \mapsto e^z$ est un difféomorphisme local de \mathbb{R}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Définition 2.2.5. [44] *M est une sous variété de dimension n de \mathbb{R}^n en l'un de ses points m_0 s'il existe un voisinage W de m_0 et un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 $f : W \rightarrow U$ sur un ouvert U de \mathbb{R}^d qui envoie m_0 sur 0 tel que*

$$M \cap W = f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^n).$$

Exemple. La sphère \mathcal{S}^{n-1} est définie par

$$\mathcal{S}^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1| = 0\}, \quad (2.1)$$

est une sous variété de dimension $(n - 1)$ de \mathbb{R}^n .

Exemple. Une surface dans \mathbb{R}^3 est une sous variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 .

Dans la définition suivante, nous allons introduire la notion d'un cône dans \mathbb{R}^n .

Définition 2.2.6. [44][26] L est une sous variété conique si

$$\forall (x, \xi) \in M \text{ et } \tau > 0 \text{ alors } (x, \tau\xi) \in L.$$

Autrement dit, soit X un sous ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{0\}$. On dit que X est conique si pour tout $\tau > 0$ on a

$$(x, \xi) \in X \text{ alors } (x, \tau\xi) \in X. \quad (2.2)$$

La notion la plus central en géométrie symplectique est sans doute la variété lagrangienne. Dans la définition suivante, nous donnons une large information sur ce genre de variété.

Définition 2.2.7. [50] Soit (M, α) est un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$, nous disons que Λ est une variété lagrangienne de (M, α) si et seulement si

$$\alpha|_{\Lambda} = 0.$$

ce qui équivalent à dire que pour tout $m \in \Lambda$,

$$\alpha|_{T_m\Lambda} = 0.$$

2.2.2 Les relations canoniques et les singularités

Une relation ou une transformation canonique permet, par exemple, de passer d'un couple de variables canoniquement conjuguées (p, q) à un autre couple de variables canoniquement conjuguées (x, y) en donnant des relations entre toutes ces variables qui donne la naissance du certain fonction généralisée. Cette fonction généralisée nous permet d'introduire la fonction de phase. Cette fonction de phase nous aide à produire un opérateur intégral oscillant.

Définition 2.2.8. [50] Soient (M, α) une variété symplectique munie d'une forme symplectique α , U et V deux ouverts de M et L est un difféomorphisme. Nous disons que L est une relation canonique (ou une relation symplectique, une transformation canonique) si L préserve la forme canonique de α tel que

$$L^*(\alpha)|_V = \alpha|_U, \quad (2.3)$$

où L^* est l'image réciproque de L qui est définie par : $L^*(\alpha(u))|_m = \alpha(dL(u)|_m)$ et d dénote la différentielle. Autrement dit,

$$\alpha(L(u)) = \alpha(u). \quad (2.4)$$

Définition 2.2.9. [54](**Le pli de Whitney**) : Soit $C \subset M_1 \times M_2$ une relation canonique entre deux variétés symplectiques telles que $\dim C = \dim M_1 = \dim M_2$. Soient les deux projecteurs $\pi_1 : C \rightarrow M_1$ et $\pi_2 : C \rightarrow M_2$.

Nous disons que C est un pli de Whitney au point $(m_1, m_2) \in C$ si les deux projecteurs π_1, π_2 ne sont pas localement difféomorphismes au point (m_1, m_2) .

Pour comprendre pratiquement la notion de pli de Whitney, nous introduisons la notion de contour apparent qui signifie la projection d'une surface ou d'une variété. Dans la théorie des singularités, le contour apparent fournit un bon exemple de singularité des applications différentiables dans le cas où la surface ou la variété admet des points singuliers. D'une façon globale le contour apparent possède génériquement deux types de singularités, les plis et les fronces.

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à la singularité qui possède des points de pli. Nous définissons le pli pour toute surface qui est représentée par une application f telle que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (X, Y)$ de sorte que

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y^2. \end{cases}$$

Ces points singuliers sont la droite $y = 0$. En effet, le plan est plié le long de l'axe des x . Cela veut dire que la fonction f est plié au point $(0, 0)$. D'où la surface associée est plié à ce point.

Exemple. Soit la relation canonique $C \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

$$C = \{x, \xi, y, \eta\}; x = \frac{1}{2}(y + \xi)^2, \eta = y\xi + \frac{1}{3}\xi^3. \quad (2.5)$$

Les deux projecteurs sont donnés par les relations suivantes :

$$\pi_1 : (y, \xi) \mapsto \left(\frac{1}{2}(y + \xi)^2, \xi\right),$$

$$\pi_2 : (y, \xi) \mapsto \left(y, y\xi + \frac{1}{3}\xi^3\right).$$

Ces deux projecteurs ne sont pas localement difféomorphisme au point $(0, 0)$, ce qui implique que C définit bien une relation canonique de pliage.

Proposition 2.2.1. Soient $C \subset T^*X \times T^*Y$ et $S \subset T^*Y \times T^*Z$. Nous définissons la composition de ces deux relations par :

$$K \circ S = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ tel que } (x, y) \in K \text{ et } (y, z) \in S\}. \quad (2.6)$$

Définition 2.2.10. [26] Soit $\pi : C_\varphi \rightarrow X$ un projecteur.

Si C_φ est une variété lagrangienne de T^*X (resp. X), la caustique Σ de C_φ est un sous ensemble fermé de $z = (x, \xi) \in C_\varphi$ où le projecteur est critique.

Remarque. [26] Si $z \notin \Sigma$, C_φ près de z définit un graphe de la différentielle de la fonction φ telle que $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, où φ est une fonction génératrice de C_φ .

Remarque. Dans le cas d'une diffraction de la lumière, la caustique produit une focalisation de l'énergie lumineuse. Nous pouvons voir ce genre de phénomène dans la vie quotidienne, par exemple si on met une tasse de café au soleil qui envoie des rayons parallèles suivant une direction incidente oblique. Ces rayons incidentes se réfléchissent sur le bord de la tasse, comme nous le voyons sur la figure 2.2.1. L'ensemble des rayons réfléchis enveloppe une courbe, cette courbe qui est sous la forme d'un cœur représente la caustique. Au centre de ce cœur, on trouve le point de pli qui représente le point de singularité.

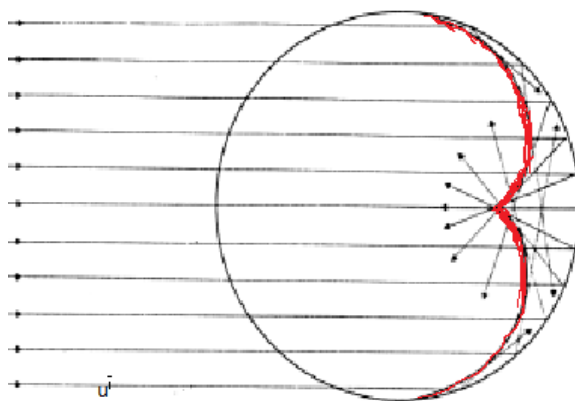


Fig. 2.1: La caustique de la tasse de café au soleil.

2.2.3 La fonction génératrice de la transformation canonique

La relation canonique produit localement une fonction génératrice qui est définie selon la définition le théorème ci-dessous

Définition 2.2.11. [26] Soit $\varphi(x, \xi)$ est une fonction définie sur $X \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. Soit C_φ une relation définie par :

$$C_\varphi = \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n, \partial_\xi \varphi(x, \xi) = 0\} \quad (2.7)$$

On suppose que les différentielles $d_{x,\xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(x, \xi) \right)_{i=1, \dots, n}$ sont indépendantes. Alors C_φ est une sous variété dimension $n = \dim(X)$ de $X \times \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.2.1. [38][50] Soient C_φ une sous variété de \mathbb{R}^{2n} (resp. T^*X) et $\pi|_{C_\varphi} : C_\varphi \rightarrow X$ un projecteur. Si π est un difféomorphisme local. Nous avons équivalence entre :

- 1) C_φ est lagrangienne
- 2) Pour tout $m \in C_\varphi$, il existe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel qu'au voisinage de m , nous avons $C_\varphi = \text{graph}(\nabla\varphi(x))$. De plus C_φ peut être représentée par l'équation suivante :

$$\xi = \nabla\varphi(x) \text{ avec } \varphi : X \rightarrow \mathbb{R},$$

où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $\text{graph}(\nabla\varphi(x)) = \{(x, \nabla\varphi(x)), x \in X\}$. Nous disons alors que φ est une fonction génératrice de C_φ .

Remarque. La notion de variété lagrangienne permet de généraliser la notion de la solution d'une EDP non linéaire.

Remarque. Toute variété lagrangienne admet une fonction génératrice.

Définition 2.2.12. [54] Si C_φ est une relation canonique définie par (2.7) et $\pi : C_\varphi \rightarrow X$ est projecteur, alors C_φ représente un graphe si et seulement si le projecteur est difféomorphisme local (non dégénéré).

Proposition 2.2.2. Nous disons que le projecteur $\pi|_{C_\varphi} : C_\varphi \rightarrow X$ est dégénérée (singulier) sur la sous-variété C_φ si et seulement si le déterminant de la matrice Hessienne de φ est nul, où la matrice Hessienne est définie par

$$\text{Hess}[\varphi(x, \xi)] = \det \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi_j} \right]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}. \quad (2.8)$$

De plus, les points critiques de π sont donnés par l'ensemble suivant :

$$\Sigma = \{(x, \xi) \mid \text{Hess}[\varphi(x, \xi)] = 0\}.$$

Définition 2.2.13. [26] Les points pour lesquels $\pi|_{C_\varphi}$ n'est pas un difféomorphisme au voisinage de $m \in C_\varphi$ s'appellent la caustique de C_φ .

Pour élargir et détailler un peu la notion de fonction génératrice, nous profitons de généraliser la notion de C_φ en utilisant deux variables $(x, y) \in X \times Y$ et leurs

variables duales $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$. De plus, nous prenons le cas singulier des relations canoniques dont la fonction génératrice admet des points de singularités. Pour ceci nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 2.2.14. [54] Soit $\varphi(x, \xi)$ une fonction génératrice sur $X \times \mathbb{R}^n$ de la relation canonique suivante :

$$C_\varphi = \{(x, \xi), \partial_\xi \varphi(x, \xi) = 0, x \in X\}, \quad (2.9)$$

Si le projecteur

$$\pi : C_\varphi \rightarrow X, \quad (2.10)$$

est singulier, alors nous disons que C_φ définit une relation canonique de pliage ou bien une relation canonique singulière.

Définition 2.2.15. [54] Si $\varphi(x, y, \xi, \eta)$ est une fonction génératrice sur $X \times Y \times \mathbb{R}^{2n}$, alors la relation canonique associée à cette fonction est donnée par :

$$C_\varphi = \{(x, \xi; y, \eta), \partial_\xi \varphi = 0 \text{ et } \partial_\eta \varphi = 0, (x, y) \in X \times Y\}, \quad (2.11)$$

avec

$$\pi_1 : C_\varphi \rightarrow X \text{ et } \pi_2 : C_\varphi \rightarrow Y, \quad (2.12)$$

définissent les deux projecteurs sur X et Y .

D'après les résultats précédents, nous concluons qu'il existe certain genre de fonctions génératrices qui sont associées à des transformations symplectiques et des relations canoniques. Ce genre de fonctions génératrices permet aux spécialistes d'introduire des nouvelles classes d'opérateurs tels que les opérateurs intégraux de Fourier et les opérateurs pseudo-différentiels. Dans la partie suivante, nous allons jeter la lumière sur le principe et l'importance de ce type d'opérateur.

2.3 Généralités sur les opérateurs intégraux de Fourier

Les opérateurs intégraux de Fourier et les opérateurs pseudo-différentiels nous permettent de manipuler les opérateurs différentiels à coefficients variables. Tandis

que la transformée de Fourier nous aide à manipuler les opérateurs différentiels à coefficients constants.

Dans cette partie, nous présentons un partiel survol sur la théorie des opérateurs intégraux de Fourier. Nous élargissons les connaissances sur la singularité de ce genre d'opérateur. Pour avoir une meilleure présentation de ces opérateurs, nous définissons les opérateurs intégraux de Fourier associés à des relations symplectiques de pliage (singulières). Cette catégorie d'opérateurs singuliers sort du cadre classique de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier. R.Melrose et M.E. Taylor [54] ont été les premiers qui introduisaient ce type d'opérateur. Ils ont prouvé que la relation canonique qui présente un pli de Whitney peut être transformée en une autre forme canonique simple à traiter.

2.3.1 Symboles et fonction de phase

Symboles et leurs propriétés

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on a

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{et} \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

où

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n},$$

avec $D_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j}$ et $i^2 = -1$.

Soit P un opérateur différentiel d'ordre m , défini par l'expression suivante :

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X) \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad (2.13)$$

Le symbole de cet opérateur est défini par :

$$\sigma_P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (2.14)$$

$p_m(x, \xi)$ est le symbole principal de l'opérateur $P(x, D)$. Comme il est mentionné dans [58], il est défini par :

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (2.15)$$

Définition 2.3.1. [41][58] Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1$, et $m \in \mathbb{R}$. Nous définissons $S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $x \in X$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante réelle C telle que

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \quad (x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n. \quad (2.16)$$

Toute fonction $a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ est appelée symbole d'ordre m , de type (ρ, δ) . On dit que $a(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$, si $a \in S_{1,0}^m(X \times \mathbb{R}^n)$.

Remarque. Dans le cas où X est une variété, la définition reste la même, les dérivées partielles par rapport aux variables ξ étant remplacées par des champs de vecteurs, en effet les constantes m, ρ , et δ ne dépendent pas de la carte locale.

Exemple. 1) $e^{ix\xi}$ n'est pas un symbole.

2) Si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors $\varphi(\xi)$ est un symbole d'ordre $-\infty$.

Proposition 2.3.1. [41] Si $m \leq m', \delta \leq \delta', \rho \leq \rho'$ alors

$$S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n) \subset S_{\rho',\delta'}^{m'}(X \times \mathbb{R}^n).$$

et

$$S^m(X \times \mathbb{R}^n) \subset S^{m'}(X \times \mathbb{R}^n).$$

Remarque. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $S^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m$, $S^{+\infty} = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m$.

De plus, nous avons

$$S^{-\infty} \subset \dots S^m \subset \dots S^{+\infty} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Proposition 2.3.2. [24][58] Soient $a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ et $b \in S_{\rho,\delta}^{m'}(X \times \mathbb{R}^n)$, alors $ab \in S_{\rho,\delta}^{m+m'}(X \times \mathbb{R}^n)$ et $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^{m-|\alpha|}(X \times \mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.3.3. [11] Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n .

Si $a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$, alors $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$.

Définition 2.3.2. [11] $a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ est dit classique (local), s'il admet un développement asymptotique $a \sim \sum_j a_j$ lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$, où a_j sont des symboles de $S_{\rho,\delta}^{m_j}$ où $j \in \mathbb{N}$ et $m_j \in \mathbb{R}$.

Symboles elliptiques

Définition 2.3.3. [41] Nous disons que $a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ est elliptique de degré m , s'il existe un $b \in S_{\rho,\delta}^{-m}(X \times \mathbb{R}^n)$ tel que

$$a \times b = 1.$$

Proposition 2.3.4. [24] $a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ est elliptique de degré m si et seulement si pour tout compact K de $X \times \mathbb{R}^n$ il existe une constante $c > 0$ tel que

$$|a(x, \xi)| \geq c|\xi|^m, \quad (2.17)$$

pour tout $(x, \xi) \in K$ et $|\xi| \geq \frac{1}{c}$.

La fonction de phase et les singularités

Nous profitons de montrer le lien entre la relation canonique (symplectique) et la fonction de phase en se basant sur la notion de la fonction génératrice.

Proposition 2.3.5. [13] [58] Si $\varphi \in C^\infty(X)$ est une fonction non dégénérée (i.e. le déterminant de matrice Hessienne n'est pas nul), alors C_φ qui est définie par la relation (2.7) est une sous variété dans $X \times \mathbb{R}^n$.

Définition 2.3.4. [41] Nous appelons $\varphi \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ une fonction de phase si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\varphi(x, \xi)$ est à valeurs réelles.
- 2) φ homogène d'ordre 1 par rapport à ξ c'est à dire $\varphi(x, \lambda\xi) = \lambda\varphi(x, \xi)$ pour $\lambda > 0$.
- 3) φ est non dégénérée c'est à dire φ n'admet pas de points critiques pour $\xi \neq 0$, autrement dit que les dérivées partielles de φ ne s'annulent jamais.

Définition 2.3.5. [58] Pour tout $\varphi \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ une fonction de phase, nous définissons Λ_φ par

$$\Lambda_\varphi = \{(x, \partial_x \varphi) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \quad \partial_\xi \varphi(x, \xi) = 0\}, \quad (2.18)$$

L'ensemble Λ_φ est un conique fermé qui contient l'ensemble critique de φ .

Remarque. Λ_φ est conique parce que la fonction φ est homogène de degré 1 en ξ .

Théorème 2.3.1. [26] Soient C_φ relation canonique associée à la fonction de phase φ définie par :

$$C_\varphi = \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \partial_\xi \varphi(x, \xi) = 0\} \quad (2.19)$$

et l'application

$$i_\varphi : \begin{cases} C_\varphi \rightarrow T^*X \setminus \{0\}, \\ (x, \xi) \mapsto (x, d_x \varphi(x, \xi)). \end{cases} \quad (2.20)$$

Si i_φ est injective, alors $i_\varphi(C_\varphi) = \Lambda_\varphi$.

Proposition 2.3.6. [58] Si φ est une fonction de phase non-dégénérée, alors Λ_φ est une sous-variété fermée de $X \times \mathbb{R}^n$ de dimension $n \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Les opérateurs intégraux de Fourier

Dans cette partie, nous rappelons la construction des opérateurs intégraux de Fourier (OFI) qui sont associés à des relations canoniques (symplectiques). Pour définir les OFI, nous commençons d'abord par définir les intégrales oscillantes. Nous introduisons l'intégrale oscillante sur \mathbb{R}^n dans la définition suivante :

Définition 2.3.6. [42][58] Soient φ une fonction génératrice introduite par la relation canonique C_φ qui vérifie (2.7) et $u(x) \in \mathcal{D}(X)$. Nous appelons intégrale oscillante, toute distribution de la forme suivante :

$$T_\varphi(au) = \int_{X \times \mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x, \xi)} a(x, \xi) u(x) dx d\xi, \quad (2.21)$$

tels que $a \in S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ et $\varphi(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ sachant que l'application $u \rightarrow T_\varphi(au)$ est de \mathcal{C}^∞ .

Les opérateurs intégraux de Fourier sont un type d'opérateurs définis par des intégrales oscillantes comme suit :

Définition 2.3.7. [42] Soient X et Y deux ouverts de \mathbb{R}^n , $\varphi(x, y, \xi)$ est une fonction de phase définie par la relation canonique C_φ (2.11) dans $X \times Y \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times Y \times \mathbb{R}^n)$ pour $\rho > 0$ et $\delta < 1$. Nous appelons opérateur intégrale de Fourier (OIF) d'ordre m , toute expression qui prend la forme suivante :

$$Fu(x) = \int_{Y \times \mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi) u(y) dy d\xi, \quad (2.22)$$

où $u \in \mathcal{C}_0^\infty(Y)$, $x \in X$.

Autrement dit, nous pouvons définir ce genre intégrale au sens de distribution par l'expression suivante :

$$\langle Fu, v \rangle = \int_{X \times Y \times \mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi) u(y) v(x) dx dy d\xi, \quad (2.23)$$

où $v \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$. L'espace des opérateurs intégraux de Fourier d'ordre m associés à des relations canoniques C_φ est noté $I^m(X; C_\varphi)$.

Théorème 2.3.2. [58] Si $a(x, \xi) \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ tel que $a = 0$ au voisinage de Λ_φ qui est défini par (2.18), alors $F \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

Remarque. On dit que F est un opérateur intégral de Fourier elliptique si est seulement si son symbole a_F est elliptique, d'où pour tout $\xi \neq 0$,

$$a_F(x, \xi) \neq 0. \quad (2.24)$$

Définition 2.3.8. [42] Pour tout $(x, y) \in X \times Y$, soit $\varphi(x, y, \xi)$ une fonction de phase qui n'admet pas des points critiques par rapport à la variable ξ avec $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Le noyau de l'opérateur F est la distribution $\kappa_F \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ qui est définie par l'intégrale oscillante suivante :

$$\langle \kappa_F, w \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times X} e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi) w(x) d\xi dx, \quad (2.25)$$

où $w(x) \in \mathcal{D}(X)$. Autrement dit, le noyau de l'opérateur (2.22) s'écrit comme suit :

$$\kappa_F(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi) d\xi. \quad (2.26)$$

Proposition 2.3.7. [58]

1) Le noyau κ_F est de classe \mathcal{C}^∞ sur R_φ avec

$$R_\varphi = \{(x, y) : \partial_\xi \varphi(x, y, \xi) \neq 0\}.$$

- 2) Soit $a \in S_{\rho,\delta}^m(X \times Y \times \mathbb{R}^n)$. Si a est nul au voisinage de Λ_φ , alors $\kappa_F \in \mathcal{C}^\infty(X \times Y)$.

Proposition 2.3.8. [24] Si F est un opérateur intégral de Fourier d'ordre m et φ sa fonction de phase sur $X \times Y \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nous avons

- 1) si $\partial_{y,\xi}\varphi(x, y, \xi) \neq 0$ pour $(x, y, \xi) \in X \times Y \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, F est continu de $\mathcal{C}_0^\infty(Y)$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(X)$.

- 2) si $\partial_{x,\xi}\varphi(x, y, \xi) \neq 0$ pour $(x, y, \xi) \in X \times Y \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, F se prolonge en un opérateur continu de $\mathcal{E}'(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$.

Théorème 2.3.3. [24] Si $F \in I^m(X; C_\varphi)$ alors $F^* \in I^m(X; C_\varphi^{-1})$ et

$$a_{F^*}(x, y, \xi) = \overline{a_F(x, y, \xi)}, \quad (2.27)$$

où F^* dénote l'opérateur adjoint de F et $\overline{a_F(x, y, \xi)}$ dénote le conjugué de $a_F(x, y, \xi)$.

Les opérateurs pseudo-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels sont un cas particulier des opérateurs intégraux de Fourier. Sachant que tous les opérateurs pseudo-différentiels sont associés à une fonction de phase unique tandis que le symbole de chaque opérateur diffère d'un opérateur à un autre.

Définition 2.3.9. [41] Soient $X = Y \subset \mathbb{R}^n$ et $\dim X = n$. L'opérateur pseudo-différentiel (OPD) est défini par un opérateur intégral de Fourier associé à la fonction de phase $\varphi(x, y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle$ tel que

$$Pu(x) = \int_{Y \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (2.28)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi. \quad (2.29)$$

Au sens des distributions, l'opérateur pseudo-différentiel P s'écrit comme suit :

$$\langle Pu, v \rangle = \int_{X \times Y \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} a(x, y, \xi) u(y) v(x) dx dy d\xi, \quad (2.30)$$

$$= \int_{X \times \mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) v(x) dx d\xi. \quad (2.31)$$

On note $OP S^m(X)$ (resp. $OP S_{\rho,\delta}^m(X)$) l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m (resp. d'ordre m et de type (ρ, δ)).

Proposition 2.3.9. *Pour la fonction de phase $\varphi(x, y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle$, alors*

$$C_\varphi = \{(x, x, \xi), x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}. \quad (2.32)$$

Remarque. *Les opérateurs pseudo-différentiels sont des opérateurs intégraux de Fourier qui sont associés à la relation d'identité.*

Théorème 2.3.4. [38] *Soient $P \in OP S_{\rho,\delta}^m(X)$ elliptique, $\rho > 0$ et $\delta < 1$, il existe $Q \in OP S_{\rho,\delta}^{-m}(X)$ unique qui vérifie égalité suivante :*

$$P \circ Q = Q \circ P = I, \quad (2.33)$$

où I est l'opérateur unitaire qui est défini par $Iu(x) = u(x)$, pour tout $u \in \mathcal{D}'(X)$.

Proposition 2.3.10. [60] *Si $P \in OP S_{\rho,\delta}^m(X)$ est un opérateur pseudo-différentiel et $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, s et $m \in \mathbb{R}$ alors*

$$P(x, D) : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n). \quad (2.34)$$

H^s est l'espace de Sobolev.

Théorème 2.3.5. [24][38] *Soient P et Q deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m admettant des symboles principaux p et q respectivement. Si A est un opérateur intégral de Fourier elliptique associé à la relation canonique C , alors*

$$P \circ A = A \circ Q, \quad (2.35)$$

avec $p = q \circ C$.

Théorème 2.3.6. [42] *Soient J un opérateur intégrale de Fourier inversible associé à la relation canonique χ et P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m admettant $p_m(x, \xi)$ comme symbole principal, alors $J^{-1}PJ$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $p \circ \chi^{-1}(x, \xi)$.*

Dans les théorèmes ci-dessous, nous nous intéressons à la composition des opérateurs intégraux de Fourier et les opérateurs pseudo-différentiels. Soient X , Y et Z trois ouverts de \mathbb{R}^n

Théorème 2.3.7. [31] [38] Si $T_1 \in I^{m_1}(X; C_1)$ et $T_2 \in I^{m_2}(Y; C_2)$ alors

$$T_1 \circ T_2 = T \in I^{m_1+m_2}(X; C_1 \circ C_2). \quad (2.36)$$

où C_1 et C_2 sont deux relations canoniques, m_1 et m_2 deux réels.

Corollaire 2.3.1. Si $T \in I^{m_1}(Y; C_\varphi)$ admet $a_T(y, z, \xi)$ comme symbole dans $S^{m_1}(Y \times Z \times \mathbb{R}^n)$ et si $P \in OPS^{m_2}(X)$ admet le symbole $p(x, \eta) \in S^{m_2}(X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, alors

$$P \circ T = F \in I^{m_1+m_2}(X; C_\varphi), \quad (2.37)$$

où $a_F(x, z, \xi)$ est le symbole de l'opérateur F qui est dans $S^{m_1+m_2}(X \times Z \times \mathbb{R}^n)$. Ce symbole est donné par l'intégrale suivante :

$$a_F(x, z, \xi) = \int_{Y \times \mathbb{R}^n} e^{i(\varphi(y, z, \xi) - \varphi(x, z, \xi) + (x-y)\eta)} p(x, \eta) a_T(y, z, \xi) dy d\eta, \quad (2.38)$$

où ξ la variable dual de y et η la variable dual de x .

Corollaire 2.3.2. Si $T \in I^{m_1}(X; C_\varphi)$ admet $a_T(x, y, \xi)$ comme symbole dans $S^{m_1}(X \times Y \times \mathbb{R}^n)$ et $P \in OPS^{m_2}(Y)$ admet le symbole $p(y, \eta) \in S^{m_2}(Y \times \mathbb{R}^n)$, alors

$$T \circ P = Q \in I^{m_1+m_2}(X; C_\varphi), \quad (2.39)$$

où $a_Q(x, z, \xi)$ est le symbole de l'opérateur Q qui est dans $S^{m_1+m_2}(X \times Z \times \mathbb{R}^n)$. Ce symbole est donné par :

$$a_Q(x, z, \xi) = \int_{Y \times \mathbb{R}^n} e^{i(y-z)(\eta-\xi)} p(x, \eta) a_T(x, y, \xi) p(y, \eta) dy d\eta. \quad (2.40)$$

avec ξ la variable dual de x et η la variable dual de y .

Corollaire 2.3.3. [41] [50] Soit $P \in OPS^{m_1}(X)$ admet symbole principal $p(x, \xi)$ et $Q \in OPS^{m_2}(Y)$ admet $q(y, \eta)$ comme symbole principal, alors

$$P \circ Q = B \in OPS^{m_1+m_2}(X). \quad (2.41)$$

et son symbole est donné par :

$$b(x, \xi) = \int_{Y \times \mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)(\xi-\eta)} p(x, \eta) q(y, \xi) dy d\eta. \quad (2.42)$$

avec $b(x, \xi) \in S^{m_1+m_2}(X \times \mathbb{R}^n)$.

2.3.3 Front d'onde et la propagation des singularités

Le support singulier

Nous appelons support de la distribution u dans X (resp. support singulier de la distribution u) le complémentaire dans X de l'ensemble des points sur lequel la distribution u est nulle (resp. u est de classe \mathcal{C}^∞). Le support de u est noté $\text{supp}(u)$, le support singulier de u est noté par $\text{supp sing}(u)$. Ceux sont deux ensembles fermés qui vérifient $\text{supp sing}(u) \subset \text{supp}(u)$ et

$$u = 0 \Leftrightarrow \text{supp}(u) = \emptyset, \quad (2.43)$$

$$u \in \mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow \text{supp sing}(u) = \emptyset. \quad (2.44)$$

Nous introduisons quelques propositions relatives à la notion du support singulier.

Proposition 2.3.11. [60] Si $P \in OPS_{\rho,\delta}^m$ (resp. OPS^m) est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m et $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ avec

$$P : \mathcal{C}_0^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(Y) \quad \text{ou} \quad P : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}'(Y), \quad (2.45)$$

alors $\text{supp sing}(Pu) \subset \text{supp sing}(u)$, pour tout $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.3.12. [60] Si $P \in OPS_{\rho,\delta}^m$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique avec $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, alors pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\text{supp sing}(Pu) = \text{supp sing}(u). \quad (2.46)$$

Proposition 2.3.13. [24] Soit $\varphi(x, \xi)$ une fonction de phase sur $X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si $F \in I^m(X; C_\varphi)$ définit par (2.22), alors

$$\text{supp sing}(F) \subset \{x \in X, \quad d_\xi \varphi(x, \xi) = 0\},$$

et si $\kappa_F(x, y)$ est le noyau de F , alors

$$\text{supp sing}(\kappa_F(x, y)) \subset \{(x, y) \in X \times Y, \quad d_\xi \varphi(x, y, \xi) = 0\}.$$

Nous concluons que le support singulier d'une distribution u est l'ensemble des points où u ne se comporte pas comme une fonction classique. Pour aller plus loin dans la théorie, les spécialistes essaient de relier la notion de la distribution à un nouveau type de support. Ils ont localisé les singularités détectées dans l'espace cotangent de sorte que chaque point singulier x est associé à son dual ξ formant un ensemble qui contient des couples singuliers de x et ξ . C'est exactement la notion de front d'onde. L'idée qui survient est de se placer sur les petits ensembles coniques de deux dimensions pour remédier au problème.

Front d'onde

Le front d'onde permet de localiser les singularités d'une distribution u dans l'espace cotangent. Dans cette partie, nous introduisons des notions et des propriétés de front d'onde. L. Hormander a défini le concept scientifique de front d'onde à l'aide des opérateurs pseudo-différentiels. Ce concept joue un rôle très important dans la formulation microlocale des solutions des équations différentielles. Cette formulation microlocale nous permet d'éclaircir les ambiguïtés qui sont liées à la notion de la propagation des singularités. Le concept de front d'onde est une partie conique fermée de fibré cotangent privé de la section nulle $T^*M \setminus \{0\}$. Cette partie est un conique de l'espace des fréquences ξ selon leurs positions x .

Définition 2.3.10. [11]/[31] Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nous disons que u est microlocalement de classe \mathcal{C}^∞ en un point $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, s'il existe un ouvert V vérifiant $x_0 \in V \subset \Omega$ et un cône ouvert Γ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contenant ξ_0 tels que nous avons :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V), \forall N, \exists C |\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N} \quad \text{pour } \xi \in \Gamma.$$

L'ensemble des couples (x_0, ξ_0) où u n'est pas microlocalement de classe C^∞ est un conique fermé de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ qui définit le front d'onde de u . Cet ensemble noté par $WF(u)$.

Les définitions suivantes donnent des notions sur le concept de front d'onde des opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 2.3.11. [11] Soient $P \in OPS^m$ et $p(x, \xi)$ son symbole. Nous définissons le front d'onde de P comme étant le complémentaire de l'ensemble des points (x, ξ) tel qu'il existe un voisinage de x et un voisinage conique de ξ sur lequel nous avons pour tout entier N ,

$$|p(x, \xi)| \leq (1 - |\xi|)^{-N}. \quad (2.47)$$

Définition 2.3.12. [55][58] Soient P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m et $p_m(x, \xi)$ son symbole principal. L'ensemble caractéristique de P est défini par :

$$Char(P) = \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, p_m(x, \xi) = 0\}. \quad (2.48)$$

Dans ce qui suit, nous mentionnons que les opérateurs pseudo-différentiels se comportent bien vis-à-vis de la notion de front d'onde. Le théorème suivant montre qu'il y a un lien entre le front d'onde et l'ensemble caractéristique d'un opérateur pseudo-différentiel.

Théorème 2.3.8. [55][58] Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m . Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors

$$WF(u) = \bigcap_{Pu \in C^\infty} Char(P). \quad (2.49)$$

Proposition 2.3.14. [58] Soient $P \in OPS^m$ et $u \in \mathcal{D}'(X)$.

Si $Pu = f \in C^\infty(X)$, alors $WF(u) \subset Char(P)$. En particulier, Si $Char(P)$ est un ensemble vide, alors $u \in C^\infty(X)$ et P est elliptique.

Théorème 2.3.9. [58][60] Soient $P \in OPS^m$ et $u \in \mathcal{D}'(X)$. nous avons

$$WF(Pu) \subset WF(u) \subset WF(Pu) \cup Char(P). \quad (2.50)$$

Corollaire 2.3.4. [58][60] Si $P \in OPS^m(X)$ est elliptique, alors

$$WF(Pu) = WF(u). \quad (2.51)$$

En particulier pour les équations hyperboliques, la solution d'un problème défini par des conditions initiales s'écrit comme une combinaison linéaire d'opérateurs intégraux de Fourier. Dans le théorème suivant, nous décrivons la relation entre les fronts d'onde et les relations canoniques associées aux fonctions génératrices de ces opérateurs intégraux de Fourier.

Théorème 2.3.10. [55] Soit F un opérateur intégral de Fourier d'ordre m associé à la relation canonique C_φ qui est défini par l'intégrale (2.22), alors

$$WF(Fu) \subset C_\varphi(WF(u)), \quad (2.52)$$

où C_φ est une relation canonique qui est définie par :

$$C_\varphi(\partial_\xi\varphi(x, \xi), \xi) = (x, \partial_x\varphi(x, \xi)). \quad (2.53)$$

Proposition 2.3.15. [38] Soient F un opérateur intégral de Fourier d'ordre m qui est défini par une fonction de phase $\varphi(x, \xi)$ sur $X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nous avons

$$WF(F) \subset \Lambda_\varphi = \{(x, \partial_x\varphi(x, \xi)); \partial_\xi\varphi(x, \xi) = 0, \text{ avec } \xi \neq 0\}. \quad (2.54)$$

où Λ_φ est un conique fermé de $T^*X \setminus \{0\}$.

Proposition 2.3.16. [55] Soient A et B deux opérateurs intégraux de Fourier associés à deux relations canoniques C_1 et C_2 respectivement. Nous avons

$$WF(AB) \subset WF(A) \cup WF(B). \quad (2.55)$$

La propagation des singularités se produit quand l'onde se propage sur le bord de l'obstacle diffuseur d'une façon tangentielle en créant un aspect singulier sur le bord de l'obstacle. Le théorème suivant est l'un des résultats clé de l'analyse microlocale. Ce théorème permet de séparer entre les rayons (les trajectoires) de propagation de singularité issus d'un point $x_0 \in \text{supp sing}(u)$ de X selon leur origine $(x_0, \xi_0) \in T^*X$.

Théorème 2.3.11. [11][26] *Théorème de propagation*

Soit $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) D^\alpha$, un opérateur différentiel linéaire (resp. un opérateur pseudo-différentiel) d'ordre m . Son symbole principale à valeur réelle est $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha(x) \xi^\alpha$. Si $u \in \mathcal{S}'$ vérifie l'équation

$$p(x, D)u = f, \quad (2.56)$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty$, alors l'ensemble de front d'onde de u est l'union des courbes de la bicaractéristique de $p(x, \xi)$. La bicaractéristique contient les courbes intégrales (trajectoires) du champ de vecteur H_{p_m} issues des points où $p_m(x, \xi) = 0$. Ce champ de vecteur de p_m est défini par :

$$H_{p_m} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (2.57)$$

Dans la figure 2.2, nous distinguons la différence entre les trois concepts tels que le front d'onde, la caustique et les trajectoires.

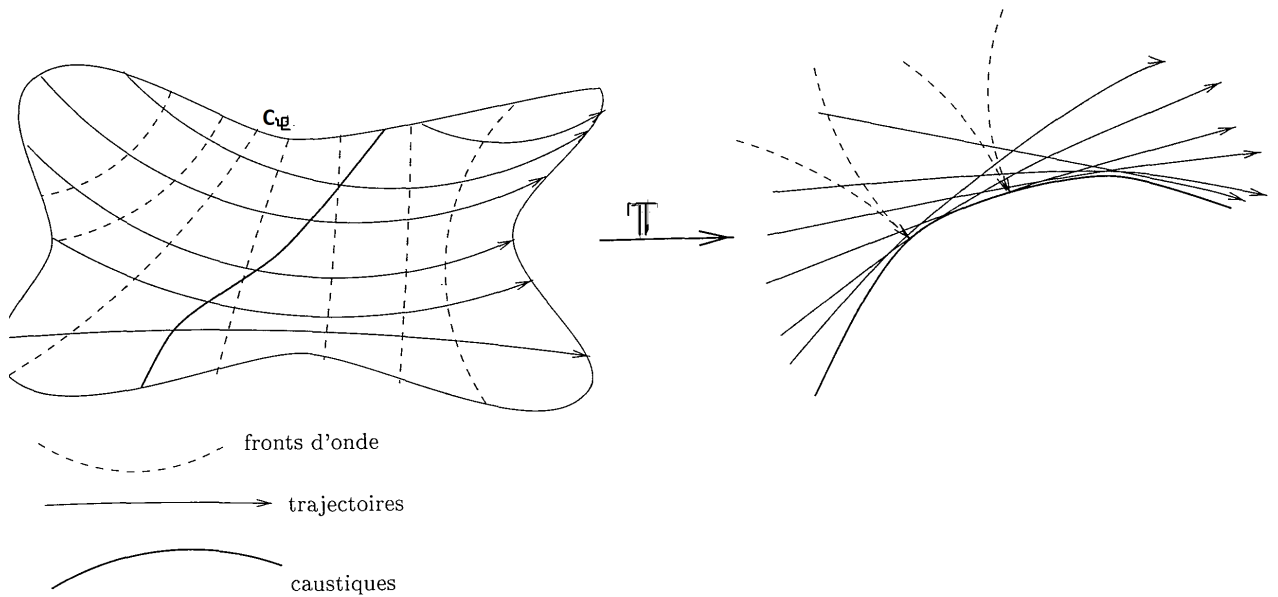


Fig. 2.2: Le front d'onde, la caustique et les trajectoires [27].

Nous réalisons que le concept de front d'onde de u est un ensemble qui contient (x, ξ) où $x \in \text{supp } \text{sing}(u)$ tandis que ξ est une fréquence dominante de u près de x . Le théorème suivant, montre que le front d'onde est l'ensemble des mauvaises directions de la distribution u .

Théorème 2.3.12. [60] *Soit le projecteur*

$$\pi : \begin{cases} X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow X, \\ (x, \xi) \mapsto x. \end{cases} \quad (2.58)$$

Alors, la projection sur X de $WF(u)$ est $\text{supp } \text{sing}(u)$.

En général, le nom de l'analyse microlocale est l'étude des distributions qui sont locales à la fois en la variable d'espace x et en la variable de fréquence ξ . L'introduction de ces concepts est principalement motivés par la théorie des équations aux dérivées partielles qui est la source du progrès considérable dans ce domaine.

D'après ce que nous avons cité ci-dessus, le front d'onde de $u \in \mathcal{D}'(X)$ est un sous-ensemble conique de $X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui va contenir non seulement les points où u est singulière, mais encore les (co-)directions ξ dans lesquelles celle-ci est singulière.

2.4 Les opérateurs intégraux de Fourier associés à des relations de pliage

Dès les débuts de la mécanique quantique, les physiciens ont proposé des formes, des approches pour les solutions de l'équation des ondes. La plus célèbre est l'approche de BKW (Brillouin-Kramers-Wentzell) qui propose la solution sous forme d'une fonction d'onde qui est donnée par :

$$w(x) = a(x)e^{i\varphi(x)}, \quad (2.59)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction de phase associée à la relation canonique C_φ . Cette relation canonique est le graphe de $d\varphi$ et $a(x)$ un symbole. Notre objectif est de franchir le concept des singularités de C_φ . D'où les singularités de la fonction φ qui désigne

exactement le concept de la caustique. Les singularités les plus célèbres dans la caustique sont les singularités de pli. Nous profitons dans cette partie de jeter un coup d'œil sur les fonctions qui admettent ce genre de singularités plus précisément la fameuse fonction d'Airy.

Exemple. Pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, nous définissons la fonction d'Airy par l'intégrale suivante :

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(x \cdot \xi + \frac{\xi^3}{3})} d\xi. \quad (2.60)$$

Cette fonction est associée à la variété lagrangienne

$$x = -\xi^2. \quad (2.61)$$

si X est un ouvert de \mathbb{R}^n et si C_φ vérifie la forme suivante :

$$\{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x = -\xi^2\} \subset T^*\mathbb{R}^n, \quad (2.62)$$

alors la relation (2.64) admet la fonction de phase $\psi(x, \xi)$:

$$\psi(x, \xi) = \frac{\xi^3}{3} + x\xi. \quad (2.63)$$

qui admet une caustique en $(0, 0)$. La fonction d'Airy décrit le comportement des intégrales oscillantes associées aux singularités plis

D'après l'exemple précédent, si X est un ouvert de \mathbb{R}^n et si C_φ vérifie la forme suivante :

$$\{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x = -\xi^2\} \subset T^*\mathbb{R}^n, \quad (2.64)$$

alors la relation (2.64) admet la fonction de phase $\psi(x, \xi)$:

$$\psi(x, \xi) = \frac{\xi^3}{3} + x\xi. \quad (2.65)$$

Le fait de produire une autre fonction de phase ψ qui vérifie la même relation de C_φ , cela nous permet de réduire la caustique de la fonction de phase φ à l'origine. À cet effet, au voisinage de 0 l'approche (2.59) admet la représentation suivante :

$$Ju(x) = \int e^{i\psi(x, \xi)} a(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad (2.66)$$

où $a(x, \xi)$ est un symbole à support compact et $u(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$.

Cette intégrale ressemble fort à celle qui définit la fonction d'Airy. Il représente un opérateur intégrale de Fourier associé à la relation canonique de pliage. En fait, on a mieux que cela dans le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. [26] *Si C_φ admet une singularité de pli au voisinage de (x_0, ξ_0) , alors il existe des coordonnées locales près de x_0 et une fonction de phase définie par :*

$$\psi(x, \xi) = \varphi(x) + x_1 \xi + \frac{\xi^3}{3},$$

telle que

$$C_\varphi = C_\psi.$$

Définition 2.4.1. [54] *Soient $\varphi(x, \xi)$ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et C_φ une relation canonique vérifie (2.11). Nous disons que C_φ est une relation canonique de pliage (singulière) si et seulement si le projecteur $\pi : C_\varphi \rightarrow T^*(X), (x, \xi) \mapsto x$ n'est pas un difféomorphisme.*

Remarque. *D'une façon pratique, nous disons que C_φ est une relation singulière (resp. pliage) si et seulement si sa fonction génératrice admet des singularités (resp. singularité pli).*

Définition 2.4.2. *Tout opérateur intégral de Fourier qui admet une fonction de phase singulière, définit un opérateur intégrale de Fourier de pliage.*

Remarque. [54] *L'opérateur intégrale de Fourier associé à une relation canonique de pliage, il ne représente pas un graphe.*

Théorème 2.4.2. [26] *Si $C_\varphi = C_\psi$, tout opérateur dans $I^m(X, C_\varphi)$ est aussi dans $I^m(X, C_\psi)$.*

Nous concluons qu'il est possible de réduire les opérateurs intégraux de Fourier singuliers à d'autres opérateurs intégraux de Fourier plus simple. Pour cette réduction, il nous suffit juste de trouver une autre fonction de phase simple qui est associée à la même relation canonique de laquelle elle munit les mêmes singularité que la fonction de phase de l'opérateur original.

2.5 Les opérateurs de Fourier-Airy

Les opérateurs intégraux de Fourier-Airy (ou les opérateurs d'Airy) sont un nouveau type des opérateurs intégraux de Fourier. Ce type admet, d'une part un symbole qui est défini par la fonction d'Airy, et d'autre part une fonction de phase généralisée qui est définie par une relation canonique singulière. De plus, tout opérateur pseudo-différentiel admettant un symbole défini par un multiplicateur de Fourier satisfaisant la fonction d'Airy, est un opérateur d'Airy.

En général, les opérateurs d'Airy généralisent le concept mathématique des opérateurs intégraux de Fourier. Melrose a réussi de faire un calcul symbolique de cette classe d'opérateurs pour le but de construire des paramétrisations qui lui permettent d'analyser le problème de diffraction. De plus, ce genre d'opérateurs apparaissent dans l'analyse des problèmes où les rayons incidents passent au voisinage du bord de l'obstacle d'une façon tangentielle ou glissante. Cela définit exactement Grazing rays et Gliding rays.

Grazing rays explique le phénomène de la diffraction des ondes quand elles se propagent d'une façon tangentielle sur l'extérieur du bord de l'obstacle et Gliding rays est exprimé par l'action quand les rayons incidente intersectent d'une façon tangentielle l'intérieur du bord de l'obstacle.

Les opérateurs d'Airy basent sur des multiplicateurs de Fourier $\Phi_s, \Phi i, A$ et Ai qui vérifient les propriétés suivantes :

Définition 2.5.1. [62] Soient Φ_s avec $s = \pm$ et Φi deux multiplicateurs de Fourier définis par :

$$\widehat{\Phi_s u(\xi)} = \Phi_s(\zeta_0)\widehat{u}(\xi), \quad \widehat{\Phi i u(\xi)} = \Phi i(\zeta_0)\widehat{u}(\xi), \quad (2.67)$$

avec

$$\Phi_s(\zeta_0) = \frac{A_s}{A'_s}(\zeta_0), \quad \Phi i(\zeta_0) = \frac{Ai}{Ai'}(\zeta_0), \quad (2.68)$$

et

$$\zeta_0 = (\xi_1 + iT)\xi_n^{-1/3}, \quad (2.69)$$

où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $A(x) = A_s(x) = A_{\pm}(x) = Ai(\pm 2\pi/3x)$.

Pour Φi , nous fixons T positif et pour Φ , nous prenons $T = 0$. Autrement dit, Φi et Φ_s sont deux opérateurs d'Airy.

Remarque. L'opérateur Φ_s apparait dans l'analyse du problème de Grazing rays quand les rayons incidents passent tangentiellement à travers le bord de l'obstacle. De plus, Φ est un opérateur pseudo-différentiel dans $OPS_{1/3,0}^{1/3}$.

Remarque. L'opérateur Φ_i apparait dans l'analyse du problème de Gliding rays quand les rayons incidents se diffractent d'une façon tangentielle à l'intérieur du bord de l'obstacle. Φ n'est pas un opérateur pseudo-différentiel, il est un opérateur intégral de Fourier qui admet une fonction de phase singulière.

Définition 2.5.2. [54] Soient $\mathcal{A}i^{(j)}$ et $\mathcal{A}^{(j)}$ deux opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels que

$$\mathcal{A}i^{(l)}u(x, t) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi+i(t-\nu)\tau} \mathcal{A}i^{(l)}(\xi_1\tau^{-1/3})u(y, \nu)dyd\nu d\xi d\tau, \quad (2.70)$$

et

$$\mathcal{A}^{(l)}u(x, t) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi+i(t-\nu)\tau} A_s^{(l)}(\xi_1\tau^{-1/3})u(y, \nu)dyd\nu d\xi d\tau, \quad (2.71)$$

où $j = 0, 1$ dénote l'ordre de dérivation.

Ce genre d'opérateurs est défini par les multiplicateurs de Fourier $\mathcal{A}i^{(l)}(\xi_1\tau^{-1/3})$ $A_s^{(l)}(\xi_1\tau^{-1/3})$ qui vérifient

$$\widehat{\mathcal{A}i^{(l)}u(x, t)} = \mathcal{A}i^{(l)}(\xi_1\tau^{-1/3})\widehat{u}(\xi, \tau), \quad (2.72)$$

$$\widehat{\mathcal{A}^{(l)}u(x, t)} = A_s^{(l)}(\xi_1\tau^{-1/3})\widehat{u}(\xi, \tau). \quad (2.73)$$

Remarque. Les égalités (2.72) et (2.73) sont aussi valable pour l'opérateur \mathcal{A}^{-1} .

Dans ce qui suit, nous introduisons d'autre définition des opérateurs Fourier-Airy qui peuvent être présente dans l'étude des phénomènes de la propagation des ondes et l'analyse des problème de diffraction.

Définition 2.5.3. [53] Soit Υ_ε^n un conique au voisinage $\bar{\xi} = (1, 0 \cdots 0)$, pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, nous définissons Υ_ε^n par :

$$\Upsilon_\varepsilon^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \quad |\xi - |\xi|\bar{\xi}| \leq |\xi|\varepsilon\}, \quad (2.74)$$

L'espace des opérateurs de Fourier-Airy d'ordre m (des opérateurs d'Airy d'ordre m) est noté OPN^m . De plus $OPN^m = OPN_s^m(\mathbb{R}^n \times \Upsilon_\epsilon^n)$, où $s = \pm$. L'espace OPN^m contient les opérateurs de $OPS_{1/3,0}^m(\mathbb{R}^n)$ admettant des symboles de la forme suivante :

$$\sigma \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}} b_{k,l}(x, \xi) \Phi_s^{k,l}(\zeta_0(\xi)) \xi_n^{-\frac{k}{3} - \frac{l}{3}}, \quad (2.75)$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$, la somme par rapport à l'indice $k \in \mathbb{Z}$ est finie, $b_{k,l} \in S_{\tau,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \Upsilon_\epsilon^n)$ et

$$\Phi_s^{k,l}(\zeta_0(\xi)) = \frac{d^l}{d\xi^l} \Phi_s^k(\zeta_0(\xi)), \quad (2.76)$$

où

$$\Phi_s^{k,l}(\zeta_0(\xi)) \in S_{1/3,0}^{(\frac{k}{3} - \frac{2l}{3})_+} = S_{1/3,0}^{p_+}, \quad (2.77)$$

tel que

$$p_+ = \begin{cases} p & \text{pour } p \geq 0, \\ 0 & \text{pour } p \leq 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Proposition 2.5.1. [53] Soit B un opérateur d'Airy de OPN^m admettant le symbole (2.75).

1) Si $k \geq 0$, alors B est un opérateur d'Airy de type positive. Nous notons

$$B \in OPN_s^{m,+}(\mathbb{R}^n \times \Upsilon_\epsilon^n). \quad (2.79)$$

2) Si $k = 0$, alors $\Phi_s^{k,l} = 0$, pour tout $l > 0$.

3) Nous disons que B est un opérateur classique si pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $l = k = 0$. De plus, l'opérateur B est classique loin de $\zeta = 0$.

Proposition 2.5.2. [53]

$$OPN^\infty = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} OPN^m, \quad OPS_{\tau,\delta}^m \subset OPN^m. \quad (2.80)$$

Dans ce qui suit, nous définissons l'espace des opérateurs de Fourier-Airy de type positive et nous introduisons des opérateurs qui appartiennent à cet espace.

Définition 2.5.4. [62] L'espace $OPN^{m,+}$ contient précisément les opérateurs qui sont de la forme suivante :

$$Tu(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} [a(x, y, \xi)\Phi_s(\xi_1\xi_n^{-1/3}) + b(x, y, \xi)] u(y)dyd\xi, \quad (2.81)$$

où $a(x, y, \xi) \in S^{m-1/3}$ et $b(x, y, \xi) \in S^m$.

Remarque. Si nous remplaçons Φ_s par Φ_i dans la définition (2.5.4) nous aurons des opérateurs appartiennent dans le même espace $OPN^{m,+}$.

Proposition 2.5.3. [62] $OPN^{m,+} \subset OPS_{1/3,0}^m$.

Théorème 2.5.1. [62] Si $T_1 \in OPN^{m_1,+}$ et $T_2 \in OPN^{m_2,+}$, alors

$$T_1T_2 \in OPN^{m_1+m_2,+}, \quad (2.82)$$

où m_1 et m_2 sont deux réels.

Théorème 2.5.2. [62] Si $T \in OPN^{m,+}$ alors $T^{-1} \in OPN^{-m,+}$. De plus, T^{-1} est microlocal au voisinage de ξ_1 .

Définition 2.5.5. [53] Pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$, l'espace $OPN_s^{m,N}(\mathbb{R}^n \times \Upsilon_\varepsilon^n)$ contient les opérateurs pseudo-différentiels admettant le symbole qui est de la forme suivante :

$$\sigma(B) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}} b_{k,l}(x, \xi) \Phi_s^{k,l}(\zeta_0(\xi)) \xi_n^{-\frac{k}{3} - \frac{l}{3}}. \quad (2.83)$$

Si nous fixons l alors la somme qui dépendante de k est bornée et nous avons

$$b_{k,l}(x, \xi) \in S_{\tau,\delta}^{m+(k-N)-}(\mathbb{R}^n \times \Upsilon_\varepsilon^n). \quad (2.84)$$

Proposition 2.5.4. [53] $OPN_s^m = \bigcup_{N \in \mathbb{Z}} OPN_s^{m,N}$.

Proposition 2.5.5. [53] Pour tout $m \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{Z}$. Nous avons

- 1) $OPN_s^{m,N} \subset OPN_s^{m+1,N+1}$.
- 2) $OPN_s^{m,+} \subset OPN_s^{m,0}$.
- 3) $OPN_s^{m,N} \subset OPS_{1/3,0}^{m-N/3-}$.

Proposition 2.5.6. [53] Si $B \in OP\mathcal{N}_s^{m,+}(\mathbb{R}^n \times \Upsilon_\varepsilon^n)$ alors $B^* \in OP\mathcal{N}_{-s}^{m,+}(\mathbb{R}^n \times \Upsilon_\varepsilon^n)$ où B^* est l'adjoint de B .

Les opérateurs de Fourier-Airy sont utilisés pour construire des structures et des paramètres. Ces paramètres nous permettent de résoudre les problèmes de diffraction sur le bord de l'obstacle.

Ce type d'opérateur donne un contrôle principal sur la structure microlocale au voisinage d'un point diffractif sur le bord. Ce point de diffraction produit une singularité au niveau de la fonction de phase de ces opérateurs. Cette dernière est définie sur l'hypersurface de l'obstacle, comme étant une fonction réelle sur la région hyperbolique de l'hypersurface, tandis que sur la région elliptique, la fonction de phase est complexe.

Pour pouvoir construire ce genre d'opérateur, nous devons utiliser une forme standard de la fonction de phase, d'une façon que les singularités de cette fonction de phase doivent présenter suivant les singularités de de la fonction d'Airy.

3. L'AMPLITUDE DE KIRCHHOFF EN UTILISANT LA DÉCOMPOSITION DE DTN

3.1 Introduction

B. Melrose et R. Taylor se sont intéressés à résoudre le problème de diffraction des ondes par un obstacle strictement convexe \mathcal{O} dans \mathbb{R}^{n+1} . Le bord de l'obstacle \mathcal{O} est une hypersurface de \mathcal{C}^∞ noté par $\partial\mathcal{O} = B$. Ils supposaient que l'obstacle munit d'une courbure $c(x)$ strictement positive partout sur le bord et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}/\mathcal{O}$.

Dépendant du phénomène de la diffraction des ondes par un obstacle convexe, B. Melrose et R. Taylor ont décomposé le bord de l'obstacle en trois régions (voir les figures 3.2 et 3.1) : la région illuminée définie par :

$$\partial\mathcal{O}_- = \{x \in \partial\mathcal{O} : n(x) \cdot \omega < 0\},$$

la région d'ombre définie par :

$$\partial\mathcal{O}_+ = \{x \in \partial\mathcal{O} : n(x) \cdot \omega > 0\},$$

et la région de transition (le bord d'ombre) définie par :

$$\partial\mathcal{O}_\omega = \{x \in \partial\mathcal{O} : n(x) \cdot \omega = 0\}. \tag{3.1}$$

Dans [54], Taylor et Melrose ont fait une étude détaillée au voisinage du pic de diffraction pour le but de trouver le développement asymptotique du champ diffracté. Cette étude est faite en traitant la diffraction des ondes par un obstacle strictement convexe avec une condition sur le bord de l'obstacle qui est définie par l'opérateur de Dirichlet to Neumann (DtN).

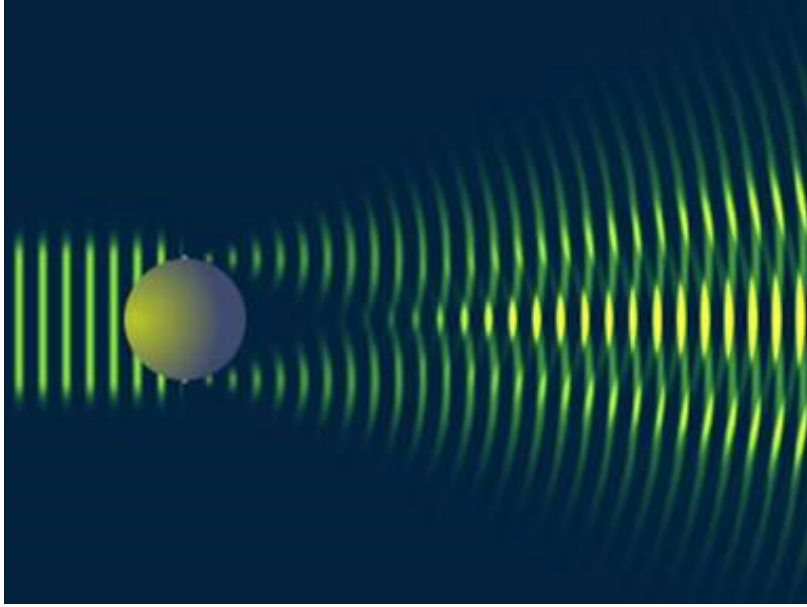


Fig. 3.1: Diffraction des ondes par un obstacle convexe [48]

L'opérateur DtN est un opérateur pseudo-différentiel de caractère non local. Ce caractère oblige Melrose et Taylor à déterminer une approximation locale de l'opérateur pseudo-différentiel DtN . D'après les calculs et la nouvelle technique suivie par Taylor et Melrose dans [54], ils ont déterminé l'approximation de Kirchhoff corrigée. Cette nouvelle approximation est définie dans la région illuminée par :

$$\frac{\partial w^t(x, k)}{\partial n(x)} = 2 \frac{w^i(x, k)}{\partial n(x)}, \quad (3.2)$$

et pour tout x dans $\{x \in \partial\mathcal{O} : n(x) \cdot \omega \geq 0\}$, elle est définie par :

$$\frac{\partial w^t(x, k)}{\partial n(x)} = 0. \quad (3.3)$$

où $w^t(x, k)$ est le champ total de l'équation de Helmholtz (0.6). Cette approximation est motivée par l'idée que dans la région d'ombre, le champ total est essentiellement zéro, pour k grand.

De plus, cette approximation joue le rôle d'une approche de la dérivée normale du champ total quand nous utilisons la méthode des équations intégrales pour trouver la solution de l'équation de Helmholtz.

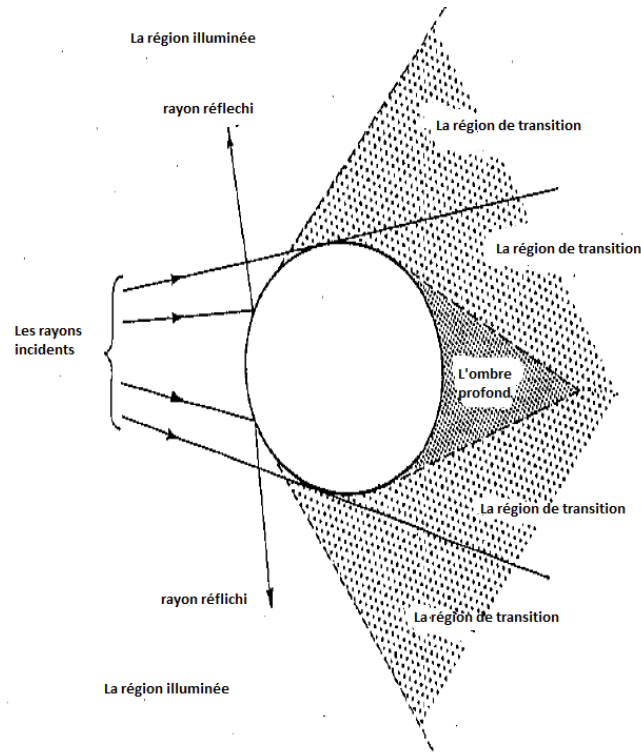


Fig. 3.2: Les trois régions du bord de l'obstacle diffuseur [48]

Dans ce qui suit, nous allons citer la technique suivie par Taylor et Melrose pour trouver cette approche de la dérivée normale du champ total. Cette technique s'est résumé premièrement par trouver l'opérateur Q . Cet opérateur est associé à la dérivée normale du champ total sur le bord. Puis, ils ont déterminé le noyau de l'opérateur Q . Ensuite, ils ont appliqué la transformation de Fourier inverse par rapport à la variable temps pour déterminer l'intégrale oscillante de l'amplitude de Kirchhoff a_Q . Enfin, ils ont déterminé le développement asymptotique de l'amplitude a_Q en utilisant la méthode de phase stationnaire.

Pour trouver l'approche de la dérivée normale du champ total sur le bord de l'obstacle dans la gamme de fréquence très élevée, Taylor et Melrose ont fait tendre k trouvé dans le développement asymptotique de l'amplitude a_Q obtenu précédemment vers $(+\infty)$. Cette technique leurs permet d'obtenir l'approximation de Kirchhoff corrigé.

En particulier, l'approximation de Kirchhoff corrigée, parfois elle s'est considérée comme une approximation du plan tangent, et parfois une approximation à haute fréquence. Cette approximation est largement utilisée pour modéliser le phénomène de la diffraction des ondes par un objet faiblement courbé.

3.2 *L'étude de propagation d'une onde au voisinage de la région de transition*

L'étude du phénomène de la diffraction des ondes par un obstacle convexe a été notamment étudié par R. Melrose, M. Taylor dans [54],[55]et [59]. L'idée principale de cette partie est de rappeler quelques résultats obtenus par R. Taylor et M. Melrose qui les ont eu au voisinage de la région de transition et de déterminé une forme générale de la solution près d'un point diffractif.

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un obstacle strictement convexe borné tel que le bord de \mathcal{O} est une hypersurface de \mathcal{C}^∞ noté par $\partial\mathcal{O} = B$. Supposons Ω un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{O}$. Nous définissons l'équation des ondes (3.4) avec une condition de Dirichlet sur le bord par :

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, t) = f(x, t) & \text{sur } \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.4)$$

où $f(x, t) \in \mathcal{E}'(\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R})$.

En étudiant ce problème, Taylor et Melrose ont traité le mouvement des rayons quand ils se glissent d'une façon tangentielle sur le bord de l'obstacle produisant le phénomène de Grazing rays et le phénomène de Gliding rays (voir la figure 3.3 et la figure 3.4). De leurs part, ils ont défini le phénomène de Grazing rays par la propagation des singularités à l'extérieur de l'obstacle diffuseur qui signifie exactement le glissement des rayons incidents d'une façon tangentielle sur l'extérieur du bord de l'obstacle diffuseur. Tandis que le phénomène de Gliding rays est défini par la propagation des singularités à l'intérieur de l'obstacle qui signifie le dérapage des rayons incidents tangentiellement à l'intérieur du bord de l'obstacle.

Si nous nous focalisons sur la figure 3.4, nous voyons que les singularités de la



Fig. 3.3: Le cas de Grazing rays. La flèche rouge est le champ incident et la flèche bleue est le champ diffracté.

solution de l'équation des ondes $u(x, t)$ se déplace le long des courbes trajectoires venant de la source P (comme r, r' voir la figure 3.4).

Suivant la figure 3.4, nous remarquons que l'onde incidente venant de la source P va suivre deux direction possible quand elle se rencontre le bord de l'obstacle \mathcal{O} . La première direction s'agit que cette onde va se réfléchir dès qu'elle se croise avec le bord de l'obstacle (comme r , voir la figure 3.4). Dans ce cas, les singularités continuent à se déplacer le long de la trajectoire. La deuxième situation est beaucoup plus compliquée, là où l'onde se glisse sur le bord de l'obstacle. Melrose et Taylor ont indiqué que ce genre de singularités est lié au comportement analytique de $u(x, t)$, la solution du problème (3.4) .

Autrement dit, les difficultés principales de ce genre de problème viennent de comportement des singularités au voisinage d'un point irrégulier sur le bord de l'obstacle diffuseur. De plus, ces difficultés apparaissent près des points par lesquels passe un rayon optique (glancing rays) en couloyant le bord sans être dévié produisant les points diffractifs dans la région de transition.

Dans le cas général, si nous exposons un obstacle devant un paquet d'ondes, nous voyons que chaque rayon incident qui est tangent au bord de l'obstacle donne naissance à un rayon diffracté. Les difficultés des problèmes de la propagation des ondes les plus compliquées apparaissent dans la description de ces rayons qui sont tangents sur le bord de l'obstacle en produisant le phénomène de diffraction. Ceux sont des rayons obliques (glancing rays) qui désignent les deux sorte de phénomènes Gliding rays et Grazing rays. Dans les deux situations le champ diffracté

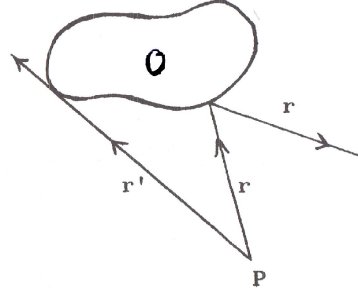


Fig. 3.4: Diffraction d'une onde par un obstacle \mathcal{O} [39].

de ce problème est défini comme étant une combinaison des fonctions d'Airy. Le but du théorème suivant est de présenter les solutions des problèmes de propagation des ondes pour les deux types des rayons qui sont tangents sur le bord de l'obstacle.

Théorème 3.2.1. [55] *Dans le cas de Grazing rays la solution du problème de diffraction est de la forme suivante :*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\psi(x, t, \xi)} [g(x, t, \xi)A_{\pm}(\zeta(x, t, \xi)) + ih(x, t, \xi)A'_{\pm}(\zeta(x, t, \xi))] A_{\pm}^{-1}(\zeta_0(x, \xi))\widehat{K}(\xi)d\xi, \quad (3.5)$$

$\psi(x, t, \xi)$ et $\zeta(x, t, \xi)$ sont deux fonctions de phase homogènes par rapport à ξ de degré 1 et $2/3$ respectivement avec $\zeta(x, t, \xi)|_{\partial\mathcal{O}} = \zeta_0(x, \xi) = \xi_n^{-1/3}\xi_1$, $g(x, t, \xi)$ et $h(x, t, \xi)$ sont deux symboles de S^0 et $S^{-1/3}$ respectivement, avec $h(x, t, \xi) = 0$ pour tout $x \in \partial\mathcal{O}$, K est un opérateur intégrale de Fourier d'ordre 0 (défini par la condition de Dirichlet) et A_{\pm} est la fonction d'Airy (voir chapitre 1).

Dans le cas de Gliding rays la solution du problème de diffraction est de la forme suivante :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\psi(x, t, \xi)} [g(x, t, \xi)Ai(\zeta(x, t, \xi)) + ih(x, t, \xi)Ai'(\zeta(x, t, \xi))] Ai^{-1}(\zeta_0(x, \xi))\widehat{K}(\xi)d\xi. \quad (3.6)$$

Le fait que Ai admette des zéros, alors il faut évaluer $\psi(x, t, \xi, \eta)$, $\zeta(x, t, \xi)$, $g(x, t, \xi)$ et $h(x, t, \xi)$ au point $(\xi_1 + iT, \xi_2, \dots, \xi_n)$, où T est un réel fixé et $\zeta(x, t, \xi)|_{\partial\mathcal{O}} = \zeta_0(x, \xi) = \xi_n^{-1/3}(\xi_1 + iT)$.

Remarque. Soient P un opérateur différentiel (resp. pseudo-différentiel) et u la solution de l'équation $Pu = 0$ avec tel que $u = (gA_{\pm}(\zeta) + ihA'_{\pm}(\zeta))e^{i\psi}$ dans le cas de *Grazing rays* (resp. $u = (gAi(\zeta) + ihA'i(\zeta))e^{i\psi}$ dans le cas de *Gliding rays*). Les deux fonctions de phase ψ et ζ sont solutions l'équation eikonal, et les deux amplitudes g et h sont solutions l'équation de transport. pour tout opérateur différentiel P , (pour plus détails, consultez [55] page 19-20).

L'exemple de Friedlander

Les travaux de Taylor et Melrose consistent à étudier la diffraction d'une onde qui glisse tangentiellement sur le bord de l'obstacle produisant un contact de seconde ordre qui prend la forme d'un pli .

L'exemple le plus célèbre pour traiter ce problème est celui de Friedlander qui vient de l'équation des ondes lorsque les rayons incidents se glissent tangentiellement sur le bord de l'obstacle $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Nous considérons $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$ la solution de l'équation des ondes telle que

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (3.7)$$

avec la condition de Dirichlet et la condition de Neumann sur le bord respectivement par :

$$u(x, t)|_{\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}} = h(x, t), \quad (3.8)$$

$$\partial_n u(x, t)|_{\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}} = g(x, t), \quad (3.9)$$

n dénote le vecteur normal extérieur.

Les projets de Taylor et Melrose sur le problème de Glazing rays sont basés sur l'étude bien détaillée de l'exemple de Friedlander. Nous définissons ce problème comme suit : soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O} \times \mathbb{R}$ avec $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ et

$$\Omega_+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}. \quad (3.10)$$

Comme il est mentionné dans [55], Taylor et Melrose ont considéré $u(x, x_{n+1})$ la solution de l'exemple de Friedlander qui est défini par l'équation suivante :

$$[\partial_{x_{n+1}}^2 + x_{n+1}\partial_{x_n}^2 + \partial_{x_1}\partial_{x_n}] u(x, x_{n+1}) = 0. \quad (3.11)$$

avec une condition sur le bord

$$u(x, x_{n+1}) = f(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour } x_{n+1} = 0. \quad (3.12)$$

En appliquant la transformation de Fourier sur le système (3.11), Taylor et Melrose ont obtenu

$$\frac{d^2}{dx_{n+1}} \widehat{u}(\xi, x_{n+1}) = (x_{n+1} \xi_n^2 + \xi_1 \xi_n) \widehat{u}(\xi, x_{n+1}). \quad (3.13)$$

Le problème (3.11) s'est réduit à une équation différentielle connue qui est l'équation d'Airy qui est définie par :

$$A_{\pm}''(s) + sA_{\pm}(s) = 0, \quad (3.14)$$

où $s = (x_{n+1} \xi_n^2 + \xi_1 \xi_n) \xi_n^{-4/3}$. La solution de l'équation obtenue (3.14) est donnée par $A_{\pm}(s)$ (voir le chapitre 1). D'où la solution de (3.13) est

$$\widehat{u}(\xi, x_{n+1}) = c_1 A_{\pm}(x_{n+1} \xi_n^{2/3} + \xi_n^{-1/3} \xi_1). \quad (3.15)$$

Maintenant, Taylor et Merlrose veulent déterminer la constante c_1 pour le but de trouver la solution finale du problème (3.11). Ils ont utilisé les conditions au bord tels que $\widehat{u}(\xi, 0)|_{x_{n+1}=0} = \widehat{f}(\xi)$, ce qui leurs permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\widehat{u}(\xi, 0) = c_1 A_{\pm}(\xi_n^{-1/3} \xi_1), \quad (3.16)$$

d'où

$$c_1 = \frac{\widehat{f}(\xi)}{A_{\pm}(\xi_1^{-1/3} \xi_n)}. \quad (3.17)$$

En remplaçant (3.17) dans (3.15), l'expression (3.15) devient :

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi, x_{n+1}) &= \frac{A_{\pm}(x_{n+1} \xi_n^{2/3} + \xi_n^{-1/3} \xi_1)}{A_{\pm}(\xi_1^{-1/3} \xi_n)} \widehat{f}(\xi), \\ &= \frac{A_{\pm}(\zeta(\xi, x_{n+1}))}{A_{\pm}(\zeta_0(\xi))} \widehat{f}(\xi). \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\zeta(\xi, x_{n+1}) = x_{n+1} \xi_n^{2/3} + \xi_n^{-1/3} \xi_1$ et $\zeta(\xi, 0) = \zeta_0 = \xi_n^{-1/3} \xi_1$.

Finalement, si $\widehat{f}(\xi)$ est à support compact dans le conique $|\xi'| < \pm K \xi_n$, tel que $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, la solution de (3.11) est donnée par

$$u(x, x_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{A_{\pm}(\zeta(\xi, x_{n+1}))}{A_{\pm}(\zeta_0(\xi))} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi. \quad (3.19)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Taylor et Melrose ont utilisé les mêmes procédures précédentes pour trouver la solution du problème (3.11) dans Ω_- tel que

$$\Omega_- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} < 0\}. \quad (3.20)$$

Dans Ω_- , Taylor et Melrose ont déterminé la même solution que (3.19) mais avec une fonction de phase ζ différente qui est donnée par :

$$\zeta(\xi, x_{n+1}) = \xi_n^{-1/3}(\xi_1 + iT) + x_{n+1}\xi_n^{2/3},$$

où $i^2 = -1$ et

$$\zeta_0(\xi) = \xi_n^{-1/3}(\xi_1 + iT).$$

Les travaux de Taylor et Melrose sur les rayons obliques sont basés sur l'étude de l'exemple de Friedlander. En traitant cet exemple, ils ont démontré que la solution de ce genre de problème est écrite par une combinaison des fonctions d'Airy.

L'opérateur de Dirichlet to Neumann au voisinage de la région de transition

Dans cette partie, nous allons définir l'équation d'onde avec condition de Dirichlet sur le bord. Soient \mathcal{O} un obstacle strictement convexe de \mathbb{R}^{n+1} , de frontière $\partial\mathcal{O} = B$, B une hypersurface de \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R}^{n+1} tel que B a une courbure positive, Ω un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}/\mathcal{O}$. Soit $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$ la solution de problème de l'équation des ondes,

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, t) = f(x, t) & \text{sur } B \times \mathbb{R}, \\ u(x, t) = 0 & \text{pour } t \ll 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

La solution de ce problème est définie par l'intégrale suivante :

$$u(x, t) = \int_B [G(x, y)\partial_{n(y)}u(y, t) - \partial_{n(y)}G(x, y)u(y, t)] d\sigma(y), \quad x \in \Omega \quad (3.22)$$

où G est la fonction de Green donnée par la définition (1.5.2).

L'intégrale (3.22) nous permet de reconstruire la solution du problème de diffraction dans le domaine extérieur dès que les données de Cauchy ($u|_B, \partial_n u|_B$) sont

bien posées. Nous remarquons que l'onde diffractée vérifie une des deux conditions, soit la condition de Dirichlet ou bien la condition de Neumann sur le bord de l'obstacle. Si nous choisissons la condition de Neumann (3.9), alors toute la difficulté consiste à déterminer $u(x, t)|_B$ par la seule connaissance de la donnée $\partial_n u(x, t)$. Ceci revient à définir l'opérateur de Dirichlet to Neumann DtN sur $\partial\mathcal{O}$.

Définition 3.2.1. [54] *L'opérateur de Dirichlet to Neumann DtN sur un domaine borné est défini par l'application suivante :*

$$\begin{cases} DtN : H^{1/2}(\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}), \\ f(x, t) \mapsto DtN f(x, t) = \partial_{n(x)} u(x, t)|_{B \times \mathbb{R}}, \end{cases} \quad (3.23)$$

où $n(x)$ est le vecteur extérieur unitaire au point x sur le bord de l'obstacle et $H^{1/2}$ (resp. $H^{-1/2}$) est l'espace de Sobolev d'ordre $1/2$ (resp. d'ordre $-1/2$).

Proposition 3.2.1. [55] *DtN est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 non local.*

Taylor et Melrose ont appliqué la dérivée normale sur (3.5). Ce qui leurs a permis d'obtenir la décomposition microlocale de l'opérateur Dirichlet to Neumann. Le théorème suivant donne la décomposition pseudo-différentielle de DtN . Cette dernière joue un rôle crucial dans les applications de l'analyse des rayons glissants aux problèmes dans la théorie de diffraction des ondes.

Théorème 3.2.2. [59][49][55] [52] *Au voisinage de la région de transition, l'opérateur DtN est de la forme microlocale suivante :*

$$DtN = J(A_0\Phi_{\pm} + B)J^{-1}, \quad (3.24)$$

où J est un opérateur intégral de Fourier inversible elliptique d'ordre 0 associée à la relation canonique χ_J , $A_0 \in OPS_{1,0}^{2/3}$ elliptique au voisinage de $\eta = 0$, $B \in OPS_{1,0}^1$ admet un symbole principale qui s'annule pour $\eta = 0$ et $\Phi_{\pm} = \Phi \in OPN_{1/3}^0$ est un opérateur pseudo-différentiel admettant le symbole suivant :

$$\sigma_{\Phi_{\pm}}(\xi, \eta) = |\xi|^{-1/3} \frac{A'_{\pm}}{A_{\pm}}(|\xi|^{-1/3}\eta) \in S_{1/3,0}^0, \quad (3.25)$$

avec $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est le dual de $(x, t) \in \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}$ et A_{\pm} , A'_{\pm} sont la fonction d'Airy et sa dérivée. De plus, Φ est un multiplicateur de Fourier (voir la définition 2.5.1).

3.3 *La décomposition microlocale des opérateurs intégraux de Fourier associés à des relations de pliage*

Les opérateurs intégraux de Fourier qui sont définis par (2.22), représentent une réflexion transversale des ondes sur le bord de l'obstacle diffuseur. Dans [54][55][59], Taylor et Melrose ont fait une étude bien détaillée sur la propagation des singularités le long des rayons incidente atteignant le bord d'une façon tangentielle. Cette étude permettait Taylor et Melrose de produire un autre type d'opérateurs intégraux de Fourier tels que les opérateurs de type Fourier-Airy. Ce type d'opérateurs existent dans deux différents genre de diffraction, soit la diffraction des ondes par des obstacles produisant des points de singularité sur le bord, où bien la diffraction des ondes par des obstacles admettant des courbures asymptotiquement petite.

Le théorème suivant donne la décomposition microlocale des opérateurs intégraux de Fourier singuliers.

Théorème 3.3.1. [54] *Soient X_1 et X_2 deux variétés de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ de dimension n . Si $C \subset (T^*X_2 \setminus \{0\}) \times (T^*X_1 \setminus \{0\})$ est une relation canonique de pliage en point $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ et Γ est un petit conique au voisinage de \bar{p} , il existe deux opérateurs intégraux de Fourier tels que*

$$K \in I^0(X_1, \mathbb{R}^n, c_1), \quad J \in I^0(\mathbb{R}^n, X_2, c_2^{-1}),$$

admettant respectivement les transformations canoniques locales suivante :

$$c_i : T^*X_i \rightarrow T^*\mathbb{R}^n, p_i \rightarrow (0, \bar{\xi}) \quad \text{avec} \quad \bar{\xi} = (0, \dots, 0, 1).$$

Alors, pour tout opérateur intégrale de Fourier $F \in I^m(X_1, X_2; C)$ qui vérifie $WF(F) \subset \Gamma$ est de la forme suivante :

$$F = J \cdot (E_1 \mathcal{A}_i + E_2 \mathcal{A}'_i) \cdot K, \tag{3.26}$$

où $E_1 \in OPS^{m+1/6}$, $E_2 \in OPS^{m-1/6}$ et \mathcal{A}_i et \mathcal{A}'_i sont deux opérateurs d'Airy (voir chapitre 3, l'expression (2.70)).

Remarque. Il est très important de choisir J et K tels qu'ils soient elliptiques et associés à des relations canoniques particulière qui réduisent la relation C en une autre relation connue et facile à utiliser.

Remarque. Il est très important de bien choisir les transformations canoniques (3.3.1) pour bien réduire la caustique de la phase originale à l'origine.

La décomposition (3.26) de l'opérateur intégral de Fourier singulier est la clé principale qui aide à résoudre les problèmes de diffraction.

Théorème 3.3.2. Soit F un opérateur intégral de Fourier d'ordre m associé à la relation canonique C_1 tel que

$$C_1 = \{(x, \xi), (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}; x_i = y_i \ 2 \leq i \leq n-1, \\ (x_1 - y_1)^2 = -\frac{\xi_1}{\xi_n}, (x_n - y_n) = \frac{1}{3}(y_1 - x_1)^3\}. \quad (3.27)$$

Le front d'onde de l'opérateur F est défini par :

$$C_0 = \{(x, \xi, y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}; x_i = y_i, 2 \leq i \leq n, \xi = \eta, (x_1 - y_1)^2 = -\xi_1/\xi_n\}. \quad (3.28)$$

Si F vérifie les conditions suivante :

- 1) $F = P_1 \mathcal{A}_i + P_2 \mathcal{A}_i'$ avec P_1 et P_2 sont deux opérateurs d'Airy de type positif tels que

$$P_1 \in OPN_{\pm}^{m,+}, \quad P_2 \in OPN_{\pm}^{m-\frac{1}{3},+}. \quad (3.29)$$

- 2) $WF(Fu) \subset (C_0)_+ WF(u)$, tel que

$$(C_0)_{\pm} = \{((x, \xi), (y, \xi)) \in C_0; (x_1 - y_1) = \pm(-\xi_1/\xi_n)^{1/2}\}. \quad (3.30)$$

$(C_0)_{\pm}$ représente deux moitiés de C_0 tel que $C_0 = (C_0)_+ \cup (C_0)_-$.

Alors F peut être de la forme suivante :

$$F = P \cdot (\mathcal{A}_{\pm})^{-1}, \quad (3.31)$$

où \mathcal{A}_{\pm} , P sont deux opérateurs d'Airy avec $P \in OPN^{m-\frac{1}{3},+}$.

Le théorème suivant introduit la fonction de phase de l'opérateur intégral de Fourier qui représente le champ incident en présentant le lien entre la relation canonique et la fonction de phase.

Théorème 3.3.3. [54] *Soit ψ_F la fonction de phase de l'opérateur intégral de Fourier F . Si ψ_F est définie par :*

$$\psi_F(\omega, x, t, s, \tau) = (t - s - x \cdot \omega)\tau,$$

alors, la relation canonique associée à ψ_F est donnée par :

$$C_F = \{(t, y; \tau, \eta), (\omega, s; \sigma, z) \in T^*(B \times \mathbb{R}) \times T^*(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R}); \\ t = s + y \cdot \omega, \tau = \sigma \neq 0, z = \tau(y - (y \cdot \omega)\omega), \eta = \tau(-\omega + (\omega \cdot n(y))n(y))\}. \quad (3.32)$$

Pour tout $(\omega, s; \sigma, z) \in T^*(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R})$ avec $\sigma \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\omega \in \mathcal{S}^n$ (voir 0.4) tel que $z \cdot \omega = 0$ et $(t, y; \tau, \eta) \in T^*(B \times \mathbb{R})$ avec $y \in B$, $t, \tau \in \mathbb{R}$ et $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\eta \cdot n(y) = 0$ où $n(y)$ désigne le vecteur normal extérieur.

Remarque. [54] *La partie singulière de la relation canonique (3.32) est*

$$L_F = C_F \cap \{y \in \partial\mathcal{O} \text{ tel que } \omega \cdot n(y) = 0\}. \quad (3.33)$$

où L_F définit le pli de C_F .

Le théorème suivant introduit une nouvelle fonction de phase construite par Taylor et Merlrose en utilisant des transformations canoniques particulières pour le but de réduire la fonction de phase ψ_F . Cette nouvelle fonction de phase doit admettre les mêmes points critiques que la fonction de phase originale ψ_F .

Théorème 3.3.4. [54] *Soit $p = (p_1, p_2)$ un point singulier de L_F . Au voisinage de chaque point p , il existe deux relations canoniques c_1 et c_2 qui sont définies par :*

$$c_1 : T^*(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R}), p_1 \rightarrow T^*\mathbb{R}^{n+1}, (0, \dots, 0; 1, \dots, 0), \quad (3.34)$$

$$c_2 : T^*(B \times \mathbb{R}), p_2 \rightarrow T^*\mathbb{R}^{n+1}, (0, \dots, 0; 1, 0, \dots, 0). \quad (3.35)$$

Tel que au voisinage de point de base, les relations c_1 et c_2 vérifient

$$\begin{aligned} c_2 \cdot C_F \cdot c_1^{-1} &= \{((t_1, y; \tau_1, \xi), (t_2, x; \tau_2, \eta)) \in T^*\mathbb{R}^{2n+2}; (y_1 - x_1)^2 = -\xi_1/\tau_1, \\ &\quad \tau_1 = \tau_2, \xi_1 = \eta_1, x' = y' + \xi'/\tau, \eta' = \xi' - \tau y', \\ &\quad t_1 - t_2 = 1/3(x_1 - y_1)^3 - \frac{|\xi'|^2}{2\tau^2}, y_1 - x_1 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Remarque. [54] Pour tout $t, t_1 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la relation (3.36) est paramétrisée par la fonction de phase suivante :

$$\varphi(x, t, y, t_1, \xi, \tau) = (x - y) \cdot \xi + (t - t_1)\tau - \frac{|\xi'|^2}{2\tau} - \frac{|x'|^2}{2}\tau \mp \frac{2}{3}(-\xi_1\tau^{-1/3})^3/2. \quad (3.37)$$

où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$ et $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

Remarque. [54] La relation (3.36) définit une relation de pliage et $T_0^*\mathbb{R}^{n+1}$ transverse le pli au point de base.

3.4 L'amplitude de Kirchhoff a_Q

Dans cette partie, nous allons introduire l'opérateur de Kirchhoff Q et l'intégrale oscillante de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$ que Taylor et Melrose ont déterminé en utilisant le principe des opérateurs intégraux de Fourier dans [54]. Nous définissons le champ total de l'équation d'onde (3.21) par :

$$u^t(x, t) = u^s(x, t) + u^i(x, t), \quad (3.38)$$

où $u^s(x, t)$ est le champ diffracté et $u^i(x, t)$ est champ incident tel que

$$u^i(x, t) = \delta(t - x \cdot \omega).$$

La dérivée normale du champ total est donnée par :

$$\partial_n u^t(x, t) = \partial_n u^s(x, t) + \partial_n u^i(x, t). \quad (3.39)$$

Selon Taylor et Melrose, le noyau de l'opérateur de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$ et son opérateur Q sont définis respectivement par :

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = \partial_n u^s(x, t) + (n \cdot \omega) \partial_t \kappa_F(\omega, x, t), \quad (3.40)$$

où $\kappa_F(\omega, x, t) = \delta(t - x \cdot \omega)$ et

$$Q = \left(DtN + (n \cdot \omega) \frac{\partial}{\partial t} \right) F : \mathcal{E}'(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(B \times \mathbb{R}), \quad (3.41)$$

où F est l'opérateur intégral de Fourier qui représente le champ incident tel qu'il est défini par l'intégrale (0.12).

Remarque. *L'opérateur de Kirchhoff Q est associé à l'opérateur de la dérivée normale du champ total de l'équation d'ondes*

Pour obtenir une décomposition microlocale de l'opérateur Q , Taylor et Melrose ont appliqué le théorème 3.3.1 sur l'opérateur F et la proposition 3.2.2 sur l'opérateur (3.41). Ils ont trouvé

$$Q = J(A_0\Phi + B_0)(E_1\mathcal{A}i + E_2\mathcal{A}i')K + J(E_3\mathcal{A}i + E_4\mathcal{A}'i)K, \quad (3.42)$$

où $E_1 \in OPS^{-n/2+1/6}$, $E_2 \in OPS^{-n/2-1/6}$, $E_3 \in OPS^{-n/2+1/6+1}$, $E_4 \in OPS^{-n/2-1/6+1}$, J et K deux opérateurs intégraux de Fourier elliptiques d'ordre 0. A_0, B_0 et Φ sont définis dans la proposition 3.2.2.

Théorème 3.4.1. [54] *L'opérateur de Kirchhoff Q admet une forme microlocale*

$$Q = JA_0\mathcal{A}^{-1}PK, \quad (3.43)$$

avec J, K deux opérateurs intégraux de Fourier elliptiques d'ordre 0, $A_0 \in OPS^{2/3}$, $P \in OPS^{-n/2-1/6}$ est un opérateur pseudo-différentiel et \mathcal{A} est l'opérateur d'Airy.

Pour obtenir l'intégrale oscillante de l'amplitude de Kirchhoff, Taylor et Melrose ont déterminé d'abord le noyau de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$. À cet effet, Taylor et Melrose ont appliqué l'opérateur Q sur la masse de Dirac $\delta_{(\omega,t)} \in \mathcal{E}'(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R})$ donné au point de base pour le but de trouver le noyau associé à l'opérateur Q .

Remarque. *Le point de base est obtenu quand $t = 0$, il se trouve dans la région de transition.*

Le théorème suivant donne le noyau de Kirchhoff κ_Q .

Théorème 3.4.2. *Si Q vérifie (3.43), alors son noyau est donné par l'intégrale suivante :*

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi - ikt} d(\omega, x, \xi) \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi dk, \quad (3.44)$$

où $(\xi, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $(x, t) \in \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}$, $\omega \in \mathcal{S}^n$, $d(\omega, x, \xi) \in S^{-n/2+5/6}$ et A_+ est une fonction d'Airy. La fonction de phase $\psi_1(x, \xi, k)$ au point de base est définie par :

$$\psi_1(x, \xi, k) = -\frac{|\xi'|^2}{2k} - \frac{|x'|^2}{2}k, \quad (3.45)$$

où $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$ et $k \in \mathbb{R}$.

Pour obtenir l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$, Taylor et Merlose ont appliqué la transformation de Fourier inverse par rapport à la variable t sur le noyau de Kirchhoff (3.44). Le théorème suivant exprime l'intégrale oscillante de l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$.

Théorème 3.4.3. *Si κ_Q est défini par (3.44), alors*

$$a_Q(\omega, x, k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\psi_2(x, \zeta) - ik\omega \cdot \zeta} d_1(\omega, x, \zeta) \frac{1}{A_+(k^{2/3}\zeta_1)} d\zeta, \quad (3.46)$$

où $\psi_2(x, \zeta) = \psi_1(x, \xi, 1)$ avec $\xi = k\zeta$ et $d_1(\omega, x, \zeta) = k^n d(\omega, x, k\zeta, k)$.

Taylor et Melrose ont appliqué la méthode de phase stationnaire sur l'intégrale (3.46) pour trouver le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff a_Q .

3.5 L'approximation de Kirchhoff Corrigée

L'idée de Taylor et Melrose derrière fournir l'approximation de Kirchhoff corrigée est de déterminer une approche de la dérivée normale du champ diffracté. Le théorème suivant donne le développement asymptotique de a_Q .

Théorème 3.5.1. [54] Si a_Q vérifie (3.46), alors

$$a_Q(\omega, x, k) = e^{ik\omega \cdot x} \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^L k^{2/3-2p/3-q} d_{p,q}(\omega, x) \Psi^{(p)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) + R_{P,L}(\omega, x, k), \quad (3.47)$$

où $Z(\omega, x)$ est une fonction à valeur réelle, qui est positive sur la région illuminée, négative sur la région d'ombre et disparaît précisément en premier ordre sur la région de transition, $d_{p,q}(\omega, x)$ est une fonction à valeur complexe qui résulte de l'application de la méthode de la phase stationnaire sur le symbole de l'opérateur Q .

Ψ est défini asymptotiquement par :

$$\Psi(\tau) = \begin{cases} \sum_{p=0}^n a_p \tau^{1-3p} + O(\tau^{1-3(n-1)}) & \text{pour } \tau \rightarrow +\infty, \\ c_0 e^{-i\tau^3/3 - i\tau\beta} (1 + O(e^{\tau c_1})) & \text{pour } \tau \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (3.48)$$

$c_0, c_1 > 0$, avec $\beta = e^{-2\pi i/3} \beta_1$, avec β_1 est la racine de Ai , $R_{P,L}$ le reste qui vérifie

$$|D_x^\gamma R_{P,L}(\omega, x, k)| \leq C_{P,Q,\gamma} k^{-\min\{2P/3, L+1/3\} + 1/3|\gamma|},$$

où $C_{P,L,\gamma}$ est une constante.

Remarque. Taylor et Melrose ont considéré que le champ diffracté sur un point dans la région illuminée est assimilé au champ diffracté pour le nombre d'ondes k grand. Tandis que dans la région d'ombre, ils ont supposé que le champ total $w^t(x, k) = e^{i\lambda x \cdot \omega} + w^s(x, k)$ est essentiellement zéro.

La proposition suivante donne l'estimation de l'amplitude de Kirchhoff a_Q .

Proposition 3.5.1. Pour le nombre d'onde k grand, nous avons

$$|a_Q(\omega, x, k)| \leq C k^{2/3}, \quad (3.49)$$

où C est une constante réelle.

Remarque. Comme il a été mentionné dans [54], quand $k \rightarrow +\infty$, la validité de l'approximation de Kirchhoff corrigée sur le complément du voisinage de tout point x de $\{n(x) \cdot \omega = 0\}$ est défini par le premier terme de l'expression asymptotique (3.47).

En effet, si $\Psi(k^{1/3}Z(\omega, x))$ est remplacé par le terme principal de son expansion asymptotique telle que

$$\Psi(\tau) \simeq -2i\tau, \text{ for } \tau \rightarrow +\infty, \quad (3.50)$$

et prenant $a_{0,0}(\omega, x) = (n \cdot \omega)/Z(\omega, x)$ dans la région illuminée avec $Z(\omega, x) > 0$, ils obtiennent

$$\partial_n w^t(x, k) \simeq k^{2/3} \frac{n \cdot \omega}{Z(\omega, x)} (-2ik^{1/3}Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega} = 2ikn \cdot \omega e^{ikx \cdot \omega}. \quad (3.51)$$

Si nous comparons ente la quantité (3.51) et la dérivée normale de l'onde incidente telle que $w^i(x, k) = e^{ikx \cdot \omega}$ et

$$\partial_n w^i(x, k) = \partial_n (e^{ikx \cdot \omega}) = ikn \cdot \omega e^{ikx \cdot \omega}. \quad (3.52)$$

Nous réalisons que la dérivée normale du champ total se comporte comme la dérivée normal de l'onde incidente.

Selon cette remarque, nous concluons que l'approximation de Kirchhoff est une approximation à haute fréquence. Elle est obtenue en fonction du premier terme de l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$ quand $k \rightarrow +\infty$ sachant qu'elle est valide seulement dans la région illuminée du fait que le champ total est nulle dans la région d'ombre. Cette approximation de Kirchhoff est définie pour tout x dans la région illuminée par :

$$\frac{\partial w^t(x, k)}{\partial n(x)} = 2 \frac{w^i(x, k)}{\partial n(x)}, \quad (3.53)$$

et pour tout x dans la région de l'ombre profond, ainsi que la région de transition par :

$$\frac{\partial w^t(x, k)}{\partial n(x)} = 0. \quad (3.54)$$

Nous avons expliqué brièvement la motivation et les techniques qui ont permis

Taylor et Melrose d'obtenir l'approximation de Kirchhoff corrigée. Cette approximation est une approche de la dérivée normale du champ totale, ce dernier définit le courant sur la surface de l'obstacle diffuseur. L'approximation de Kirchhoff corrigée est un outil nécessaire dans la physique optique qui est fréquemment utilisée pour simplifier le phénomène de propagation et le problème de diffraction des ondes. Puisque l'équation de Helmholtz traduit ce genre de phénomène physique alors la solution du problème de diffraction d'une onde plane par un obstacle \mathcal{O} est définie par l'intégrale (1.5.2).

Si nous prenons l'approximation de Kirchhoff comme étant une dérivée normale du champ total et nous le remplaçons dans l'équation intégrale (1.5.2), alors la solution de l'équation de Helmholtz peut être obtenu de la forme suivante :

$$w^t(x, t) = e^{ikx \cdot \omega} - 2 \int_{\partial \mathcal{O}_-} \frac{\partial e^{iky \cdot \omega}}{\partial n(y)} G(x, y) d\sigma(y) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}, \quad (3.55)$$

où ω est la direction incidente $G(x, y)$ est la fonction de Green , $n(y)$ est le vecteur normal extérieur et \mathcal{O}_- est la région illuminée.

Le champ lointain de l'onde diffractée est donné par :

$$w_\infty(\theta, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathcal{O}_-} \frac{\partial e^{iky \cdot \omega}}{\partial n(y)} e^{-ik\theta \cdot y} d\sigma(y) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}, \quad (3.56)$$

où $\theta = \frac{x}{|x|}$ est la direction réfléchi.

4. L'AMPLITUDE DE KIRCHHOFF EN UTILISANT LES APPROXIMATIONS DE DtN

4.1 *Introduction*

L'intérêt de ce chapitre est d'expliquer nos résultats sur l'étude du phénomène de la diffraction des ondes par un obstacle convexe \mathcal{O} , en adaptant la même méthode utilisée par les auteurs dans [54]. Cette méthode porte sur l'étude de l'équation de Helmholtz à haute fréquence.

Dans notre thèse, nous nous intéressons essentiellement à déterminer le développement asymptotique de la solution de l'équation de Helmholtz à haute fréquence avec une condition sur le bord défini par l'opérateur de Dirichlet to Neumann DtN .

Généralement, la méthode des équations intégrales consiste à obtenir la solution de l'équation de Helmholtz à haute fréquence. Cette solution est basée sur la détermination d'une approche qui est sous la forme suivante :

$$\partial_n w^t(x, k) = \eta(x, k) e^{ikx \cdot \omega},$$

avec $\eta(x)$ est une fonction qui oscille rapidement que $\partial_n w^t(x, k)$, quand $k \rightarrow +\infty$. L'idée principale de ce projet vient de l'article de Taylor et Melrose [54], la où ils ont déterminé la solution asymptotique de l'équation de Helmholtz en utilisant la technique de la décomposition pseudo-différentielle de l'opérateur DtN dans la région de transition au voisinage d'un point singulier. Comme il a été mentionné dans le troisième chapitre, cette technique a aidé Taylor et Melrose à produire l'approximation de Kirchhoff corrigée. Cette approximation donne la définition d'une approche du champ total sachant qu'elle n'est pas valable que dans la région illuminée. Ce qui leurs a permis d'obtenir une solution de l'équation de Helmholtz

seulement dans la région illuminée.

Notre objectif est d'offrir une meilleure expression que l'approximation de Kirchhoff corrigée dans toutes les régions de l'obstacle. Dans notre travail, nous avons utilisé des approximations locales de symbole principale de l'opérateur DtN qui est défini par

$$i\sqrt{k^2 - \xi^2},$$

où ξ est la variable de Fourier et k est le nombre d'onde. Ce choix a pour but de générer de nouvelles expressions de $\partial_n w^t(x, k)$ sur le bord de l'obstacle, ce qui nous a permis d'obtenir des nouvelles approches de la dérivée normale du champ total et d'améliorer le comportement de la solution surtout dans la régions d'ombre et la région d'ombre profonde. Les approximations du premier et du second ordre de l'opérateur DtN sont données par [12] :

$$\partial_n w^s(x, k) = -ikw^i(x, k) + \frac{c(x)}{2}w^i(x, k), \quad (4.1)$$

$$\partial_n w^s(x, k) = -ikw^i(x, k) + \frac{c(x)}{2}w^i(x, k) - \frac{c(x)^2}{8(c(x) - ik)}w^i(x, k) - \frac{1}{2(c(x) - ik)}\partial_x^2 w^i(x, k), \quad (4.2)$$

où $c(x)$ représente la courbure de l'interface.

4.2 *L'amplitude de Kirchhoff en utilisant l'approximation de DtN d'ordre 1*

L'analyse utilisée dans cette section est basée sur certains résultats obtenus par Taylor et Melrose dans [54], dans le but de trouver un développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$. Ce dernier est défini sur le bord d'un obstacle convexe par :

$$a_Q(\omega, x, k) = \mathcal{K}(\omega, x, k)e^{ikx \cdot \omega}. \quad (4.3)$$

où $\mathcal{K}(\omega, x, k)$ est une fonction qui oscille rapidement que $a_Q(\omega, x, k)$, quand k est grand.

Pour trouver l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$, nous commençons d'abord par définir l'opérateur associé à la dérivée normale du champ total, Q , en utilisant les approximations de l'opérateur DtN (4.1) et (4.2). À l'aide de la décomposition microlocale des opérateurs intégraux de Fourier singulier, nous déterminons la définition de l'opérateur intégrale de Fourier Q , d'où le noyau de l'opérateur de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$. A fin de trouver l'intégrale oscillante de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$, nous appliquons la transformation de Fourier inverse par rapport à t sur le noyau de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$. Finalement, nous appliquons la méthode de phase stationnaire sur l'intégrale associée à l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$ pour déterminer le développement asymptotique de l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$. Nous illustrons ce chapitre par quelques estimations de l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$ quand $k \rightarrow +\infty$.

4.2.1 Le noyau de l'opérateur de Kirchhoff κ_Q

Dans cette partie, nous allons déterminer le noyau de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$ qui est associé à l'opérateur (0.11) dans le cas où l'opérateur DtN est remplacé par (4.1). Dans le but d'avoir une meilleure présentation, nous utiliserons la notation $\mathcal{C}(x) = c(x)/2$.

Théorème 4.2.1. *Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un obstacle borné, strictement convexe tel que $\partial\mathcal{O} = B$, avec B est une hypersurface de \mathcal{C}^∞ munie d'une courbure positive dans \mathbb{R}^{n+1} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{O}$. Nous supposons que $w^s(x, k)$ est une solution de (0.6). En utilisant l'approximation (4.1), l'opérateur Q (0.11) est défini par :*

$$Q = ((1 - n \cdot \omega)\partial_t + \mathcal{C}(x))F : \mathcal{E}'(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(B \times \mathbb{R}), \quad (4.4)$$

où $\kappa_Q(\omega, x, t)$ est son noyau qui est donné par :

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = ((1 - n \cdot \omega)\partial_t + \mathcal{C}(x))\kappa_F(\omega, x, t), \quad (4.5)$$

où $\kappa_F(\omega, x, t) = \delta(t - \omega \cdot x)$ est le noyau de l'opérateur intégrale de Fourier F (0.12).

Démonstration. D'après la définition du champ total, nous avons

$$\begin{aligned}\partial_n w^t(x, k) &= \partial_n w^s(x, k) + \partial_n w^i(x, k), \\ &= \partial_n w^s(x, k) + n \cdot \partial_x (-e^{ikx \cdot \omega}), \\ &= \partial_n w^s(x, k) - ikn \cdot \omega e^{ikx \cdot \omega}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

En remplaçant l'approximation (4.1) dans (4.6), nous obtenons

$$\partial_n w^t(x, k) = (-ik(1 - n \cdot \omega) + \mathcal{C}(x))e^{ikx \cdot \omega}.\tag{4.7}$$

Pour obtenir le noyau de l'opérateur Q , nous calculons la transformation de Fourier par rapport à la variable k de $w^t(x, k)$. Soit $\varphi_x(k) = \varphi(x, k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\partial_n w^t}(x, k), \varphi(x, k) \rangle_{S', S} &= \langle \partial_n w^t(x, k), \widehat{\varphi}(x, k) \rangle_{S', S}, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \partial_n w^t(x, k) \widehat{\varphi}(x, k) dk, \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \partial_n w^t(x, k) \varphi(x, t) e^{-ikt} dk dt, \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [-ik(1 - n \cdot \omega) e^{ikx \cdot \omega} + \mathcal{C}(x) e^{ikx \cdot \omega}] \varphi(x, t) e^{-ikt} dk dt, \\ &= (1 - n \cdot \omega) \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} -ike^{ikx \cdot \omega} \varphi(x, t) e^{-ikt} dk dt \\ &\quad + \mathcal{C}(x) \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{ikx \cdot \omega} \varphi(x, t) e^{-ikt} dk dt, \\ &= \langle (\partial_t(1 - n \cdot \omega) + \mathcal{C}(x)) \delta(t - \omega \cdot x), \varphi(x, t) \rangle_{S', S}, \\ &= \langle \kappa_Q(\omega, x, t), \varphi(x, t) \rangle_{S', S},\end{aligned}\tag{4.8}$$

où $\langle \widehat{ikf(k)}, \varphi \rangle_{S', S} = \langle -\partial_t \widehat{f(t)}, \varphi \rangle_{S', S}$ et $\langle \widehat{e^{ik\omega \cdot x}}, \varphi \rangle_{S', S} = \langle \delta(t - \omega \cdot x), \varphi \rangle_{S', S}$.

Donc

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = ((1 - n \cdot \omega) \partial_t + \mathcal{C}(x)) \kappa_F(\omega, x, t),\tag{4.9}$$

et $Q = ((1 - n \cdot \omega) \partial_t + \mathcal{C}(x)) F$. \square

Ensuite, nous allons utiliser la même décomposition de l'opérateur F que Taylor et Melrose ont utilisé dans [54] telle que

$$F = J(E_1 \mathcal{A}_i + E_2 \mathcal{A}'_i) K,\tag{4.10}$$

où $E_1 \in OPS^{-n/2+1/6}$, $E_2 \in OPS^{-n/2-1/6}$, J et K sont des opérateurs intégraux de Fourier elliptiques d'ordre 0. Les opérateurs \mathcal{A}_i and \mathcal{A}'_i sont des opérateurs intégraux de Fourier-Airy définis par :

$$\mathcal{A}_i^{(l)} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{itk+ix\xi} Ai^{(l)}(\xi_1 k^{-1/3}) \widehat{u}(\xi, k) d\xi dk, \quad (4.11)$$

$$\widehat{(\mathcal{A}_i u)}(\xi, k) = Ai(k^{-1/3} \xi_1) \widehat{u}(\xi, k), \quad (4.12)$$

$$\widehat{(\mathcal{A}'_i u)}(\xi, k) = Ai'(k^{-1/3} \xi_1) \widehat{u}(\xi, k), \quad (4.13)$$

où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$, l est un entier indiquant l'ordre de la dérivée, Ai est la fonction d'Airy et Ai' est la dérivée de la fonction d'Airy. Enfin, nous définissons l'opérateur \mathcal{A}^{-1} [54] par :

$$\widehat{(\mathcal{A}^{-1} u)}(\xi, k) = \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} \widehat{u}(\xi, k). \quad (4.14)$$

Le théorème suivant illustre différents les calculs nécessaires pour trouver l'intégrale oscillante qui définit le noyau de l'opérateur Q (4.4).

Théorème 4.2.2. *Soient K et J deux opérateurs intégraux de Fourier elliptiques d'ordre 0. L'opérateur Q et son noyau κ_Q sont donné respectivement par les expressions suivantes :*

$$Q = J\mathcal{A}^{-1}P_1K + J\mathcal{A}^{-1}P_2K, \quad (4.15)$$

et

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi - ikt} ((1 - n \cdot \omega)a(\omega, x, \xi, k) + \mathcal{C}(x)b(\omega, x, \xi, k)) \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} d\xi dk, \quad (4.16)$$

tels que $P_1 \in OPS^{-n/2+5/6}$ (resp. $P_2 \in OPS^{-n/2-1/6}$) avec un symbole de la forme $(1 - n \cdot \omega)p_1$ (resp. $\mathcal{C}(x)p_2$), où $a(\omega, x, \xi, k)$ et $b(\omega, x, \xi, k)$ sont définis dans (4.33), et \mathcal{A}^{-1} est un opérateur pseudo-différentiel défini par (4.14). $\psi_1(x, \xi, k)$ est une fonction de phase qui est définie dans la preuve ci-dessous.

Démonstration. En utilisant la formule (4.10) et l'équation (4.4), nous obtenons

$$Q = J(E_3\mathcal{A}_i + E_4\mathcal{A}'_i)K + \mathcal{C}(x)J(E_1\mathcal{A}_i + E_2\mathcal{A}'_i)K, \quad (4.17)$$

où $E_1 \in OPS^{-n/2+1/6}$, $E_2 \in OPS^{-n/2-1/6}$, $E_3 \in OPS^{-n/2+1/6+1}$, et $E_4 \in OPS^{-n/2-1/6+1}$. Les opérateurs \mathcal{A}_i et \mathcal{A}'_i sont les opérateurs d'Airy-Fourier tels qu'ils sont définis par (4.11). Nous appliquons le théorème (3.3.2) pour trouver une certaine décomposition de l'opérateur Q telle que

$$Q = JA^{-1}P_1K + JA^{-1}P_2K, \quad (4.18)$$

où $P_1 \in OPS^{-n/2-1/6+1}$ et $P_2 \in OPS^{-n/2-1/6}$. Dans le but de trouver l'intégrale qui définit le noyau de l'opérateur Q , nous appliquons la masse de Dirac sur l'opérateur Q .

À cet effet, nous définissons la fonction de test $\varphi(x, t)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ et la masse de Dirac $\delta_{(\omega, t)}$ dans $\mathcal{E}'(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R})$. Ensuite, nous appliquons la masse de Dirac au point de base sur (4.18) pour trouver directement son noyau [54, 55]. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle Q\delta_{(\omega, 0)}, \varphi(x, t) \rangle &= \langle JA^{-1}P_1K\delta_{(\omega, 0)} + JA^{-1}P_2K\delta_{(\omega, 0)}, \varphi(x, t) \rangle, \\ &= \langle JA^{-1}P_3\delta_0, \varphi(x, t) \rangle + \langle JA^{-1}P_4\delta_0, \varphi(x, t) \rangle, \\ &= \langle JP_3\mathcal{A}^{-1}\delta_0, \varphi(x, t) \rangle + \langle JP_4\mathcal{A}^{-1}\delta_0, \varphi(x, t) \rangle, \\ &= \langle Q_1\delta_{(\omega, 0)}, \varphi(x, t) \rangle + \langle Q_2\delta_{(\omega, 0)}, \varphi(x, t) \rangle, \end{aligned}$$

où

$$Q_1\delta_{(\omega, 0)} = JP_3\mathcal{A}^{-1}\delta_0, \quad Q_2\delta_{(\omega, 0)} = JP_4\mathcal{A}^{-1}\delta_0, \quad (4.19)$$

et

$$Ju(x, t) = \int e^{i\psi_1(x, \eta, \tau) + i\tau(t-t_1) - iy\eta} a_J(x, y, t_1\eta, \tau) u(y, t_1) dy dt_1 d\eta d\tau, \quad (4.20)$$

où $P_3 \in OPS^{-n/2-1/6+1}$ et $P_4 \in OPS^{-n/2-1/6}$ tel que $P_1K\delta_{(\omega, 0)} = P_3\delta_{(\omega, 0)} = P_3\delta_0$ et $P_2K\delta_{(\omega, 0)} = P_4\delta_{(\omega, 0)} = P_4\delta_0$, prenant ω comme un paramètre, sachant que \mathcal{A}^{-1} commute avec P_3 et P_4 [54]. Nous prenons toujours $(y, t_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, (η, τ) indique le dual de (x, t) et comme il est mentionné dans [54], la fonction de phase ψ_1 est définie dans les trois régions de l'obstacle [54] par les expressions suivantes :

Dans la région illuminée tel que $\{x \in \partial\mathcal{O}, n(x) \cdot \omega < 0\}$, la fonction de phase est définie par :

$$\psi_1(x, \eta, \tau) = -\frac{|\eta'|^2}{2\tau} - \frac{|x'|^2}{2}\tau + \frac{2}{3}(-\eta_1\tau^{-1/3})^{3/2}, \quad (4.21)$$

tandis que dans la région d'ombre tel que $\{x \in \partial\mathcal{O}, n(x) \cdot \omega > 0\}$, nous avons

$$\psi_1(x, \eta, \tau) = -\frac{|\eta|^2}{2\tau} - \frac{|x'|^2}{2}\tau - \frac{2}{3}(-\eta_1\tau^{-1/3})^{3/2}. \quad (4.22)$$

et dans la région de transition tel que $\{x \in \partial\mathcal{O}, n(x) \cdot \omega = 0\}$, du fait que $\eta_1 = 0$ dans cette région [54], la fonction de phase est comme suit :

$$\psi_1(x, \eta, \tau) = -\frac{|\eta'|^2}{2\tau} - \frac{|x'|^2}{2}\tau, \quad (4.23)$$

avec $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $\eta' = (\eta_2, \dots, \eta_n)$ tels que $x \in \partial\mathcal{O}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $t, \tau \in \mathbb{R}$, et $a_J(x, y, t_1, \eta, \tau) \in S_{1,0}^0$. L'opérateur pseudo-différentiel P_3 est défini par

$$P_3u(y, t_1) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i(y-\omega)\xi + it_1k} p_3(\omega, y, t_1\xi, k) \widehat{u}(\xi, k) d\xi dk, \quad (4.24)$$

où $(\xi, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est le dual de (y, t_1) .

Notre objectif consiste à trouver l'intégrale oscillante qui définit la quantité de $Q_1\delta_{(\omega,0)} = JP_3\mathcal{A}^{-1}\delta_0$. Tout d'abord, nous utilisons les calculs standard de la composition des opérateurs intégraux de Fourier et les opérateurs pseudo-différentiels [42, 50], nous obtnons

$$J \circ P_3u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - itk} p_{J \circ P_3}(\omega, x, \xi, k) \widehat{u}(\xi, k) d\xi dk, \quad (4.25)$$

avec

$$\begin{aligned} p_{J \circ P_3}(\omega, x, \xi, k) &= q_1(\omega, x, \xi, k), \\ &= \int e^{i\psi_1(x,\eta,\tau) - i\psi_1(x,\xi,k) + iy(\xi-\eta) + it_1(k-\tau) + it(k+\tau)} a_J(x, y, t_1, \eta, \tau) p_3(\omega, y, t_1, \xi, k) dy dt_1 d\eta d\tau, \\ &= p_3(\omega, x, \xi, k) \# a_J(x, \xi, k), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$J \circ P_3u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - itk} q_1(\omega, x, \xi, k) \widehat{u}(\xi, k) d\xi dk. \quad (4.27)$$

pour déterminer l'intégrale de $Q_1\delta_{(\omega,0)}$, nous avons besoin de remplacer $u(x, t)$ par $\mathcal{A}^{-1}\delta_0$ dans (4.27) tel que

$$\mathcal{A}^{-1}\delta_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ix\xi + ikt} \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi dk. \quad (4.28)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 Q_1 \delta_{(\omega,0)}(x,t) &= J \circ P_3 \circ \mathcal{A}^{-1} \delta_0(x,t), \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikt} q_1(\omega, x, \xi, k) \widehat{\mathcal{A}^{-1} \delta_0}(\xi, k) d\xi dk, \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikt} q_1(\omega, x, \xi, k) \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} d\xi dk.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Pour trouver la quantité de Q_2 , nous suivons les mêmes calculs précédents. Lesquelles nous permettent d'avoir Q_2 sous la forme suivante :

$$Q_2 \delta_{(\omega,0)}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikt} q_2(\omega, x, \xi, k) \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} d\xi dk. \tag{4.30}$$

Finalement, nous remplaçons (4.29) et (4.30) dans (4.18) pour trouver l'intégrale qui définit l'opérateur de Kirchhoff Q . Ainsi, expression (4.18) devient

$$Q \delta_{(\omega,0)}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikt} [q_1(\omega, x, \xi, k) + q_2(\omega, x, \xi, k)] \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} dk d\xi, \tag{4.31}$$

où $q_2(\omega, x, \xi, k) \in S_{1,0}^{-n/2-1/6}$ et $q_1(\omega, x, \xi, k) \in S_{1,0}^{-n/2+5/6}$. Ce qui implique que le noyau de l'opérateur de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$ est donné par l'intégrale oscillante suivante :

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikt} [(1 - n \cdot \omega)a(\omega, x, \xi, k) + \mathcal{C}(x)b(\omega, x, \xi, k)] \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} d\xi dk, \tag{4.32}$$

où

$$q_1(\omega, x, \xi, k) = (1 - n \cdot \omega)a(\omega, x, \xi, k), \quad q_2(\omega, x, \xi, k) = \mathcal{C}(x)b(\omega, x, \xi, k). \tag{4.33}$$

□

4.2.2 L'amplitude de Kirchhoff a_Q

Théorème 4.2.3. *Si le noyau de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$ vérifie l'expression (4.16), alors l'amplitude de Kirchhoff est donnée par :*

$$a_Q(\omega, x, k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\psi_2(\omega, x, \zeta)} ((1 - n \cdot \omega)a_1(\omega, x, \zeta, k) + \mathcal{C}(x)b_1(\omega, x, \zeta, k)) \frac{1}{A_+(k^{2/3}\zeta_1)} d\zeta, \quad (4.34)$$

où $\xi = k\zeta$, $a_1(\omega, x, \zeta, k) = k^n a(\omega, x, k\xi, k)$, $b_1(\omega, x, \zeta, k) = k^n b(\omega, x, k\xi, k)$ et $\psi_2(\omega, x, \zeta) = \psi_1(x, \zeta, 1) - \omega \cdot \zeta$ où ψ_1 est définie dans la preuve du théorème (4.2.2).

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant. Ce dernier illustre le lien entre le noyau de l'opérateur de Kirchhoff et son amplitude.

Lemme 4.2.1. [54] *L'amplitude a_Q de l'opérateur intégrale de Fourier Q est obtenue par la transformation de Fourier inverse du noyau κ_Q .*

$$a_Q(\omega, x, k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikt} \kappa_Q(\omega, x, t) dt.$$

Démonstration. Dans le but de trouver l'intégrale oscillante de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$, nous appliquons la transformation de Fourier inverse par rapport à t sur (4.16), nous déterminons $a_Q(\omega, x, k)$ sous la forme suivante :

$$a_Q(\omega, x, k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi} [(1 - n \cdot \omega)a(\omega, x, \xi, k) + \mathcal{C}(x)b(\omega, x, \xi, k)] \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi. \quad (4.35)$$

Nous utilisons le changement de variable $\xi = k\zeta$, où $\xi \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons

$$a_Q(\omega, x, k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\psi_2(\omega, x, \zeta)} [(1 - n \cdot \omega)a_1(\omega, x, \zeta, k) + \mathcal{C}(x)b_1(\omega, x, \zeta, k)] \frac{1}{A_+(k^{2/3}\zeta_1)} d\zeta, \quad (4.36)$$

où $a_1(\omega, x, \zeta, k) = k^n a(\omega, x, k\zeta, k)$, $b_1(\omega, x, \zeta, k) = k^n b(\omega, x, k\zeta, k)$ et $\psi_2(\omega, x, \zeta) = \psi_1(x, \zeta, 1) - \omega \cdot \zeta$. □

Pour trouver le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff a_Q , nous appliquons la méthode de phase stationnaire sur l'intégrale oscillante qui définit cette amplitude. Le théorème suivant donne le développement asymptotique de a_Q .

Théorème 4.2.4. Soient $P \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{N}$. Si l'amplitude a_Q vérifie (4.34), alors le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff a_Q est :

$$a_Q(\omega, x, k) = \sum_{p,l=0}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} ((1 - n \cdot \omega)a_{p,l}(\omega, x) + \mathcal{C}(x)b_{p,l}(\omega, x)) \psi^{(l)}(k^{1/3}Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega} + R_{P,L}(k), \quad (4.37)$$

tel que

$$|R_{P,L}(k)| \leq C_{PL} k^{-\min(2L/3, P+1/3)}, \quad (4.38)$$

où $p \in \{0, 1, \dots, [P]\}$ avec $[.]$ désigne la partie entière, $l \in \{0, 1, \dots, L\}$, C_{PL} est une constante qui dépend de L et P , ω est la direction incidente, et $Z(\omega, x)$ est une fonction réelle, continue, positive dans la région illuminée, négative dans la région d'ombre, et nulle dans la région de transition. Les fonctions $a_{p,l}$ et $b_{p,l}$ résultent d'après l'application de la méthode de phase stationnaire sur a_1 et b_1 qui sont les symboles de l'opérateur Q (voir le théorème 4.2.2).

Démonstration. Au début de cette preuve, nous préférons de réduire l'expression de l'intégrale oscillante de l'amplitude a_Q d'une façon qu'elle vérifie les conditions de la méthode de phase stationnaire. À cet effet, nous allons utiliser le lemme 1.4.4 sur (4.34).

D'abord, nous trouvons le lien entre la fonction de Fock Ψ (voir la proposition 1.4.4) et l'expression du quotient de la fonction d'Airy qui est dans (4.34),

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_+}(k^{2/3}\zeta_1) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\frac{1}{A_+(k^{2/3}\zeta_1)}} \right), \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ikt\zeta_1} \frac{k^{2/3}}{A_+(k^{2/3}\zeta_1)} d\zeta_1 \right), \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{ik\frac{t^3}{3}} \Psi(k^{1/3}t) \right), \\ &= k^{1/3} \int_{\mathbb{R}} e^{ikt\zeta_1 + ik\frac{t^3}{3}} \Psi(k^{1/3}t) dt. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Nous remplaçons (4.39) dans (4.34), l'intégrale de a_Q devient :

$$a_Q(\omega, x, k) = k^{1/3} \int e^{ik\psi_2(\omega, x, \zeta) + ikt\zeta_1 + ik\frac{t^3}{3}} [(1 - n \cdot \omega)a_1(\omega, x, \zeta, k) + \mathcal{C}(x)b_1(\omega, x, \zeta, k)] \Psi(k^{1/3}t) dt d\zeta, \quad (4.40)$$

où $a_1(\omega, x, \zeta, k) \in S^{n/2+7/6}$ et $b_1(\omega, x, \zeta, k) \in S^{n/2+1/6}$ (voir le théorème 4.2.3).

Soit le symbole $d_1(\omega, x, \zeta, k)$ dans $S^{n/2+7/6}$ tel que

$$(1 - n \cdot \omega)a_1(\omega, x, \zeta, k) + \mathcal{C}(x)b_1(\omega, x, \zeta, k) = d_1(\omega, x, \zeta, k). \quad (4.41)$$

D'après les propriétés des symboles dans [41][50], le symbole (4.41) peut s'écrire sous la forme d'un développement asymptotique suivant :

$$d_1(\omega, x, \zeta, k) = \sum_{p=0}^P k^{n/2+7/6-p} d_p(\omega, x, \zeta), \quad (4.42)$$

où $P = n/2 + 7/6$, et

$$d_p(\omega, x, \zeta) = (1 - n \cdot \omega)a_p(\omega, x, \zeta) + \mathcal{C}(x)b_p(\omega, x, \zeta). \quad (4.43)$$

D'où l'intégrale (4.40) devient :

$$a_Q(\omega, x, k) = k^{1/3} \sum_{p=0}^P k^{n/2+7/6-p} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ikf(\zeta, t)} d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t) dt d\zeta, \quad (4.44)$$

tel que

$$f(\zeta, t) = \psi_2(\omega, x, \zeta) + t\zeta_1 + \frac{t^3}{3}, \quad (4.45)$$

Pour plus de détails sur la fonction de phase $f(\zeta, t)$, nous renvoyons le lecteur vers [54]. Pour déterminer le développement asymptotique de $a_Q(\omega, x, k)$, il suffit d'appliquer la méthode de phase stationnaire sur l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ikf(\zeta, t)} d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t) dt d\zeta. \quad (4.46)$$

Tout d'abord, nous devons vérifier que la matrice Hessienne de la fonction de phase $f(\zeta, t)$ est inversible aux points critiques. À cet égard, les points critiques de la fonction de phase f sont comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(\zeta, t) = 0 \Rightarrow \zeta_1 = -t^2, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} f(\zeta, t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \psi_2, \\ \nabla_{\zeta'} f(\zeta, t) = 0 \Rightarrow \nabla_{\zeta'} \psi_2 = 0. \end{cases}$$

Selon [54], pour tout x dans la région de transition, nous avons $\zeta_1 = 0$, d'où $t = 0$, et pour tout x dans les deux autres régions de l'obstacle telles que la région illuminée et la région d'ombre, les points critiques sont donnés par les relations algébriques suivantes :

$$\zeta_1 = -t^2 \text{ et } \zeta' = \omega' \text{ où } \zeta' = (\zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } \omega' = (\omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathcal{S}^{n-1} .$$

Maintenant, nous devons vérifier que le déterminant de la matrice Hessienne aux points critiques (ξ_c, t_c) dans toutes les régions de l'obstacle ne s'annule pas sachant que cette matrice est définie par :

$$Hess(f(\xi_c, t_c)) = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1} \psi_2 & (\frac{\partial}{\partial \zeta_1}) \nabla_{\zeta'} \psi_2 \\ 0 & \nabla_{\zeta'} (\frac{\partial}{\partial \zeta_1}) \psi_2 & \nabla_{\zeta'}^2 \psi_2 \end{pmatrix} . \quad (4.47)$$

Dans la région de transition, la matrice Hessienne de la fonction de phase f aux points critiques est donnée par :

$$Hess(f(\xi_c, t_c)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (4.48)$$

D'où son déterminant est

$$\det Hess(f(\xi_c, t_c)) = 1 \neq 0.$$

Dans les deux autres régions, la matrice Hessienne de f aux points critiques est donnée par :

$$Hess(f(\xi_c, t_c)) = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & \mp (-\zeta_1)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (4.49)$$

Le signe $(-)$ vient de la définition de la fonction ψ_1 , respectivement ψ_2 dans la région d'ombre, le signe $(+)$ vient de la définition de la fonction de ψ_1 , respectivement ψ_2 dans la région illuminée.

Le déterminant de cette matrice dans la région illuminée est -1 et dans la région

d'ombre est égale à 3. Ce qui nous permet de confirmer que le déterminant de la matrice Hessienne de la fonction de phase f ne s'annule pas pour tout x appartenant au bord de l'obstacle. Ainsi, la matrice Hessienne est inversible. Nous concluons que les conditions de la méthode de phase stationnaire sont satisfaites.

Pour trouver le comportement asymptotique de (4.46), nous suivons les calculs standard de la méthode de la phase stationnaire [50, 64]. Nous commençons tout d'abord par réduire la fonction de phase $f(\zeta, t)$ en utilisant le développement de Taylor aux voisinages des points critiques obtenus précédemment. Cela nous permet d'obtenir la fonction de phase sous la forme suivante :

$$(\zeta, t) = x \cdot \omega + \langle M \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix} \rangle, \quad (4.50)$$

où M est la matrice Hessienne de la fonction de phase de $f(\zeta, t)$ aux points critiques sachant qu'elle est symétrique, inversible et de dimension $(n + 1)$.

Ensuite, En remplaçant (4.50) dans l'intégrale (4.46), cette dernière devient

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \exp(ik \langle M \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix} \rangle) d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t) dt d\zeta, \quad (4.51)$$

$$= \langle \exp(ik \langle M \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix} \rangle), d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t) \rangle. \quad (4.52)$$

Selon les propriétés de la transformation de Fourier tel que $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id$, où Id est l'identité, l'intégrale (4.52) peut se représenter par la forme suivante :

$$I(k) = \langle \mathcal{F} \left[\exp(ik \langle M \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix} \rangle) \right], \mathcal{F}^{-1} [d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t)] \rangle, \quad (4.53)$$

où \mathcal{F} dénote la transformation de Fourier et \mathcal{F}^{-1} dénote la transformation de Fourier inverse et $\exp(ik \langle M \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix} \rangle)$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

D'autre part, nous savons que

$$\mathcal{F} \left[\exp(ik \langle M \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta \\ t \end{pmatrix} \rangle) \right] (\rho, \mu) = \frac{\pi^{(n+1)/2} k^{-(n+1)/2}}{\sqrt{|\det[M]|}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[M]} \exp\left(-\frac{i}{4k} \langle M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} \rangle\right), \quad (4.54)$$

où (ρ, μ) indique le dual de (ζ, t) et $sgn[M] = \{\text{nombre de valeurs propres strictement positives}\} - \{\text{nombre de valeurs propres strictement négatives}\}$.

Maintenant, nous remplaçons (4.54) dans (4.53), nous obtenons

$$I(k) = \frac{\pi^{(n+1)/2} k^{-(n+1)/2}}{\sqrt{|\det[M]|}} e^{i\frac{\pi}{4} sgn[M]} \langle \exp(-\frac{i}{4k} \langle M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} \rangle), \mathcal{F}^{-1} [d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t)] \rangle. \quad (4.55)$$

Puis, nous changeons la fonction exponentielle $\exp(-\frac{i}{k} \langle M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} \rangle)$ dans l'expression (4.55) par son développement de Taylor au voisinage des points critiques laquelle s'écrit sous la forme suivante :

$$\exp(-\frac{i}{k} \langle M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} \rangle) = \sum_{l=0}^L \frac{(-i)^l k^{-l}}{4^l l!} \left(\langle M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} \rangle \right)^l + r_L(k, \rho, \mu), \quad (4.56)$$

où le reste de Taylor r_L est estimé par l'inégalité suivante :

$$|r_L(k, \rho, \mu)| \leq c_L k^{-(L+1)} \left| \langle M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} \rangle \right|^{L+1}, \quad (4.57)$$

avec c_L est une constante réelle. Sachant que pour l maximal, nous avons

$$\left(\langle M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} \rangle \right)^l = (4\mu\rho_1)^l, \quad (4.58)$$

tel que ρ_1 est la première composante de $\rho \in \mathbb{R}^n$.

En remplaçant (4.56) dans (4.55), nous obtenons

$$I(k) = \sum_{l=0}^L (-1)^l \alpha_{n,l} k^{-l-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\mu\rho_1)^l \mathcal{F}^{-1} [d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t)] (\rho, \mu) d\rho d\mu + R_L(k). \quad (4.59)$$

avec $\alpha_{n,l} = \frac{i^l \pi^{(n+1)/2}}{l! \sqrt{|\det[M]|}} e^{i\frac{\pi}{4} sgn[M]}$ est une constante. Nous remarquons que pour $l = 0$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{F}^{-1} [d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t)] (\rho, \mu) d\rho d\mu = \mathcal{F} [\mathcal{F}^{-1} (d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t))] (0, 0).$$

Ensuite, nous appliquons les propriétés de transformation de Fourier inverse sur l'intégrale (4.59), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ikf(\zeta,t)} d_p(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t) dt d\zeta = k^{-1/3} \sum_{l=0}^L k^{-2l/3-(n+1)/2} d_{p,l}(\omega, x) \Psi^{(l)}(k^{1/3}Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega} + R_L(k), \quad (4.60)$$

où $d_{p,l}(\omega, x) = \alpha_{n,l} \partial_{\zeta_1}^l d_p(\omega, x, \zeta)|_{\zeta=\zeta_c}$ avec (ζ_c, t_c) sont les point critiques,

$$|R_L(k)| \leq C_L k^{-n/2-2L/3-3/2}, \quad (4.61)$$

où C_L est une constante réelle.

Dans le but de trouver le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$, nous remplaçons (4.60) dans (4.44), nous obtenons

$$a_Q(\omega, x, k) = \sum_{p,l=0}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} ((1-n \cdot \omega) a_{p,l}(\omega, x) + \mathcal{C}(x) b_{p,l}(\omega, x)) \Psi^{(l)}(k^{1/3}Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega} + R_{P,L}(k), \quad (4.62)$$

avec

$$d_{p,l}(\omega, x) = (1-n \cdot \omega) a_{p,l}(\omega, x) + \mathcal{C}(x) b_{p,l}(\omega, x),$$

tel que

$$|R_{P,L}(k)| \leq C_{P,L} k^{-\min(2L/3, P+1/3)}, \quad (4.63)$$

où $l \in \{0, 1, \dots, L\}$ et P est un nombre réel.

□

Le théorème suivant donne la relation entre les fonctions $a_{p,l}$ et $b_{p,l}$ obtenus dans (4.37).

Théorème 4.2.5. *Pour tout $p, l \geq 0$, les fonctions $a_{p,l}$ et $b_{p,l}$ données par la formule (4.37) vérifient l'égalité suivante :*

$$b_{p,l}(\omega, x) = -\frac{a_{p,l}(\omega, x)}{ik}. \quad (4.64)$$

Démonstration. Soient P_4 et P_3 deux opérateurs pseudo-différentiels admettent les symboles $p_4 \in S^{-n/2-1/6}$ et $p_3 \in S^{-n/2-1/6+1}$ respectivement. La définition de l'opérateur de Kirchhoff Q est données par le théorème 4.2.1 comme suit :

$$Q = (1 - \mathbf{n} \cdot \omega) \partial_t F + \mathcal{C}(x)F, \quad Fu(x, t) = JP_4 \mathcal{A}^{-1}u(x, t), \quad (4.65)$$

avec F et J deux opérateurs intégraux de Fourier lesquels sont cités dans les deux théorèmes 4.2.1 et 4.2.2.

Nous suivons les mêmes calculs de la composition entre les opérateurs intégraux de Fourier et les opérateurs pseudo-différentiels que celles de (4.29), nous trouvons

$$Fu(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi - ikt} b(\omega, x, \xi, k) \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} \widehat{u}(\xi, k) d\xi dk, \quad (4.66)$$

où $b(\omega, x, \xi, k) = p_4(\omega, x, \xi, k) \# a_J(x, \xi, k) \in S^{-n/2-1/6}$, avec $a_J(x, \xi, k)$ est cité dans le théorème 4.2.2 et $\#$ est défini par la formule (4.26).

Puisque $\partial_t Fu(x, t) = JP_3 \mathcal{A}^{-1}u(x, t)$ et

$$\begin{aligned} \partial_t Fu(x, t) &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi - ikt} b(\omega, x, \xi, k) \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} \widehat{u}(\xi, k) d\xi dk, \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi - ikt} (-ik) b(\omega, x, \xi, k) \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} \widehat{u}(\xi, k) d\xi dk \end{aligned} \quad (4.67)$$

alors $a(\omega, x, \xi, k) = -ikb(\omega, x, \xi, k)$, où $b(\omega, x, \xi, k) \in S^{-n/2-1/6}$. D'après les propriétés des symboles des opérateurs pseudo-différentiels, nous avons

$$a(\omega, x, \xi, k) \in S^{-n/2+5/6}.$$

Ce qui nous permet de conclure que $a_{p,l}(\omega, x) = -ikb_{p,l}(\omega, x)$. □

4.2.3 Quelques estimations de développement asymptotique de a_Q

Le lemme ci-dessous nous permet d'établir les deux estimations de développement asymptotique de l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$.

Lemme 4.2.2. [54] *Soit Ψ la fonction de Fock définie (1.4.4). lorsque $\tau \rightarrow -\infty$, la fonction de Fock est a décroissance rapide et admet le développement asymptotique suivant :*

$$\Psi(\tau) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j \tau^{1-3j} \quad \text{pour } \tau \rightarrow +\infty. \quad (4.68)$$

Le résultat suivant est obtenu en comparant l'expression asymptotique (4.37) avec $\partial_n w^t(x, k)$.

Proposition 4.2.1. *Si a_Q est l'amplitude donnée par (4.37), alors*

$$|a_Q(\omega, x, k) - \partial_n w^t(x, k)| \leq Ck^{-1} \text{ for } k \rightarrow +\infty, \quad (4.69)$$

où C est une constante réelle et

$$a_Q(\omega, x, k) \sim \sum_{p,l=0}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} ((1 - n \cdot \omega) a_{p,l}(\omega, x) + \mathcal{C}(x) b_{p,l}(\omega, x)) \psi^{(l)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}. \quad (4.70)$$

Démonstration. Nous savons que la dérivée normale du champ total est définie par :

$$\partial_n w^t(x, k) = -ik(1 - n \cdot \omega) e^{ikx \cdot \omega} + \mathcal{C}(x) e^{ikx \cdot \omega}. \quad (4.71)$$

Nous appliquons dans (4.70) la relation entre les coefficients $a_{p,l}$ et $b_{p,l}$ qui est donnée par le théorème 4.2.5 . L'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$ devient

$$\begin{aligned} a_Q(\omega, x, k) &\sim k^{2/3} \left((1 - n \cdot \omega) - \frac{\mathcal{C}(x)}{ik} \right) a_{0,0}(\omega, x) \Psi(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}, \\ &+ \sum_{p,l=1}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} \left((1 - n \cdot \omega) - \frac{\mathcal{C}(x)}{ik} \right) a_{p,l}(\omega, x) \Psi^{(l)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}, \\ &= k^{2/3} \left((1 - n \cdot \omega) - \frac{\mathcal{C}(x)}{ik} \right) a_{0,0}(\omega, x) \Psi(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}, \\ &+ \sum_{\beta,\alpha=0}^{P-1,L-1} k^{-1-\beta-2\alpha/3} \left((1 - n \cdot \omega) - \frac{\mathcal{C}(x)}{ik} \right) a_{\beta+1,\alpha+1}(\omega, x) \Psi^{(\alpha+1)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

D'après le lemme 4.2.2, $\Psi(k^{1/3} Z(x, \omega)) \sim -ik^{1/3} Z(x, \omega)$ pour tout $k \rightarrow +\infty$.

Prenant $a_{0,0}(x, \omega) = \frac{1}{Z(x, \omega)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_Q(\omega, x, k) &\sim (-ik(1 - n \cdot \omega) + \mathcal{C}(x)) e^{ikx \cdot \omega}, \\ &+ \sum_{\beta,\alpha=0}^{P-1,L-1} k^{-1-\beta-2\alpha/3} \left((1 - n \cdot \omega) - \frac{\mathcal{C}(x)}{ik} \right) a_{\beta+1,\alpha+1}(\omega, x) \Psi^{(\alpha+1)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}. \end{aligned}$$

Puisque $|\partial_\tau^{\alpha+1}\Psi(\tau)| \leq M_\alpha \tau^{-\alpha}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et $|1 - n \cdot \omega| \leq 2$, alors

$$\begin{aligned} |a_Q(\omega, x, k) - \partial_n w^t(x, k)| &\leq \sum_{\beta, \alpha=0}^{P-1, L-1} \left| k^{-1-\beta-2\alpha/3} \left((1 - n \cdot \omega) - \frac{\mathcal{C}(x)}{ik} \right) \right. \\ &\quad \left. \times a_{\beta+1, \alpha+1}(\omega, x) \Psi^{(\alpha+1)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) \right|, \\ &\leq \sum_{\beta, \alpha=0}^{P-1, L-1} M k^{-1-\beta-\alpha} \left| 2 + \frac{\max_{x \in B} \mathcal{C}(x)}{k} \right|, \\ &\leq C k^{-1}, \end{aligned} \tag{4.73}$$

où C une constante réelle. □

L'estimation suivante est obtenue en traitant l'expression (4.37) au voisinage de la région de transition.

Proposition 4.2.2. *Si a_Q est une amplitude donnée par la formule (4.37), alors*

$$|a_Q(\omega, x, k)| \leq M k^{2/3} \text{ pour } k \rightarrow +\infty. \tag{4.74}$$

où M est une constante réelle.

Démonstration. En remplaçant la relation (4.64) dans (4.37). Ensuite, nous appliquons la valeur absolue sur le résultat obtenu. Nous trouvons

$$|a_Q(\omega, x, k)| \leq \sum_{p, l=0}^{P, L} k^{2/3-p-2l/3} \left| \left((1 - n \cdot \omega) - \frac{\mathcal{C}(x)}{ik} \right) \right| \left| a_{p, l}(\omega, x) \Psi^{(l)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega} \right|, \tag{4.75}$$

avec $p \in \{0, 1, \dots, [P]\}$ et $l \in \{0, 1, \dots, L\}$.

Dans la région de transition, nous avons $|1 - n \cdot \omega| \leq 1$.

D'autre part, nous supposons qu'au voisinage de cette région la courbure est constante, c'est-à-dire $\mathcal{C}(x) = C$. L'application de ces hypothèses sur (4.75), nous donne

$$\begin{aligned} |a_Q(\omega, x, k)| &\leq (k^{2/3} + C k^{-1/3}) |a_{0,0}(\omega, x) \Psi(k^{1/3} Z(\omega, x))| \\ &\quad + \sum_{\alpha, \gamma=0}^{P-1, L-1} k^{-1-\alpha-2\gamma/3} (1 + C k^{-1}) |a_{\alpha+1, \gamma+1}(\omega, x) \Psi^{(\gamma+1)}(k^{1/3} Z(\omega, x))|. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Puisque la fonction Ψ et toutes ces dérivées sont bornées, alors

$$|a_{0,0}(\omega, x)\Psi(k^{1/3}Z(\omega, x))| \leq M_1, \quad (4.77)$$

où M_1 est une constante réelle et $\gamma \in N$.

Finalement, nous trouvons

$$|a_Q(\omega, x, k)| \leq Mk^{2/3} + \sum_{\alpha, \gamma=0}^{P-1, L-1} k^{-1-\alpha-2\gamma/3}(1 + Ck^{-1})|a_{\alpha+1, \gamma+1}(\omega, x)|M_\gamma, \quad (4.78)$$

avec $M = (1 + C)M_1$ et $|\Psi^{(\gamma+1)}(\tau)(k^{1/3}Z(\omega, x))| \leq M_\gamma$. Quand nous faisons tendre k vers $+\infty$, nous obtenons (4.74). \square

4.3 *L'amplitude de Kirchhoff en utilisant l'approximation de DtN d'ordre 2*

Dans cette section, nous nous intéressons à déterminer l'expansion asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$ en utilisant l'approximation de l'opérateur DtN de second ordre défini par :

$$\begin{aligned} \partial_n w^s(x, k) &= -ikw^i(x, k) + \frac{c(x)}{2}w^i(x, k) - \frac{c(x)^2}{8(c(x) - ik)}w^i(x, k) - \frac{1}{2(c(x) - ik)}\partial_x^2 w^i(x, k) \\ &= -ikw^i(x, k) + \frac{c(x)}{2}w^i(x, k) - \frac{1}{2(c(x)^2 + k^2)}(c(x) + ik)\left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2\right)w^i(x, k). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Pour trouver cette nouvelle expression de $a_Q(\omega, x, k)$, nous suivons les mêmes techniques du calcul que nous avons adopté précédemment. Tout d'abord, nous commencerons par déterminer l'opérateur de Kirchhoff Q . Ensuite, nous trouvons l'expression de son noyau $\kappa_Q(\omega, x, t)$. À l'aide de la transformation de Fourier inverse, nous obtiendrons l'intégrale de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$. Finalement, nous appliquerons la méthode de phase stationnaire sur l'intégrale oscillante qui définit l'amplitude de Kirchhoff dans le but de trouver le développement asymptotique de $a_Q(\omega, x, k)$.

4.3.1 Le noyau de l'opérateur Kirchhoff κ_Q

Dans cette partie, nous allons déterminer le noyau de l'opérateur Q qui est défini par (0.11) en utilisant l'approximation de DtN d'ordre 2. Par souci de simplicité, nous dénommons l'opérateur (4.4) par Q_1 .

Théorème 4.3.1. *Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un obstacle borné, strictement convexe tel que $\partial\mathcal{O} = B$, avec B est une hypersurface \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R}^{n+1} admettant une courbure positive. Notons Ω un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{O}$. Si nous utilisons l'approximation (4.79), alors l'opérateur Q est donné par :*

$$Q = Q_1 - \frac{\pi}{2c(x)} T_{e^{-c(x)|t|}} (c(x) - \partial_t) \tilde{F}, \quad (4.80)$$

et son noyau $\kappa_Q(\omega, x, t)$ est défini par :

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = \left((1 - n \cdot \omega) + \frac{c(x)}{2} \right) \kappa_F(\omega, x, t) - \frac{\pi}{2c(x)} e^{-c(x)|t|} * (c(x) - \partial_t) \kappa_{\tilde{F}}(\omega, x, t), \quad (4.81)$$

tels que $T_{e^{-c(x)|t|}}$ dénote l'opérateur de convolution qui est associé à $e^{-c(x)|t|}$, $\tilde{F} = \left(\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2 \right) F$, $\kappa_{\tilde{F}}(\omega, x, t) = \left(\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2 \right) \kappa_F(\omega, x, t)$ et $\kappa_F(\omega, x, t) = \delta(t - \omega \cdot x)$.

Démonstration. Soient $w^s(x, k)$ est une solution de (0.6), $w^t(x, k)$ est le champ total de l'équation de Helmholtz tel que

$$w^t(x, k) = w^s(x, k) + w^i(x, k). \quad (4.82)$$

Nous utilisons l'approximation (4.79) qui définit la dérivée normale de $w^s(x, k)$ sur le bord de l'obstacle pour calculer la dérivée normale du champ total.

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_n w^t(x, k) &= \partial_n w^s(x, k) + \partial_n w^i(x, k), \\ &= -ikw^i(x, k) + \frac{c(x)}{2} w^i(x, k) - \frac{1}{2(c(x)^2 + k^2)} (c(x) + ik) \left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2 \right) w^i(x, k) \\ &\quad + ikn \cdot \omega w^i(x, k), \\ &= \left(-ik(1 - n \cdot \omega) + \frac{c(x)}{2} \right) w^i(x, k) - \frac{1}{2(c(x)^2 + k^2)} (c(x) + ik) \left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2 \right) w^i(x, k), \\ &= \left(-ik(1 - n \cdot \omega) + \frac{c(x)}{2} \right) e^{ikx \cdot \omega} - \frac{1}{2(c(x)^2 + k^2)} (c(x) + ik) \left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2 \right) e^{ikx \cdot \omega}, \\ &= \mathcal{Q}_1(x, k) + \mathcal{Q}_2(x, k), \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{Q}_1(x, k) = \left(-ik(1 - n \cdot \omega) + \frac{c(x)}{2} \right) e^{ikx \cdot \omega}, \quad (4.84)$$

et

$$\mathcal{Q}_2(x, k) = \left(-\frac{1}{2(c(x)^2 + k^2)}(c(x) + ik)\left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2\right) \right) e^{ikx \cdot \omega}. \quad (4.85)$$

Pour déterminer le noyau de l'opérateur Q , nous devons calculer la transformation de Fourier de la quantité $\partial_n w^t(x, k)$ par rapport à la variable k . Soit $\varphi_x(k) = \varphi(x, k)$ une fonction de test dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, nous avons

$$\left\langle \widehat{\partial_n w^t(x, k)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \left\langle \widehat{\mathcal{Q}_1(x, k)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} + \left\langle \widehat{\mathcal{Q}_2(x, k)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (4.86)$$

La quantité $\left\langle \widehat{\mathcal{Q}_1(x, k)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$ est déjà calculer précédemment et nous avons obtenu la formule(4.8). Pour trouver le noyau associe à $\mathcal{Q}_2(x, k)$, nous suivrons les mêmes étapes de calculs.

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{Q}_2(x, k)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \left\langle \mathcal{Q}_2(x, k), \widehat{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left[\frac{1}{2(c(x)^2 + k^2)}(c(x) + ik)\left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2\right) e^{ikx \cdot \omega} \right] \varphi_x(t) e^{-ikt} dt dk, \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2(c(x)^2 + k^2)} e^{-ikt} dk * \int_{\mathbb{R}} (c(x) + ik)\left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2\right) e^{ikx \cdot \omega} e^{-ikt} dk \right] \varphi_x(t) dt, \\ &= -\frac{\pi}{2c(x)} \langle e^{-c(x)|t|} * (c(x) - \partial_t) \left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2\right) \delta(t - \omega \cdot x), \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}, \\ &= \langle \kappa_{Q_2}(\omega, x, t), \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Nous supposons que

$$\kappa_{\widehat{F}}(\omega, x, t) = \left(\frac{c(x)^2}{4} + \partial_x^2\right) \kappa_F(\omega, x, t), \quad \kappa_F(\omega, x, t) = \delta(t - \omega \cdot x), \quad (4.88)$$

Finalement, nous déterminons le noyau de notre opérateur comme suit :

$$\begin{aligned} \kappa_Q(\omega, x, t) &= \left((1 - n \cdot \omega) \partial_t + \frac{c(x)}{2} \right) \kappa_F(\omega, x, t) - \frac{\pi}{2c(x)} e^{-c(x)|t|} * (c(x) - \partial_t) \kappa_{\widehat{F}}(\omega, x, t) \\ &= \kappa_{Q_1}(\omega, x, t) + \kappa_{Q_2}(\omega, x, t), \end{aligned} \quad (4.89)$$

où $\kappa_{Q_1}(\omega, x, t)$ indique le noyau de l'opérateur Q_1 .

D'où l'opérateur de Kirchhoff

$$Q = Q_1 - \frac{\pi}{2c(x)} T_{e^{-c(x)|t|}} (c(x) - \partial_t) \tilde{F}, \quad (4.90)$$

où $T_{e^{-c(x)|t|}}$ est l'opérateur de convolution associé à la fonction $e^{-c(x)|t|}$ et $\tilde{F} = (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2)F$. □

Dans le théorème suivant nous déterminons l'intégrale oscillante associée au noyau de l'opérateur de Kirchhoff (4.80).

Théorème 4.3.2. *Soient K et J deux opérateurs intégraux de Fourier elliptique d'ordre 0. Si l'opérateur Q vérifie (4.80) et son noyau $\kappa_Q(\omega, x, t)$ vérifie (4.89), alors ils peuvent être définies respectivement par :*

$$Q = Q_1 - \frac{\pi}{2c(x)} T_{e^{-c(x)|t|}} (c(x) J \mathcal{A}^{-1} P_1^\# K - J \mathcal{A}^{-1} P_2^\# K), \quad (4.91)$$

et

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = \kappa_{Q_1}(\omega, x, t) + \kappa_{Q_2}(\omega, x, t), \quad (4.92)$$

avec $\kappa_{Q_1}(\omega, x, t)$ est le noyau de l'opérateur Q_1 et κ_{Q_2} est défini par :

$$\begin{aligned} \kappa_{Q_2}(\omega, x, t) = & -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-c(x)|t-r| + i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi - ikr} [b^\#(\omega, x, \xi, k) - \frac{1}{c(x)} a^\#(\omega, x, \xi, k)] \\ & \times \frac{1}{A_+(k^{-1/3} \xi_1)} d\xi dk dr. \end{aligned}$$

où $P_1^\# \in OPS^{-n/2-1/6}$, $P_2^\# \in OPS^{-n/2+5/6}$, $a^\#(\omega, x, \xi, k) = (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2)a(\omega, x, \xi, k)$, et $b^\#(\omega, x, \xi, k) = (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2)b(\omega, x, \xi, k)$ tels que $a(\omega, x, \xi, k)$ et $b(\omega, x, \xi, k)$ sont définis dans le théorème 4.2.2.

Démonstration. D'après le théorème précédent, nous avons la définition de l'opérateur de Kirchhoff Q tel que

$$Q = Q_1 - \frac{\pi}{2c(x)} T_{e^{-c(x)|t|}} (c(x) - \partial_t) (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2) F. \quad (4.93)$$

Nous remplaçons l'opérateur intégrale de Fourier F par sa décomposition microlocale qui est donnée par (4.10), nous obtenons

$$Q = Q_1 - \frac{\pi}{2c(x)} T_{e^{-c(x)|t|}} (c(x) J (\tilde{E}_1 \mathcal{A}_i + \tilde{E}_2 \mathcal{A}'_i) K - J (\tilde{E}_3 \mathcal{A}_i + \tilde{E}_4 \mathcal{A}'_i) K), \quad (4.94)$$

où $\tilde{E}_1 \in OPS^{-n/2+1/6}$, $\tilde{E}_2 \in OPS^{-n/2-1/6}$, $\tilde{E}_3 \in OPS^{-n/2+1/6+1}$, et $\tilde{E}_4 \in OPS^{-n/2-1/6+1}$.
 Maintenant, nous appliquons le théorème 3.3.2 sur le dernier résultat obtenu de l'opérateur Q . Nous obtenons

$$Q = Q_1 - \frac{\pi}{2c(x)} T_{e^{-c(x)|t|}} (c(x)JA^{-1}P_1^\#K - JA^{-1}P_2^\#K), \quad (4.95)$$

tels que $P_1^\# \in OPS^{-n/2-1/6}$ son symbole est défini par :

$$p_1^\#(\omega, x, \xi, k) = \left(\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2 \right) p_2(\omega, x, \xi, k), \quad (4.96)$$

et $P_2^\# \in OPS^{-n/2+5/6}$ son symbole est défini par :

$$p_2^\#(\omega, x, \xi, k) = \left(\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2 \right) p_1(\omega, x, \xi, k), \quad (4.97)$$

où $p_1(\omega, x, \xi, k)$ et $p_2(\omega, x, \xi, k)$ sont décrits par le théorème 4.2.2.

Pour trouver l'intégrale de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$, nous suivons la même méthode utilisée quand nous avons pris l'approximation de premier ordre de l'opérateur DtN . Premièrement nous désirions retrouver l'intégrale du noyau de l'opérateur de Kirchhoff Q . Pour cela nous appliquons la fonction de masse de Dirac $\delta_{(\omega,0)} \in \mathcal{E}'(\mathcal{S}^n \times \mathbb{R})$ au point de base sur l'opérateur Q .

Soit la fonction de test $\varphi(x, t)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle Q\delta_{(\omega,0)}, \varphi \rangle_{S',S} &= \langle Q_1\delta_{(\omega,0)}, \varphi \rangle_{S',S} - \left\langle \frac{\pi}{2c(x)} e^{-c(x)|t|} * [c(x)JP_3^\# \mathcal{A}^{-1} - JP_4^\# \mathcal{A}^{-1}] \delta_0, \varphi \right\rangle_{S',S}, \\ &= \langle Q_1\delta_{(\omega,0)}, \varphi \rangle_{S',S} + \langle Q_2\delta_{(\omega,0)}, \varphi \rangle_{S',S}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

où $P_3^\# = P_1^\#K$ et $P_4^\# = P_2^\#K$. Le terme $\langle Q_1\delta_{(\omega,0)}, \varphi \rangle_{S',S}$ est déjà calculé (4.31). Par conséquent, nous avons seulement besoin de déterminer l'intégrale oscillante qui introduit l'opérateur Q_2 .

$$\begin{aligned} \langle Q_2\delta_{(\omega,0)}, \varphi \rangle_{S',S} &= - \left\langle \frac{\pi}{2c(x)} e^{-c(x)|t|} * A\delta_0, \varphi \right\rangle_{S',S}, \\ &= - \frac{\pi}{2c(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{-c(x)|t-r|} \langle A\delta_0, \varphi \rangle_{S',S} dr, \end{aligned} \quad (4.99)$$

avec

$$A = c(x)JP_3^\# \mathcal{A}^{-1} - JP_4^\# \mathcal{A}^{-1}. \quad (4.100)$$

D'autre part, nous utilisons les propriétés de la composition entre les opérateurs intégraux de Fourier et les opérateurs pseudo-différentiels. Ces propriétés nous permettent de trouver l'intégrale associée à l'opérateur A tel que

$$\langle A\delta_0, \varphi \rangle_{S',S} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikt} [c(x)b^\#(\omega, x, \xi, k) - a^\#(\omega, x, \xi, k)] \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi dk, \quad (4.101)$$

où $b^\#(\omega, x, \xi, k) = p_3^\#(\omega, x, \xi, k) \# a_J(x, \xi, k)$ et $a^\#(\omega, x, \xi, k) = p_4^\#(\omega, x, \xi, k) \# a_J(x, \xi, k)$ (voir (4.26) pour définir la relation $\#$). Pour déterminer l'intégrale de l'opérateur Q_2 , nous remplaçons (4.101) dans (4.99). Nous obtenons

$$\langle Q_2\delta_{(\omega,0)}, \varphi \rangle_{S',S} = -\frac{\pi}{2c(x)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-c(x)|t-r| + i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikr} [c(x)b^\#(\omega, x, \xi, k) - a^\#(\omega, x, \xi, k)] \times \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi dk dr.$$

Finalement, l'intégrale de l'opérateur de Kirchhoff Q est donnée par :

$$Q\delta_{(\omega,0)}(x, t) = Q_1\delta_{(\omega,0)}(x, t) - \frac{\pi}{2} \int e^{-c(x)|t-r| + i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikr} [b^\#(\omega, x, \xi, k) - \frac{1}{c(x)}a^\#(\omega, x, \xi, k)] \times \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi dk dr.$$

Cela implique que le noyau de l'opérateur de Kirchhoff $\kappa_Q(\omega, x, t)$ est donné par :

$$\kappa_Q(\omega, x, t) = \kappa_{Q_1}(\omega, x, t) + \kappa_{Q_2}(\omega, x, t), \quad (4.102)$$

avec

$$\kappa_{Q_2}(\omega, x, t) = -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-c(x)|t-r| + i\psi_1(x,\xi,k) - i\omega \cdot \xi - ikr} [b^\#(\omega, x, \xi, k) - \frac{1}{c(x)}a^\#(\omega, x, \xi, k)] \times \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi dk dr,$$

où $a^\#(\omega, x, \xi, k) = (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2)a(\omega, x, \xi, k)$ et $b^\#(\omega, x, \xi, k) = (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2)b(\omega, x, \xi, k)$ et $\kappa_1(\omega, x, t)$ est défini par (4.16). \square

4.3.2 L'amplitude de Kirchhoff a_Q

L'intégrale oscillante de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$ est introduit dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.3. *Si le noyau de l'opérateur de Kirchhoff Q est défini par (4.92), alors l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$ devra être définie par :*

$$a_Q(\omega, x, k) = a_{Q_1}(\omega, x, k) + a_{Q_2}(\omega, x, k), \quad (4.103)$$

où $a_{Q_1}(\omega, x, k)$ est l'amplitude (4.34) et

$$a_{Q_2}(\omega, x, k) = -\frac{1}{2} \frac{c(x)}{c^2(x) + k^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\psi_2(\omega, x, \zeta)} [b_1^\#(\omega, x, \zeta, k) - \frac{1}{c(x)} a_1^\#(\omega, x, \zeta, k)] \frac{1}{A_+(k^{2/3}\zeta_1)} d\zeta,$$

où $a_1^\#(\omega, x, \zeta, k) = k^n a(\omega, x, k\zeta, k) \in S^{n/2+7/6}$, $b_1^\#(\omega, x, \zeta, k) = k^n b(\omega, x, k\zeta, k) \in S^{n/2+1/6}$ et la fonction $\psi_2(\omega, x, \zeta)$ est définie par le théorème (4.2.2).

Démonstration. Pour déterminer l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$, il suffit d'appliquer la transformation de Fourier inverse par rapport à la variable t sur le noyau $\kappa_Q(\omega, x, t)$. La partie de l'amplitude $a_Q(\omega, x, k)$ qui est liée à $\kappa_{Q_1}(\omega, x, t)$ a été déjà calculé et déterminé (voir expression (4.34)). Il nous reste seulement à trouver la partie de l'amplitude qui est liée à l'expression de $\kappa_{Q_2}(\omega, x, t)$. Tout d'abord, nous récrivons $\kappa_{Q_2}(\omega, x, t)$ sous la forme :

$$\kappa_{Q_2}(\omega, x, t) = -\frac{\pi}{2} e^{-c(x)|t|} * \kappa_A(\omega, x, t), \quad (4.104)$$

avec $\kappa_A(\omega, x, t)$ est le noyau de l'opérateur (4.100). Nous appliquons la transformation de Fourier inverse sur (4.104), nous obtenons

$$\mathcal{F}^{-1}(\kappa_{Q_2})(\omega, x, k) = -\frac{\pi}{2} \mathcal{F}^{-1}(e^{-c(x)|t|})(k) \mathcal{F}^{-1}(\kappa_A)(\omega, x, k). \quad (4.105)$$

Puisque $\mathcal{F}^{-1}(e^{-c(x)|t|}) = \frac{1}{\pi} \frac{c(x)}{c^2(x) + k^2}$, alors

$$a_{Q_2}(\omega, x, k) = -\frac{1}{2} \frac{c(x)}{c^2(x) + k^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\psi_1(x, \xi, k) - i\omega \cdot \xi} [b^\#(\omega, x, \xi, k) - \frac{1}{c(x)} a^\#(\omega, x, \xi, k)] \frac{1}{A_+(k^{-1/3}\xi_1)} d\xi.$$

Posons le changement de variable $\xi = k\zeta$ où $\zeta \in \mathbb{R}^n$. nous obtenons

$$a_{Q_2}(\omega, x, k) = -\frac{1}{2} \frac{c(x)}{c^2(x) + k^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\psi_2(\omega, x, \zeta)} [b_1^\#(\omega, x, \zeta, k) - \frac{1}{c(x)} a_1^\#(\omega, x, \zeta, k)] \frac{1}{A_+(k^{2/3}\zeta_1)} d\zeta, \quad (4.106)$$

tels que $a_1^\#(\omega, x, \zeta, k) = k^n a^\#(\omega, x, k\zeta, k)$, $b_1^\#(\omega, x, \zeta, k) = k^n b^\#(\omega, x, k\zeta, k)$,
 et $\psi_2(\omega, x, \zeta)$ est définie dans le théorème (4.2.2). \square

Le théorème suivant donne le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$.

Théorème 4.3.4. *Si l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$ vérifie (4.103), alors son développement asymptotique est donné par :*

$$a_Q(\omega, x, k) = a_{Q_1}(\omega, x, k) - \frac{1}{2} \frac{c(x)}{c^2(x) + k^2} \sum_{p,l=0}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} \left[b_{p,l}^\#(\omega, x) - \frac{1}{c(x)} a_{p,l}^\#(\omega, x) \right] \psi^{(l)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega} + R_{P,L}(k), \quad (4.107)$$

tel que

$$a_{Q_1}(\omega, x, k) \sim \sum_{p,l=0}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} ((1 - n \cdot \omega) a_{p,l}(\omega, x) + \mathcal{C}(x) b_{p,l}(\omega, x)) \psi^{(l)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}. \quad (4.108)$$

où $a_{p,l}^\#(\omega, x) = (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2) a_{p,l}(\omega, x)$, $b_{p,l}^\#(\omega, x) = (\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2) b_{p,l}(\omega, x)$, $p \in \{0, 1, \dots, P\}$, $l \in \{0, 1, \dots, L\}$, ω est la direction incidente et $c(x) > 0$ est la courbure. En plus, $Z(\omega, x)$ est une fonction réelle, continue, positive dans la région illuminée, négative dans la région d'ombre et elle est nulle dans la région de transition. Les fonctions $a_{p,l}$, $b_{p,l}$, $a_{p,l}^\#$, et $b_{p,l}^\#$ résultent d'après l'application de la méthode de phase stationnaire sur le symbole de l'opérateur Q .

Démonstration. Le développement asymptotique (4.107) est basé sur l'application de la méthode de la phase stationnaire sur l'intégrale oscillante qui définit l'amplitude de Kirchhoff tel que

$$a_Q(\omega, x, k) = a_{Q_1}(\omega, x, k) + a_{Q_2}(\omega, x, k),$$

avec

$$a_{Q_1}(\omega, x, k) = k^{1/3} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ik\psi_2(\omega, x, \zeta) + ikt\zeta_1 + ik\frac{t^3}{3}} [(1 - n \cdot \omega) a_1(\omega, x, \zeta, k) + \mathcal{C}(x) b_1(\omega, x, \zeta, k)] \times \Psi(k^{1/3} t) dt d\zeta, \quad (4.109)$$

(4.109) est exactement la même expression que (4.40). Puisque nous avons trouvé précédemment le développement asymptotique de (4.109) qui est donné par (4.37), alors il nous reste juste à déterminer le développement asymptotique de $a_{Q_2}(\omega, x, k)$. Pour le trouver, nous remplaçons (4.39) dans (4.106), nous obtenons

$$a_{Q_2}(\omega, x, k) = \frac{-k^{1/3}c(x)}{2(c^2(x) + k^2)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ik\psi_2(\omega, x, \zeta) + ikt\zeta_1 + ikt^3/3} [b_1^\#(\omega, x, \zeta, k) - \frac{1}{c(x)} a_1^\#(\omega, x, \zeta, k)] \times \Psi(k^{1/3}t) d\zeta dt, \quad (4.110)$$

Puisque nous avons la même fonction de phase que celle de l'intégrale oscillante (4.34) alors nous avons les mêmes points critiques. D'où les conditions de la méthode de phase stationnaire sont satisfaites.

Avant d'appliquer la méthode de phase stationnaire sur l'intégrale (4.110), nous allons simplifier cette intégrale d'une façon que nous pouvons appliquer facilement cette méthode asymptotique.

À cet effet, nous supposons que $d_1^\#(\omega, x, \zeta, k)$ est un symbole de $S^{n/2+7/6}$ tel que

$$d_1^\#(\omega, x, \zeta, k) = b_1^\#(\omega, x, \zeta, k) - \frac{1}{c(x)} a_1^\#(\omega, x, \zeta, k). \quad (4.111)$$

Nous utilisons les propriétés des symboles des opérateurs pseudo-différentiels [41][50] pour réécrire le symbole de l'intégrale (4.110) comme suit :

$$d_1^\#(\omega, x, \zeta, k) = \sum_{p=0}^P k^{n/2+7/6-p} d_p^\#(\omega, x, \zeta), \quad (4.112)$$

où $P = n/2 + 7/6$, et

$$d_p^\#(\omega, x, \zeta) = b_p^\#(\omega, x, \zeta) - \frac{1}{c(x)} a_p^\#(\omega, x, \zeta). \quad (4.113)$$

Le développement asymptotique (4.112) nous donne l'avantage de reproduire l'intégrale (4.110) sous la façon suivante :

$$a_{Q_2}(\omega, x, k) = \frac{-k^{1/3}c(x)}{2(c^2(x) + k^2)} \sum_{p=0}^P k^{n/2+7/6-p} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ikf(\zeta, t)} d_p^\#(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t) dt d\zeta, \quad (4.114)$$

tel que $f(\zeta, t)$ est la fonction de phase définie par (4.45). Pour déterminer le développement asymptotique de l'intégrale oscillante de $a_{Q_2}(\omega, x, k)$, il suffit d'appliquer la méthode de phase stationnaire sur l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{ikf(\zeta, t)} d_p^\#(\omega, x, \zeta) \Psi(k^{1/3}t) dt d\zeta. \quad (4.115)$$

Nous avons déjà calculer ce genre de développement asymptotique dans la preuve du théorème (4.2.4).

Finalement, le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$ est donné par :

$$\begin{aligned} a_Q(\omega, x, k) &= a_{Q_1}(\omega, x, k) \\ &+ \frac{-c(x)}{2(c^2(x) + k^2)} \sum_{p,l=0}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} \left[b_{p,l}^\#(\omega, x) - \frac{1}{c(x)} a_{p,l}^\#(\omega, x) \right] \psi^{(l)}(k^{1/3}Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega} + R_{P,L}(k), \end{aligned} \quad (4.116)$$

tel que $a_{Q_1}(\omega, x, k)$ est (4.108), avec

$$a_{p,l}^\#(\omega, x) = \left(\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2 \right) a_{p,l}(\omega, x),$$

et

$$b_{p,l}^\#(\omega, x) = \left(\frac{c^2(x)}{4} + \partial_x^2 \right) b_{p,l}(\omega, x).$$

Le reste $R_{P,L}$ vérifie l'estimation suivante :

$$|R_{P,L}(k)| \leq C_{PL} k^{-\min(2L/3, P+1/3)}. \quad (4.117)$$

et C_{PL} est une constante réelle qui dépend de P et L .

□

Remarque. Si on prend l'approximation de la condition d'absorption DtN d'ordre trois sur le bord sachant qu'elle est définie par :

$$\partial_n w^s(x, k) = -(ik - c(x))w^i(x, k) - \frac{c^2(x)(c(x) + ik)}{2(c(x)^2 + k^2)} \partial_x^2 w^i(x, k), \quad (4.118)$$

(Voir la condition (29) dans [51]), alors le développement asymptotique de l'amplitude de Kirchhoff $a_Q(\omega, x, k)$ est donné par :

$$a_Q(\omega, x, k) \sim a_{Q_1}(\omega, x, k) - \frac{1}{2} \frac{c^2(x)}{c^2(x) + k^2} \sum_{p,l=0}^{P,L} k^{2/3-p-2l/3} \left[c(x) \tilde{b}_{p,l}(\omega, x) - \tilde{a}_{p,l}(\omega, x) \right] \psi^{(l)}(k^{1/3} Z(\omega, x)) e^{ikx \cdot \omega}, \quad (4.119)$$

où $a_{Q_1}(\omega, x, k)$ est donné par (4.108) avec $c(x)$ est la courbure, $\tilde{a}_{p,l}(\omega, x) = \partial_x^2 a_{p,l}(\omega, x)$, et $\tilde{b}_{p,l}(\omega, x) = \partial_x^2 b_{p,l}(\omega, x)$.

CONCLUSION

Cette thèse a été consacrée à l'étude du phénomène de la diffraction des ondes par un obstacle strictement convexe avec une condition absorbante sur le bord. Cette condition est définie par l'opérateur de Dirichlet to Neumann. Plus précisément, nous avons travaillé sur l'expression asymptotique de la solution de l'équation de Helmholtz en utilisant la méthode des équations intégrales. Pour appliquer cette méthode nous avons besoin de la dérivée normale du champ total. À cet optique, nous avons fait une étude détaillée sur l'amplitude de Kirchhoff en utilisant l'approximation d'ordre 1 et l'approximation d'ordre 2 de l'opérateur Dirichlet to Neumann DtN . Cela dans le but d'obtenir des nouvelles expressions asymptotiques de la dérivée normale du champ total.

Les expressions originales sont basées sur le principe de la décomposition pseudo-différentielle de l'opérateur de Dirichlet to Neumann. Cependant que dans notre travail, nous avons utilisé des approximations de cet opérateur pour déterminer des nouvelles approches de la dérivée normale du champ total. L'un des objectifs de notre choix est de faciliter la construction d'une nouvelle classe d'approche de la dérivée normale du champ total laquelle peut être utilisée dans le développement des méthodes des équations intégrales et des méthodes numériques. Ces méthodes sont capables de produire des solutions plus précises.

À travers le temps, nous réalisons que les mathématiques sont un outil indispensable pour les innovations et les nouvelles technologies. La raison principale pour laquelle les mathématiques jouent un rôle fondamental dans différents domaines, comme le domaine de développement de l'industrie, le domaine de la technologie et de l'énergie, est que les problèmes à résoudre dans ces domaines sont écrit en

langue mathématique, ainsi les phénomènes de la physique et de la mécanique sont traduits par des formules et des équations mathématiques.

En général, notre problème consiste à traduire et résoudre le phénomène de diffraction des ondes par un corps. Ce problème est couramment rencontré lors des études de conception et d'intégration d'antennes ainsi dans les études de signature du radar et les phénomènes de l'aéronautique en utilisant les résultats de la diffraction des ondes sonores. D'autre part, les ingénieurs exploitent les propriétés de la diffraction des rayons électromagnétiques en étudiant le phénomène de l'imagerie et le traitement de radiologie. Généralement, les spécialistes en industries cherchent à résoudre et déterminer la perturbation générée par un obstacle lorsque les ondes incidentes le rencontrent produisant des ondes diffractées. Nous concluons que les industriels sont intéressés beaucoup plus par l'action de la perturbation qui est créée par un obstacle et ré-émise dans toutes les directions de l'espace.

Les travaux de cette thèse portent sur l'étude du phénomène de diffraction des ondes par des corps strictement convexes. Puisqu'il existe différentes formes géométriques dans la vie industrielle, nous allons nous intéresser à traiter le cas de la diffraction des ondes par des obstacles non convexes pour contribuer aux développements industriels et la production de nouvelles formes d'énergie.

5. ANNEXE

Les méthodes des équations intégrales à haute fréquence utilisent une expression asymptotique de la dérivée normale du champ total. Melrose et Taylor ont déterminé une certaine approche de cette expression dans le cas où le corps diffuseur est un obstacle convexe [54]. Dans une situation similaire, nous avons déterminé d'autres expressions asymptotiques. Ces dernières nous permettent de trouver des approches qui peuvent être incorporées dans les méthodes des équations intégrales comme étant l'inconnu qui correspond habituellement à une densité physique, Cette densité représente la dérivée normale du champ total calculé sur la surface de l'obstacle diffuseur. Comme il a été bien détaillé dans ce manuscrite, cette surface est décomposée en trois régions, la région illuminée et la région d'ombre et la région du bord d'ombre (la région de transition).

5.1 *La comparaison numérique entre les solutions*

Nous allons tester numériquement les solutions obtenues en utilisant les deux conditions (4.1) et (4.2) et nous allons les comparer avec la solution de l'équation de Helmholtz en utilisant l'approximation de Kirchhoff corrigée. Pour atteindre cet objectif, nous prenons l'exemple suivant pour faciliter la comparaison : Nous supposons que Ω est un cercle alors la solution exacte du problème (0.6) ainsi l'onde plane sont définies par les fonctions de Bessel. Dans cet exemple, nous nous intéressons à déterminer la quantité suivante :

$$\partial_n w^t = \partial_n w^s + \partial_n e^{ikx \cdot \omega}. \quad (5.1)$$

Nous allons comparer entre (a) la solution exacte, (b) la solution en utilisant l'approximation de DtN d'ordre 1 (4.1) et (c) l'approximation de Kirchhoff corrigée

(3.51). Les calculs résultants sont présentés dans la figure 5.1.

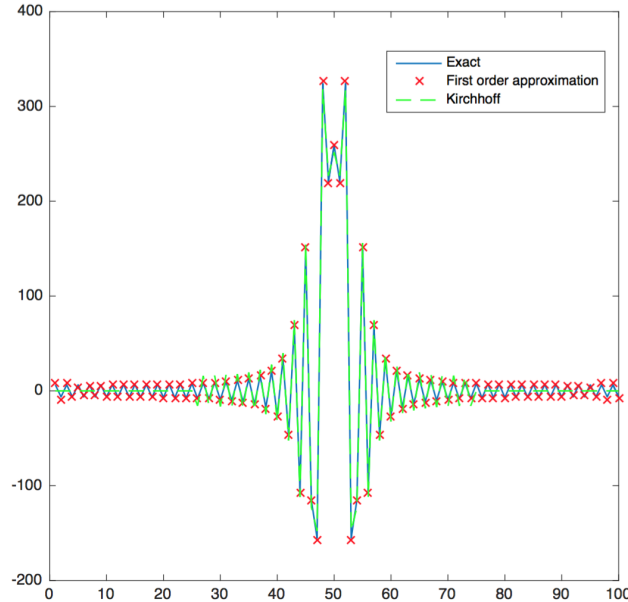


Fig. 5.1: La comparaison entre la solution exacte du problème (0.6) avec l'approximation de Kirchhoff et l'approximation de Bayliss-Turkel de premier ordre pour un cercle éclairée par une onde plane incidente avec $k = 150$.

La figure 5.1 représente la comparaison entre les solutions de l'équation de Helmholtz dans les trois régions du cercle de rayon $r = 0.27m$.

Dans cette figure, l'échelle horizontale représente la quantité de $r\alpha$ où α est l'angle incidente dont l'échelle verticale représente la quantité de chaque solution.

Dans notre cas, la dimension de l'espace est $n = 2$ et l'angle incidente est définie par $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Cet angle est donnée de sorte que la direction incidente est exprimée par :

$$\omega = (\cos\alpha_1, \sin\alpha_2).$$

Nous observons que l'approximation de Kirchhoff corrigée permet de produire une solution approchée raisonnable seulement dans la région illuminée. Tandis que, la solution celle qui est basée sur la condition (4.1) est satisfaisante sur toute les régions du bord.

5.2 L'erreur entre la solution exacte et notre solution

Dans cette partie, nous allons présenter numériquement l'erreur relative entre la solution exacte du même exemple précédent et la solution obtenue en utilisant l'approximation (4.1) dans la région d'ombre et d'ombre profonde quand $k \rightarrow +\infty$. Nous allons illustrer cette partie par la figure 5.2. Cette figure confirme que la solution obtenue en utilisant l'approximation de Kirchhoff corrigé est une solution raisonnable seulement dans la région illuminée.

D'après le graphe de la figure 5.2, nous observons que l'erreur décroît rapidement

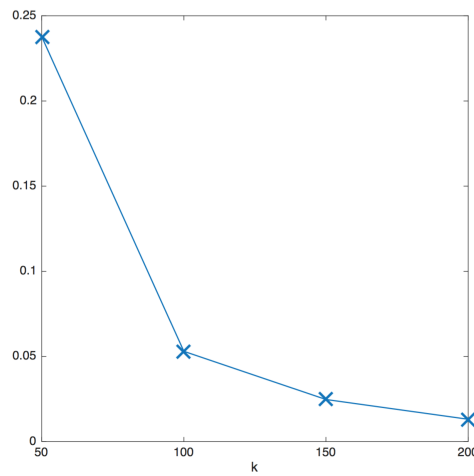


Fig. 5.2: L'erreur relative est calculé pour $k = 50, 100, 150, 200$, de la solution sur la région d'ombre et la région d'ombre profond sur un cercle, elle est obtenue en utilisant l'approximation de Bayliss-Turkel d'ordre 1 (4.1).

quand $k \rightarrow +\infty$ sachant que l'erreur calculer entre la solution exacte et la solution obtenue en utilisant l'approximation de Kirchhoff est inférieur ou égale à 1 à cause que la dernière est nulle dans la région d'ombre et l'ombre profond.

Nous concluons que l'approximation de Kirchhoff conduit à des mauvaises solutions lorsque nous utilisons les méthodes des équations intégrales à hautes fréquences. Comme il est indiqué dans [10, 51], l'approximation du deuxième ordre (4.2) de l'opérateur DtN permet d'améliorer encore une solution bien précise.

Bibliographie

- [1] T. Abboud, J.C. Nédélec et B. Zhou, *Méthode des équations intégrales pour les hautes fréquences*, C.R. Acad. Sci. Paris 318,(1994) pg 165-170.
- [2] T. Abboud, J. C. Nédélec et B. Zhou, *Improvement of the integral equation method for high frequency problems*, in Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation : Mandelieu-La Napoule, SIAM,(1995), pg 178-187.
- [3] S, Amini et P. Harris, *A comparison between various boundary integral formulations of the exterior acoustic problem*, Computer Meth. Appl. Mech. Eng. 84,(1990), pg 59-75.
- [4] A. Anand, Y. Boubendir, F. Ecevit et F. Reitich, *Analysis of multiple scattering iterations for high-frequency scattering problems. II : The three-dimensional scalar case*. Numerische Mathematik, 114 (2010), pg 373-427.
- [5] A.Anand, J. Ovall et C. Turc, *Well-conditioned boundary integral equations for two-dimensional sound-hard scattering problems in domains with corners*, J. Integral Equations Appl,(2011).
- [6] X. Antoine, H. Barucq et A. Bendali, *Bayliss-Turkel-like Radiation Conditions on Surfaces of Arbitrary Shape*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 229, Issue 1, (1999), pg 184-211.
- [7] X. Antoine, A. Bendali et M. Darbas. *Analytic Preconditioners for the Boundary Integral Solution of the Scattering of Acoustic Waves by Open Surfaces*, Journal of Computational Acoustics, volume 13(3), (2005), pg 477-498.
- [8] X. Antoine et M. Darbas, *Alternative integral equations for the iterative solution of acoustic scattering problems*, Q. Jl. Mech. Appl. Math. 58, no. 1, (2005), pg 107-128.

-
- [9] X. Antoine et M. Darbas, *Generalized combined field integral equations for the iterative solution of the three-dimensional Helmholtz equation*, Mathematical modeling and numerical analysis, 41, (2007), pg 147-167.
- [10] X. Antoine, M. Darbas, et Y.Y. Lu *An Improved Surface Radiation Condition for High-Frequency Acoustics Scattering Problems* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195 (33-36), (2006), pg 4060-4074.
- [11] S. Alinhac et P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, CNRS, EDP Sciences, (1991).
- [12] A. Bayliss, M. Gunzburger et E. Turkel. *boundary conditions for the numerical solutions for elliptic equations in exterior regions*. SIAM J. Appl. Math, 42(1982), pg 430–451.
- [13] A. Bérenger. *Opérateurs Fourier-Intégraux sur des espaces de représentations, formule asymptotique de Weyl* Matématiques générales [math.GM]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, (2006).
- [14] Y. Boubendir, V. Dominguez, D. Levadoux et C. Turc. *Regularized combined field integral equations for acoustic transmission problems*. SIAM J. Appl. Math., 75(3), (2015), pg 929-952.
- [15] Y. Boubendir et C. Turc. *Wavenumbers estimates for regularized combined field boundary integral operators in acoustic scattering problems with Neumann boundary conditions*, IMA Numerical Analysis, Volume 33 Issue 4 October 2013.
- [16] Y. Boubendir, et C. Turc. *Well-conditioned boundary integral formulations for the solution of high-frequency electromagnetic scattering problems*. CAMWA, V. 67, No. 10, (2014), pg 1772-1805.
- [17] H. Brackhage et P. Werner, *Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung*, Arch. Math, 16, (1965), pg 325-329.
- [18] O. Bruno, C. Geuzaine, J-A. Monro et F. Reitich, *Prescribed error tolerance within fixed computational times for scattering problems of arbitrarily high frequency : the convex case*. Phil. Trans. Roy. Soc. London 362, (2004), pg 629-645.

-
- [19] O. Bruno, V. Domínguez et F.J. Sayas, *Convergence analysis of a high-order Nyström integral-equation method for surface scattering problems*, Numer. Math. 124,(2013) 603.
- [20] O. Bruno, T. Elling et C. Turc, *Regularized integral equations and fast high-order solvers for sound-hard acoustic scattering problems*, submitted to Int. J. Eng. Math., (2011).
- [21] O. Bruno, C. Geuzaine, F. Reitich, *On the $O(1)$ solution of multiple-scattering problems*. IEEETrans. Magn. 41,(2005), pg 1488-1491.
- [22] A. Burton, *Numerical solution of acoustic radiation problems*, NPL Contract Rept. OC5/S35 National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, (1976).
- [23] Chandler-Wilde, S.N., Graham, I.G., Langdon, S., Spence, E.A. *Numerical-asymptotic boundary integral methods in high-frequency acoustic scattering*, Acta Numerica 21,(2012), pg 89-305.
- [24] J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction to the theory of linear partial differential equations*. North-Holland,(1982).
- [25] A. Comech. *Asymptotic estimates for oscillatory integrals*, Ph. D thesis, Columbia university,(1997).
- [26] Y.Colin de Verdière, *Méthodes semi-classique et théorie spectrale* . 1 Institut Fourier,(1980).
- [27] Y. Colin de Verdière *Une introduction à la mécanique semi-classique* enseignement Mathématique, Vol.44,(1998).
- [28] D. Colton et R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley and Sons, New York, (1987).
- [29] D. Colton et R. Kress *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* Springer, (1998).
- [30] Dominguez, V., Graham, I., et V. Smyshlyaev, *A hybrid numerical-asymptotic boundary integral method for high-frequency acoustic scattering*. Numerische Mathematik, 106, (2007), pg 471-510.
- [31] J.J Duistermaat *Fourier integral operator*, progress in Mathematics, Birkhäuser, (1995).

-
- [32] F. Ecevit et H. H. Eruslu, *Efficient Galerkin schemes for high-frequency scattering problems based on frequency dependent changes of variables*. ArXiv e-prints, September (2016).
- [33] F. Ecevit et H.C. Ozen, *Frequency-adapted galerkin boundary element methods for convex scattering problems*. Numer. Math. (2016), <http://dx.doi.org/10.1007/s00211-016-0800-7>.
- [34] F. Ecevit et F. Reitich, *Analysis of multiple scattering iterations for high-frequency scattering problems. I : The two-dimensional case*. Numerische Mathematik 114, (2009), pg 271-354.
- [35] B. Engquist et A. Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comput. 31, (1977), pg 629-651.
- [36] E. Giladi, *An asymptotically derived boundary element method for the Helmholtz equation in high frequencies*, J. Comput. Appl. Math. 198,(2007), pg 52-74.
- [37] L. Greengard, H. Cheng et V. Rokhlin, *A Fast Adaptive Multipole Algorithm in Three Dimensions*. J. Comput. Phys, (1999)155, 468.
- [38] A. Grigis et J. Sjöstrand *Microlocal analysis for differential operators* Cambridge University Press, (1994).
- [39] V. Guillemin, *Travaux de Melrose sur le problème des glancing rays* Séminaire EDP, polytech, (1976).
- [40] L. Halpern et O. Lafitte. *Dirichlet to Neumann map for domains with corners and approximate boundary conditions*, Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 204, Issue 2,15 July (2007), pg 505-514.
- [41] Hörmander, L. *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. Singular integrals*. (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. X, Chicago, Ill., 1966, Amer. Math. Soc., Providence, R.I,(1967), pg 138-183.
- [42] L. Hörmander, *Fourier integral operators*, I, Acta Math, 127,(1971), pg 79-183.
- [43] Huybrechs, D., Vandewalle, S. : *A sparse discretization for integral equation formulations of high frequency scattering problems*, SIAM J. Sci. Comput. 29, no. 6,(2007), pg 2305-2328.

-
- [44] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles* Grenoble sciences,(1996).
- [45] P. Lax et R. Phillips, *Scattering theory*, Academic Press, New York,(1967).
- [46] G.Lebeau *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes* Ann ins. Fourier, Grenoble 35, no. 2,(1985), pg 145-216.
- [47] D. Levadoux, *Etude d'une équation intégrale adaptée à la résolution haute-fréquence de l'équation D'Helmholtz*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI France,(2001).
- [48] D. Ludwig *Uniform asymptotic expression of the field scattered by a convex object at high frequencies* comm pur et appl math, (1967), pg 103-138.
- [49] A. Majda et M. Taylor, *The asymptotic behavior of the forward peak in classical scattering*, Comm. Pure Appl. Math. 30, (1977), pg 639-669.
- [50] A. Martinez, *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, 2000.
- [51] M. Medvinsky , E. Turkel et U. Hetmaniuk, *Local absorbing boundary conditions for elliptical shaped boundaries*. Journal of Computational Physics, 227, (2008), pg 8254-8267.
- [52] R. Melrose *Equivalence of glancing hypersurfaces. II*, Math. Ann. 255, (1981), pg 159-198.
- [53] R. Melrose, *Airy operators*,Comm. Partial Differential Equations 3.(1978), pg 1-76.
- [54] R. Melrose, M. Taylor, *Near peak scattering and the corrected Kirchhoff approximation for a convex obstacle*. Adv. in Math. 55,(1985), pg 242-315.
- [55] R. Melrose et M. Taylor, *Boundary Problems for Wave Equations With Grazing and Gliding Rays*. Monograph, in preparation.
- [56] I. Panich, *On the question of the solvability of the exterior boundary problem for the wave equation and Maxwell's equation*, Uspekhi Mat. Nauk 20,(1965), pg 221-226.
- [57] V. Rokhlin. *Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions*, J. Comput. Phys, 6(2), (1990), pg 414-439, 1990.

-
- [58] M.A. Shubin, *Pseudo-differential operators and spectral theory*. Springer-Verlag, (1980).
- [59] M. Taylor. *Propagation, reflection, and diffraction of singularities of solutions to wave equation*. Bulletin of the american mathematical society,(1978).
- [60] M. Taylor, *Pseudodifferential Operators* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1981).
- [61] M.S. Tong et W.C.Chew, *Multilevel fast multipole acceleration in the Nyström discretization of surface electromagnetic integral equations for composite objects*, IEEE Trans. Antennas and Propagation **58**, no. 10,(2010), pg 3411-3416.
- [62] M. Taylor, *Airy Operator Calculus*. Contemp. Math 27, 169192,(1984).
- [63] C. H. Wilcox, *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*, volume 442. Springer-Verlag, Berlin (1975).
- [64] C. Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles - Cours et problèmes résolus*, Dunod. (2002).