

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

**UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM**

**FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**

**DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL**

N° D'ORDRE : H.... /2011



# **MEMOIRE DE MAGISTER**

SPECIALITE: GENIE CIVIL

OPTION : PATHOLOGIE DES OUVRAGES D'ART

THEME

## **Formulation mathématique de transfert de chaleur dans une poutre caisson de grande portée**

Présenté Par

**MEZOUDJ GHAZEL**

Soutenu Devant la commission d'examen:

**Président:**

- **BENANNANE.A** MCA UMBA MOSTAGANEM

**Rapporteur:**

- **KADRI.T** MCA UMAB Mostaganem

**Examineurs:**

-**BELGUESMIA.N** MCA UMBA MOSTAGANEM

-**BENAOUINA.C** MCA UMBA MOSTAGANEM

# Remerciements

C'est pour l'auteur un grand honneur que de remercier monsieur **BENANNANE.A** MCA UMBA MOSTAGANEM qui a bien voulu accepter la présidence du jury.

L'auteur a eu le grand privilège d'entreprendre ce travail sous le haut patronage de Monsieur **KADRI-T**, maître de conférences à l'UMAB Mostaganem. Par ses conseils et ses orientations. Je lui suis reconnaissant et le remercie infiniment.

Mes sincères remerciements à Monsieur **BELGUESMIA.N** MCA UMBA MOSTAGANEM ,

Monsieur **BENAOUINA.C** MCA UMBA MOSTAGANEM,

Qui ont daigné à répondre à mon invitation et faire partie de ce jury.

A tout le personnel de Génie civil, qui m'a toujours encouragé dans mon travail, je dis merci.

Toute ma reconnaissance Monsieur Ismail pour son aide d'avoir tapé cette thèse.

Enfin l'auteur exprime toute sa gratitude à sa famille, on particulier à ma femme pour son soutien moral, ma mère et mes frères.

Mes sincères remerciements aussi à mes amis qui m'ont jamais hésité à m'encouragé à aller de l'avant.

## **Résumé :**

Le travail de cette recherche consiste en première lieu l'étude les différentes étapes de dimensionnement d'un ouvrage en encorbellement.

En deuxième lieu: c'est déterminer une loi de répartition de la propagation de la chaleur dans un caisson, en la résolvant par une méthode numérique (méthode des différences finies), afin de déterminer la température dans chaque section (point) du caisson en fonction du temps  $t$  et du profondeur  $z$ , et de déterminer les contraintes qui régissent au sein du caisson.

En troisième lieu: une étude analogique entre la consolidation d'un bicouche d'un sol fin saturé et la propagation de la chaleur dans un caisson d'un pont en encorbellement.

**Abstract:**

The aim of this research consists firstly in studying the different steps to design a cantilevered structure.

Secondly heat transfer law is adapted in order to analyse the temperature distribution in a box-girder element.

Finite difference method was used to solve heat equation, for different sections, in terms of time and depth. Then strains and stresses generated are also determined.

Finally an analogical study between two-strata saturated fine soil consolidation and heat propagation in a cantilevered girder-box beam of a bridge.

## ملخص:

يسعى هذا البحث أولاً إلى دراسة مختلف تصميم المنشآت الصندوقية، ثم نريد من خلال دراستنا هذه أن نبين قانون توزيع انتشار الحرارة داخل العنصر الصندوقي في الجسر، بحيث نحددها باستخدام طرق عددية (طريقة الفروق المحددة) لتتمكن من إيجاد درجة الحرارة داخل كل مقطع (نقطة) من العنصر الصندوقي بدلالة الزمن ( $t$ ) والعمق ( $z$ )، وإيجاد الاجهادات المولدة داخل العنصر الصندوقي.

وفي الأخير للقيام بدراسة تشبيهية بين تدعيم طبقتين من التربة الناعمة المشبعة وانتشار الحرارة داخل العنصر الصندوقي في الجسر.

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	2
<b>Chapitre I : généralité sur les ponts en encorbellement</b>	
I-1 introduction .....	08
I-2 Généralités.....	08
I-3 Avantages de type de pont.....	08
I-4 Historique.....	10
I-5 Conception et dimensionnement des tabliers.....	10
I-6 La précontrainte dans ce type de pont.....	21
I-7 Stabilité des tabliers pendant la construction.....	23
I-8 Cycle de construction des voussoirs.....	25
I-9 Conclusion .....	28
<b>Chapitre II : La loi de propagation de la chaleur dans un caisson</b>	
II-1 Introduction .....	30
II-2 Equation de la propagation de la chaleur dans une barre.....	30
II-3 Propagation de la chaleur dans l'espace.....	32
II-4 La résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies.....	35
II-5 Résolution de l'équation de la chaleur dans un voussoir.....	37
II-6 Calcul des contraintes et des déformations suivant l'axe z .....	44
II-7 Le polynôme de Lagrange.....	46
II-8 Conclusion .....	50
<b>Chapitre III : Résolution analytique de propagation de chaleur dans un caisson</b>	
III-1 Introduction .....	52
III-2 Détermination de la propagation de chaleur dans un corps solide .....	52
III-3 Résolue par la méthode de séparation des vitesses .....	53
III-4 Résolution de l'équation (III-2) par la méthode de séparation des variables .....	54
III-5 Calcul thermo -élastique d'une plaque constituée par des éléments caissons .....	55
III-6 Conclusion .....	59
<b>Chapitre IV : Etude analogique du transfert de chaleur et de consolidation</b>	
IV-1 Introduction .....	61
IV-2 Généralités sur les écoulements linéaires dans les sols saturés.....	61
IV-3 Equation de consolidation.....	63
IV-4 Conclusion .....	64

**Chapitre V : Résolution du modèle de transfert de la chaleur par analogie de consolidation  
d'une bicouche saturée par la méthode des différences finis**

V-1 Introduction .....	66
V-2 Application de consolidation d'une bicouche compressible entre deux conches perméables	66
V-3 Conclusion .....	73
<b>Conclusion générale et Recommandations</b> .....	75
<b>Bibliographie</b> .....	79
<b>Annexes</b>	

## Liste des figures:

<b>Fig a</b> : Poutre bi-caisson .....	4
<b>Fig b</b> : Schémas de décomposition d'une structure caisson .....	4
<b>Fig I-1</b> : schéma d'exécution d'une paire de voussoir par fléau.....	8
<b>Fig I-2</b> : l'assurance de la stabilité de la bi-console par des câbles de précontrainte.....	9
<b>Fig I-3</b> : historique des ponts en encorbellement.....	10
<b>Fig I-4</b> : schémas d'un voussoir monocellulaire.....	10
<b>Fig I-5</b> : schémas d'un voussoir bicellulaires adjacents.....	11
<b>Fig I-6</b> : schémas d'un voussoir bicellulaires séparés.....	11
<b>Fig I-7</b> : schémas d'un voussoir tricellulaires séparés.....	11
<b>Fig I-8</b> : schémas d'un voussoir à âmes inclinés.....	12
<b>Fig I-9</b> : Cheminer de bétonnage.....	12
<b>Fig I-10</b> : schémas dimensionnement d'un voussoir monocellulaire.....	14
<b>Fig I-11</b> : schémas d'épaisseur $e'$ de l'hourdis inférieur .....	15
<b>Fig I-12</b> : schémas donnant la hauteur du voussoir sur pile et à la clé.....	15
<b>Fig I-13</b> : La variation de la hauteur du voussoir à la travée de rive.....	16
<b>Fig I-14</b> : La variation d'épaisseur du hourdis inférieur à la travée de rive.....	17
<b>Fig I-15</b> : La variation de l'inertie.....	17
<b>Fig I-16</b> : La variation de la section.....	18
<b>Fig I-17</b> : La variation de la hauteur sur la travée intermédiaire .....	18
<b>Fig I-18</b> : La variation d'épaisseur du hourdis inférieur de la travée intermédiaire.....	19
<b>Fig I-19</b> : La variation d'inertie sur la travée intermédiaire .....	19
<b>Fig I-20</b> : La variation de section sur la travée intermédiaire .....	20
<b>Fig I-21</b> : les câbles de précontrainte sur la bi-console.....	21
<b>Fig I-22</b> : les câbles de précontrainte de continuité sur la travée intermédiaire .....	21
<b>Fig I-23</b> : vue en plan des câbles de continuité sur la travée intermédiaire.....	22
<b>Fig I-24</b> : diagramme de moment fléchissant sur les deux travées de rive et la travée Intermédiaire .....	22
<b>Fig I-25</b> : les sollicitations exercées sue le fléau pondant la construction .....	23
<b>Fig I-26</b> : clavage sur culée sur cintre .....	24
<b>Fig I-27</b> : schéma de clavage central .....	25
<b>Fig I-27 bis</b> : schéma des câbles de précontraintes extérieures des stabilisent le voussoir sur pile avec la semelle	26
<b>Fig I-28</b> : schéma de coffrage pour la réalisation de deux voussoirs symétrique .....	26
<b>Fig I-29</b> : les phases de bétonnage d'un voussoir .....	27
<b>Fig II-1</b> : schéma d'une barre homogène de longueur L .....	30
<b>Fig II-2</b> : donnant les coefficients directeurs .....	32
<b>Fig II-3</b> : quadrillage de variation de température en fonction de t et de z.....	37
<b>Fig II-4</b> : dimensionnement d'un voussoir à la clé.....	38
<b>Fig II-5</b> : variation de la $T_{moy}$ en fonction de la profondeur pour les quatre saisons .....	43

<b>Fig II-6:</b> la loi de variation de contrainte en fonction de la profondeur .....	45
<b>Fig III-1 :</b> les différentes sections dans un caisson.....	57
<b>Fig III-2 :</b> Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur..... (Partie gauche)	57
<b>Fig III-3 :</b> Diagramme de la contraint $\sigma_x$ suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur..... (Partie gauche)	57
<b>Fig III-4 :</b> Diagramme de la contraint $\sigma_y$ suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur .....	57
<b>Fig III-5 :</b> Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'âme .....	58
<b>Fig III-6:</b> Diagramme de la contraint $\sigma_x$ suivant l'épaisseur de l'âme .....	58
<b>Fig III-7 :</b> Diagramme de la contraint $\sigma_y$ suivant l'épaisseur de l'âme .....	58
<b>Fig III-8 :</b> Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur (partie ... centrale)	58
<b>Fig III-9 :</b> Diagramme de la contrainte $\sigma_x$ suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur (partie centrale)	58
<b>Fig III-10 :</b> Diagramme de la contrainte $\sigma_y$ suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur (partie centrale)	58
<b>Fig III-11:</b> Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'hourdis inférieur (partie centrale)	59
<b>Fig III-12:</b> Diagramme de la contrainte $\sigma_x$ suivant l'épaisseur de l'hourdis inférieur (partie centrale)	59
<b>Fig III-13:</b> Diagramme de la contrainte $\sigma_y$ suivant l'épaisseur de l'hourdis inférieur (partie centrale)	59
<b>Fig IV-1:</b> position du point M à la côte z.....	61
<b>Fig V-1 :</b> schéma montrant le chemin de drainage dans la bicouche .....	66
<b>Fig V-2:</b> schéma de la pression interstitielle U en fonction de z et de t.....	71
<b>Fig V-3:</b> pression interstitielle en fonction de z et de t.....	72

## Liste des tableaux :

<b>Tableau II-1</b> : les variations de température en fonction de la profondeur $z$ et du temps $t$ : saison de printemps	40
<b>Tableau II-2</b> : les variations de température en fonction de la profondeur $z$ et du temps $t$ : saison d'été.	41
<b>Tableau II-3</b> : les variations de température en fonction de la profondeur $z$ et du temps $t$ : saison d'automne.	42
<b>Tableau II-4</b> : les variations de température en fonction de la profondeur $z$ et du temps $t$ : saison d'hiver.	43
<b>Tableau II-5</b> : Tmoy enveloppe des quatre saisons.....	44
<b>Tableau II-6</b> : déformation en fonction de la profondeur.....	44
<b>Tableau II-7</b> : contrainte en fonction de la profondeur.....	45
<b>Tableau II-8</b> : Variation de la profondeur en fonction de temps $t$ .....	47
<b>Tableau II-9</b> : vérification des résultats de $z=p(t)$ .....	48
<b>Tableau II-10</b> : la variation de la température en fonction de $z$ .....	48
<b>Tableau II-11</b> : vérification de $t(z)$ en fonction de $z$ .....	50
<b>Tableau V-1</b> : calcul de la pression interstitielle $U$ en fonction de $z$ et de $t$ .....	72

# introduction générale

## 1-Introduction générale

Les ouvrages d'arts en générale et les ponts en particulier, soit pendant leurs périodes de construction ou d'exploitation sont toujours sous l'effet des facteurs de variation de température

Tels que :

- Par étuvage
- Radiation solaire
- Température de l'atmosphère
- Etc....

Ces charges thermiques comme démontrent les recherches de la dernière décennie [28] influent sur la durée de vie et la fissuration des structures mixtes (acier-béton) et aussi sur les structures en béton armé et précontraint en général et en particulier sur les structures caissons. Ces surcharges thermiques d'habitude on ne les prend pas en considération et dans certains cas on utilise des méthodes approximatives qui ne reflètent guère la réalité de condition de conception, réalisations et exploitation de ces ouvrages.

Dans le travail actuel on étudie le travail et le comportement des ponts caissons dans un espace de température variable dans le temps  $t$  et l'espace (profondeur)  $z$ , c'est-à-dire l'étude de la variation de la température dans les différentes sections en profondeur, comme on étudie leurs influences sur l'état de contrainte et de déformation dans le plan ( $x$  o  $y$ ) par un model analytique qu'on estime plus proche a la réalité des comportements des ouvrages caissons dans ces conditions.

Le travail de recherche peut rencontrer pas mal de difficultés dans la détermination de l'état réel des comportements et d'influence thermique telles que :

- Détermination des champs de température dans les différentes sections hétérogènes d'une structure caisson
- Etude de la loi de variation des déformations et contraintes dus a cette variation et transfert thermique

Dans la pratique dans notre jour, on utilise trois mesures pour l'étude de ce problème en utilisant la théorie de L'académicien russe LOKYNOVA.B.C [0], qui est basée sur la résolution numérique, telles que : méthode des différences finies, éléments finis et même de volumes finis qui sont :

- Détermination de la variation et la loi de propagation thermique en profondeur en fonction de temps  $t / f(t) = z$
- Détermination de la variation de température  $T$  en fonction de la profondeur du caisson /  $g(z) = T$

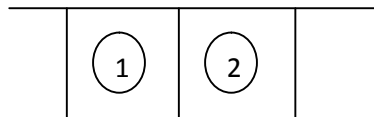
D'où on obtient la fonction ou la loi de variation suivante :  $T = g(z)$  o  $f(t)$  soit  $T = \ell(t, z)$

D'où on peut prédire que le travail actuel qui est basé sur la résolution isothermique c'est-à-dire détermination des contraintes et des déformations au niveau des différentes sections et points du voussoir a étudier en déterminant le champ thermique qui est très compliqué pour travailler dans un espace (o x y z) dans la théorie d'élasticité. Pour cela pour la résolution de tel problème on se base sur une résolution graphique qui est plus facile mais ne sera pas notre cas car elle est monotone et fastidieuse pour déterminer l'état de chaque section et point de la structure.

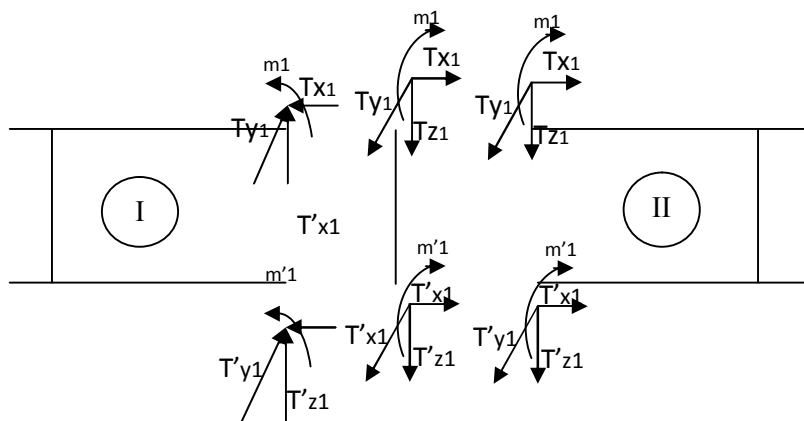
Pour être plus académique et pragmatique dans notre raisonnement, on est opté pour une méthode ou résolution qui est comme suivant :

1. Détermination de la répartition de la température dans le sens profondeur o z de la structure caisson et étudier les états de contraintes et de déformations pour cette répartition

2. Détermination des contraintes dans les différents poutres caissons de la structure, qui sont considérés comme des structures spatiales (o x y z)
3. Les contraintes obtenues dans les cas 1 et 2 s'additionnent .Pour la résolution du problème, on divise la poutre caisson en plusieurs poutres mono caissons et enfin on calcul chaque caisson d'après la loi thermoplastique, en utilisons la méthode des différences finies et analytique. shama de calcul pris en considération dans notre travail actuel est illustré dans la figure ci-dessous



**Fig a** : Poutre bi-caisson



**Fig b** : Schémas de décomposition d'une structure caisson

Ce schéma décompose la structure caisson en plusieurs éléments caissons (mono-caisson) et détermine les conditions aux limites pour étudier et résoudre le problème actuel

Les principales conditions de recherche actuelle :

-On applique la non liaison de la théorie quasi- statique de contraintes thermiques (c'est-à-dire pas de liaison entre les différentes contraintes thermiques dans les différentes directions). On détermine la température ou transfert de chaleur dans chaque section sans faire tenir compte et sans faire liaison entre l'énergie mécanique et thermique des solides à étudier

-On ne prend pas en considération de l'influence de la rhéologie du béton sur la répartition des contraintes thermiques. On considère que la déformation est infiniment petite pour toutes sections et le solide et le matériau toujours considérés comme isotrope et élastique

-Module d'élasticité et de déformation instantané du béton et considéré le même pour la traction et la compression

-Le coefficient de conductibilité et de densité ne dépendent pas de la température

- On considère que la température ne varie pas dans le sens longitudinal (o x) et dans le sens transversal (o y)

-On a considéré que toute la section transversale peut être décomposée en plusieurs éléments plaques tel que :  $3\delta < b$

Ou  $\delta$  : l'épaisseur de l'élément plaque

$b$  : largeur de l'élément plaque

## **2- Problématique**

Le calcul thermique des ouvrages d'arts (structure) en général et les ponts caisson en particulier ne sont pas calculer à notre jour sous l'effet réel de la température, d'où on considère la répartition de transfert de chaleur dans les différentes sections de la structure comme une loi linéaire et même dans la majorité des cas on prend la température comme un scalaire ou un gradient thermique qui n'est pas le cas réel et par conséquent la majorité des structures s'endommagent sur l'effet des contraintes et des déformations thermiques ,voir : joints de chaussées, appareil d'appuis etc. qui n'arrivent a absorber les effets thermiques telles que la dilatation ou la distorsion.

Pour cette raison notre travail actuel consiste a déterminer un model théorique de transfert de chaleur et calcul de contraintes et de déformation dues a cette dernière, on se basant sur des données probabilistes qui se coïncident plus ou moins avec non condition techniques et climatiques pou mètre nos ouvrages a l'abris de dégradation thermique

## **3- Méthodologie**

Pour l'étude et la résolution du problème exposé dans la problématique, on est opté à la méthodologie suivante :

- Introduction générale
- Chapitre 1 : généralités sur les ponts en encorbellement
- Chapitre 2 : la loi de propagation de chaleur dans un caisson
- Chapitre 3 : résolution analytique de la propagation de la chaleur dans un caisson
- Chapitre 4 : étude analogique du transfert de chaleur et de consolidation
- Chapitre 5 : résolution du model de transfert de chaleur par analogie de consolidation par la méthode des différences finies.

# Chapitre I

Généralités sur les ponts en encorbellement

## I-1 Introduction :

On a entamé l'étude du voussoir et les différents étapes d'un ouvrage en encorbellement en général et la répartition des câbles au niveau de la partie tendue supérieure et les câbles de continuité qui se trouvent au niveau de l'hourdis inférieur, pour voir leurs influences sur la loi de répartition de la chaleur et sa vitesse de propagation en profondeur dans un voussoir à section transversal constante au variable

## I-2 Généralités:

❖ Les ponts en béton précontraint par encorbellement sont développés par les allemands, il y aura bientôt 1/2 siècle (les années 50), puis par de nombreux pays au premier rang desquels la France.

## I-3 Avantages de type de pont:

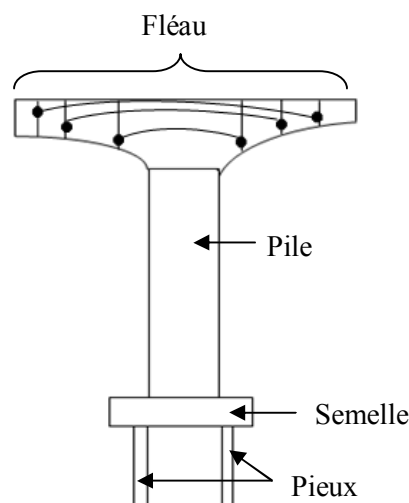
**I-3-1** Il s'accommode très bien des piles de grande hauteur

**I-3-2** Permet la préfabrication des voussoirs lorsque ceux-ci sont en nombre important

**I-3-3** La rapidité d'exécution permise par ce procédé avec des voussoirs coulés en place.

(En réalise normalement une paire de voussoir par semaine et par fléau

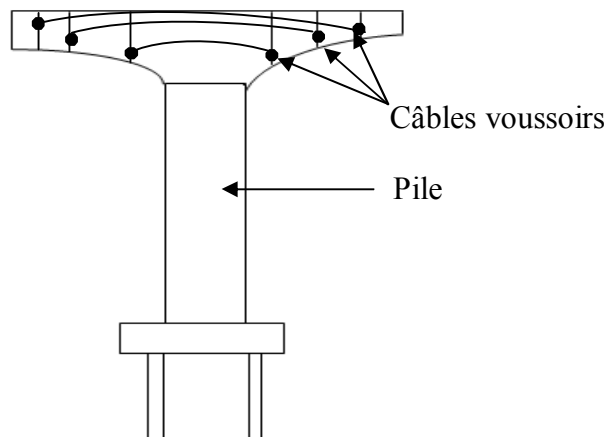
(Voir **fig I- 1**)



**Fig I-1:** schéma d'exécution d'une paire de voussoir par fléau.

(Si l'on préfabrique le tablier, on réalise 3 à 4 voussoirs par semaine et par fléau).

- 1- Son prix de revient a permis de concurrencer avec succès la construction métallique
- En réalise de grandes portées (jusqu'à 150m à 300m)



**Fig I-2** : l'assurance de la stabilité de la bi-console par des câbles de précontrainte

On assure la stabilité de la console ainsi constituée à chaque étape de la construction par des câbles de précontrainte de longueur croissante, disposés dans la membrure supérieure (voussoir): partie tendue (voir schémas **fig I-2**).

Les voussoirs peuvent être bétonnés en place dans des coffrages mobiles où être préfabriqués, transportés et mis en place (plusieurs ouvrages rapprochés, est le cas le plus fréquent en Algérie, car nous permet de beaucoup du temps et nous facilite la tâche pour la mise en place même dans les périodes de mauvais temps et nous assure une bonne qualité de construction, car on maîtrise facilement la qualité de béton et sa résistance demandée pour ce genre de construction (structure caisson)

### I-4 Historique:

Les premiers ponts en encorbellement furent en effet édifiés en bois (voir schémas figure 3)

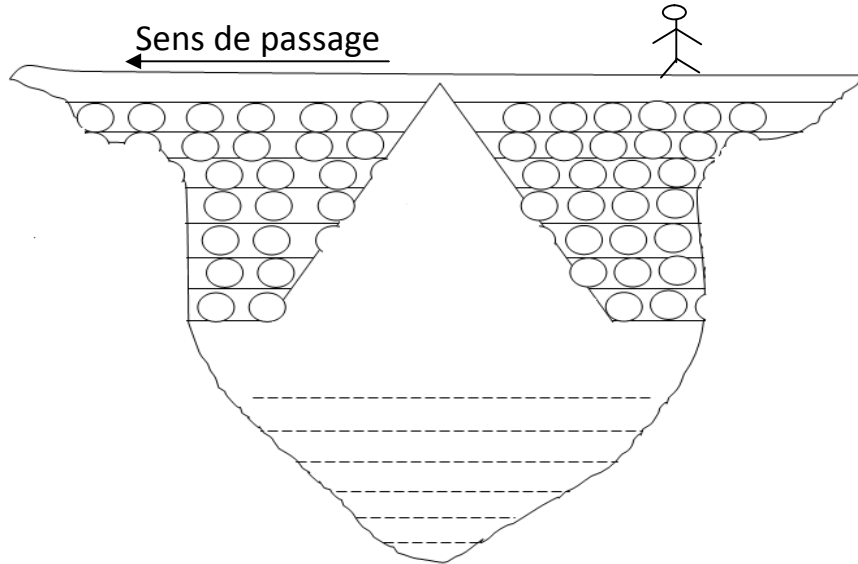


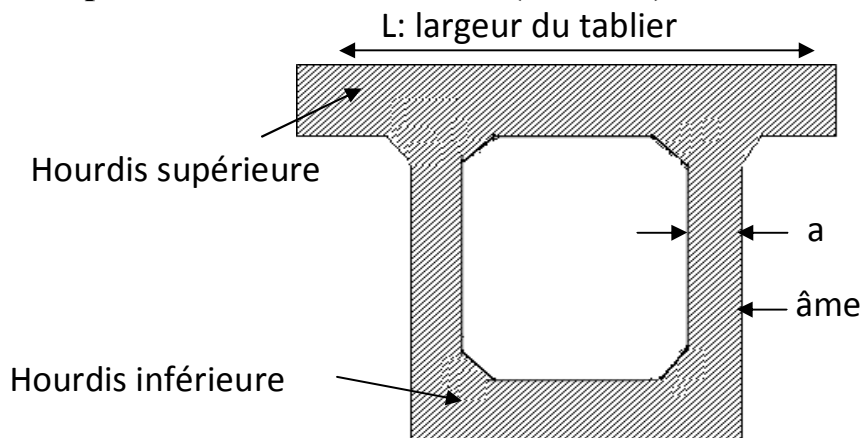
Fig I- 3 : historique des ponts en encorbellement

#### I-4-1 Exemple réel:

Pont en bois de 550 m de portée établi en 1811 par l'ingénieur américain THOMAS Pope (arc surbaissé encastré sur deux culées en maçonnerie).

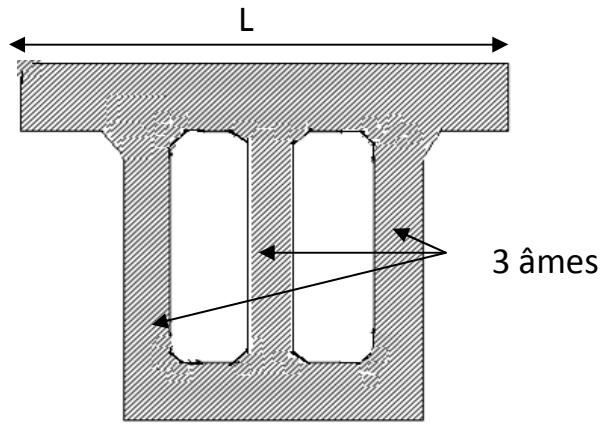
### I-5 Conception et dimensionnement des tabliers

#### I-5-1 Coupe transversale du caisson (voussoir):



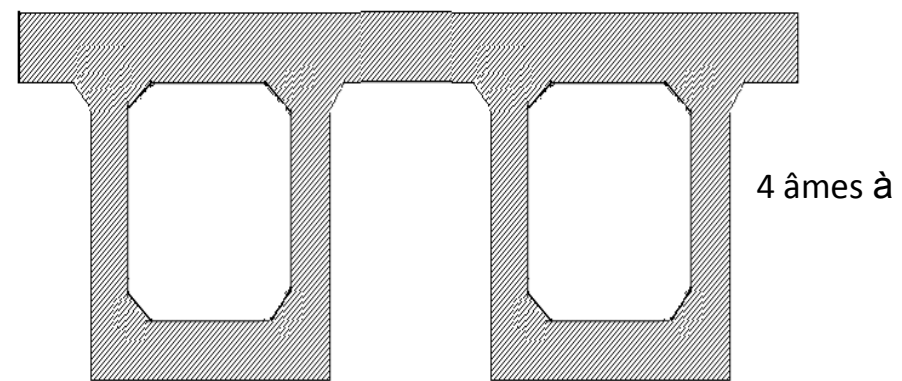
Pour  $L \leq 13m$

Fig I-4 : schémas d'un voussoir monocellulaire



Pour  $13m \leq l \leq 18m$

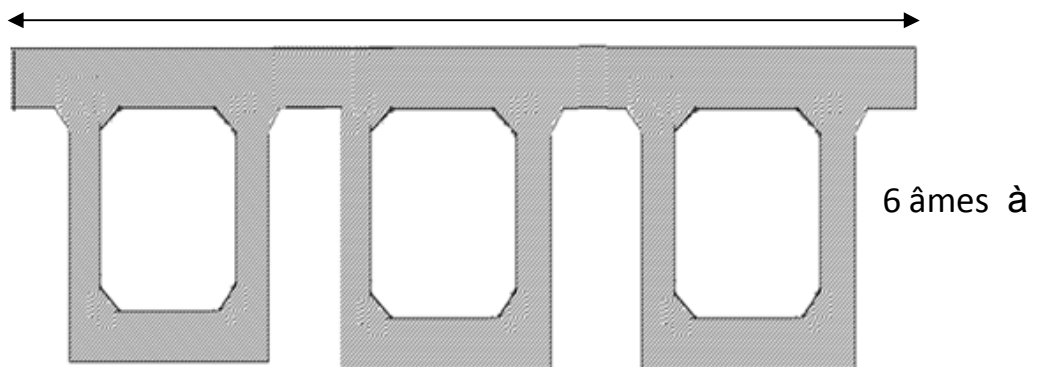
**Fig I-5:** schémas d'un voussoir bicellulaires adjacents



Pour  $18m \leq l \leq 25m$

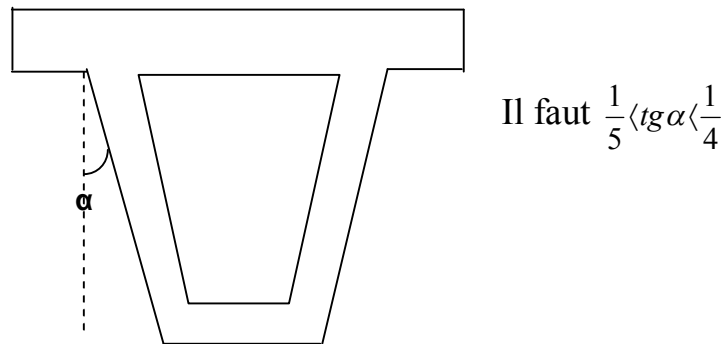
**Fig I-6 :** schémas d'un voussoir bicellulaires séparés

Si  $l \geq 25m$



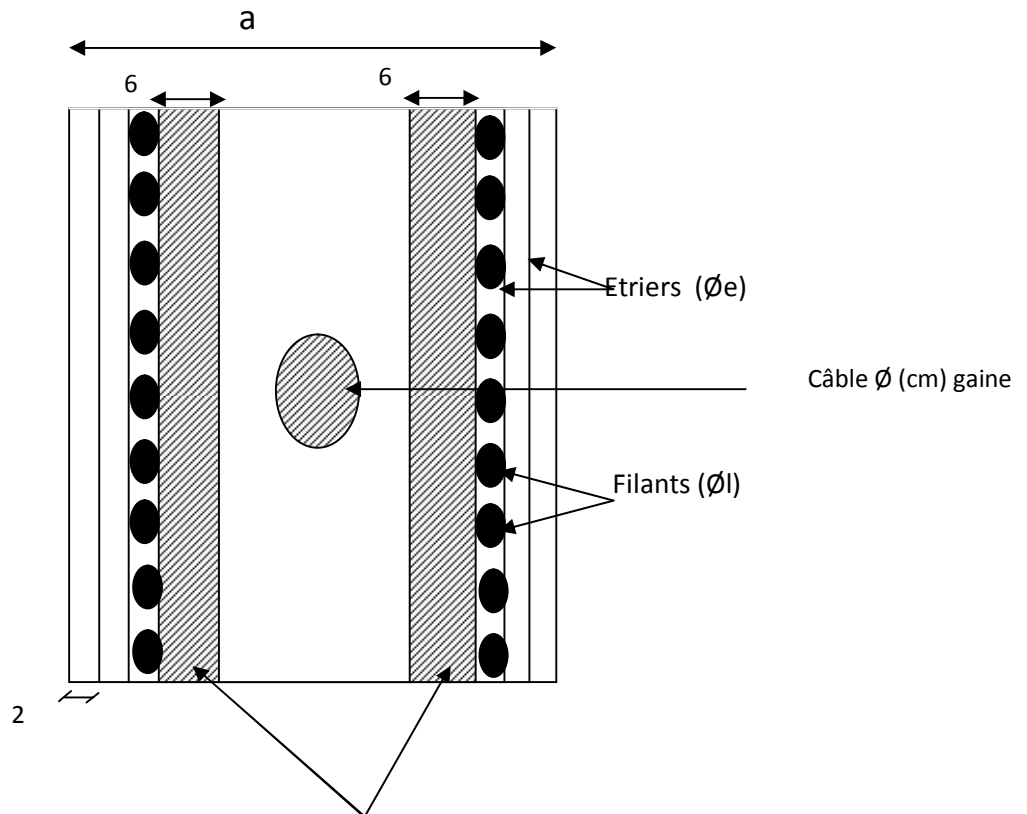
**Fig I-7 :** schémas d'un voussoir tricellulaires séparés

**I-5-2 Cas (âmes inclinés)**



**Fig I-8** : schémas d'un voussoir à âmes inclinés

**I-5-3 épaisseur "a" de l'âme**



**Fig I-9** : schémas de cheminer de bétonnage

Il faut que  $a \geq \Phi + 2(2 + \Phi_e + \Phi_l + 6)$        $\Phi$  : diamètre de la gaine      (I-1)

Exp: - un câble:  $12\Phi 8 \rightarrow \Phi = 8\text{cm}$

(Un câble : de 12 fils de 8mm)

- un câble 12T13

(12torons de 1/2(demi-pouce), soit 12,4mm)

\*étrier en  $\Phi 10$

Et des filants en  $\Phi 8$

Alors  $a \geq 8 + 2(2 + 0,8 + 1 + 6)$

$$a \geq 27,6cm$$

Soit  $a = 28cm$

Pour des âmes à grande hauteur: la valeur précédente est insuffisante

**Guyon propose:** une formule empirique, tel que :

$$a \geq \frac{h}{36} + 5 + \Phi(cm) \quad (I-2)$$

$h$  : Hauteur de l'âme

Exp:  $h = 5m$ , des câbles 12 $\Phi 8$ ( $\Phi = 8cm$ )

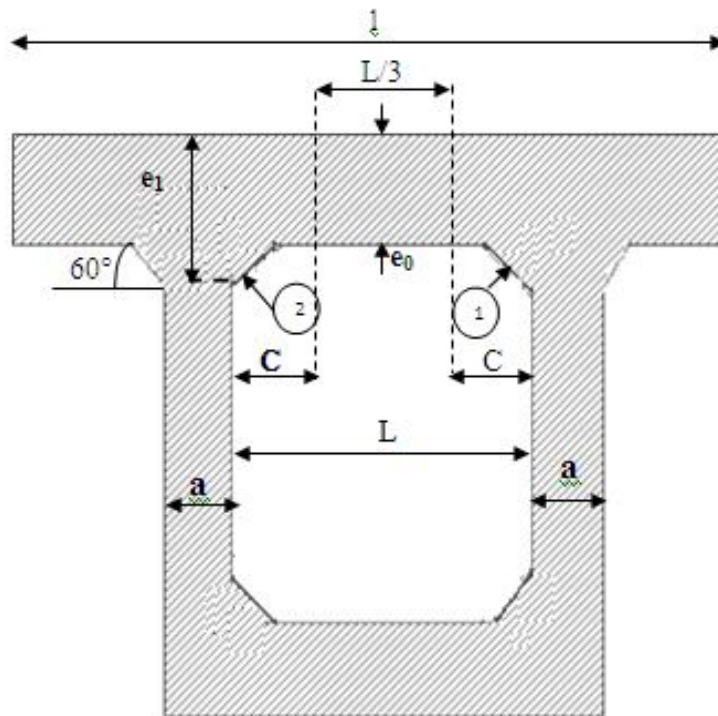
$$a \geq \frac{500}{36} + 5 + \Phi$$

$$a \geq 26,88 \quad \text{Soit } a \approx 27m$$

Si  $h \geq 6m$  et  $< 7m$   $a \geq 30cm$

Si  $h > 7m$ ,  $a \geq \frac{h}{22} + 8 + \Phi(cm)$

**I-5-4 épaisseur (e) du hourdis supérieur**



**Fig I-10** : schémas dimensionnement d'un voussoir monocellulaire

En tenant compte de transfert de chaleur en profondeur

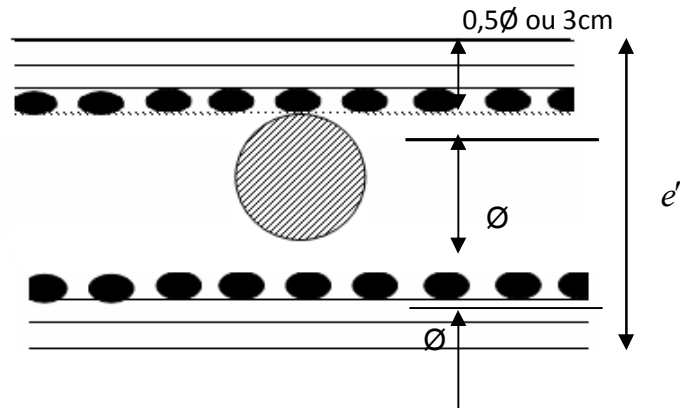
$$C \approx \frac{2L}{3} \left( 1 - \frac{e_0}{e_1} \right) \tag{I-3}$$

**Tableau I-1**: lois de variation de l'épaisseur de l'hourdis supérieur en fonction de la largeur de la cellule de voussoir

L(m)	2,5	3	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
e <sub>0</sub> (cm)	16	18	20	22			

Pour  $L < 4,5m$

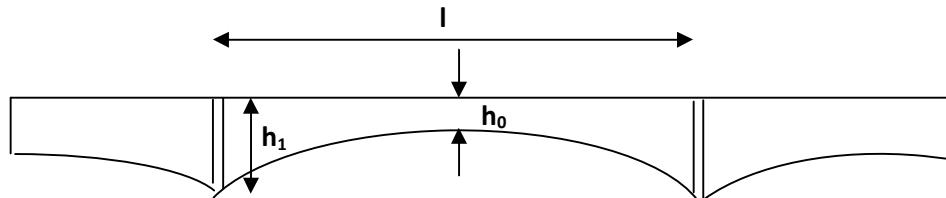
$$e_0 = \left( \frac{L}{36} + 10 \right) cm \tag{I-4}$$

**I-5-5 Hourdis inférieur:****Épaisseur ( $e'$ ) du hourdis inférieur:****Fig I-11** : schémas d'épaisseur  $e'$  de l'hourdis inférieur

$$e' \geq \phi + \phi + 0,5\phi = 2,5\phi \quad (I-5)$$

Si aucun câble n'est disposé dans le hourdis inférieur:

$$e' \approx 12\text{cm}$$

**Fig I-12** : schémas donnant la hauteur du voussoir sur pile et à la clé

\* Si l'intrados est parabolique

$$\frac{1}{20} \leq \frac{h_1}{l} \leq \frac{1}{16} \quad (I-6)$$

$$\text{Economique } \frac{h_1}{l} = \frac{1}{17}$$

$h_0$  : peut être théoriquement nulle à mi-travée

(Consoles articulées)

Donc il faut prévoir  $h_0$  de 1m à 1,4m

Si le tablier est continu  $h_0$  : minimale est de 1,6m

$$\text{En pratique } \frac{l}{60} \leq h_0 \leq \frac{l}{30} \quad (I-7)$$

### I.5.6 Predimensionnement des voussoirs:

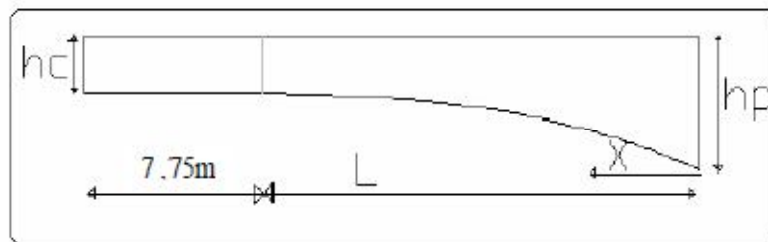
#### La variation de la hauteur $h(x)$ :

##### I.5.6.1: au niveau de la travée de rive

L'intrados suit une variation parabolique (partie proche de la pile), puis une partie du tablier (les 7m dernier coté de culée) a une hauteur constante égale à  $h_c$

$$0 \leq x \leq l : \quad h(x) = h_p - 2 \times (h_p - h_c) \times \left(\frac{x}{l}\right) + (h_p - h_c) \times \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (I-8)$$

$$l \leq x \leq l + 7,75 : \quad h(x) = h_c \quad (I-9)$$



**Fig I-13:** La variation de la hauteur du voussoir à la travée de rive

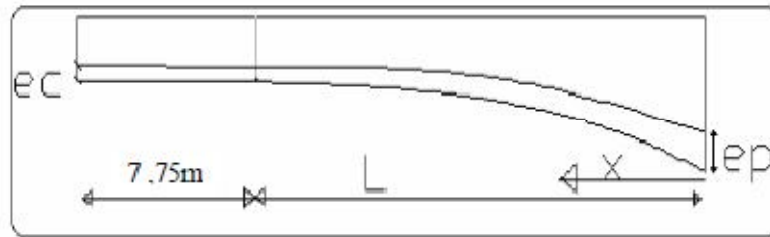
- **L'épaisseur du hourdis inférieur  $e(x)$ :**

Elle suit une loi de variation parabolique analogue à celle de  $h(x)$

$$0 \leq x \leq l : \quad e(x) = e_p - 2 \times (e_p - e_c) \times \left(\frac{x}{l}\right) + (e_p - e_c) \times \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$l \leq x \leq l + 7,75 :$

$$e(x) = e_c$$



**Fig I-14 :** La variation d'épaisseur du hourdis inférieur à la travée de rive

**La variation de l'inertie:**

La loi de variation d'inertie est en fonction de la hauteur qu'a été retenue:

$$I = k \times h^{\frac{5}{2}} \tag{I - 10}$$

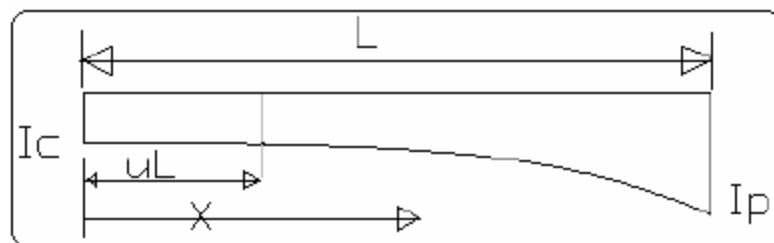
Elle est comprise entre la loi limite  $I = k \times h^2$  et la loi de variation des section rectangulaires  $I = k \times h^3$ . hypothèse des tables de GULDAN, elle correspond bien aux sections en T et en caisson.

$$0 \leq x \leq l : I(x) = I_c \tag{I - 11}$$

$$ul \leq x \leq l : I(x) = I_c \left[ 1 + k \left( \frac{x-ul}{l-ul} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}} \tag{I - 12}$$

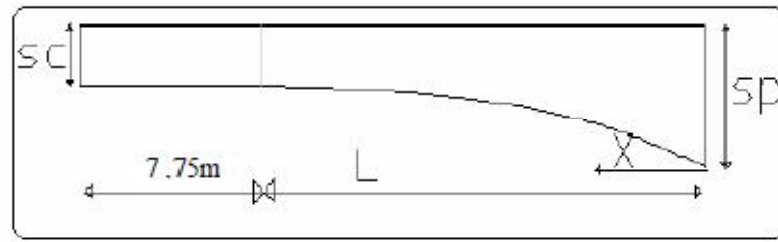
Avec:

$$k = \left( \frac{I_p}{I_c} \right)^{0,4} - 1$$



**Fig I-15:** La variation de l'inertie

- **La variation de la section:**



**Fig I-16:** La variation de la section

$$l \leq x \leq l + 7,75m : s(x) = s_c \quad (I-13)$$

$$0 \leq x \leq l \quad s(x) = s_p - 2(s_p - s_c)\left(\frac{x}{L}\right) + (s_p - s_c)\left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad (I-14)$$

$s_p$  : La section au niveau de pile.

$s_c$  : La section au niveau de culée.

- **la variation du centre de gravité de la section du voussoir:**

$$Y_G = Y_{Gc} \left[ 1 + \left( \frac{Y_{Gp}}{Y_{Gc}} - 1 \right) \times \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (I-15)$$

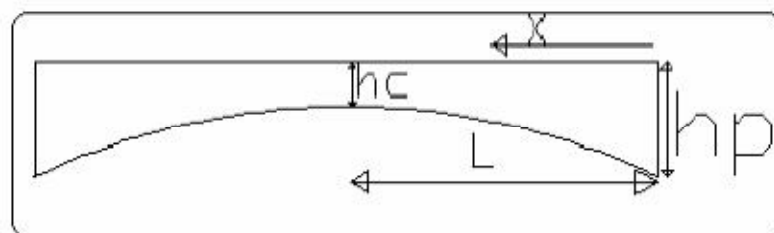
$Y_{Gp}$  : Centre de gravité du voussoir sur culée.

$Y_{Gc}$  : Centre de gravité du voussoir sur culée.

### I.5.6.2 au niveau de la travée intermédiaire:

\* la variation de la hauteur  $h(x)$

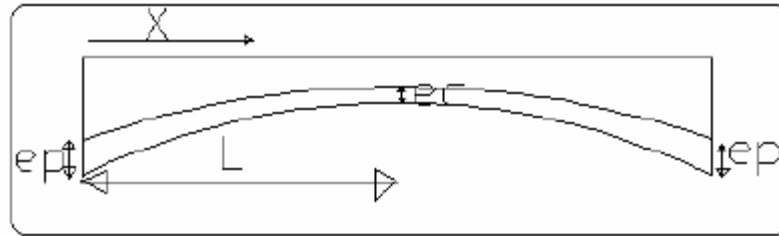
$$0 \leq x \leq l : h(x) = h_p - 2 \times (h_p - h_c) \times \left( \frac{x}{l} \right) + (h_p - h_c) \left( \frac{x}{l} \right)^2 \quad (I-16)$$



**Fig I-17:** La variation de la hauteur sur la travée intermédiaire

\* **l'épaisseur du hourdis inférieur**  $e(x)$

$$0 \leq x \leq l: \quad e(x) = e_p - 2(e_p - e_c) \times \left(\frac{x}{l}\right) + (e_p - e_c) \times \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (I-17)$$



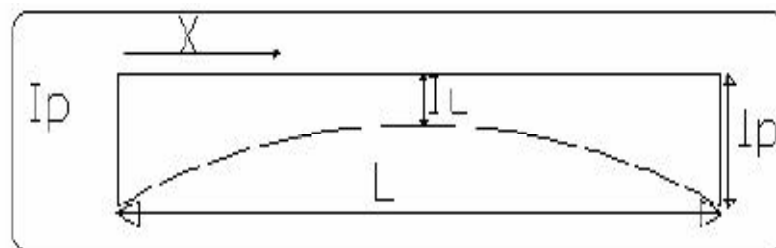
**Fig I-18:** La variation d'épaisseur du hourdis inférieur de la travée intermédiaire

• **la variation d'inertie:**

La loi de variation de l'inertie est comme suite:

$$0 < x < l: \quad I(x) = I_c \left[ 1 + K \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}} \quad (I-18)$$

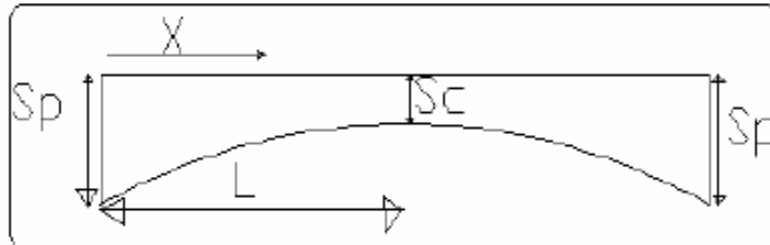
Avec:  $K = \left( \frac{I_p}{I_c} \right)^{0,4} - 1$



**Fig I-19:** La variation d'inertie sur la travée intermédiaire

- **La variation de section:**

$$0 \leq x \leq L : s(x) = s_p - 2(s_p - s_c)\left(\frac{x}{L}\right) + (s_p - s_c)\left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad (I-19)$$



**Fig I-20 :** La variation de section sur la travée intermédiaire  
 Qui tient compte de variation de contrainte dans le plan (xoy) →

- **la variation du centre de gravité:**

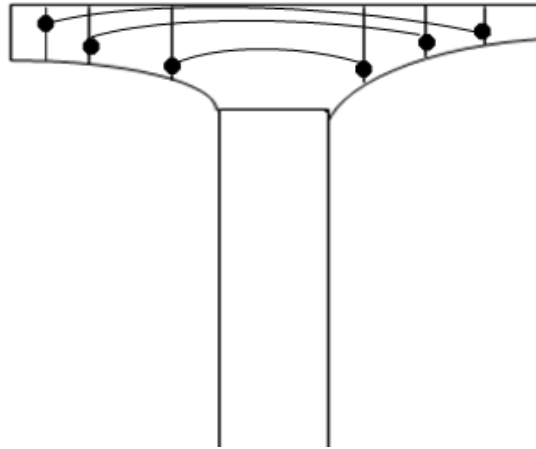
$$0 \leq x \leq l : Y_G(x) = Y_{Gp} - 2(Y_{Gp} - Y_{Gc})\left(\frac{x}{l}\right) + (Y_{Gp} - Y_{Gc})\left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (I-20)$$

### I-5-7 Avantages des tabliers à hauteur variables:

- Economie des matériaux
- la hauteur constante est plus commode pour les passages des canalisations des services publics (eau, gaz, etc.....)

## I-6 La précontrainte dans ce type de pont :

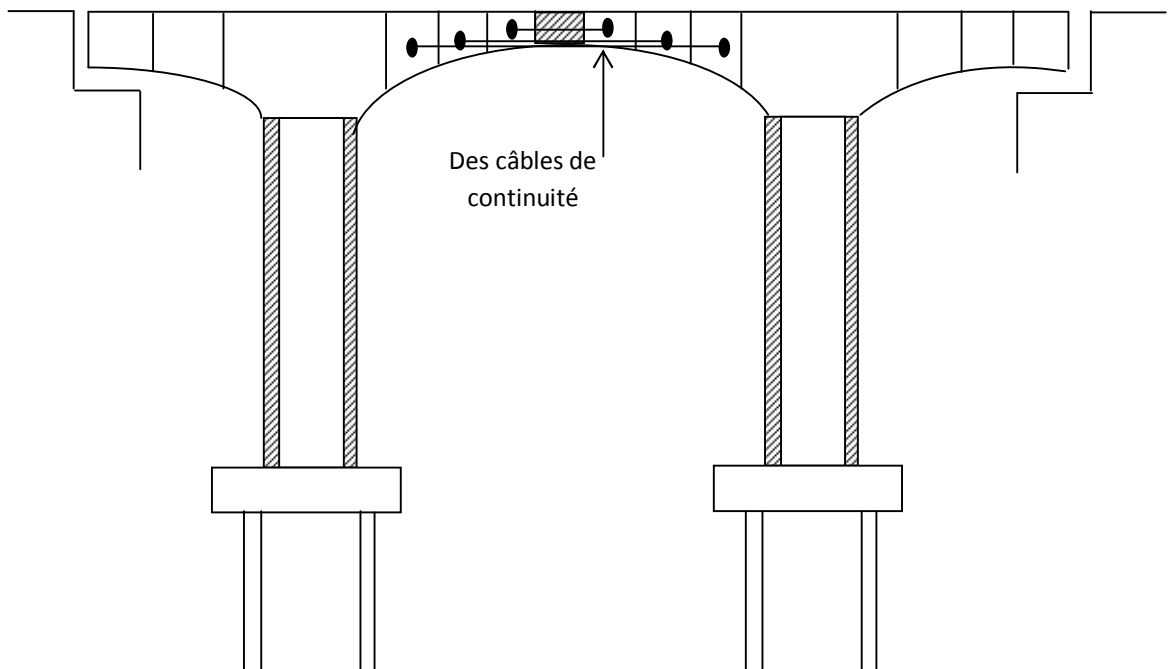
### I-6-1 Pendant la construction:



**Fig I-21** : les câbles de précontrainte sur la bi-console

### I-6-2 Après service

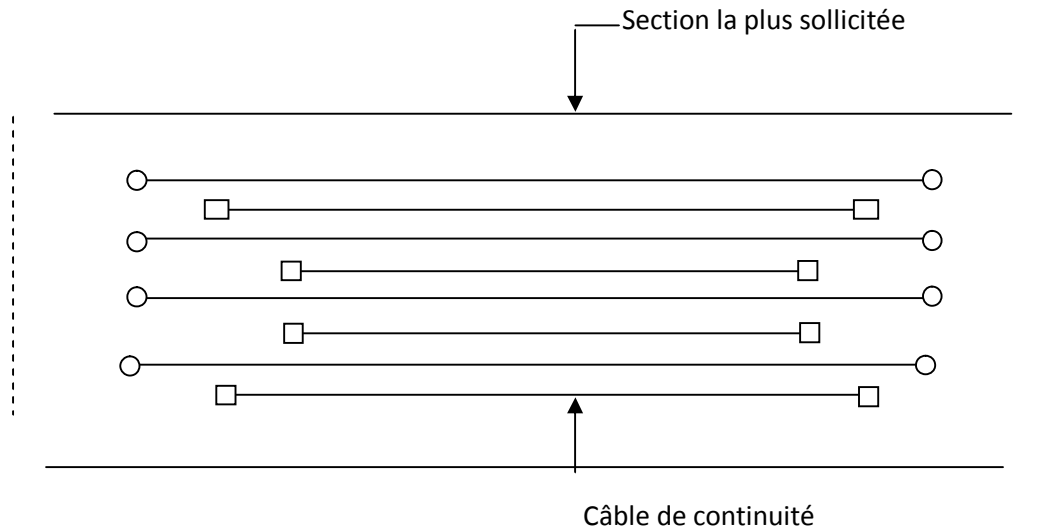
#### I-6-2-1 après service en profil en long



**Fig I-22** : les câbles de précontrainte de continuité sur la travée intermédiaire

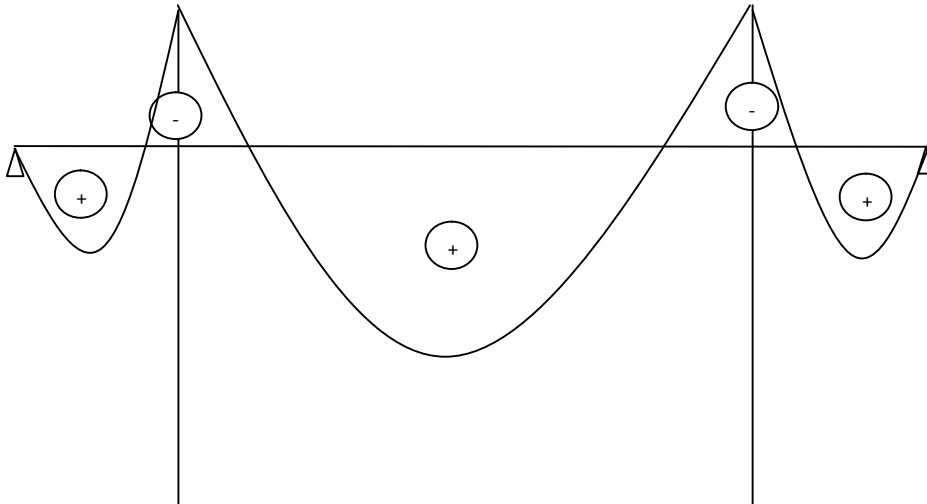
Qui régularisent les états de contraintes et déformations différées en général et de la variation de température on particulier

### I-6-2-2 En plan (après service)



**Fig I-23** : vue en plan des câbles de continuité sur la travée intermédiaire d'un pont caisson

- Partie tendue c'est la partie inférieure (Hourdis inférieur).



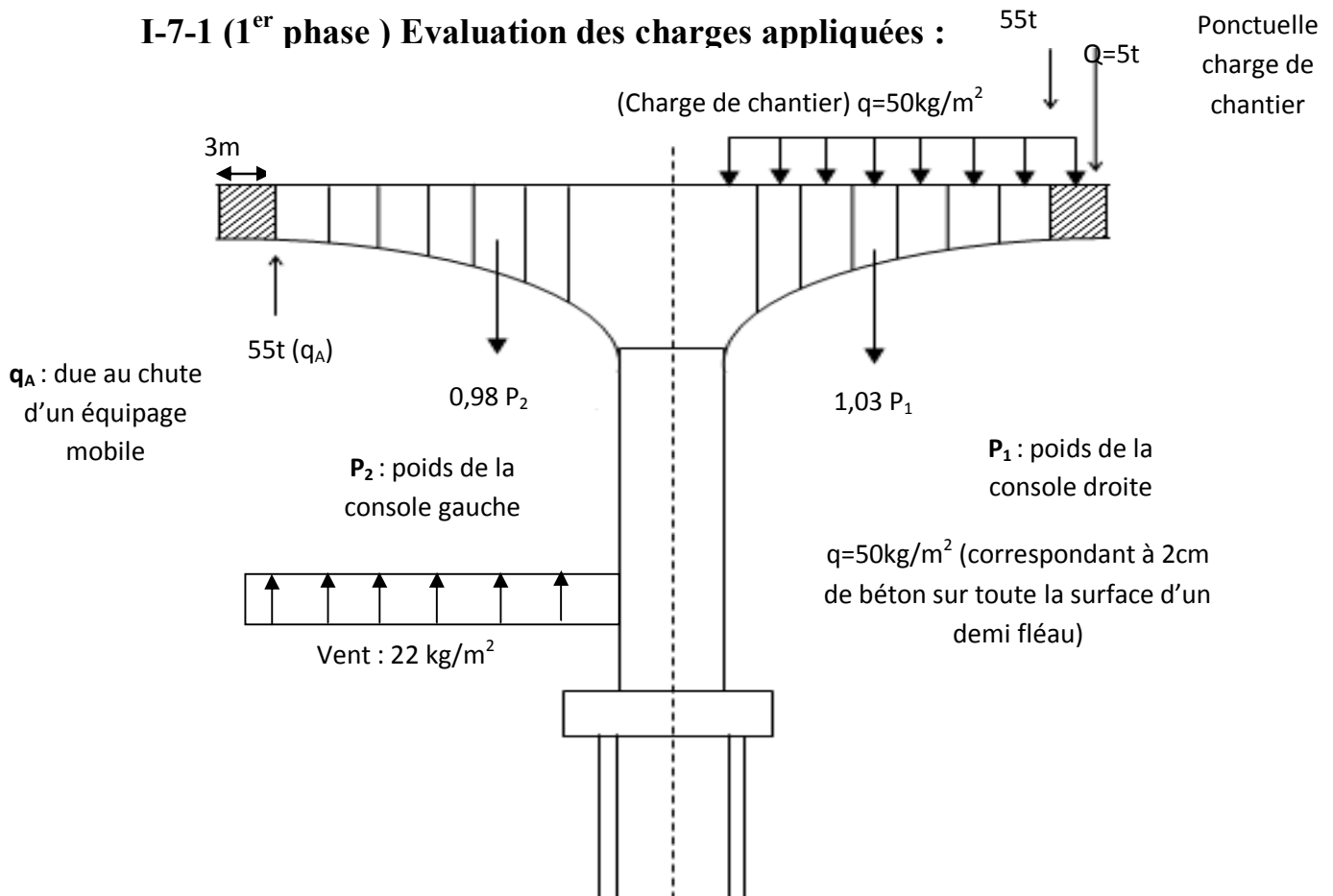
**Fig I-24** : diagramme de moment fléchissant sur les deux travées de rive et la travée intermédiaire d'un pont en encorbellement successifs

### I-6-3 Pour le relevage de la Précontrainte de continuité de rive :

Les câbles de rive sont généralement de 80% à 70% de la précontrainte centrale.

### I-7 Stabilité des tabliers pendant la construction:

#### I-7-1 (1<sup>er</sup> phase ) Evaluation des charges appliquées :



**Fig I-25 :** les sollicitations exercées sur le fléau pendant la construction

Sans tenir compte du transfert de chaleur

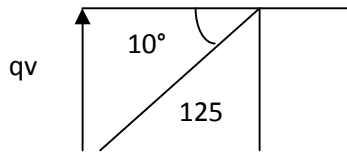
Pour une largeur  $l$ ,  $q=50 \cdot 10^{-3} \text{ t/ml}$

Vent : règlement français évalue son action sur une surface frappée normalement à :

- $100\text{kg/m}^2$  si la phase de construction  $t < 1$  mois
- $125\text{ kg/m}^2$  si la phase de construction  $t > 1$  mois

Vent ascendant (angle  $\approx 10^\circ$  /horizontal  $t > 1$  mois)

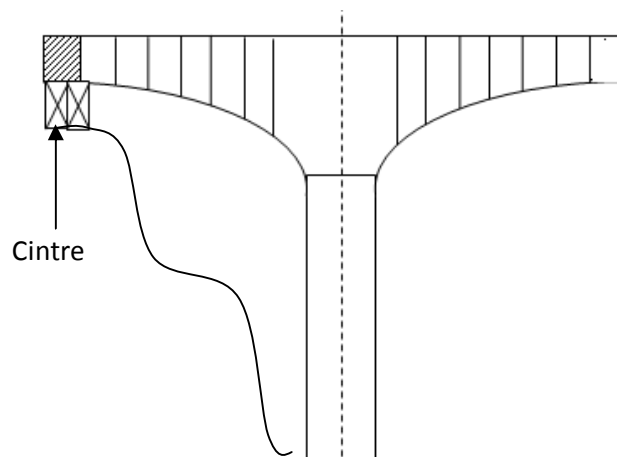
$$\rightarrow q \text{ verticale} = 125 \sin 10^\circ \approx 22 \text{ kg/m}^2$$



### I-7-2 Etude de la deuxième phase :

L'exécution de clavage de rive :

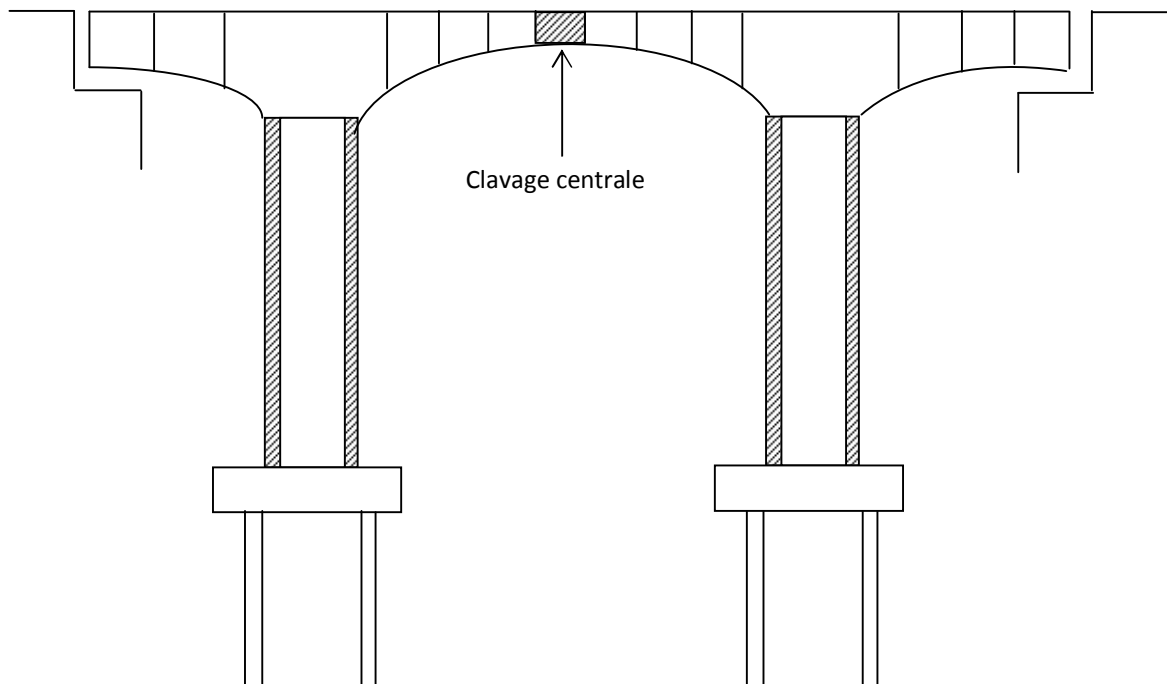
On effectue les deux clavage de rives sur culée



**Fig I-26** : clavage sur culée sur cintre

### 1- 7-3 Etude de la troisième phase:

#### L'exécution de clavage centrale:



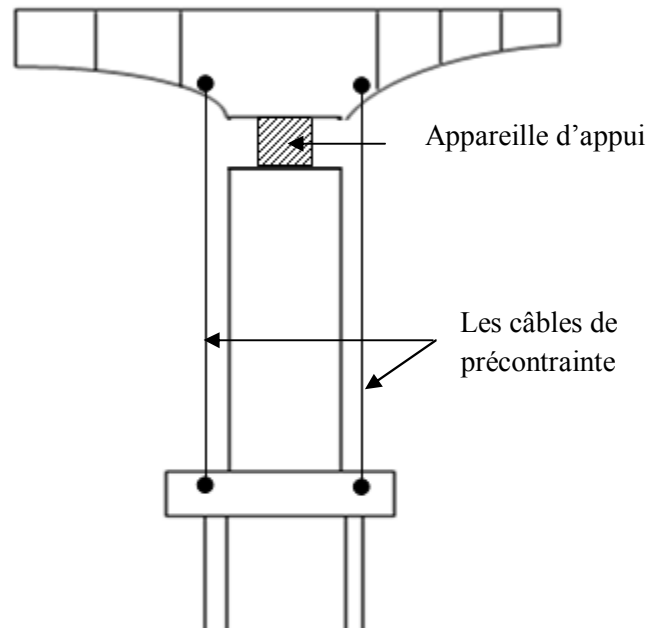
**Fig I-27** : schéma de clavage central

En tenant compte des déformations dues au transfert de chaleur

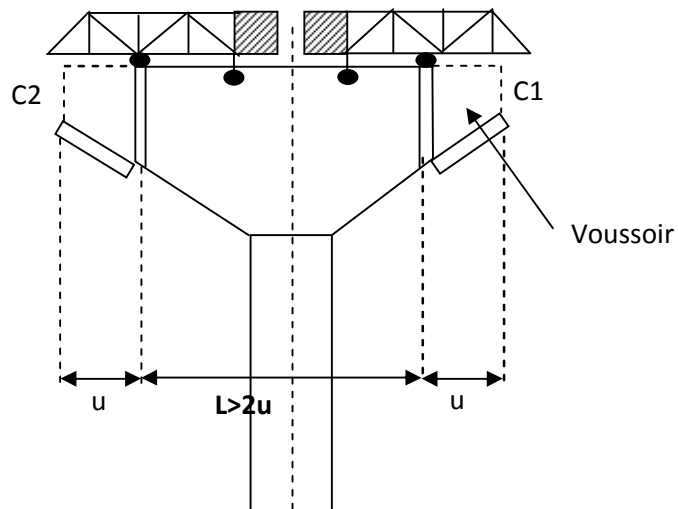
### I-8 Cycle de construction des voussoirs :

#### I-8-1 Voussoirs sur pile :

Est généralement bétonné sur un échafaudage afin de servir de plate forme de et de montage et de base de départ aux équipages mobiles. Dans les cas où les fléaux sont des grandes portées et pour éviter le renversement du fléau on réalise une stabilité par des câbles de précontrainte qui lient le voussoir sur pile et la semelle. Ce procédé se fait dans le cas où le VCP est simplement appuyé sur la pile, mais une fois le schéma statique de l'ouvrage est bouclé, on les cisaille. Voir (fig I-27bis).



**Fig I-27bis** : schéma des câbles des précontraintes extérieures qui stabilisent le voussoir sur pile avec la semelle

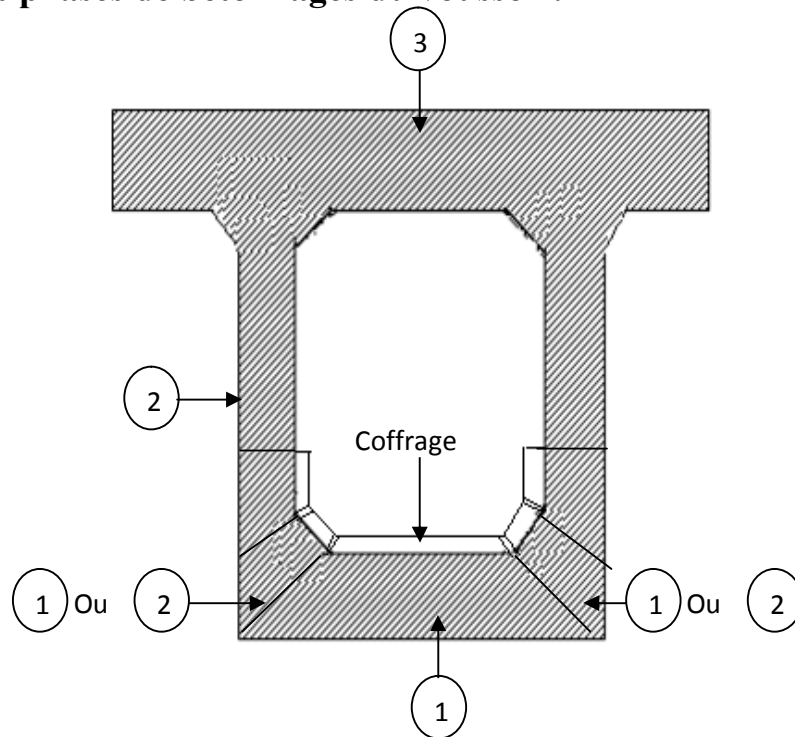


**Fig I-28** : schéma de coffrage pour la réalisation de deux voussoirs symétrique

$$7\text{m} \leq l \leq 10\text{m}$$

**Voussoir courants :  $3m \leq l \leq 4m$**

### I-8-2 Les phases de bétonnages du voussoir:



**Fig I-29** : les phases de bétonnage d'un voussoir

Qui tient compte de l'état de contraintes due a la chaleur

La cadence normale de construction permet, avec un équipage mobile traditionnel de réaliser un cycle.

Complet en une semaine (6 jours)

**Soient:**

- Une journée pour la mise en tension du voussoir précédemment bétonné, le décoffrage et l'avancement de l'équipage
- Deux journées pour la mise en place des armatures et des câbles

Trois journées pour la prise et le durcissement du béton ( $R_{cj} > 170\text{bars}$ ) + 6 jour de vendredi **soit**: (7 jours).

**I-9 Conclusion:**

Le principal avantage de la construction par encorbellement est la suppression des cintres et échafaudages libérant ainsi l'espace situé au dessous de l'ouvrage, ce procédé est donc particulièrement adapté aux conditions locales suivantes:

- Ouvrage comptant des piles très hautes et franchissant des vallées larges et profondes (cintre onéreux)
- Rivières à crues violentes et soudaine (cintre dangereux).
- Nécessité de dégager sur la voie franchie un gabarit de circulation ou de navigation pendant la circulation (cintre gênant).

La technique de l'encorbellement présente également d'autres avantages:

- Réduction et meilleur utilisation des coffrages, limités à la longueur d'un voussoir.
- augmentation du rendement de la main d'œuvre, dû à la mécanisation des tâches à l'intérieur d'un cycle répétitif.
- Souplesse d'exécution liée à la possibilité d'accélérer la construction en multipliant le nombre de bases de départ.
- Rapidité de construction dans le cas d'ouvrages à voussoirs préfabriqués dont la vitesse d'avancement atteint une dizaine de mètre de tablier par jour.

# Chapitre II

La loi de propagation de la chaleur dans un  
caisson

## II-1 Introduction :

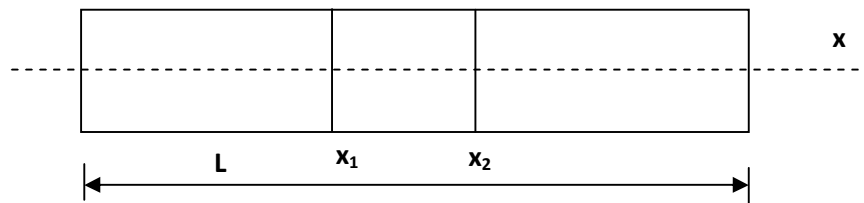
Le travail de ce chapitre consiste à déterminer une loi de répartition de chaleur dans un caisson en général et en profondeur en particulier pour évaluer réellement les différents efforts qui peuvent être lieu au niveau des différentes sections de jonction telle que les deux hourdis supérieur et inférieur les âmes qui sont très sensibles au cisaillement, due à la variation du gradient thermique.

Pour cette raison on est censé de déterminer une loi mathématique de propagation thermique qui est basée sur des données numériques.

## II-2 Equation de la propagation de la chaleur dans une barre

Enoncé du problème aux limites.

Soit une barre homogène de longueur  $l$



**Fig II-1** : schéma d'une barre homogène de longueur  $L$

Soit  $T(x,t)$  la température dans la section de la barre d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ .

La quantité de chaleur pénétrant par la section d'abscisse  $x$  au cours d'une intervalle de temps unité est :

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S \left( q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right); \quad [24] \quad (II-1) \quad \Delta Q:$$

la quantité de chaleur passant par  $S$  au cours de  $\Delta t$ .

$K$  : Coefficient de conduction thermique:

$$(x_2 - x_1 = \Delta x)$$

-quantité de chaleur passant par la section d'abscisse  $x_1$  pendant  $\Delta t$ . Sera:

$$\Delta Q_1 = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} \cdot S \cdot \Delta t \quad (II - 2)$$

De même:

$$\Delta Q_2 = -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_2} \cdot S \cdot \Delta t \quad (II - 3)$$

L'apport de:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[ -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} \cdot S \cdot \Delta t \right] - \left[ -K \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_2} \cdot S \cdot \Delta t \right] \approx K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t \quad (II - 4)$$

Nous avons appliqué le théorème de Lagrange à la différence [25]

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_2} \quad f \text{ Continue et dérivable sur } [a, b] \text{ alors } \exists c \in [a, b] \text{ tel que:}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (II - 5)$$

Donc  $\frac{\partial T}{\partial x}$  : continue et dérivable sur  $[x_1; x_2]$  ; donc  $\exists x \in [x_1, x_2]$  tel que:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_2} = (x_2 - x_1) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (II - 6)$$

Cet apport de chaleur au cours du temps  $\Delta t$  est dépensé pour élever la température de la barre de la quantité  $\Delta T$ . [26,27]

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 - \Delta Q_2 &= C\rho \cdot S \cdot \Delta T \text{ ou} \\ \Delta Q_1 - \Delta Q_2 &\approx C\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \\ \text{avec } \Delta T &= \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \end{aligned} \quad (II - 7)$$

Ou  $C$  : la capacité calorifique de la barre.

$\rho$  : Masse volumique de la barre.

$\rho \cdot \Delta x \cdot S$  : masse de l'élément de la barre.

Alors (II-4)  $\equiv$  (II-7)  $\Rightarrow K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \cdot S \cdot \Delta t = C\rho \Delta x \cdot S \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \Delta t$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{C\rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  ; désignons par :  $\frac{K}{C\rho} = a^2$  : diffusité

Alors  $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  (II - 8)

Equation de la chaleur dans une barre homogène.

Pour que la solution de l'équation (II-8) soit entièrement déterminée, la fonction  $T(x,t)$  doit vérifier la condition aux limites:

$T(x,0) = \varphi(x)$  .....condition initiale (II - 9)

Condition initiale pour  $t = 0$

$T(0,t) = \varphi_1(t)$  (II - 10)

$T(l,t) = \varphi_2(t)$  (II - 11)

} Conditions aux limites

$0 \leq t \leq T$  : Condition aux limites

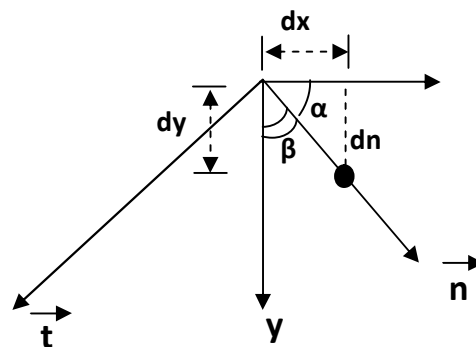
**II-3 propagation de la chaleur dans l'espace:[28,29,30]**

soit  $n$  : vecteur unité  $|\vec{n}| = 1$  donc:

$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn}$  (II - 12)

$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \cos \gamma$  (II - 13)

Voir schémas



**Fig II-2:** donnant les coefficients directeurs

Ou  $\cos \alpha ; \cos \beta ; \cos \gamma$  cosinus directeurs du vecteur  $\vec{n}$

$$\text{Ou' encore } \frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad} T ; \quad (II-14)$$

$$\text{Alors } \vec{n} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = 1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

La quantité de chaleur débitée durant l'unité de temps traversant la surface  $\Delta S$  est :

$$\Delta Q = -K \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \Delta S \quad (II-15)$$

$$\text{Ou' } \Delta Q = -K \vec{n} \cdot \text{grad} T \cdot \Delta S$$

La quantité de chaleur, passant au cours de temps  $\Delta t$  par la surface  $\Delta S$  est

$$\Delta Q \cdot \Delta t = -K \vec{n} \cdot \text{grad} T \Delta t \cdot \Delta S \quad (II-16)$$

La quantité de chaleur s'écoulant par la surface  $S$  sera

$$Q = -\Delta t \iint_S K \vec{n} \cdot \text{grad} T \cdot ds \quad (II-17)$$

La formule (2) donne la quantité de chaleur pénétrant dans le volume  $V$  (ou quittant le volume  $V$ ) au cours du temps  $\Delta t$ .

$V$  : Volume limité par la surface  $S$ .

La quantité de chaleur pénétrant dans le volume  $V$  sert à réchauffer la substance de ce volume.

-considérons un volume  $\Delta V$ . Supposons qu'au cours de  $\Delta t$ , sa température sont élevée de  $\Delta t$ . il est évident que la quantité de chaleur dépensée pour élever la température de l'élément  $\Delta V$  sera égale à :

$$C \Delta V \cdot \rho \cdot \Delta T \approx C \Delta V \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \quad (II-18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} car \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \end{array} \right.$$

La quantité globale de chaleur dépensée à l'échauffement dans le volume  $V$  au cours du temps  $\Delta t$  sera :

$$\Delta t \iiint_V C\rho \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV \quad (II-19)$$

Alors : (II-17)  $\equiv$  (II-19)

$$-\Delta t \iint_S K\vec{n} \cdot \text{grad}T dS = \Delta T \iiint_V C\rho \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dv$$

Division par  $\Delta t$ , nous obtenons :

$$-\iint_S K\vec{n} \cdot \text{grad}T \cdot dS = \iiint_V C\rho \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV \quad (II-20)$$

D'après la formule d'Ostrogradsky et posant  $\vec{F} = K \cdot \text{grad}T$

$$\iint_S (K\text{grad}T) \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_V \text{div}(K\text{grad}T) dV \quad (II-21)$$

$$\text{Alors } -\iiint_V \text{div}(K \text{grad}T) dV = \iiint_V C\rho \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV$$

$$\Rightarrow \iiint_V \left[ \text{div}(K \text{grad}T) + C\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (II-22)$$

**Remarque : Théorème de la moyenne:[31]**

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(P) \cdot V \quad (II-23)$$

$$\Rightarrow \left[ \text{div}(K \text{grad}T) + C\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right]_{\substack{x=x_1=0 \\ y=y_1=0 \\ z=z_1=0}} = 0 \quad (II-24)$$

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ un point de } V \quad f(P) = 0$$

$$\Rightarrow C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(K \text{grad}T) \quad (II-25)$$

$$\text{Mais } K \text{grad}T = K \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{i} + K \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{j} + K \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (II-26)$$

$$\text{et } \text{div}(K \text{grad}T) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (II-27)$$

Partout dans l'équation (6); nous aurons:

$$-c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (II-28)$$

Ou  $k$  est une constante; dans ce cas:

$$-cp \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \text{ Et en posant } -\frac{k}{cp} = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (II-29)$$

Sous une forme condensée l'équation (II-29) s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T \quad (II-30)$$

$$\text{ou } \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \text{ Laplacien de } T$$

- si la fonction  $T(x, y, z, t)$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$

$$\text{- alors } \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (II-31)$$

Équation de la propagation de la chaleur dans une barre.

#### II-4 La résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies: [32,33,34]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (II-32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \approx \frac{T(x+h, t) - T(x, t)}{h} \quad (II-33)$$

$$(h = \Delta x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{1}{h} \left[ \frac{T(x+h, t) - T(x, t)}{h} - \frac{T(x, t) - T(x-h, t)}{h} \right] \quad (II-34)$$

$$\text{Ou } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{T(x+h, t) - 2T(x, t) + T(x-h, t)}{h^2} \quad (II-35)$$

D'une manière analogue:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \approx \frac{T(x, t+l) - T(x, t)}{l} \quad (II-36)$$

$$(l = \Delta t)$$

On demande de trouver la solution de l'équation:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4)$$

**Vérifiant les conditions aux limites:**

$$T(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{conditions initiales} \quad (II-37)$$

$$T(0,t) = \varphi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{Condition aux limites}) \quad (II-38)$$

$$T(l,t) = \varphi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{Condition aux limites}) \quad (II-39)$$

C'est à dire trouver la solution  $T(x,t)$  dans le rectangle délimité par les droites  $t = 0, x = 0 ; x = l ; t = T$  si l'on connaît les valeurs de fonction recherchées Sur trois de ses côtés :  $t = 0, x = 0 ; x = l$

$$x = ih ; \quad i = 1,2,3,\dots, n$$

$$t = jl ; \quad j = 1,2,3,\dots, n$$

Et déterminons les valeurs approchées des solutions aux nœuds de cette grille, c'est-à-dire aux points d'intersection de ces droites.

Introduisons les notations.

$$T(ih, jh) = T_{i,j} \quad (II-40)$$

Ecrivons au lieu de l'équation (II-32), l'équation correspondante en différences finies pour le point  $(ih, jl)$ . Conformément aux formules (II-35) et (II-36) nous obtenons:

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{l} = a^2 \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} \quad (II-41)$$

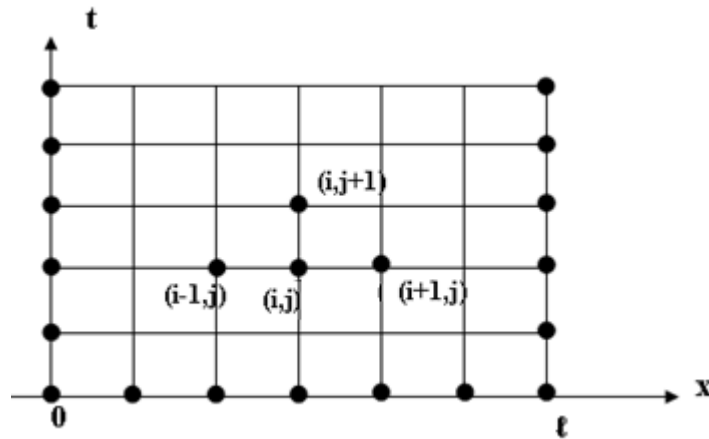
Définissons  $T_{i,j+1} : ?$

$$T_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2a^2 l}{h^2}\right) T_{i,j} + a^2 \frac{l}{h^2} (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) \quad (II-42)$$

Il découle de la formule (II-42) que si l'on connaît les trois valeurs dans  $j^{\text{ième}}$  série,  $T_{i,j} ; T_{i+1,j} ; T_{i-1,j}$  ; on peut déterminer la valeur  $T_{i,j+1}$  dans la  $(j+1)$ -ième série:

Nous connaissons toutes les valeurs sur la droites  $(t = 0)$  formule (II-37).

D'après la formule (II-42) nous déterminons les valeurs sur tous les points intérieures du segment  $t = l$



**Fig II-3:** quadrillage de variation de température en fonction de t et de z [35]

Les valeurs aux extrémités de ce segment ne sont connues en vertu des formules (II-38) et (II-39). Ainsi nous obtenons rangée par rangée les valeurs de la solution recherchée pour tous les nœuds de la grille.

Dans le cas où le pas  $l$  suivant l'axe  $t$  est choisi de sorte que:

$$1 - \frac{2a^2 l}{h^2} = 0 \quad \text{ou} \quad a^2 \left( \frac{l}{h^2} \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{II} - 43)$$

$$\text{ou} \quad l = \frac{h^2}{2a^2}$$

Dans ce cas l'équation (II-42) prend la formule:

$$T_{i,j+1} = \frac{1}{2}(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) \quad (\text{II} - 44)$$

Voir **fig II-3**

### II-5 Résolution de l'équation de la chaleur dans un voussoir

$T(z, t)$  dépend uniquement de  $z$  :

Pour la résolution de l'équation de la chaleur considérons à titre d'exemple le voussoir à la clé du pont en encorbellement de Mascara à trois travées: 55m – 100m – 55m à inertie variable (coulé sur place par un système de coffrage mobile).

Considérons la travée intermédiaire et tout juste le voussoir à la clé:

Redimensionnement du voussoir: [4]

La hauteur a mi-travée demeure:  $\frac{l}{60} \leq h_c \leq \frac{l}{30}$

$l$ : portée de la travée intermédiaire adjacente à la pile.  $l = 100m$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{100}{60} \leq h_c \leq \frac{100}{3,33} \\ 1,66m \leq h_c \leq 3,33m \end{array} \right\}$$

On prend  $h_c = 2,5m$

Section transversale:

Épaisseur de l'âme

Guyon propose une formule empirique: [6]

$$a \geq \frac{h}{36} + 5 + \phi(cm) \quad ; \quad \phi : \text{diamètre de la gaine}$$

$h$ : hauteur de l'âme.

$$a \geq \frac{240}{36} + 5 + 8,8 = 20,46cm$$

On prend  $a = 35cm$

Car l'épaisseur minimale  $a = 30cm$

Épaisseur de l'hourdis inférieur à la clé  $e_i = 25cm$

L'épaisseur supérieure est constante:  $e_0 = 25cm$

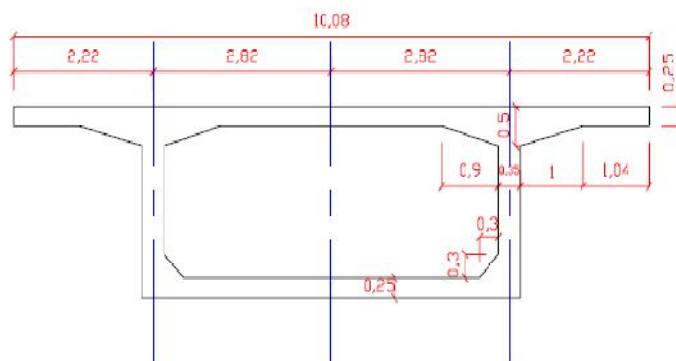


Fig II-4: dimensionnement d'un voussoir à la clé

**Rendons le voussoir homogène (béton + l'air) :**

$$\text{La diffusité de l'air} = 200 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} = \lambda_2 \quad [36\text{-a}]$$

$$\text{La diffusité de béton} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} = \lambda_1 \quad [36\text{-a}]$$

Alors la diffusité du milieu homogène est  $\lambda$  avec  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}$  (II-45)

$\lambda_1 = \lambda_3$  diffusité du béton au niveau des âmes

$$\text{Alors } \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\lambda_2 + \lambda_1} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \times 200 \cdot 10^{-7}}{2 \times (200 \cdot 10^{-7}) + 5 \cdot 10^{-7}} = 2.47 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$\text{On a : } a^2 \left( \frac{l}{h^2} \right) = a^2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) = \frac{1}{2} \text{ avec } a^2 = \lambda = 2.47 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$\text{Donc } T_{i,j+1} = \frac{1}{2} (T_{i+1,j} + T_{i-1,j})$$

$$Z = i h ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$t = J \cdot \Delta t ; J = 1, 2, 3, \dots, n$$

Déterminons les n de i et de J.

$$\frac{1}{2} = 2.47 \cdot 10^{-7} \left( \frac{l}{h^2} \right) = 2.47 \cdot 10^{-7} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right); \text{ On fixera } \Delta z = 0.25 \text{ m}$$

$$\text{Donc } \frac{z}{\Delta z} = \frac{2.5}{0.25} = 10$$

$$z = i h ; h = \Delta z ; i = 0, \dots, 10$$

$$\text{Donc } 2.47 \cdot 10^{-7} \Delta t \cdot 2 = \Delta z^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta z^2}{2(5 \cdot 10^{-7})} = \frac{0.25^2}{2(2.47 \cdot 10^{-7})} = 126518,21 \text{ s} \approx 35 \text{ h}$$

$$\text{Soit } \Delta t = 35 \text{ h}$$

$$\text{Pendant une semaine : } 7 \times 24 \text{ h on aura : } n = \frac{7 \times 24}{35} = 4,8$$

$$\text{Sort } n = 5; \text{ donne } J = 0, 1, 2, \dots, 5$$

**Saison printemps:**

a) Conditions aux limites

$$T_{0,j} = 20^0$$

$$T_{10,j} = 20^0 \quad \forall j \neq 0$$

b) Conditions initiales :

$$T_{i,0} = 30^0 \quad \forall_i \neq \{0,10\}$$

$$T_{0,0} = T_{10,0} = 30^0$$

**Tableau II-1:** les variations de température en fonction de la profondeur  $z$  et du temps  $t$  : saison de printemps

$\downarrow j \quad i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
1	20	30	30	30	30	30	30	30	30	30	20
2	20	25	30	30	30	30	30	30	30	25	20
3	20	25	27.5	30	30	30	30	30	27.5	25	20
4	20	23.75	27.5	28.75	30	30	30	28.75	27.5	23.75	20
5	20	23.75	26.25	28.75	29.37	30	29.37	28.75	26.25	23.75	20
Tmoy	21.66	26.25	28.54	29.58	29.89	30	29.89	29.58	28.54	26.25	21.66

D'après les résultats obtenus de températures dans le tableau ci-dessus (voir tableau II-1) on remarque que la colonne de la valeur de profondeur  $z = 1.25\text{m}$  ( $i=5$ ) est une colonne de symétrie se qui ne permet de faire notre étude uniquement sur un intervalle de  $[0, 1.25\text{m}]$

**Saison d'été :**

## a) Conditions aux limites

$$T_{0,j} = 35^{\circ}$$

$$T_{10,j} = 35^{\circ} \quad \forall j \neq 0$$

## b) Conditions initiales :

$$T_{i,0} = 30^{\circ} \quad \forall_i \neq \{0,10\}$$

$$T_{0,0} = T_{10,0} = 30^{\circ}$$

**Tableau II-2:** les variations de température en fonction de la profondeur z et du temps t : saison d'été.

$\downarrow j \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
1	35	30	30	30	30	30	30	30	30	30	35
2	35	32.5	30	30	30	30	30	30	30	32.5	35
3	35	32.5	31.25	30	30	30	30	30	31.25	32.5	35
4	35	33.12	31.25	30.62	30	30	30	30.62	31.25	33.12	35
5	35	33.12	31.87	30.62	30.31	30	30.31	30.62	31.87	33.12	35
<b>Tmoy</b>	34.16	31.87	30.72	30.20	30.05	30	30.05	30.20	30.72	31.87	34.16

Mêmes conclusion et remarque que celles du tableau **II-1**

**Saison d'automne:**

c) Conditions aux limites

$$T_{0,j} = 25^{\circ}$$

$$T_{10,j} = 25^{\circ} \quad \forall j \neq 0$$

d) Conditions initiales :

$$T_{i,0} = 30^{\circ} \quad \forall i \neq \{0,10\}$$

$$T_{0,0} = T_{10,0} = 30^{\circ}$$

**Tableau II-3:** les variations de température en fonction de la profondeur z et du temps t : saison d'automne.

$\downarrow j \quad i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
1	25	30	30	30	30	30	30	30	30	30	25
2	25	27,7	30	30	30	30	30	30	30	27,7	25
3	25	27,7	28,75	30	30	30	30	30	28,75	27,7	25
4	25	27,7	28,75	29,37	30	30	30	29,75	28,75	27,7	25
5	25	27,7	28,75	29,37	29,68	30	29,68	29,75	28,75	27,7	25
T moyen	25,83	28,12	29,27	29,74	29,94	30	29,94	29,74	29,27	28,12	25,83

Mêmes conclusion et remarque que celles du tableau II-1

**Saison d’hiver :**

e) Conditions aux limites

$$T_{0,j} = 5^{\circ}$$

$$T_{10,j} = 5^{\circ} \quad \forall j \neq 0$$

f) Conditions initiales :

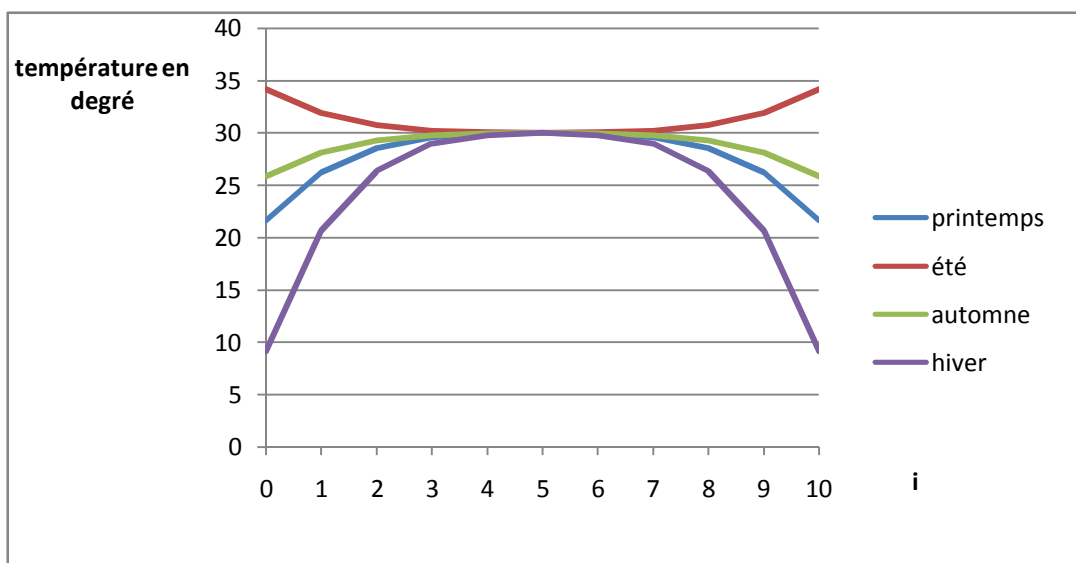
$$T_{i,0} = 30^{\circ} \quad \forall i \neq \{0,10\}$$

$$T_{0,0} = T_{10,0} = 30^{\circ}$$

**Tableau II-4:** les variations de température en fonction de la profondeur z et du temps t : saison d’hiver.

j \ i →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
1	5	30	30	30	30	30	30	30	30	30	5
2	5	17,5	30	30	30	30	30	30	30	17,5	5
3	5	17,5	23,75	30	30	30	30	30	23,75	17,5	5
4	5	14,37	23,75	26,87	30	30	30	26,87	23,75	14,37	5
5	5	14,37	20,62	26,87	28,43	30	28,43	26,87	20,62	14,37	5
T moy	9,16	20,62	26,35	28,95	29,73	30	29,73	28,95	26,35	20,62	9,16

Mêmes conclusion et remarque que celles du tableau II-1



**Fig II-5 :** variation de la Tmoy en fonction de la profondeur pour les quatre saisons

Donc  $T_{\text{moy}} = ??$  C'est la  $T_{\text{moy}}$  du printemps

D'après les résultats obtenues dans le graphe de la figure II-5 toutes les variations de températures saisonnières, voir celles de l'hiver, printemps et automne varient selon une parabole de concavité négative  $\frac{d^2 T}{dz^2} < 0$ , sauf celles de l'été qui varient selon une concavité positive  $\frac{d^2 T}{dz^2} > 0$ , leurs tangentes horizontales est au niveau du point  $(z, T) = (1.25 ; 30)$  c'est-à-dire quelque soit la température extrême. Soit extrême haut pour le printemps, hiver et automne est de  $30^\circ$  et extrême basse pour la saison été et de  $30^\circ$  aussi, d'où on a  $\frac{dT}{dz} = 0$  pour  $z = 1.25\text{m}$  ( $i=5$ ) et  $T(1.25) = 30$

**Tableau II-5** :  $T_{\text{moy}}$  enveloppe des quatre saisons.

$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_{\text{moy}}$	21.66	26.25	28.54	29.58	29.89	30	29.89	29.58	28.54	26.25	21.66

D'après les résultats illustrés dans les quatre tableaux, on remarque que la  $T_{\text{moyenne}}$  des quatre saisons est égale à la température du printemps.

## II-6 calcul des contraintes et des déformations suivant l'axe z

La température de mise en construction du voussoir est  $15^\circ$

$$\text{Alors } \bar{\varepsilon}_{\text{moy}} = \alpha \Delta t \quad \alpha = 10^{-5} \text{C}^{-1}$$

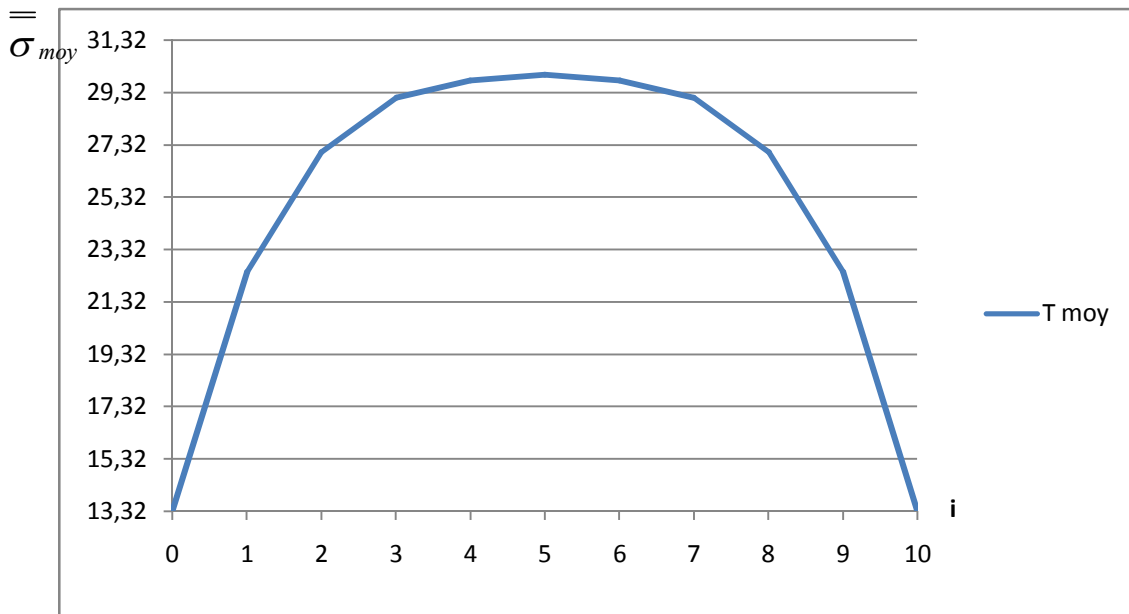
**Tableau II-6**: déformation en fonction de la profondeur.

$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{\varepsilon}_{\text{moy}}$	$6,66 \cdot 10^{-5}$	$11,24 \cdot 10^{-5}$	$13,53 \cdot 10^{-5}$	$14,57 \cdot 10^{-5}$	$14,89 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-5}$	$14,89 \cdot 10^{-5}$	$14,57 \cdot 10^{-5}$	$13,53 \cdot 10^{-5}$	$11,24 \cdot 10^{-5}$	$6,66 \cdot 10^{-5}$

$$\text{Alors } \bar{\sigma}_{\text{moy}} = E \bar{\varepsilon}_{\text{moy}} \quad E = 2.10^5 \text{Mpa}$$

**Tableau II-7** : contrainte en fonction de la profondeur

$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{moy}$ en Mpa	13,32	22,48	27,06	29,14	29,78	30	29,78	29,14	27,06	22,48	13,32

**Fig II-6** : la loi de variation de contrainte en fonction de la profondeur.

D'après les résultats obtenus dans le graphe ci-dessus (voir figure II-6), on remarque que la contrainte due à la variation et transfert de chaleur atteint son maximum à une profondeur  $z = 1.25\text{m}$  ( $i=5$ ) c'est-à-dire à mi-profondeur, au milieu de la hauteur du caisson qui est justifiée par la théorie (voir la méthode analytique). Pour cette raison on a un risque dans les cas extrêmes d'avoir un dépassement des états limites et admissibles qui peuvent provoquer une rupture ou éclatement des sections intermédiaires, c'est-à-dire au niveau des âmes, pour cette raison on prévoit un renforcement au niveau de ces sections par des composites au béton armé par un tissage, soit par un tissu en fibres métalliques ou en Carbone.

**II-7 Le polynôme de Lagrange :****Cherchons le polynôme de Lagrange P(t)=z**

$$L_i(x) = \prod_{i=0}^{i=n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(\dots)(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(\dots)(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (II-46)$$

$$L_0 = \frac{(t-35)(t-70)(t-105)(t-140)(t-175)}{(0-35)(0-70)(0-105)(0-140)(0-175)} \quad (II-46a)$$

$$L_1 = \frac{(t-0)(t-70)(t-105)(t-140)(t-175)}{(35-0)(35-70)(35-105)(35-140)(35-175)} \quad (II-46b)$$

$$L_2 = \frac{(t-0)(t-35)(t-105)(t-140)(t-175)}{(70-0)(70-35)(70-105)(70-140)(70-175)} \quad (II-46c)$$

$$L_3 = \frac{(t-0)(t-35)(t-70)(t-140)(t-175)}{(105-0)(105-35)(105-70)(105-140)(105-175)} \quad (II-46d)$$

$$L_4 = \frac{(t-0)(t-35)(t-70)(t-105)(t-175)}{(140-0)(140-35)(140-70)(140-105)(140-175)} \quad (II-46e)$$

$$L_5 = \frac{(t-0)(t-35)(t-70)(t-105)(t-140)}{(105-0)(175-35)(175-70)(175-105)(175-140)} \quad (II-46f)$$

Alors

$$L_0 = \frac{t^5 - 525t^4 + 104125t^3 - 9646875t^2 + 411171250t - 6302625000}{-6302625000} \quad (II-47)$$

$$L_1 = \frac{t^5 - 490t^4 + 86975t^3 - 6602750t^2 + 180075000t}{1260525000} \quad (II - 48)$$

$$L_2 = \frac{t^5 - 455t^4 + 72275t^3 - 4587625t^2 + 90037500t}{-630262500} \quad (II - 49)$$

$$L_3 = \frac{t^5 - 420t^4 + 60025t^3 - 3344250t^2 + 60025000t}{630262500} \quad (II - 50)$$

$$L_4 = \frac{t^5 - 385t^4 + 50225t^3 - 2615375t^2 + 45018700t}{-1260525000} \quad (II - 51)$$

$$L_5 = \frac{t^5 - 350t^4 + 42875t^3 - 2143750t^2 + 36015000t}{6302625000} \quad (II - 52)$$

**Tableau II-8:** Variation de la profondeur en fonction de temps t

$t_i$ (h)	0	35	70	105	140	175
$z_i$ (m)	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25

**Le polynôme de Lagrange est:**

$$p(t) = L_0 \times 0 + L_1 \times 0,25 + L_2 \times 0,5 + L_3 \times 0,75 + L_4 \times 1 + L_5 \times 1,25$$

$$z = p(t) = 0,0071 t = z \quad (II-53)$$

$$Z = p(t) = 0,0071t.$$

On remarque d'après la loi obtenue la variation de profondeur z en fonction de temps t est linéaire.

Vérification de p(t)

**Tableau II-9:** vérification des résultats de  $z=p(t)$ .

$t_i$ (h)	0	35	70	105	140	175
$Z=p(t)$	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25

Exprimons  $p'(z) = T(z)$

**Tableau II-10:** la variation de la température en fonction de  $z$ 

$Z(m)$	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25
$T(z)$ en degrés	21.66	26.25	28.54	29.58	29.89	30

Cherchons le polynôme de Lagrange  $p(z)=T(z)$

$$L_0 = \frac{(z-0.25)(z-0.5)(z-0.75)(z-1)(z-1.25)}{(0-0.25)(0-0.5)(0-0.75)(0-1)(0-1.25)} \quad (II-54)$$

$$L_1 = \frac{(z-0)(z-0.5)(z-0.75)(z-1)(z-1.25)}{(0.25-0)(0.25-0.5)(0.25-0.75)(0.25-1)(0.25-1.25)} \quad (II-55)$$

$$L_2 = \frac{(z-0)(z-0.25)(z-0.75)(z-1)(z-1.25)}{(0.5-0)(0.5-0.25)(0.5-0.75)(0.5-1)(0.5-1.25)} \quad (II-56)$$

$$L_3 = \frac{(z-0)(z-0.25)(z-0.75)(z-1)(z-1.25)}{(0.5-0)(0.5-0.25)(0.5-0.75)(0.5-1)(0.5-1.25)} \quad (II-57)$$

$$L_4 = \frac{(z-0)(z-0.25)(z-0.5)(z-0.75)(z-1.25)}{(1-0)(1-0.25)(1-0.5)(1-0.75)(1-1.25)} \quad (II-58)$$

$$L_5 = \frac{(z-0)(z-0.25)(z-0.5)(z-0.75)(z-1)}{(1.25-0)(1.25-0.25)(1.25-0.5)(1.25-0.75)(1.5-1.25)} \quad (II-59)$$

$$\text{Et } T(z) = L_0 \times 21.66 + L_1 \times 26.25 + L_2 \times 28.54 + L_3 \times 29.58 + L_4 \times 29.89 + L_5 \times 30 \quad (II-60)$$

$$L_0 = \frac{z^5 - 3.75z^4 + 5.3125z^3 - 3.515625z^2 + 1.0703125z - 0.1171875}{-0.1171875} \quad (II-61)$$

$$L_1 = \frac{z^5 - 3.75z^4 + 4.4375z^3 - 2.40625z^2 + 0.46875z}{0.0234375} \quad (II-62)$$

$$L_2 = \frac{z^5 - 3.25z^4 + 3.6875z^3 - 1.67185z^2 + 0.234375z}{0.01171875} \quad (II-63)$$

$$L_3 = \frac{z^5 - 2.75z^4 + 2.565z^3 - 0.953125z^2 + 0.1171875z}{-0.01171875} \quad (II-64)$$

$$L_4 = \frac{z^5 - 2.5z^4 + 2.1875z^3 - 0.953125z^2 + 0.1171875z}{-0.0234375} \quad (II-65)$$

$$L_5 = \frac{z^5 - 2.5z^4 + 2.1875z^3 - 0.78125z^2 + 0.09375z}{0.1171875} \quad (II-66)$$

$$\text{Et } T(z) = L_0 \times 21.66 + L_1 \times 26.25 + L_2 \times 28.54 + L_3 \times 29.58 + L_4 \times 29.89 + L_5 \times 30 \quad (II-67)$$

$$T(z) = 4.608z^5 - 17.1733z^4 + 29.76z^3 - 34.287z^2 + 25.322z + 21.66 \quad (II-68)$$

**Vérification de  $T(z)$** **Tableau II-11:** vérification de  $T(z)$  en fonction de  $z$ 

Z(m)	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25
T(z)	21.66	26.25	28.54	29.58	29.89	30

D'après la loi de variation de  $T(z)$  en fonction de  $z$  dans l'expression (II-68)  $T(z)$  n'est pas linéaire (variation parabolique) qui est le cas contraire de ce qu'on utilise dans le calcul des caissons.

**II-8 Conclusion:**

D'après les résultats obtenus, en utilisant les méthodes numériques telles que le polynôme de Lagrange et les différences finies.

On remarque que la variation de la profondeur  $z$  en fonction du temps  $t$  est linéaire qui nous facilite l'étude et la détermination de la pénétration de la chaleur en profondeur, c'est à dire la détermination de la vitesse de transmission en profondeur dans un caisson quelconque, hors pour la température dans les différentes sections varie selon une loi non linéaire (hyperbolique) en fonction de  $z$  qui nous complique la détermination de la température au niveau de chaque point de caisson et par conséquent la loi ordinaire de répartition de chaleur en profondeur qui considère la variation de la température linéaire qui n'est pas exacte.

# Chapitre III

Résolution analytique de propagation de  
chaleur dans un caisson

### III-1 Introduction:

Dans le monde des grands ouvrages d'art et bâtiments (ponts ; tunnels ; salles du sport. salles des fêtes ; etc....) les chercheurs et les techniciens constructeurs s'orientent vers les structures les légères et l'optimisation d'utilisation des matériaux de construction et le Comportement mécanique des sections. Pour cela, ils ont adopté les sections caissons, pour lesquelles, on rencontre un grand problème thermique, surtout pour les structures et Ouvrages hyperstatiques.

Avant les techniciens ont considéré que le transfert de chaleur se fait selon une loi linéaire, mais en réalité elle est plus complexe que ça, pour cette raison on préfère utiliser pour le travail actuel des méthodes analytiques avec des conditions initiales et aux limites, malgré leur complexité. Ces méthodes nous permettent de déterminer *et* d'étudier l'influence du gradient thermique au niveau de chaque élément et de chacun de ces points de la structure et par conséquent leur dans le domaine thermo - élastique.

### III-2 Détermination de la propagation de chaleur dans un corps solide :

Pour un corps homogène isotrope. Ou le coefficient du transfert de chaleur ne dépend pas de la température, l'équation du transfert de chaleur s'écrit:[36-b]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - \frac{1}{X} * \frac{\partial T}{\partial t} \quad (III-1)$$

Ou **T** : Fonction de répartition de chaleur

**X** : Coefficient de conductibilité de chaleur ;

On pose :

$$\frac{1}{X} = K/ K \in \mathbb{R}^+$$

En général, pour les tabliers des ponts caissons la température est variable selon

une seule direction, celle de l'épaisseur et par conséquent dans le travail actuel, on remplace l'équation (III-1) par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = K \frac{\partial T}{\partial t} ; \quad K \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{III-2})$$

Cette équation donc régit l'évolution de la chaleur  $T$ , en tout point  $X$  d'un milieu unidimensionnel de conductibilité thermique  $K$  au cours du temps  $t$  nous allons montrer que cette équation jointe à certaines conditions initiales et aux conditions limites, peut être :

### III-3 Résolue par la méthode de séparation des vitesses.

#### a) Condition initiale et aux limites pour un domaine borné

Considérons un élément d'un caisson d'épaisseur  $L$ , homogène, caractérisé par la conductibilité thermique  $K$ . L'équation (III-2) étant de nature évolutive, il est à prévoir que l'évolution au cours du temps, de  $T(x, t)$  sera liés aux valeurs initiales:

$$T(x, 0) = T_0(x)$$

De plus l'influence du milieu extérieure peut se faire sentir jusqu'aux faces de l'élément du caisson, tels que, nous aurons les conditions aux limites suivantes

$$T(0, t) = T_0(t) ;$$

$$T(L, t) = T_L(t). \quad \forall t > 0;$$

Qui nous permet d'assurer l'unicité de la solution du problème. Dans le travail actuel, on suppose que l'équation (III-2) est jointe la condition initiale:

$$T(X, 0) = T_0(x)$$

et aux conditions limites :

$$T(0, t) = 0$$

$$T(L, t) = 0 \quad \forall t > 0; 0 \leq X \leq L$$

### III-4 Résolution de l'équation (III-2) par la méthode de séparation des variables

Pour la résolution de l'équation (III-2), on cherche tout d'abord une solution de la forme : [36-c].

$$T(X, t) = T_1(X) \cdot T_2(t) \quad (\text{III-3})$$

Qui satisfait (III-2) et aux conditions limites précédentes, tel que :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = T_1''(x) \cdot T_2(t); \frac{\partial T}{\partial t} = T_1(x) \cdot T_2'(t) \quad (\text{III-4})$$

Ainsi une solution de (III-1) satisfaisant à  $T_1(0) = T_1(L) = 0$  est donnée par:

$$T_{1n}(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{L} * X; A_n \in \mathbb{R}, \delta_n = \frac{n^2}{L^2} \text{ avec } n \in \mathbb{N} \quad (\text{III-5})$$

et d'après (III-2), on a:

$$T_{2n}(t) = C_n * e^{\frac{n^2 \pi^2 \cdot t}{KL^2}} \quad (\text{III-6})$$

d'où, on obtient :

$$T_n(x, t) = B_n * \sin \frac{n\pi}{L} * X * e^{\frac{-n^2 \pi^2 \cdot t}{KL^2}} \quad (\text{III-7})$$

et par conséquent, on a

$$T(x, t) = B_n * \sin \frac{n\pi}{L} * X * e^{\frac{-n^2 \pi^2 \cdot t}{KL^2}} \quad (\text{III-8})$$

Pour satisfaire a la relation (III-8), il faut que pour  $t = 0$ , on a

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n * \sin \frac{n\pi}{L} * X$$

Supposons que  $X$  et  $T(0, X)$  soient continus. Alors si on considère la fonction suivante :

$T^*_0(X)$  Périodique de période  $2L$  impaire /  $[0, L]$

tel que :

$$T^*_0(X) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} X \quad (\text{III-9})$$

avec

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} T^*_0(X) \sin \frac{n\pi}{L} X dX = \frac{2}{L} \int_0^{+L} T^*_0(X) \sin \frac{n\pi}{L} X dX$$

Sur  $X \in [0, L]$ , Pour que  $T(X, 0) = \sum B_n \sin \frac{n\pi}{L} X$  coïncide avec  $T_0(X)$  sur  $[0, L]$

il faut que.

Donc la solution de l'équation (III-2) qui satisfait aux conditions initiales et aux conditions limites (III-3, III-4, III-5) est donnée par :

$$T(X, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^L T_0(X) \sin \frac{n\pi}{L} X dX \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} X \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{KL^2} t} \quad (\text{III-10})$$

### III- 5 Calcul thermo -élastique d'une plaque constituée par des éléments caissons :

La flèche d'une plaque constituée par des éléments caissons «après le principe thermo - élastique est :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = -\frac{M_T}{1-\nu}; \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} = 0 \quad (\text{III-11})$$

La solution générale de l'équation (III-11) est :

$$W(Y, Z) = -\frac{6M_T}{EL^3} (Y^2 + Z^2) + (C + eY + dZ) = 0 \quad (\text{III-12})$$

Les contraintes dues à cette déformation sont : [36-d].

$$\sigma_{YY} = \sigma_{ZZ} = \frac{1}{(1-\nu)} (-\alpha ET(X, t) + \frac{N_T}{L} + \frac{12M_T}{L^3} \cdot X) \quad (\text{III-13})$$

$$M_T = \alpha E \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} X.T(X)dX, N_T = \alpha.E \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} T(X)dX \quad (\text{III-14})$$

Où  $\alpha, \nu$  sont respectivement coefficient de dilatation linéaire, module d'Young et coefficient de Poisson.

**D** : La rigidité cylindrique de la plaque.

$$\left. \begin{aligned} u(X) &= 2q_N.L \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-\cos n\pi)}{(n\pi)^2} * \cos \frac{n\pi}{L}; \\ v(Y) &= q_N.L \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-\cos n\pi)}{n\pi} * \sin \frac{n\pi}{L}; \\ w(Y) &= 2q_\phi.L^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(1-\cos n\pi)}{(n\pi)^3} * \sin \frac{n\pi}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-15})$$

Et d'après le principe thermo élastique, à partir de l'équation (III-11), on obtient les déformations suivantes :

Ou  $q_n$  : La déformation longitudinale relative au milieu de la plaque, qu'est déterminée par :

$$q_n = \frac{1}{L} * N_T \quad (\text{III-16})$$

$q_\phi$  : angle de rotation de la section, qui est déterminé par :

$$q_\phi = M^1.M_T + N^1.N_T$$

Et en fin, on a :

$$U(Z) = q_N.L; v(Z) = q_N.\frac{b}{2}; w(Z) = q_\phi.L \quad (\text{III-18})$$

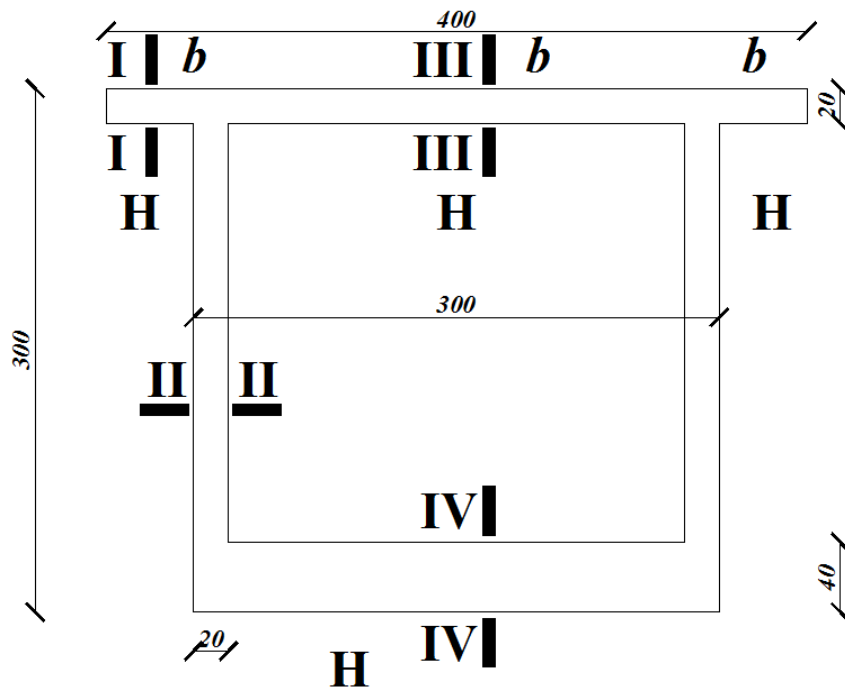


Fig III-1 : les différentes sections dans un caisson

Section I-I

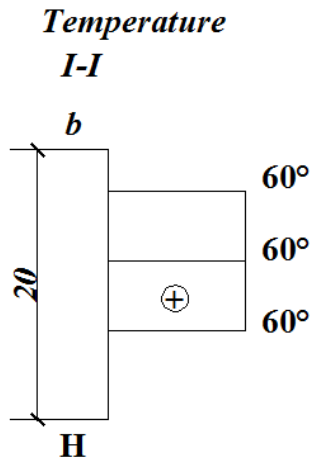


Fig III-2 : Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur (Partie gauche)

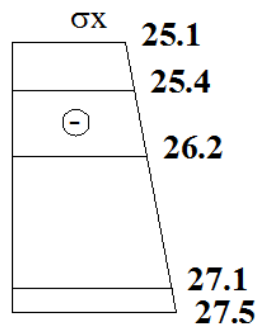


Fig III-3 : Diagramme de la contrainte  $\sigma_x$  suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur (Partie gauche)

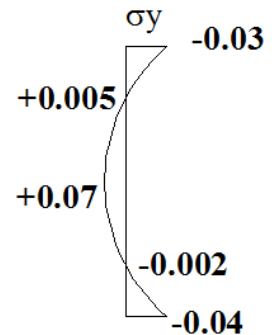
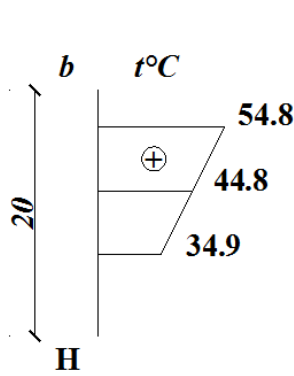
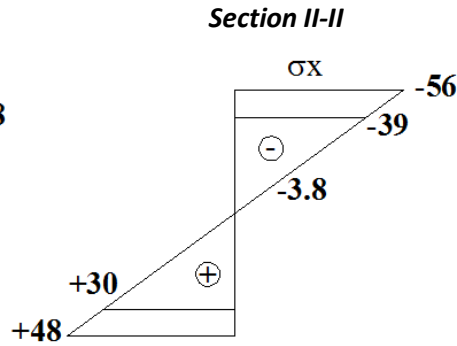


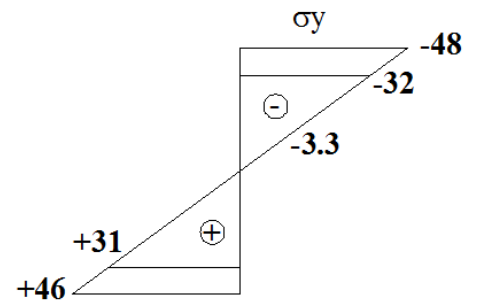
Fig III-4 : Diagramme de la contrainte  $\sigma_y$  suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur



**Fig III-5 :** Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'âme

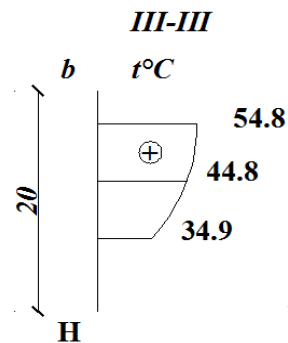


**Fig III-6:** Diagramme de la contrainte  $\sigma_x$  suivant l'épaisseur de l'âme

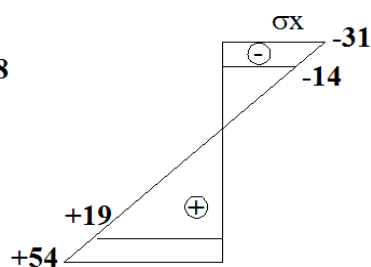


**Fig III-7 :** Diagramme de la contrainte  $\sigma_y$  suivant l'épaisseur de l'âme

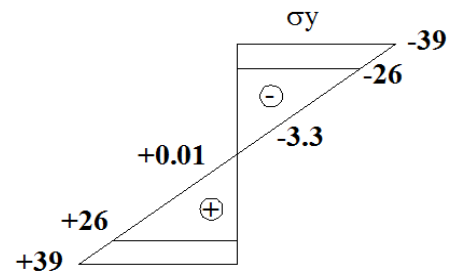
**Section III-III**



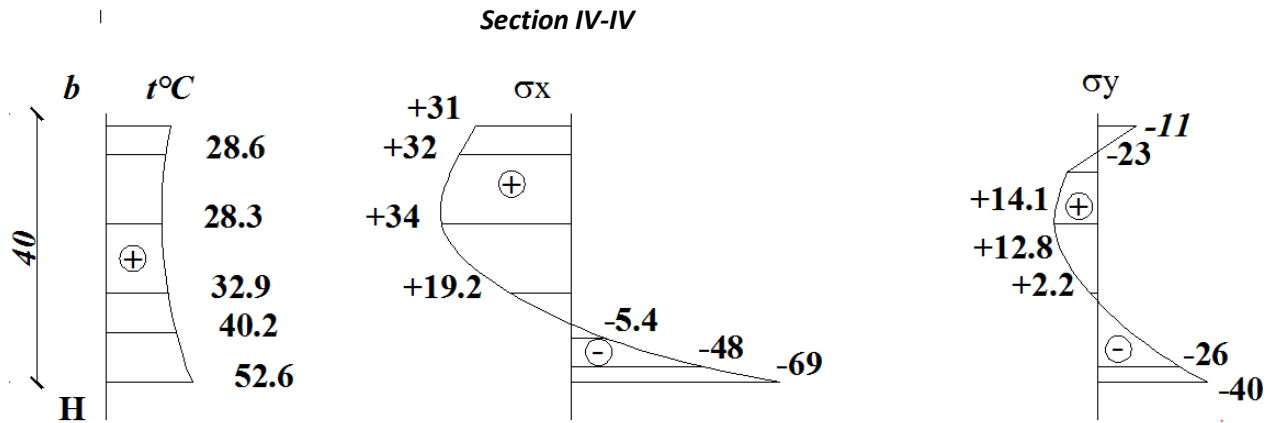
**Fig III-8 :** Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur (partie



**Fig III-9 :** Diagramme de la contrainte  $\sigma_x$  suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur (partie



**Fig III-10 :** Diagramme de la contrainte  $\sigma_y$  suivant l'épaisseur de l'hourdis supérieur



**Fig III-11:** Diagramme de la température suivant l'épaisseur de l'hourdis inférieur (partie centrale)

**Fig III-12:** Diagramme de la contrainte  $\sigma_x$  suivant l'épaisseur de l'hourdis inférieur (partie centrale)

**Fig III-13:** Diagramme de la contrainte  $\sigma_y$  suivant l'épaisseur de l'hourdis inférieur (partie centrale)

### III-6 Conclusion

L'emploi de la méthode analytique pour la détermination de la loi de transfert de chaleur dans un milieu borné, homogène et isotrope, qu'est très complexe, demande un grand effort et une connaissance très approfondi dans la théorie des mathématiques d'un coté de l'autre coté la méthode est fastidieuse et les calculs sont trop longs pour une section a plusieurs éléments comme dans cas (poutre caisson) et en plus de ça on ne peut pas faire appelle l'outil informatique, malgré tous ces inconvénients cette méthode reste toujours la plus précise. Dans les travaux prochains, on va essayer d'employer des méthodes numériques plus sophistiquées que la méthode analytique, comme celle des éléments- finis, différences- finies, etc.

# Chapitre IV

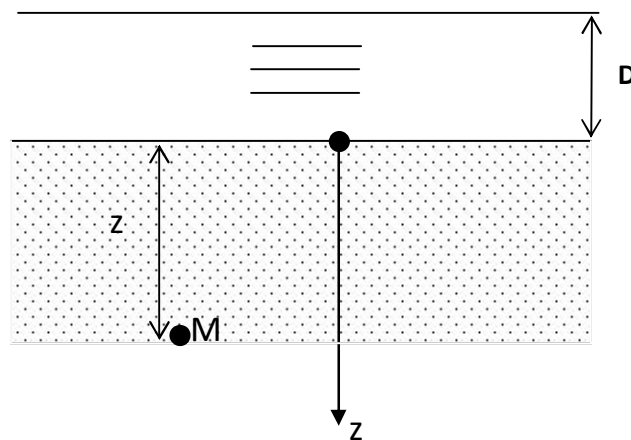
Etude analogique du transfert de chaleur et de consolidation

**IV-1 Introduction:**

Le travail de ce chapitre actuel consiste de faire une étude analogique entre la consolidation d'un sol fin saturé et la propagation de la chaleur dans un caisson d'un pont en encorbellement construit pour des voussoirs successifs de différentes caractéristiques géogéniques et mécaniques

**IV-2 Généralités sur les écoulements linéaires dans les sols saturés:**

On considère dans la couche, une surface horizontale de cote  $z$  et de surface à l'unité. [37,38,39]



**Fig IV-1:** position du point M à la cote  $z$

La charge hydraulique

$$h = \frac{u}{\gamma_w} - z \tag{IV - 1}$$

Si L'écoulement est descendant ↓

$$\text{Et } h = \frac{u}{\gamma_w} + z \tag{IV - 2}$$

si l'écoulement est ascendant ↑

$$\sigma = \frac{\text{poidstotal}}{ds} = \gamma_w D + \gamma \cdot z; \quad u = \gamma_w (D + z) = \gamma_w D + \gamma_w z \tag{IV - 3}$$

$$\sigma' = \text{Contrainte effective: avec } \sigma' = \sigma - u = (\gamma - \gamma_w)z = \gamma'z \tag{IV - 4}$$

$\gamma'$  Poids volumique déjaugé.

On supposera d'abord que le courant est descendant ↓ dans le sens des  $z$  croissants.

$$h = \frac{u}{\gamma_\omega} - z \Rightarrow i = \frac{-dh}{dz} = -\frac{1}{\gamma_\omega} \frac{\partial u}{\partial z} + 1$$

$$\text{Et pour conséquent: } \frac{\partial u}{\partial z} = -i\gamma_\omega + \gamma_\omega \quad (IV - 5)$$

$$du = (-i\gamma_\omega + \gamma_\omega)dz = -i\gamma_\omega dz + \gamma_\omega dz$$

$i$ : gradient hydraulique qui est constant.

$$\Rightarrow \int_0^z du = \int_0^z -i\gamma_\omega dz + \gamma_\omega dz \Rightarrow U - U_0 = -i\gamma_\omega z + \gamma_\omega z \quad ; \quad U_0 = \gamma_\omega D(z=0) \quad (IV - 6)$$

$$\text{donc } U = U_0 - i\gamma_\omega z + \gamma_\omega z = \gamma_\omega D - i\gamma_\omega z + \gamma_\omega z \Rightarrow$$

$$U = \gamma_\omega D + \gamma_\omega z(1 - i) \quad (IV - 7)$$

On a toujours:  $\sigma = \gamma_\omega D + \gamma z$

$$\sigma' = \sigma - u = \gamma_\omega D + \gamma z - \gamma_\omega D + i\gamma_\omega z - \gamma_\omega z$$

$$\sigma' = (\gamma - \gamma_\omega)z + i\gamma_\omega z = \gamma'z + i\gamma_\omega z = (\gamma' + i\gamma_\omega)z$$

$$\sigma' = (\gamma' + i\gamma_\omega)z \quad (IV - 8)$$

Donc: on remarque que l'écoulement descendant ↓; augmente la pression sur le terrain (un remblai qui a été inondé lors d'une crue; tasse à la décrue

Si  $u$  diminue; alors  $\sigma'$  augmente.

Si  $u$  augmente; alors  $\sigma'$  diminue.

\* Dans le cas d'un écoulement ascendant ↑; c'est le phénomène inverse qui se produit, le courant agit en sens contraire du poids:

$$\sigma' = (\gamma' - i\gamma_\omega)z \quad (IV - 9)$$

- le remblai qui a été inondé lors d'une crue, sa force portante décroît ( $\sigma'$  diminue).
- Lorsque le gradient hydraulique  $i$  atteint la valeur critique:

$$i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_\omega} \Rightarrow \gamma' - i_c \gamma_\omega = 0 \Rightarrow \sigma' = 0 \quad (IV - 10)$$

Les contraintes effectives  $\sigma'$ , s'annulent, le squelette solide flotte au milieu de l'écoulement comme des bulles dans un liquide en ébullition.

Il peut en résulter des accidents graves si des constructions sont fondées sur ce sol ou si le terrain lui-même fait partie d'un ouvrage:

Digue, fond de fouilles, etc...

Si  $\gamma' \leq i\gamma_\omega$  où  $i \geq \frac{\gamma'}{\gamma_\omega}$  (phénomène de Renard). [39]

### IV-3 Equation de consolidation: [39,41]

L'écoulement est descendant ou trouve comme précédemment (figure H)

$$\sigma_M = \gamma_\omega D + \gamma z \quad (IV - 11)$$

$$\text{Et } \sigma'_M = (\gamma' + i\gamma_\omega)z \quad (IV - 12)$$

$$h = \frac{u}{\gamma_\omega} - z \Rightarrow i = \frac{-dh}{dz} = -\frac{1}{\gamma_\omega} \frac{du}{dz} + 1$$

$$i \approx -\frac{1}{\gamma_\omega} \frac{du}{dz} \quad (IV - 13)$$

à une constante près.

Et le débit  $q$  qui travers la surface ( $ds = 1$ ) au point M est

$$q = Vds = S \cdot 1 ; V = ki \quad (IV - 14)$$

Donc  $q = ki$  par unité de temps.

$$q = -\frac{k}{\gamma_\omega} \frac{du}{dz} \quad (IV - 15)$$

$k$ : Coef de perméabilité du sol.

On considère maintenant, un volume parallélépipédique  $dv$  de hauteur  $dz$ ; limité par deux surfaces horizontales de cotes  $z$  et  $z + dz$ .

Les débits qui traversent ces surfaces sont  $q$  et  $q + dq$ . La quantité d'eau expulsé lors du parallépipède pendant le temps  $dt$  est donc égale:

$$dq \cdot dt = \frac{\partial q}{\partial z} \cdot dz \cdot dt \quad (IV - 16)$$

$$dq.dt = -\frac{k}{\gamma_\omega} \frac{\delta^2 U}{\delta z^2} . dz.dt \quad (IV-17)$$

Lorsque l'écoulement est dirigé dans le sens des  $z$  décroissant (ascendant);

$$\text{on a: } q = \frac{k}{\gamma_\omega} \frac{\delta U}{\delta z} \quad (IV-18)$$

Mais la quantité d'eau expulsée pendant le temps  $dt$  est alors  $-dq.dt$  et on retrouve la même expression (III-17).

Cette quantité expulsée correspond à la diminution du volume parallépipédique [42]

$$\frac{d\sigma'}{E'} dz \quad (IV-19)$$

donc on aura

$$\frac{d\sigma'}{E'} dz = \frac{1}{E'} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} dt.dz = -\frac{1}{E'} \frac{\partial u}{\partial t} dt.dz \quad (IV-20)$$

Or  $\sigma' = \sigma - u$ :  $\sigma = \text{constant} \Rightarrow \partial \sigma' = -\partial u$

On a finalement:

$$-\frac{k}{\gamma_\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz.dt = -\frac{1}{E'} \frac{\partial u}{\partial t} dt.dz \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{kE'}{\gamma_\omega} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (IV-21)$$

$$\text{En posant } C_v = \frac{kE''}{\gamma_\omega} \quad (IV-22)$$

$C_v$ : Coef de consolidation [43]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (IV-23)$$

Equation de consolidation.

#### IV-4 Conclusion:

On remarque que cette équation de consolidations à même allure que l'équation de transfert de chaleur dans un caisson et par conséquent elle nous aide à la résolution de la loi de variation de la température dans un caisson à géomètre et caractéristiques mécaniques quelconques.

# Chapitre V

Résolution du modèle de transfert de la chaleur par analogie de consolidation d'une bicouche saturée par la méthode des différences finis

### V-1 Introduction :

Dans ce travail on a utilisé la méthode des différences finies pour la résolution de l'équation de consolidation d'un sol fin et saturé pour l'obtention, de la pression  $u(z,t)$  pour chaque temps  $t$  et chaque profondeur  $z$  que nous estimons qu'a même allure de résolution et de conception que la variation thermique dans un caisson en fonction du temps  $t$  et de profondeur  $z$ .

### V-2 Application de consolidation d'une bicouche compressible entre deux conches perméables : [40,43]

V-2-1 L'équation de consolidation de Terzaghi est donnée par:

$$\frac{\partial U(z,t)}{\partial t} = C_v \cdot \frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2} \quad (V-1)$$

Où  $U(z,t)$ : pression interstitielle à la cote  $z$  et à l'instant  $t$ .

$C_v$ : Coefficient de consolidation

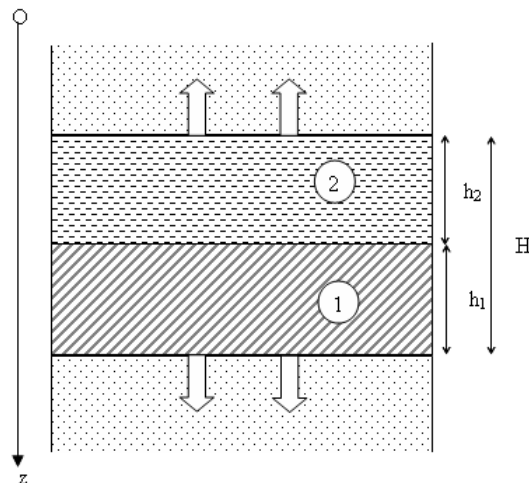


Fig V-1 : schémas montrant le chemin de drainage dans la bicouche

On donne:

$$C_{v1} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 / \text{s}$$

$$C_{v2} = 1,62 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 / \text{s}$$

$$h_2 = 2,5h_1$$

$$k_1 = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$$

$$k_2 = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$$

On trouve  $h_1 = 2,00\text{m}$  ;  $h_2 = 5,00\text{m}$  ;  $H = 7,00\text{m}$

$$\frac{\partial U(z,t)}{\partial z} \cong \frac{U(z+h,t) - U(z,t)}{h} \quad (V-2)$$

$$\frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2} \cong \frac{1}{h} \left[ \frac{U(z+h,t) - U(z,t)}{h} - \frac{U(z,t) - U(z-h,t)}{h} \right] \quad (V-3)$$

$$\cong \frac{U(z+h,t) - 2U(z,t) + U(z-h,t)}{h^2} \quad (V-4)$$

D'une manière analogue

$$\frac{\partial U(z,t)}{\partial t} = \frac{U(z,t+l) - U(z,t)}{l} \quad (V-5)$$

Soit avec les notations indicielles

$$\frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2} \cong \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad (V-6)$$

$$\text{Et } \frac{\partial U(z,t)}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l} \quad (V-7)$$

Avec  $z = i \cdot h$   $i = 1,2,3,\dots,n$

Et  $t = j \cdot l$   $j = 1,2,3,\dots$

$$\text{Posant } A = C_V \left( \frac{l}{h^2} \right) = C_V \left( \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) \quad (V-8)$$

Et posant  $A = \frac{1}{2}$ , ils vient :

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) \quad (V-9)$$

$$A = C_{V_1} \frac{\Delta t}{\Delta z_1^2} = C_{V_2} \frac{\Delta t}{\Delta z_2^2} ; \text{ Alors } \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2} = \sqrt{\frac{C_{V_1}}{C_{V_2}}}$$

Et  $\Delta z_1 = \frac{h_1}{n_1}$  ;  $\Delta z_2 = \frac{h_2}{n_2}$  ; par suite

$$n_1 = \frac{h_1}{h_2} \sqrt{\frac{C_{V_2}}{C_{V_1}}} \cdot n_2 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{1,62 \cdot 10^{-3}}{1,8 \cdot 10^{-4}}} \cdot n_2 \quad \text{soit } 5n_1 = 6n_2 \Rightarrow n_1 = 6 \text{ et } n_2 = 5 \quad (V-10)$$

Donc  $i=0,1,2,\dots,11$

### V-2-1-1 Conditions aux limites:

a)  $U(0,t)=0$

Pour  $t \neq 0$

$$U(H,t)=0$$

b) conditions initiales :

$$U(z,0)=1 \quad \forall z \in \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ H \end{array} \right\}$$

$$U(0,0)=U(H,0)=0,5$$

Débit est constant le long du bicouche au niveau de l'interface donc

$$V_1 = V_2 \Rightarrow k_1 i_1 = K_2 i_2$$

$$K_1 \left( \frac{\Delta U}{\Delta z} \right)_1 = K_2 \left( \frac{\Delta U}{\Delta z} \right)_2 ; \text{ car : } (h = \frac{u}{\gamma_\omega} - z) \text{ et } i = \frac{dh}{dz} \text{ donc } (i = \frac{du}{\gamma_\omega \cdot dz} - 1)$$

$$K_1 (U_{K,j} - U_{K-1,j}) = K_2 (U_{K+1,j} - U_{K,j}) \cdot \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2} \quad (V-11)$$

$K$  : Indice qui correspond à l'interface

L'indice  $i$  augmente du bas en haut:

On dispose donc des relations

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) \quad (V-12)$$

$$\text{Et } U_{K,j} - U_{K-1,j} = 2 \times \frac{1}{3} (U_{K+1,j} - U_{K,j}) \quad (V-11\text{bis})$$

L'interface correspond à l'indice  $i = 6$  soit  $K = 6$

$\forall j$  : (V-11bis) devient :

$$U_6 = \frac{1}{5}(3U_5 + 2U_7) \quad (\text{V-11ter})$$

Les relations (V-12) et (V-11ter)

Permettant de calculer  $U_{i,j}$  de proche en proche à l'aide des relations : conditions

$$U(0,0) = 0,5 ; U(0,j) = 0 \quad (V-13)$$

aux limites et initiales:

$\forall j$

$$U(11,0) = 0,5 ; U(11,j) = 0 \quad (V-14)$$

$$i = 0,1,2,\dots,11; \text{ et } j = 0,1,2,\dots,10$$

Exemple :

Ligne 1:  $U_{i,0} = 1, i = 1,2,\dots,10$  et  $U_{0,0} = U_{11,0} = 0,5$

Ligne 2:  $i = 1,2,\dots,10$   
 $j = 0$

$$i = 1 ; j = 0$$

$$U(1,1) = \frac{1}{2}(U_{2,0} + U_{0,0}) = \frac{1}{2}(1 + 0,5) = 0,75$$

Ligne 2:  $i = 10 ; j = 0$

$$U_{10,1} = \frac{1}{2}(U_{11,0} + U_{9,1}) = \frac{1}{2}(0,5 + 1) = 0,75$$

$$\{i = 10 ; j = 0\}$$

Ligne:  $j = 4$  on aura  $i = 6 = K$  (l'interface)

(V-11ter) ; donne

$$U_{6,4} = \frac{1}{5}(3U_{5,4} + 2U_{7,4}) = \frac{1}{5}(3 \times 1 + 2 \times 0,968) = 0,987$$

On construit alors le tableau:  $A$

$$i = 0,\dots,11 \text{ et } j = 0,\dots,10$$

On dispose donc des relations :

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}(U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1})$$

$$\text{Et } U_{k,j} - U_{k-1,j} = 2 \times \frac{1}{3}(U_{k+1,j} - U_{k,j})$$

Mais l'interface correspond à la valeur 6 de l'indice k comme la relation (V-11bis) est vraie quelque soit t, l'indice J n'est plus nécessaire. On pourra donc écrire (V-11bis) sous la forme:

$$U_6 - U_5 = \frac{2}{3}(U_7 - U_6) \text{ Soit encore.}$$

$$U_6 = \frac{1}{5}(3U_5 + 2U_7)$$

$$\text{En fin } A = C_v \left( \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Couche 1 : } \Delta z_1 = \frac{h1}{n1} = \frac{2 \cdot 10^2}{6} \text{ d'où}$$

$$\Delta t = \frac{1}{2} (\Delta z_1)^2 \times \frac{1}{C_v} = \frac{1}{2} \left( \frac{2 \cdot 10^2}{6} \right)^2 \times \frac{1}{1,8 \cdot 10^{-4}} = 3,09 \cdot 10^6 \text{ s } \approx 36 \text{ jour}$$

Les conditions aux limites et initiales s'écrivent:

$$U(0,0) = 0.5 \quad U_{0,j} = 0$$

$$\forall j \text{ et } U_{i,0} = 1 \text{ pour } i \neq \{0,11\}$$

$$U(11,0) = 0.5 \quad U_{11,j} = 0$$

Ces dernières relations permettant de calculer  $U_{i,j}$  de proche en proche à l'aide de la relation (V-12)

Lors qu'on arrivera à la valeur 6 de 1, on appliquera la relation (V-11bis) : (sur l'interface du bicouche )

On trace ainsi le tableau A

Avec  $i = 0,1,2,\dots,11$  : position du point dans la bicouche

Et  $J = 0,1,2,\dots,10$  : incrément du temps

La première ligne  $U=1$

Sauf : ( $i=1,\dots,10$  et  $J=0$ ) càd  $U_{i,0} = 1$

Sauf pour  $i=0$  et  $i=11$  ;  $U=0.5$  : faces extrêmes

$$J=0 \text{ (} \Delta t = 0 \text{)}$$

La colonne 0 et la colonne 11 sont remplies immédiatement parce que :  $U_{0,j} = 0$

et  $U_{11,j} = 0 \quad \forall j$

La ligne 2:

$$\begin{cases} i = 1, \dots, 10 \\ j = 0 \end{cases}$$

Relation (V-12) donne:

$$i = 1, j = 0$$

$$U_{1,1} = \frac{1}{2}(U_{2,0} + U_{0,0}) = \frac{1}{2}(1 + 0,5) = 0,75$$

De même pour:  $U_{10,1}$  ;  $i = 10, j = 0$

$$U_{10,1} = \frac{1}{2}(U_{11,0} + U_{9,0}) = \frac{1}{2}(0,5 + 1) = 0,75$$

En arrivant à la ligne  $j = 4$ , on aura:

$i = 6 = k$  [interface], on applique la relation [V-11ter]

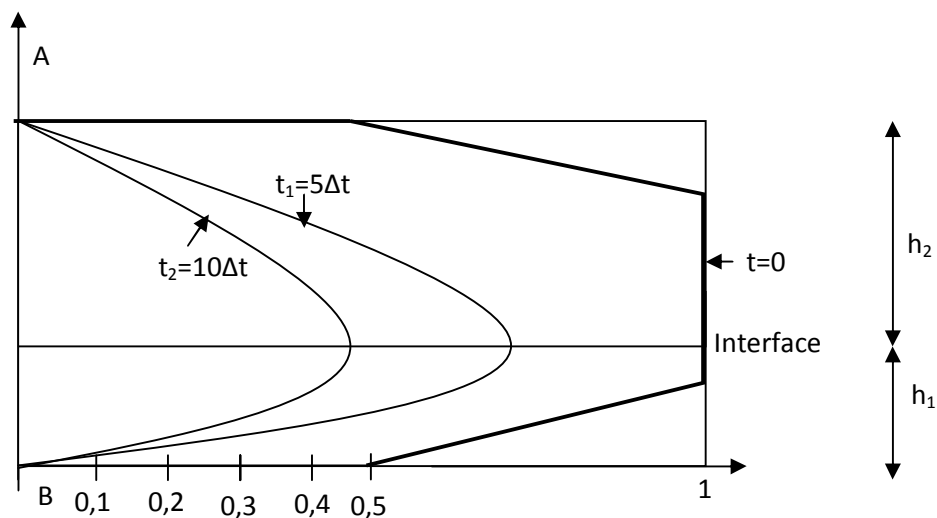
$$U_{6,4} = \frac{1}{5}(3U_{5,4} + 2U_{7,4}) = \frac{1}{5}[(3 \times 1) + (2 \times 0,968)]$$

$$U_{6,4} = 0,987$$

Le tableau de calcul  $[A]$  se remplit donc ainsi petit à petit à partir des extrémités des lignes pour se refermer sur la colonne 6 à l'aide de la relation (V-11ter)

On voit donc que chacune des lignes du tableau  $[A]$  ainsi construit donne la construction point par point d'une isochrone.

Les isochrones correspondant à  $t = 0$ ,  $t_1 = 5\Delta t$  et  $t_2 = 10\Delta t$  sont représentées sur la



**Fig V-2:** schéma de la pression interstitielle  $U$  en fonction de  $z$  et de  $t$

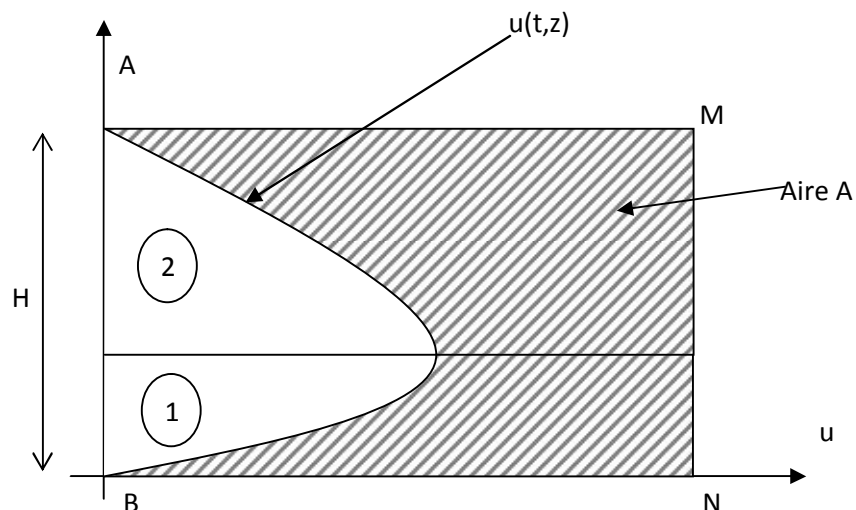
**Tableau V-1 : calcul de la pression interstitielle U en fonction de z et de t**

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5
1	0	0,75	1	1	1	1	1	1	1	1	0,75	0
2	0	0,50	0,875	1	1	1	1	1	1	0,875	0,50	0
3	0	0,437	0,750	0,937	1	1	1	1	0,937	0,750	0,437	0
4	0	0,375	0,687	0,875	0,968	1	0,987	0,968	0,875	0,687	0,375	0
5	0	0,343	0,625	0,827	0,937	0,977	0,958	0,931	0,827	0,625	0,343	0
6	0	0,312	0,585	0,781	0,902	0,947	0,925	0,892	0,778	0,585	0,312	0
7	0	0,292	0,564	0,743	0,864	0,913	0,888	0,852	0,732	0,546	0,292	0
8	0	0,273	0,517	0,705	0,828	0,876	0,850	0,813	0,699	0,517	0,273	0
9	0	0,259	0,489	0,672	0,790	0,839	0,813	0,774	0,665	0,486	0,259	0
10	0	0,244	0,465	0,639	0,755	0,801	0,776	0,739	0,630	0,462	0,244	0

Le degré de consolidation au temps t et à la cote z étant défini par :

$$U(t, z) = 1 - \frac{U(t, z)}{U_0} \quad U_0 : \text{surpression interstitielle initiale}$$

Le degré de consolidation du bicouche est :  $U(t) = \frac{1}{H} \int_0^H \left[ 1 - \frac{U(t, z)}{U_0} \right] dz$  (V-15)



**Fig V-3:** pression interstitielle en fonction de z et de t

D'après (V-15) et la fig (V-3)

$$\text{Alors } U(t) = \frac{1}{H} \left[ \frac{\text{aire } A}{u_0} \right] = \frac{\text{aire } A}{Hu_0}$$

L'aire A peut être calculée par méthode numérique (méthode des trapèzes par exemple). Ou être mesurée au planimètre

L'échelle pour notre exemple  $\left\{ \begin{array}{l} 7m \rightarrow 10,5cm \\ 1 \rightarrow 10cm \end{array} \right\}$

Donc on trouve  $A = 35,5cm^2$  et  $Hu_0 = 10,5 \cdot 10 = 105cm^2$

Finalement  $u(t) = \frac{35,5}{105} \approx 0,34$

} (Voir détails annexe page 73)

### V-3 Conclusion :

D'après l'étude suivie dans ce chapitre on est arrivé à la détermination du degré de consolidation qui caractérise le temps de consolidation en fonction de la profondeur z et d'après notre étude, on a démontré qu'il y a une liaison étroite entre la consolidation et la propagation thermique dans un caisson d'un ouvrage d'art en encorbellement.

# Conclusion générale et recommandations

## **Conclusion générale et Recommandations**

Ce travail s'inscrit dans une série de programme de recherche de laboratoire des matériaux et procédés de construction (L M P C) initié en 2000 au niveau de l'université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, nous avons fixé pour objectif de mettre au point une méthode d'évaluation de transfert de chaleur dans les ouvrages d'art en génie civil et dans les structures caissons en particulier. Nous l'avons généralisé en proposant deux modèles de calcul, l'un analytique qu'il base sur l'équation de la chaleur de LAGRANGE, d'où on a considéré que la propagation thermique est variable uniquement selon la profondeur du caisson, c'est-à-dire selon la direction oz seulement, or pour les deux autres directions on a considéré la variation thermique nulle mais dans ce modèle, on a essayé de déterminer l'influence de variation thermique selon oz les variations des déformations et contraintes sur le plan(x o y), mais pour le deuxième model de calcul, qui est le model numérique, on a travaillé uniquement selon la direction profondeur du caisson oz sans tenir compte des autres variations selon le plan (x o y).ce travail nous a permis de déterminer une loi de variation de transfert thermique probabiliste qui varie d'une section a une autre et d'un point a un autre parfois selon une variation parabolique, hyperbolique et linéaire selon la position de l'élément à étudier dans le caisson .

Pour réaliser l'étude de transfert de chaleur thermique dans les structures caissons, on a opté pour une résolution numérique basée sur les différences finies et un fichier data probabiliste des différentes saisons. En prenant les résultats obtenues par ce model et ceux des anciens modèles, on remarque que les résultats du travail actuel sont plus proche de la réalité de nos conditions techniques et climatiques et par conséquent peuvent mettre nos ouvrages et structures caissons à l'abri de dégradation thermique et mécanique et de préserver leurs capacités portantes dans l'espace et dans le temps.

### **Le but de la méthode suivie:**

L'utilisation de la méthode de la propagation de la chaleur dans un caisson est de déterminer une loi plus ou moins exacte de variation de propagation de la chaleur en profondeur dans un caisson pour obtenir la réalité de concentration ou de répartition des contraintes dues à l'effet thermique dans les différents points du caisson en général et dans les section de conjonction hourdis-âme qui sont très sensibles aux efforts de cisaillement

**Bénéfice:** l'utilisation rationnelle de cette méthode nous permet d'avoir une idée plus claire sur le comportement mécanique des constructions en encorbellement et par conséquent de prédire les différents anomalies et conséquences qui peuvent arriver à la structure d'un caisson pendant sa période d'exploitation qui nous permet de planifier d'avance l'entretien et le renforcement d'un élément de la structure (caisson) dans le temps rationnel tel que la structure reste toujours opérationnelle et rentable sans toucher aux perturbations de la circulation ou de service de l'ouvrage.

**Les suggestions:** concernant le développement de l'axe routier algérien on peut poser les questions suivantes:

- Est-ce que on peut suivre le rythme des infrastructures routiers en utilisant les méthodes forfaitaires, tels que Le gradient thermique et la température come un scalaire dans les combinaisons de calcul?

- Avec le développement de l'outil de calcul (logiciel) est ce que c'est possible d'appliquer les méthodes forfaitaires qui restent des méthodes archaïques qui sont dépassées par les événements.

En fin, on recommande, nos futurs chercheurs de pencher sur les formulations mathématiques qui nous conduit à des lois de variations plus on moins exacte et logique et qui se coïncident avec les conditions techniques et climatiques (la réalité) de notre pays.

# Bibliographie

## **Bibliographie :**

[0]- LOKYANOVA.B.C, «littérature nationale de la théorie et l'utilisation pratique de la méthode d'analogie hydraulique dans le transfert thermique », Moscou, 1996.

[1]- RENIE, C ; PLOURIN, A ; BELIAFF, N et MATHIVAT,J. « le pont du Bon Homme », Revue travaux ; N°10, Allemagne ; 1973.

[2]- Ponts en béton précontraint construit par encorbellements successifs, SETRA, France ; 1993.

[3]- MATHIVAT, J .«Evolution et récents développement des ponts à voussoirs préfabriqués », ANNALES ITBTP, N°09, France, 1976.

[4]- MATHIVAT, J .«construction par encorbellement », éditions EYROLLES , Paris, 1979.

[5]- Construction des fléaux dans le ponts en encorbellement successifs, cours des ponts et chaussée, Paris, 1992.

[6]- DABROVSKI, R. « GEKRUMMTE dünnwandige Träger »- Berlin, 1961.

[7]- Historique de la construction et ouvrage en encorbellement, cours de l'école centrale des ponts et chaussées, Paris, 1999.

[8]- Ponnine, A.L ; « architecture des constructions modernes étrangères », Moscou, 1974, 168 PP.

[9]- MATHIVAT, J .«Ouvrage d'art », numéros spécial de L'Ingénieur construction, N°04 , Paris, 1971.

[10]- GUYON- MASSONNET- BARES. « les ponts en encorbellement successifs », DUNOD, Paris, 1968.

[11]- GUYON, Y, « constructions en béton précontrainte », Tome1, Edition EYROLLES, Paris, 1966.

- [12]- MULLER,J . « Construction par encorbellement des ponts en béton précontraint ». (Revue travaux), numéro 11, Paris, 1972.
- [13]- CHAUDISA, GULES,J. « Evolution de la technique de construction des ponts en encorbellements en France », Revue travaux, numéro 1, Paris, 1966.
- [14]- SCHINDIER, A ; Bures, J. « NAVVHOVANI OCELEVYCH möstu » ; PRAHA SNTL, Techekslovakya ; 1980 ; 484 PP.
- [15]- ROBERT et MUNETTE ; « Calcul des systèmes hyperstatiques» ; Liège, 1945.
- [16]- ROSELI, A et WALTHER,R. « the analysis of prestressed multi-beam bridges as orthotropic plates » the civil Engineer 12, N° 3,4, London, 1958.
- [17]- COURBON, J ; « pont de PYLE » Annales ITBTP, numéro 12 , Paris, 1968.
- [20]- COST, J-F ; « franchissement de la Seine par le pont aval», Annales ITBTP, numéro 10, Paris, 1968.
- [19]- BOUDINE,A.Y ; « Construction à section mince », Edition construction, Moscou, 1999.
- [20]- ALBIGES, M ; COIN,A ; « Resistances des Matériaux », Edition EYROLLES, Paris, 1982.
- [21]- STEDINE, P. « Résistance des Matériaux », Edition mir, Moscou, 1983.
- [22]- MOKICE, P. B. « the minimum strength of slab bridges» ; Meg. Of correcte, N°23, New York, 1954.
- [23]- LACROIX,R ; FUENTES, A ; « collection cours de L'ENPC» ; Edition EYROLLES, Paris,2002.
- [24]- NIKIROV, A. « Element de théorie des Fonctions Spéciales » ; Moscou,1978.

- [25]- VLADIMIROV, V.S ; « Equation of Mathématique – Physics » ; Moscou , 1983.
- [26]- BOLI, B. et OUELER, D ; « théorie de la contrainte de chaleur » ; Edition mir, Moscou,1998.
- [27]- KARCLOY,D ; « thermique dans les solides », en Russe, Edition NAOUKA, Moscou, 1996.
- [28]- SATLY, A.L ; « nouvelle méthode de calcul des structures en béton tenant compte du transfert de chaleur » ; en Russe, Edition du transport, Moscou, 1999.
- [29]- CHLILOVER, A.M ; « principe de calcul Thermique des structure » ; Edition transport ; Saint Peters bourg, 1994.
- [30]- HOMBERG, J ; « Theory of prismatic Felded plate structures » ; JABSE, Frankfort, 1990.
- [31]- VENTSEL, H. « théorie des probabilités » Edition Mir, Moscou, 2002.
- [32]- NIKIFOROV, A. et OUVAROVE, V. « Fonctions Spéciales de la physique mathématique », Edition Mir, Moscou, 1978.
- [33]- LEONNARDT, F ; KOLBE, G and PETER, J. « Temperatutumterschiede gefährden Spannbertonbrucke beton and Spannbeton ban » ; Heft 7, Berlin, 1965.
- [34]- BOUGROV, Y .et NIKOLSKI, S ; « cours de mathématique supérieure » edition Mir, Moscou, 1983.
- [35]- YABLONSKI, S ; « Introduction aux mathématiques discrètes » ; Edition Mir, Moscou, 1983.

- [36]- BARES, R et MASSONNET, C ; « calcule des grillages de poutres et dalles orthotropes selon méthode de GUYON-MASSONNET-BARES » ; Edition SNTL et DUNOD, 1966.
- [36-a]- BRUNO CHERON ; « Transferts thermiques » ; Ellipses / Edition marketing S.A, Paris, 1999.
- [36-b]- NIKIROV, A.T, « Elément de théorie des fonctions spéciales », Edition Mir, Moscou, 1978.
- [36-c]- VLADIMIROV, V.S, « Equation of mathematical-physics », Edition Mir, Moscou, 1983.
- [36-d]- MATHIVAT, J. «Construction par encorbellement des ponts en béton précontrainte », Paris, 1979.
- [37]- ABSI, E ; « Généralisation de la théorie de consolidation de Terzaghi au cas d'un multicouche » ; Annales ITBTP ; N° 51(juillet-Août 1965).
- [38]- CAQUOT, A et KERISEL, J ; « Traité de mécanique des sols » ; 4<sup>e</sup> Edition, Gauthier-villars (paris, 1966), 509 pages.
- [39]- COSTET, J, et SANGLERAT, G, « Cours pratique de mécanique des sols » ; Tome 1 : plasticité et calculs des tassements, Edition DUNOD, Paris, 1975.
- [40]- COSTET, J, et SANGLERAT, G, « Problèmes pratiques de mécaniques des sols » ; Tome 1 : Généralité, Plasticité, Calcul des tassements, Interprétation des essais in situ, Edition DUNOD, Paris, 1975.
- [41]- SANGLERAT, G GIROUSSE, L et BARDOT, F ; « contrôle in situ des prévisions de tassements basées sur les essais de pénétration statique pour 79 ouvrage sur 17 sites différentes » Annales ITBTP, N°369, France, février 1979, pp30-50.

[42]- SOULIER, F, DOUSSOT, M, SANGLERAT, G et BARDOT, F ; « prévision et mesures in situ des tassements des remblais de préchargement à l'emplacement de deux réfrigérants pour la centrale nucléaire de Bugey , Technica » ; N°390, Lyon, 1976, PP 30-34.

[43]- GIROUD, J,P ; « Tables pour les calculs des fondations » ;

Tome1 : Tassement, DUNOD, Paris, 1972.

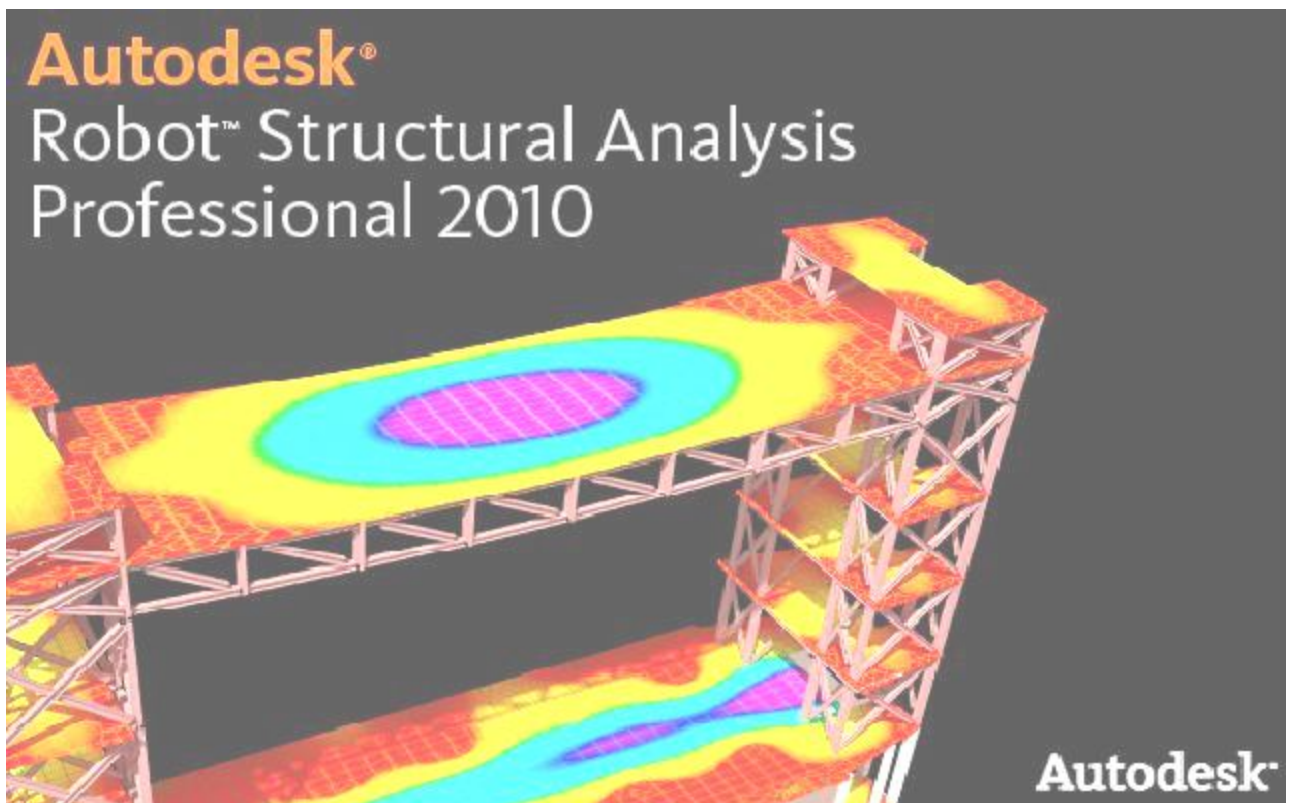
Tome2 : Tassement, DUNOD, Paris, 1973.

# Annexes

## ANNEXE 01 : Description générale du logiciel de calcul

### I. Introduction

Le système **Robot Structural Analysis Professional 2010** est un progiciel CAO/DAO destiné à modéliser, analyser et dimensionner les différents types de structures. Robot Structural Analysis Professional 2010 permet de modéliser des structures, les calculer, vérifier les résultats obtenus, dimensionner les éléments spécifiques de la structure ; la dernière étape gérée par Robot Millenium est la création de la documentation pour la structure calculée et dimensionnée.



**Figure V.1 Fenêtre du logiciel de calcul Robot Millenium**

### II. Les caractéristiques principales du progiciel :

- Définition de la structure à réaliser en mode entièrement graphique dans l'éditeur conçu, vous pouvez aussi ouvrir un fichier au format DXF et importer la géométrie d'une structure définie dans un autre logiciel CAO/DAO (**Auto CAD**) ;

- Possibilité de présentation graphique de la structure étudiée et de représentation à l'écran des différents types de résultats de calcul (efforts internes, déplacements, travail simultané en plusieurs fenêtres ouvertes etc.) ;
- Possibilité de calculer (dimensionner) une structure et d'en étudier simultanément une autre (architecture multithread) ;
- Possibilité d'effectuer l'analyse statique et dynamique de la structure ;
- Possibilité d'affecter le type de barres lors de la définition du modèle de la structure et non pas seulement dans les modules métier (très utile pour accélérer le dimensionnement) ;
- Possibilité de composer librement les impressions (notes de calcul, captures d'écran, composition de l'impression, copie des objets vers d'autres logiciels).

Le système **Robot Structural Analysis Professional 2010** regroupe plusieurs modules spécialisés dans chacune des étapes de l'étude de la structure (création du modèle de structure, calcul de la structure, dimensionnement). Les modules fonctionnent dans le même environnement.

### **III. Principes de fonctionnement du logiciel :**

Comme tous les logiciels de calcul de structures Robot Structural Analysis Professional 2010 utilise la méthode des éléments finis, les méthodes énergétiques et la théorie de l'élasticité pour la détermination des éléments de réductions ( $M_f$ ,  $M_t$ ,  $N$  et  $T$ ) et les déformé des éléments de structure.

#### **1ere étape :**

Le logiciel nécessite la définition des caractéristiques (préférences) de l'affaire c'est à dire :

- Définition de langue de travail ;
- Définition des caractéristiques des matériaux ;
- Définition des unités et de système métrique utilisé ;
- Définition des normes et règlements.

#### **2eme étape :**

Le logiciel nécessite la définition la structure :

- Définition de la grille de système d'axe ;
- Définition des éléments verticaux ;
- Définition des éléments horizontaux ;
- Définition des points singuliers (particularités et vides éventuels) ;
- Définition des conditions d'appuis.

**3eme étape :**

Le logiciel nécessite la définition et l'application des chargements de la structure. Le logiciel génère automatiquement le poids propre des éléments de structures noté comme des charges permanentes (pp)

- Définition des charges permanentes additionnelles (poids des éléments secondaires (CCP)) ;
- Définition des charges d'exploitation (trafic) ;
- Définition des charges ponctuelles éventuelles.

**4eme étape :**

Choix de type d'analyse de structure

- Analyse sous charges permanente ;
- Analyse sous les surcharges d'exploitation ;
- Analyse modale ;
- Analyse sismique.
- Analyse thermique en profondeur, c'est-à-dire selon l'axe OZ

**5eme étape :**

Définition des combinaisons de calcul et coefficients de pondération.

**6eme étape :**

Lancement de calcul.

**7eme étape :**

Affichage et édition éventuelle des résultats.

## ANNEX 02 : CONCEPTION DES PONTS CONSTRUITS PAR ENCORBELLEMENT

### I. Pré dimensionnement

#### I.1 Configuration longitudinal :

Dans les ouvrages dont la portée des travées est inférieure à **60 m**, les ponts en béton précontraint construits par encorbellement successif sont généralement réalisés avec un tablier de hauteur constante ( $H_c = H_p$ ).

Mais pour des travées de très grandes portées (**supérieure à 60m**), on opte pour la réalisation d'un tablier à hauteur variable et ce pour des raisons économiques avant tout et aussi esthétiques.

- **Hauteur des voussoirs :**

La hauteur sur pile  $H_p$  est généralement égale à la hauteur sur clé  $H_c$ . La relation suivante nous permet de déterminer cette hauteur :

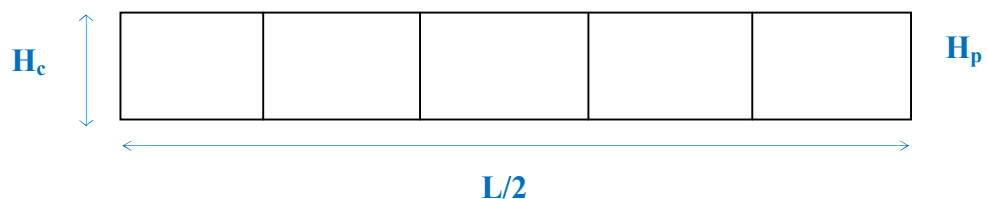
$$\frac{L}{20} \leq H_p = H_c \leq \frac{L}{23}$$

Tel que  $L$  désigne la portée de la plus grande travée adjacente à la pile considérée.

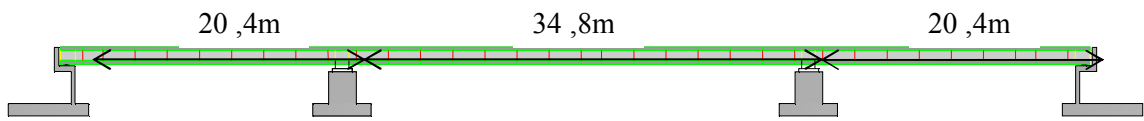
On prend :  $H_p = \frac{L}{23} = 1,5m$  avec  $H_c = H_p$

Comme illustré dans la figure ci-dessous, les hauteurs  $H_p$  et  $H_c$  :

$$0 \leq x \leq L: H(x) = H_c = 1,50m$$



**Figure II.1 Hauteur du tablier**



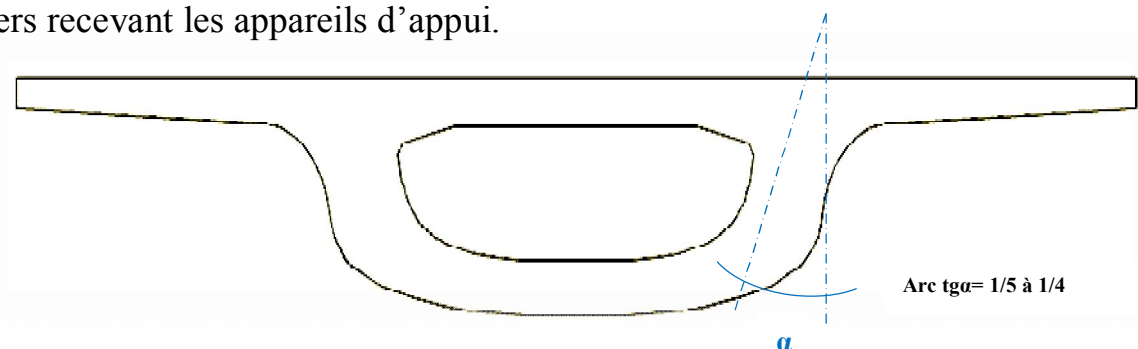
**Figure II.2. Coupe longitudinale de l'ouvrage**

## II.2 Caractéristiques des sections :

### 11.2.1 Nombre et forme des poutres caissons typiques :

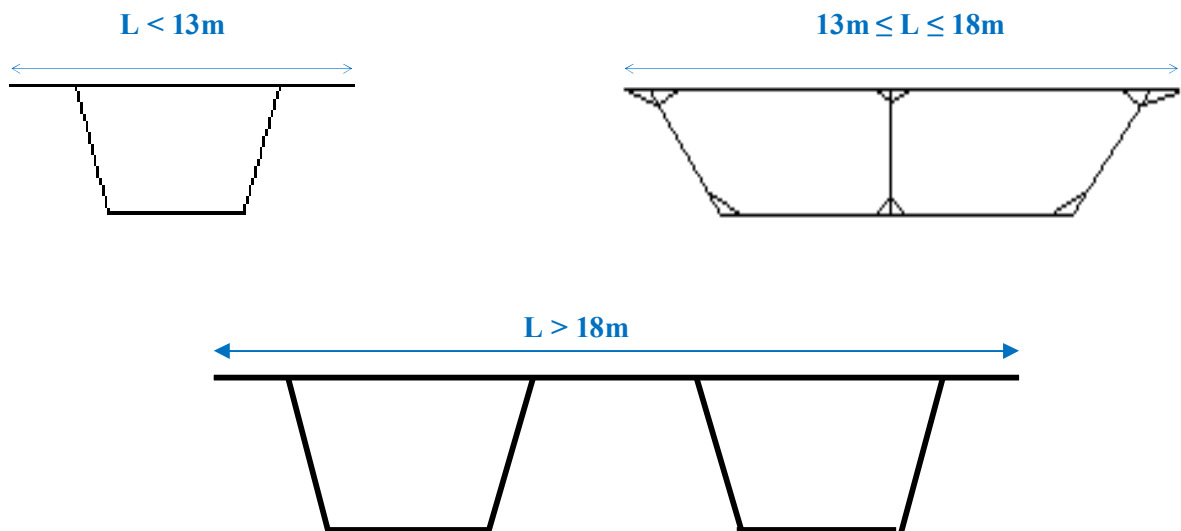
Le nombre et la forme des poutres caissons dépendent avant tout de la largeur « L » du tablier. Si cette dernière ne dépasse pas **13 m**, c'est la poutre caisson unique à deux âmes de forme classique qui s'impose (caisson uni cellulaire). Les âmes peuvent être soit verticales, soit inclinées. Cette dernière disposition améliore l'aspect architectural. Dans cette dernière hypothèse qui est appliquée pour des hauteurs de tablier variable, l'arc tangente de l'angle représentant l'inclinaison des âmes sur la verticale doit être compris entre  $\frac{1}{5}$  et  $\frac{1}{4}$ .

Cette inclinaison des âmes permet de gagner un peu sur le poids du hourdis inférieur dans la zone où l'on a pu donner à celui-ci une épaisseur minimale (pour des raisons constructives), elle permet surtout de diminuer la dimension des sommiers recevant les appareils d'appui.



**Figure II.3 Inclinaison des âmes**

Si la largeur «  $L$  » est comprise entre 13m et 18m, c'est la poutre caisson à trois âmes qui s'impose, mais au-delà de 18m, l'association de deux poutres caissons simples, reliées par le hourdis supérieur, permet de réaliser le tablier.



**Figure II.4 Différentes formes de la section transversale en fonction de la largeur du tablier**

Notre pont a pour largeur  $L=10\text{m} < 13\text{m}$ . Donc on aura une poutre caisson unique à deux âmes. Bien sûr on ne tiendra pas compte de l'inclinaison ( $\text{Arc } \text{tg}\alpha = 1/5 \text{ à } 1/4$ ) le tablier est de hauteur constante.

#### **A) Épaisseur des âmes :**

L'épaisseur des âmes est conditionnée à la fois par le type de calage adopté et par les conditions de résistance à l'effort tranchant. Lorsqu'il s'agit d'un câblage traditionnel, nous avons vu que les câbles de fléau descendaient dans les âmes pour s'ancrer sur leur tranche. L'épaisseur minimale de ces dernières est donc déterminée par la dimension des organes d'ancrages. Un certain enrobage de béton est nécessaire sur le bord de ces organes, de sorte que, par exemple, l'épaisseur minimale des âmes doit être de l'ordre de 36cm avec un câblage à base d'unité **12T13**, de **44cm** avec des unités **12T15** et de **59cm** avec des unités **19T15**.

Dans notre projet, l'épaisseur des âmes «  $ea$  », est prise égale à **66cm**. Cette épaisseur reste constante dans tous les voussoirs de travée ainsi que pour les voussoirs sur piles et sur culées. On remarquera que cette épaisseur dépasse nettement la section pré dimensionnée, ce qui est dû au raccourcissement de la hauteur du tablier (pour augmenter la rigidité du tablier). Ce raccourcissement a été compensé par un épaissement des âmes.

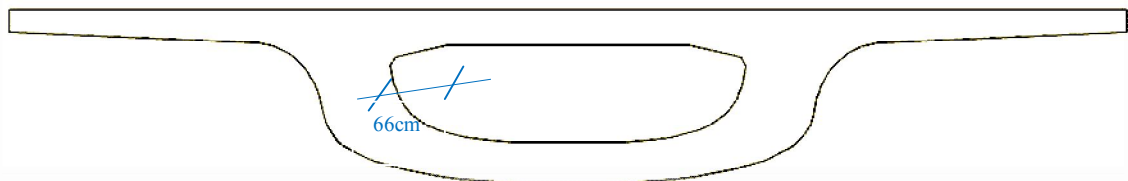


Figure II.5 Épaisseur de l'âme

### B) Distance entre axe des âmes :

En appelant «  $b$  » la portée entre axe des âmes (au niveau de leur enracinement sur le hourdis) et «  $L$  » la largeur totale du tablier, on adopte généralement une disposition telle que : «  $L=2b$  »

**Dans notre cas,  $b=5m$  car  $L=10m$**

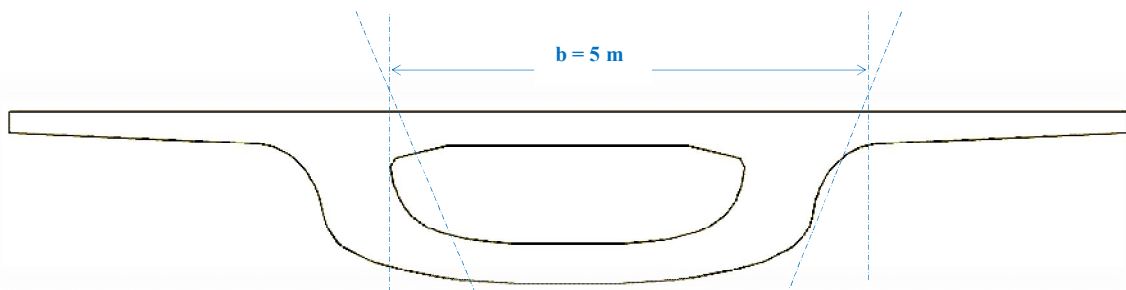


Figure II.6 Distance entre axes

### C) Épaisseur du hourdis supérieur :

Le hourdis supérieur « es » est essentiellement dimensionné par sa résistance à la flexion transversale sous l'effet des charges concentrées. Le raccordement du hourdis aux âmes se fait à l'aide des goussets, pour faciliter la mise en place du béton et permettre le logement des câbles de fléaux. Il peut être judicieux de donner au hourdis une épaisseur linéairement variable au voisinage des goussets : la section résistante est ainsi épaissie là où les moments de flexions sont les plus élevés.

Ceci conduit à une épaisseur courante telle que  $b/es = 25 \text{ à } 30 \text{ cm}$ .

$$es = \frac{b}{25} = \frac{500}{25} = 20 \text{ cm}$$

On prendra une épaisseur de **30cm** qui sera constante la même pour tous les voussoirs qui constitueront le tablier.

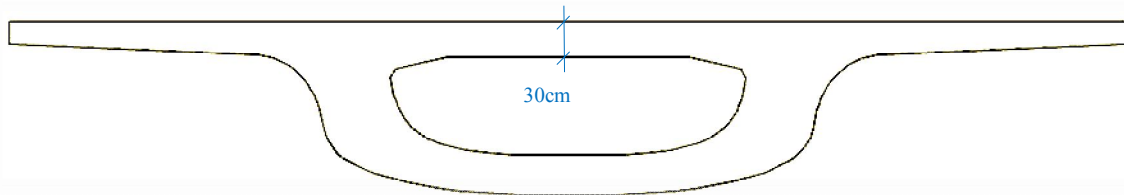


Figure II.7 Épaisseur du hourdis supérieur

### D) Épaisseur du hourdis inférieur :

L'épaisseur du hourdis inférieur « ei » est fixée suivant plusieurs paramètres :

- Intensité des efforts de compression en phase de construction et de service.
- Le logement des câbles de continuité.
- La poussée au vide due à ces câbles.
- L'ancrage de ces câbles et diffusion des efforts de précontrainte correspondants.
- La mise en place du béton.

L'épaisseur du hourdis inférieur n'est pas la même sur pile qu'à la clé.

### A la clé :

$e_{ic} \geq \max \{18\text{cm} ; 3\phi ; ea/3\}$  , avec  $\phi$ , le diamètre d'encombrement des câbles et  $ea$ , l'épaisseur de l'âme, d'où on a:

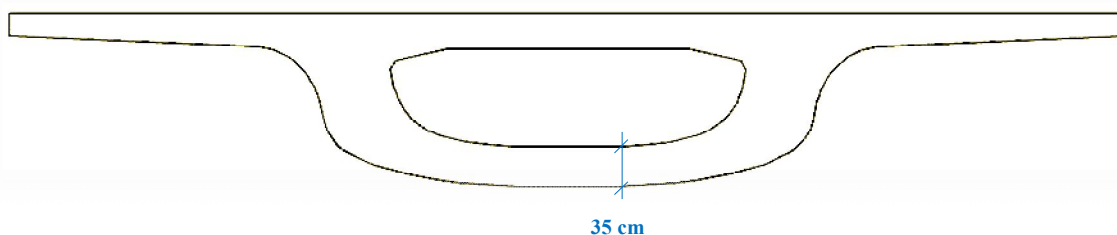
$e_{ic} \geq \max \{18\text{cm}; 36\text{cm}; 22\text{cm}\}$ , On prend  $e_{ic} = 35\text{ cm}$

### Sur pile :

$$e_{ip} = \begin{cases} (2 \text{ à } 3)e_{ic} & \text{si le tablier est de hauteur variable.} \\ (2.5 \text{ à } 3)e_{ic} & \text{si le tablier est de hauteur constante.} \end{cases}$$

On trouve  $e_{ip} = 87\text{ cm}$

Ici pour «  $e_{ip}$  » on prendra la même valeur que «  $e_{ic}$  » car  $35\text{ cm}$  suffit largement pour satisfaire les conditions prédéfinies avant, donc on a :  $e_{ic} = e_{ip} = 35\text{ cm}$ .

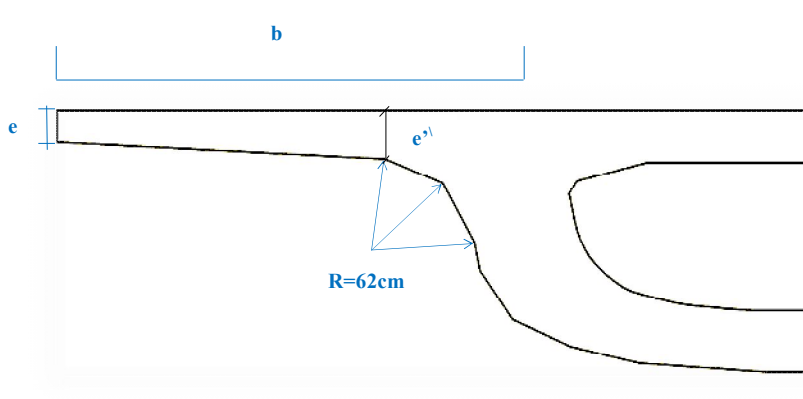


**Figure II.8 Épaisseur du hourdis inférieur**

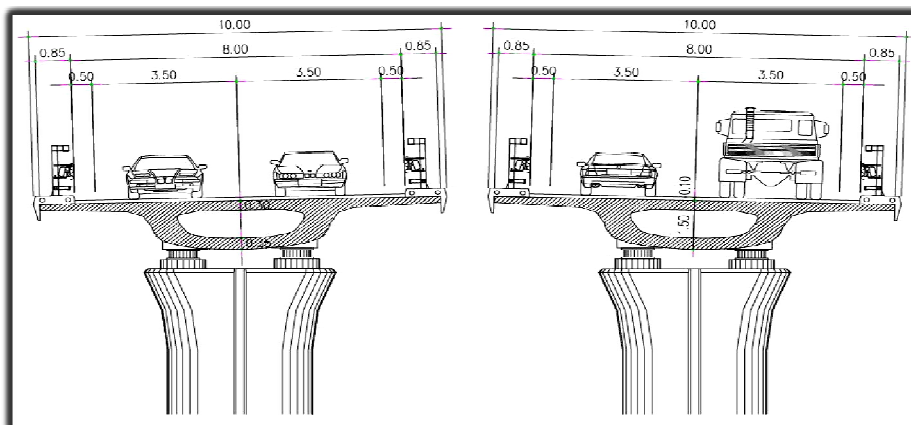
### **E) Les Goussets :**

Les goussets de l'hourdis supérieur doivent être dimensionnés pour loger les câbles de fléaux, faciliter la mise en place du béton et améliorer l'encastrement de l'hourdis sur les âmes. Les goussets de l'hourdis inférieur trouvent leurs utilités pour disposer soit l'ancrage des câbles de fléaux soit tout ou une partie des câbles de continuité.

$$e = 18.4 \text{ cm} \quad e' = 27.9 \text{ cm} \quad b = 2.5 \text{ m}$$



**Figure II.9 Section transversale sur les goussets**

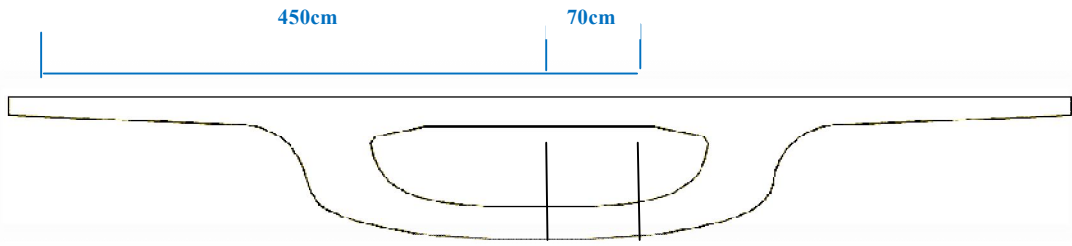


**Figure II.10 Coupe typique du tablier**

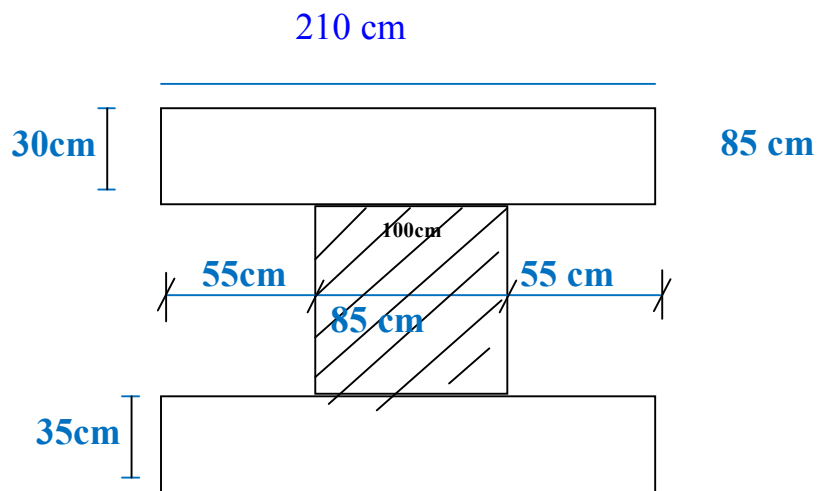
## II.2.2 Nombre et forme des poutres caissons sur pile :

Pour les voussoirs sur pile, leurs géométries et leurs caractéristiques sont exactement les mêmes que celles des voussoirs courants à la différence que :

- On rigidifie sensiblement les voussoirs, jusqu'à les rendre semi pleins,
- On ne laisse qu'un trou d'homme pour permettre le passage aux équipes spécialisées, chargées de la maintenance et l'entretien de l'échangeur.



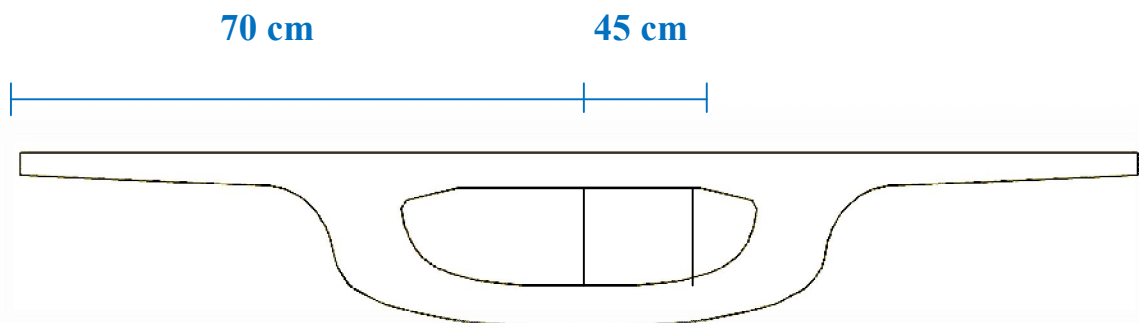
**Figure II.11 Section transversale du voussoir sur pile**



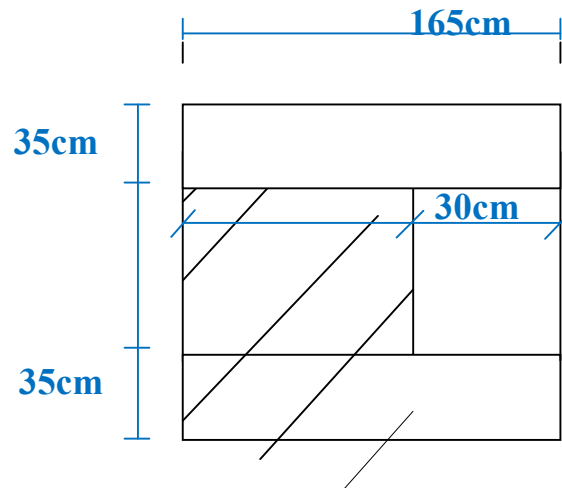
**Figure II.12 Coupe longitudinale du voussoir sur pile**

### II.2.3 Nombre et forme des poutres caissons sur culée :

Les voussoirs sur culée présentent les mêmes caractéristiques géométriques que les voussoirs courant à la différence que ces derniers présentent des sections pleines, comme représentée sur les figures suivantes :



**Figure II.13 Section transversale du voussoir sur culée**



**Figure II.14 Coupe longitudinale du voussoir sur culée**

**- Les avantages :**

- ✓ La durée d'utilisation (l'entretien) est plus longue
- ✓ Sa structure de pont donne la belle forme esthétique
- ✓ La portée de ce pont est plus grande
- ✓ Rapidité de construction (cas des ouvrages à voussoirs préfabriqués)
- ✓ Ce type de profilé fermé présente une rigidité à la torsion : Faible rotation du tablier
- ✓ Ce type de profilé fermé présente une rigidité à la torsion : Faible rotation du tablier
- ✓ Pour des travées continues, les ponts caissons sont très recommandés.

**- Les inconvénients :**

- ✓ Etude peu délicate.

- **Analyse multicritères « qualitative » :**

- **Critères de choix :**

Afin de retenir une variante, une comparaison sera effectuée du point de vue :

- **L'esthétique.**
- **La facilité de réalisation.**
- **Entretien.**

**Tableau II.1 Notation des variantes**

<b>variantes</b>	<b>Pont caisson</b> <b>Hauteur constant</b>	<b>Pont a poutres</b> <b>Pré contraint</b>
<b>Esthétique/20</b>	<b>15</b>	<b>10</b>
<b>Exécutions/15</b>	<b>12</b>	<b>12</b>
<b>Entretien/10</b>	<b>5</b>	<b>8</b>
<b>total</b>	<b>32</b>	<b>30</b>

- **Conclusion :**

Les tabliers construits par encorbellement à hauteur constante conviennent que dans une gamme de portée limitée, de l'ordre de 60 à 70 m, ou peut tolérer même moins de 60m. Ce type de tablier est fortement concurrencé par les ponts à poutres précontrainte ou les ponts en ossature mixte. Mais, parmi les trois variantes proposées nous en venons à choisir la variante N°03, qui fera l'objet de notre étude. Pour des raisons que ce type de tablier mal maîtrisée dans notre pays, et pour convoier le dernier développement dans le domaine de construction des ponts.

Le bureau d'études chargé de l'étude et de la conception de l'**échangeur** a opté pour la géométrie précédente des voussoirs du tablier et ce pour deux raisons primordiales :

- Le respect de la ligne rouge du tracé de la route ;
- Et le respect du gabarit vertical minimum qui est de **5.50 m**.
- **Résumé détaillé :**

Dans le tableau suivant, on se propose de vous résumer l'ordre de disposition de l'ensemble des voussoirs qui composent le tablier ainsi que la longueur de chacun.

**Tableau II.2. Dispositions et longueurs des voussoirs**

Désignation	Longueur (m)	Désignation	Longueur (m)	Désignation	Longueur (m)
voussoir N°1	1,65	voussoir N°13	2,4	voussoir N° 25	2,1
voussoir N°2	1,5	voussoir N°14	2,4	voussoir N° 26	2,4
voussoir N°3	2,41	voussoir N°14	2,4	voussoir N° 27	2,4
voussoir N°4	2,4	voussoir N°16	2,4	voussoir N° 28	2,4
voussoir N°5	2,4	voussoir N°17	2,4	voussoir N° 29	2,4
voussoir N°6	2,4	voussoir N° 18	1,51	voussoir N° 30	2,4
voussoir N°7	2,4	voussoir N° 19	2,4	voussoir N° 31	2,4
voussoir N°8	2,4	voussoir N° 20	2,4	voussoir N° 32	1,51
voussoir N°9	2,4	voussoir N° 21	2,4	voussoir N° 33	2,4
voussoir N°10	2,1	voussoir N° 22	2,4	voussoir N° 34	1,65
voussoir N°11	2,4	voussoir N° 23	2,4	-	-
voussoir N°12	2,4	voussoir N° 24	2,4	-	-

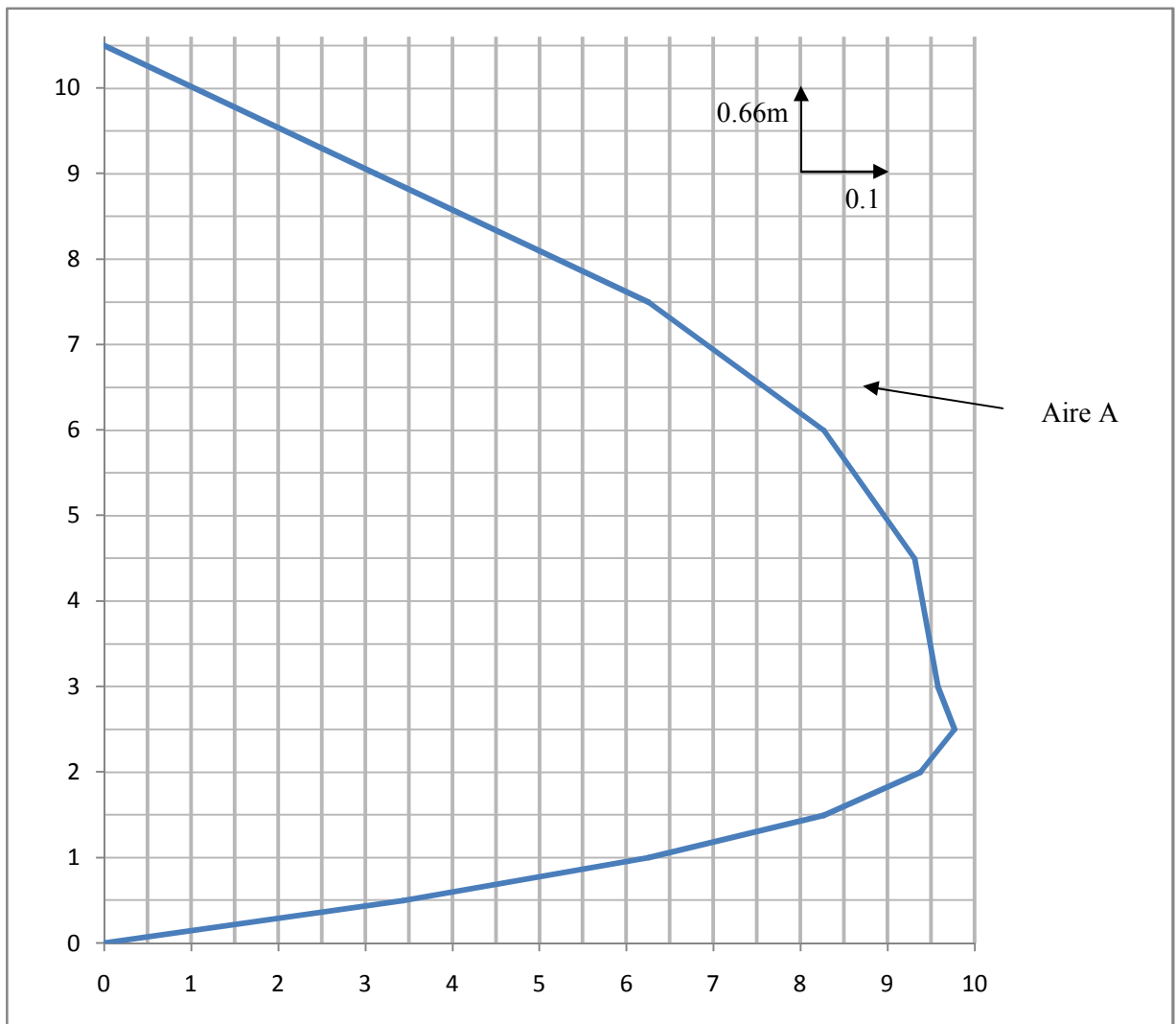
Dans les tableaux suivants, on se propose de vous résumer l'ensemble des résultats qui composent le dimensionnement et les caractéristiques d'un voussoir de travée typique

**Tableau II.3 Tableau Récapitulatif**

Désignation	Notation	Épaisseur	Unité
Épaisseur des âmes	$e_a$	66	cm
Épaisseur du hourdi supérieur	$e_s$	30	cm
Épaisseur du hourdi inférieur	$e_i$	35	cm
Les goussets	$e$	18,4	cm
	$é$	27,9	cm
	$b$	2,5	m

**Tableau II.4 Tableau Récapitulatif**

Désignation	Notation	Longueur	Unité
Hauteur sur pile	$H_p$	1,5	m
Hauteur sur culée	$H_c$	1,5	m
Distance entre axes	$b$	5	m



La pression interstitielle  $U$  en fonction de  $z$  pour  $t_1 = 5. \Delta t$

$$A \approx 35.5 \text{ cm}^2$$

$$U = 35.5/105 \approx 34\%$$