

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

L'inverse de la somme de deux opérateurs sectoriels

Présenté par

Asma Hadjari

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury

Présidente	Mme	Limam Kheira	M. C. B	U. MOSTAGANEM.
Examinateur	Mr	Haoua Rabeh	M. A. A	U. MOSTAGANEM.
Encadreur	Mr	Mdeghri Ahmed	Professeur	U. MOSTAGANEM.

Table des matières

Introduction	i
1 Rappels et outils	iii
1.1 Définitions et exemples	iii
1.2 Les espaces d'interpolation	vi
1.3 Le calcul H^∞	vii
1.4 L'argument d'extension sectoriel	viii
2 Equation opérationnelle :L'inverse de $A + B$	ix
2.1 Définitions	ix
2.2 Théorème et preuve	xi
3 Application à un problème parabolique	xx
3.1 Théorème	xxi
4 Problème hyperbolique	xxiii
4.1 Problème hyperbolique abstrait	xxiii
4.1.1 Théorème et preuve	xxiii
Bibliographie	xxvii

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude d'une équation linéaire abstraite sur un espace de Banach par l'utilisation de l'inverse de la somme de deux opérateurs sectoriels.

On montre que la bornitude d'un type special du H^∞ -calcul pour les opérateurs sectoriels est suffisante pour obtenir la régularité maximale de la solution.

On considère l'équation abstraite sur un espace de Banach E de la forme

$$(A + B)x = y \tag{0.0.1}$$

Où A, B sont des opérateurs linéaires fermés qui commutent au sens des résolvantes. Les résultats sur l'inverse de la somme sont prouvés

Comme application : on s'intéresse aux conditions suffisantes et à la régularité maximale de la solution, pour un problème parabolique abstrait et un problème hyperbolique abstrait.

Tout ses résultats proviennent de l'article de **Nikolaos Roidos**"**On the inverse of the sum of two operators**" Journal of functional Analysis 265 (2013) 208-222.

Approche de **Da Prato et Grisvard** :

Dans [3] ces auteurs montrent que la propriété de sectorialité pour les opérateurs A et B est suffisante pour l'existence d'une solution unique de (0.0.1) pour tout $y \in E$.

La fermeture de deux opérateurs fermés A et B est reliée à la régularité maximale de la solution .

Approche de **Dore et venni** :

Dans [4] ces auteurs étudient le problème (0.0.1) dans le cas des espaces UMD , pour les opérateurs BIP , et donnent une condition suffisante pour la fermeture de la somme et d'où pour la régularité maximale de la solution.

Approche de **Kalton et Weis** :

Dans [6] ces auteurs utilisent le rapport entre la bornitude du calcul fonctionnel et la fermeture de la somme de deux opérateurs sectoriels :

Proposition 0.0.1 *soient A et B deux opérateurs sectoriels qui commutent au sens des résolvantes et de types respectivement ω et ω' avec $\omega + \omega' < \pi$ et $\omega < \mu < \pi - \omega'$ et*

$\omega' < \mu' < \pi - \mu$. F définie dans $H^\infty \left(\sum_\mu \times \sum_{\mu'} \right)$ par

$$F(z, z') = \frac{z}{z + z'} \forall (z, z') \in \sum_\mu \times \sum_{\mu'}$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

I $F(A, B) \in \mathcal{L}(E)$.

II $A + B$ est un opérateur fermé et $\exists C > 0$, $\forall x \in D(A) \cap D(B)$, $\|Ax\| \leq C \|Ax + Bx\|$

Kalton-Weis donnent une autre réponse pour la question de régularité, en exigeant qu'un opérateur admet un H^∞ -calcul et l'autre est R -sectoriel.

Ce mémoire est divisé en 4 chapitres :

1. Dans le premier chapitre on rappelle quelques définitions et propriétés des opérateurs.
2. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du résultat pour une équation abstraite.
3. Dans le troisième chapitre on étudie un problème parabolique abstrait (avec condition initiale).
4. Finalement le quatrième chapitre est consacré à l'étude d'un problème hyperbolique abstrait avec un exemple.

Rappels et outils

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions sur les opérateurs et on cite quelques exemples. On explicite aussi la notion d'argument d'extension sectorielle.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1 "*Opérateur linéaire*"

A est un opérateur linéaire sur un espace de Banach E si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset E$. (Dit domaine de A à valeur dans E). On désigne par $L(E)$ l'espace des opérateurs linéaires continus définis sur E ($D(A) = E$). Cet espace muni de la norme

$$\|A\|_{L(E)} = \sup \{ \|Ax\| : x \in E; \|x\|_E = 1 \}$$

est un espace de Banach.

Définition 1.1.2 "*Le graphe*"

Le graphe $\Gamma(A)$ de l'opérateur A est le sous ensemble de $H \times H$ (où H est un espace de Hilbert), défini par

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$$

la linéarité de A implique que $\Gamma(A)$ est un sous espace vectoriel de $H \times H$, et un espace pré-hilbertien pour le produit scalaire

$$\langle (u, v), (z, t) \rangle = \langle u, z \rangle + \langle v, t \rangle.$$

Définition 1.1.3 "Opérateur fermé"

L'opérateur A est fermé si son graphe est fermé de E dans $H \times H$.

Proposition 1.1.1 $A : D(A) \rightarrow H$ est un opérateur linéaire fermé si et seulement si pour tout $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \\ Ax_n \rightarrow y \end{array} \right. ; \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D(A) \\ Ax = y. \end{array} \right.$$

Définition 1.1.4 "L'extension"

On dit qu'un opérateur A_1 est une extension d'un opérateur A si

$$\Gamma(A) \subset \Gamma(A_1).$$

On écrit alors $A \subset A_1$.

Définition 1.1.5 "Opérateur fermable "

Un opérateur A est dit fermable s'il possède une extension fermée. Si c'est le cas, il possède une plus petite extension fermée (au sens de l'inclusion des graphes) appelée fermeture de A et notée \overline{A} .

Remarque 1.1.1 Il peut se produire que la fermeture de $\Gamma(A)$ dans $H \times H$ ne soit pas le graphe d'un opérateur linéaire, et dans ce cas A n'est pas fermable. On a en effet le résultat suivant :

Proposition 1.1.2 A est fermable si et seulement si $\overline{\Gamma(A)}$ est le graphe d'un opérateur linéaire, et alors

$$\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}.$$

Preuve. soit $\overline{\Gamma(A)}$ est le graphe d'une application linéaire si et seulement si $(0, \Psi) \in \overline{\Gamma(A)} \Rightarrow \Psi = 0$. Si $\overline{\Gamma(A)}$ est un graphe, soit R l'opérateur de domaine

$$D(R) = \left\{ \varphi, \exists \Psi, (\varphi, \Psi) \in \overline{\Gamma(A)} \right\}$$

et définit par

$$R(\varphi) = \Psi(\varphi \in D(R))$$

il existe exactement un Ψ tel que $(\varphi, \Psi) \in \overline{\Gamma(A)}$. le graphe de l'opérateur R est clairement $\overline{\Gamma(A)}$, et $(R, D(R))$ est donc une extension fermée de A . Si S est une extension fermée de A , alors $A(S)$ est un fermé contenant $\Gamma(A)$, donc aussi $\overline{\Gamma(A)}$. il en résulte que $R = \overline{A}$. Si A est fermable, soit S une extension fermée. Puisque $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(S)$, la caractérisation prouvée au début de la démonstration montre que $\overline{\Gamma(A)}$ est un graphe. \square

Définition 1.1.6 "Opérateur borné"

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés un opérateur borné de X dans F est une application linéaire continue $A : X \rightarrow F$, telle que

$$\exists C > 0; \forall u \in X; \|Au\|_F \leq C \|u\|_X.$$

On désigne par $\mathcal{L}(X, F)$ l'ensemble des opérateurs bornés de X dans F ; l'orsque $X = F$ on notera $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Exemple 1.1.1 Soient F un espace de Hilbert et a un vecteur normé donné de F , l'opérateur A définit, pour tout $x \in F$, par

$$Ax = \langle a, x \rangle a;$$

est borné et l'inégalité de Cauchy Shwartz montre que :

$$\|Ax\| = 1.$$

A est la projection sur la direction a . $D_A = F$ mais R_A est le sous espace vectoriel de E engendré par a .

Exemple 1.1.2 Une application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est toujours un opérateur borné.

Définition 1.1.7 "Opérateur non borné"

Un opérateur linéaire A d'un sous espace $D(A)$ sur l'espace de Banach E est appelé un opérateur non borné de domaine $D(A)$.

Définition 1.1.8 "La résolvante"

On appelle domaine résolvant de l'opérateur A l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\};$$

un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A .

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la résolvante de A au point λ , notée $R_\lambda(A)$, par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A .

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$; le spectre de A est la partie de \mathbb{C} définie par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(H)\}.$$

Définition 1.1.9 "Opérateurs R -sectoriels"

Soit F la famille des opérateurs bornés sur un espace de Banach E , on dit que F est R -sectoriel avec une R -sectoriel constante c si pour $(e_k)_{k=1}^\infty$ une suite indépendante de Rademacher sur un espace probabilisable, alors pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$ et $T_1, \dots, T_n \in F$. On a :

$$\left(E \left\| \sum_{k=1}^n e_k T_k x_k \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(E \left\| \sum_{k=1}^n e_k x_k \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Les espaces d'interpolation

- Soit E un espace de Banach, on désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, E)$ tel que $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions f définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ à valeur dans E telles que :

$$\left(\int_0^\infty \|f(t)\|_E^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E)} < \infty.$$

Si $p = \infty$, on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, E)$ par :

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, E) \Leftrightarrow \begin{cases} *f \text{ fortement mesurable} \\ * \text{supess } \|f(t)\|_E < \infty \end{cases}$$

- Soient E_0, E_1 deux espaces de Banach s'injectant continuellement dans un espace topologique séparé F . Les espaces $(E_0 \cap E_1)$ et $(E_0 + E_1)$ munis des normes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x\|_{E_0 \cap E_1} = \max_{x \in E_0 \cap E_1} (\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}) \quad x \in E_0 \cap E_1 \\ \\ \|x\|_{E_0 + E_1} = \max_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x \in E_0 + E_1}} (\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}) \quad x \in E_0 + E_1; \end{array} \right.$$

sont des espaces de Banach.

- On définit l'espace d'interpolation entre E_0 et E_1 noté $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ tels que pour $\theta \in [0, 1]$ et $p \in [1, \infty]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1 : x = u_0(t) + u_1(t) \\ \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E), t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E). \end{array} \right.$$

1.3 Le calcul H^∞

Définition 1.3.1 "Espace H^∞ "

L'espace H^∞ est l'ensemble des fonctions analytiques sur un secteur du plan complexe.

Définition 1.3.2 " H^∞ -calcul"

Le but est de construire $f(t)$ quand T est un opérateur sectoriel et f est une fonction holomorphe complexe.

On dit que l'opérateur A admet un H^∞ -calcul borné si :

$$\|f(-A)\| \leq c_A \sup_{\lambda \in \mathbb{C}/S_\theta} |f(\lambda)|, \forall f \in H_0^\infty(\theta);$$

où $c_A > 0$ indépendante de f .

Définition 1.3.3 "Régularité maximale"

A vérifie la L^p -régularité maximale si pour un p on a : $\forall g \in L^p(0, T; E)$ la solution unique de

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = Au(t) + g(t) \\ \\ u(0) = 0. \end{array} \right.$$

Vérifie :

$$f(t) = \int_0^t e^{(x-t)A} g(x) dx \in W^{1,p}(0, T; E).$$

Remarque 1.3.1 Dans le cas UMD l'hypothèse R -sectoriel est plus faible que BIP et on obtient la L^p -régularité maximale.

1.4 L'argument d'extension sectoriel

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ est fermé, et A est un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach E avec $\Omega \subset \rho(-A)$ et $(1 + |\lambda|) \|(A + \lambda)^{-1}\| \leq K$, $\forall \lambda \in \Omega$ et $\forall K \geq 1$. Soit

$$\Omega' = \bigcup_{\lambda \in \Omega} \{z \in \mathbb{C} / |z - \lambda| \leq (1 + |\lambda|) / 2K\}.$$

D'où, par la relation

$$A + z = (A + \lambda) (I + (z - \lambda)(A + \lambda)^{-1}),$$

on trouve que $(A + z)^{-1}$ est défini par rapport à Ω' et

$$\begin{aligned} \|(A + z)^{-1}\| &\leq \|(I + (z - \lambda)(A + \lambda)^{-1})\| \|(A + \lambda)^{-1}\| \\ &\leq \frac{2K}{1 + |\lambda|} \leq \frac{2K(1 + |\lambda| + |z - \lambda|)}{(1 + |\lambda|)(1 + |z|)} \\ &\leq \frac{2K}{(1 + |z|)} \left(1 + \frac{1}{2K}\right) = \frac{2K + 1}{1 + |z|}. \end{aligned}$$

Equation opérationnelle : L'inverse de $A + B$

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 "Opérateurs sectoriels"

Soit E un espace de Banach $k \geq 1$ et $\theta \in [0, \pi[$. Soit $P_k(\theta)$ la classe des opérateurs linéaires fermés définis dans E , vérifiant : si $A \in P_k(\theta)$ alors :

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} / |\arg z| \leq \theta\} \cup \{0\} \subset \rho(-A);$$

et $(1 + |z|) \|(A + z)^{-1}\| \leq k$.

Soit aussi $P(\theta) = \bigcup_k P_k(\theta)$ (i.e il existe au moins $k_0 : A \in P_{k_0}(\theta)$). Les éléments dans $P(\theta)$ sont des opérateurs sectoriels d'angle θ .

Si $A \in P(\theta)$, alors par l'argument d'extension sectoriel on a toujours $\theta > 0$.

Définition 2.1.2 Pour tout $\rho \geq 0$ et $\theta \in]0, \pi[$, soit $\Gamma_{\rho, \theta}$ la courbe positivement orientée

$$\{\rho e^{i\phi} \in \mathbb{C} : \theta \leq \phi \leq 2\pi - \theta\} \cup \{r e^{\pm i\theta} \in \mathbb{C} / r \geq \rho\};$$

si $\rho = 0$ on note $\Gamma_{\rho, \theta}$ par Γ_θ .

Définition 2.1.3 Soit E un espace de Banach et $A \in P(\theta)$, $\theta > \frac{\pi}{2}$. $H_{\mathcal{L}(E)}^{e, \infty}(\theta)$: l'espace des fonctions holomorphes bornées

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{C} \setminus S_\theta \rightarrow \mathcal{L}(E) \text{ telle que} \\ \lambda & \rightarrow f(\lambda); \end{aligned}$$

avec $f(\lambda)$ et $(A + z)^{-1}$ commutent $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_\theta$ et $z \in S_\theta$

$$\|f(\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq c \frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} e^{-\delta|\lambda|}, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_\theta;$$

$\forall c, \delta$ dépendants de f , $\forall f \in H_{\mathcal{L}(E)}^{e,\infty}(\theta)$, $\lambda \in \Gamma_\theta$ on a

$$f(-A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} f(\lambda) (A + \lambda)^{-1} d\lambda;$$

où $f(-A) \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que A admet un $H_{\mathcal{L}(E)}^{e,\infty}$ calcul borné si

$$\|f(-A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq c_A \|f\|_\infty \cdot \forall f \in H_{\mathcal{L}(E)}^{e,\infty}(\theta),$$

où c_A est indépendante de f avec $\|f\|_\infty$ est la norme du sup $\|f(\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Remarque 2.1.1 On peut aussi définir un autre type spécial de H^∞ -calcul pour les opérateurs sectoriels. Soit E un espace de Banach et $A \in P(\theta)$, $\theta \in]0, \pi[$. $H_0^\infty(\theta)$ est l'espace de toutes les fonctions holomorphes bornées

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C}/S_\theta \rightarrow \mathbb{C} \text{ avec} \\ |f(\lambda)| &\leq C \left(\frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|^2} \right)^\eta, \forall \lambda \in \mathbb{C}/S_\theta; \end{aligned}$$

et $\forall C > 0, \eta > 0$ dépendant de f , et $\forall f \in H_0^\infty(\theta)$ on peut étendre des valeurs non tangentiel dans ∂S_θ , et définir un élément dans $\mathcal{L}(E)$ par :

$$f(-A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} f(\lambda) (A + \lambda)^{-1} d\lambda;$$

on sait que l'opérateur A admet un H^∞ -calcul si

$$\|f(-A)\| \leq C_A \sup_{\lambda \in \mathbb{C}/S_\theta} |f(\lambda)|, \forall f \in H_0^\infty(\theta);$$

où $C_A > 0$ indépendante de f . On a aussi,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C}/S_\theta \rightarrow \mathbb{C} \\ |f(\lambda)| &\leq C \frac{|\lambda|^\eta}{1 + |\lambda|}; \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}/S_\theta$, et $\forall C > 0, \eta \in]0, 1[$ indépendante de f .

Définition 2.1.4 A, B deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach E , commutent au sens des résolvantes, si $\forall \lambda \in \rho(-A)$ et $\forall \mu \in \rho(-B)$ alors

$$[(A + \lambda)^{-1}, (B + \mu)^{-1}] = 0.$$

2.2 Théorème et preuve

Le but de ce paragraphe est de montrer que si $A \in P(\theta_A)$ et $B \in P(\theta_B)$ commutent au sens des résolvantes; $\theta_A > \theta_B$ et $\theta_A + \theta_B > \pi$ alors $A + B$ fermable, de plus si A admet un $H_{L(E)}^{e,\infty}$ -calcul alors $\overline{A + B} = A + B$.

Théorème 2.2.1 Soit E un espace de Banach; $A \in P(\theta_A)$ et $B \in P(\theta_B)$ commutent au sens des résolvantes; $\theta_A > \theta_B$ et $\theta_A + \theta_B > \pi$ alors, $A + B$ est fermable où $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ et on a l'équation suivante :

$$(\overline{A + B})x = y;$$

pour tout $y \in E$; admet une unique solution

$$x \in \bigcap_{\theta < 1} (E, D(A))_{\theta,q} \cap (E, D(B))_{\theta,q};$$

pour tout $q \in [1, \infty[$ donnée par :

$$x = \int_{\Gamma_{\theta_B}} (A - z)^{-1} (B + z)^{-1} y \, dz.$$

Si

$$y \in \bigcup_{\theta > 0} (E, D(A))_{\theta,p} \cup (E, D(B))_{\theta,p'} \quad \forall p \in [1, \infty[.$$

Alors,

$$x \in D(A) \cap D(B).$$

De plus; si A admet un $H_{L(E)}^{e,\infty}(\theta_A)$ -calcul borné; alors, $x \in D(A) \cap D(B)$ pour tout $y \in E$ et

$$(\overline{A + B}) = A + B.$$

Preuve. Soit l'opérateur borné dans E .

$$K = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\theta_B}} (A - z)^{-1} (B + z)^{-1} dz.$$

par l'argument d'extension sectoriel et le théorème de Cauchy dans la formule de cette intégrale on peut remplacer le bord Γ_{θ_B} par $c + \Gamma_{\theta_B - \varepsilon} \forall c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0. soit $y \in (E, D(A))_{\theta', p} \forall 0 < \theta' < 1$ et $p \in [1, \infty[$; alors $y \in D(A^\theta)$ pour tout $0 < \theta < \theta'$. On prend $c < 0$; alors, par le sens standard de la définition des puissances fractionnaires des opérateurs sectoriels. pour $\rho > 0$ assez petit et le bord Γ_{ρ, θ_A} on obtient :

$$\begin{aligned} Ky &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (A - z)^{-1} (B + z)^{-1} A^{-\theta} A^\theta y dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (A - z)^{-1} (B + z)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_A}} (-\lambda)^{-\theta} (A + \lambda)^{-1} d\lambda \right) A^\theta y dz; \\ &\quad \text{(d'après Dunford Schwartz)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_A}} (B + z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (A - z)^{-1} (A + \lambda)^{-1} A^\theta y d\lambda dz; \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_A}} (B + z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (z + \lambda)^{-1} ((A - z)^{-1} - (A + \lambda)^{-1}) A^\theta y d\lambda dz; \\ &\quad \text{(on utilise l'identité de Hilbert)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_A}} (A - z)^{-1} (B + z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (z + \lambda)^{-1} A^\theta y d\lambda dz; \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma_{\rho, \theta_A}} \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (A + \lambda)^{-1} (B + z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (z + \lambda)^{-1} A^\theta y dz d\lambda. \\ &\quad \text{(d'après le théorème de Fubini).} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Cauchy; le premier terme dans l'équation est égal à 0.

D'où :

$$\begin{aligned}
Ky &= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (A+\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (z+\lambda)^{-1} A^\theta y \, dz \, d\lambda \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} \left(\int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} \, dz \right) A^\theta y \, d\lambda \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} \left(\int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (z+B)^{-1} (z+\lambda)^{-1} \, dz \right) A^\theta y \, d\lambda \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (B-\lambda)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (z+B)^{-1} - (z+\lambda)^{-1} \, dz \right) A^\theta y \, d\lambda
\end{aligned}$$

D'après le théorème des Résidus on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (z+B)^{-1} - (z+\lambda)^{-1} \, dz \right) = 1.$$

D'où :

$$Ky = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda. \quad (2.2.1)$$

Pour tout opérateur sectoriel T ,

$$T(T+z)^{-1} = I - z(T+z)^{-1};$$

est uniformément borné par rapport à z , et les intégrales :

$$\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} A(A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda; \text{ et } \int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A-\lambda)^{-1} B(B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda;$$

convergent absolument ; par(2.2.1), $Ky \in D(A) \cap D(B)$, et,

$$\begin{aligned}
AKy &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} A(A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda; \\
BKy &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A-\lambda)^{-1} B(B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda. \quad (2.2.2)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
(A+B)Ky &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho, \theta_A}} (A+B)(A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho, \theta_A}} (A-\lambda+B+\lambda)(A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho, \theta_A}} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho, \theta_A}} (A-\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Cauchy, le premier terme est égal à 0. D'où, d'après la définition des puissances complexes de A ; on obtient :

$$\begin{aligned}
(A+B)Ky &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho, \theta_A}} (A-\lambda)^{-1} \lambda^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda. \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_A}} (A+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} A^\theta y \, d\lambda; \\
&= A^{-\theta} A^\theta y = y;
\end{aligned}$$

soit donc $y \in (E, D(B))_{\theta', p}$.

De même pour le cas $y \in D(B^\theta)$. Si on prend $c > 0$; on trouve :

$$\begin{aligned}
Ky &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} (A-z)^{-1} (B+z)^{-1} B^{-\theta} B^\theta y \, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} (A-z)^{-1} (B+z)^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (-\lambda)^{-\theta} (B+\lambda)^{-1} \, d\lambda \right) B^\theta y \, dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} \int_{-\varepsilon\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A-z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (B+z)^{-1} (B+\lambda)^{-1} B^\theta y \, d\lambda \, dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} \int_{-\varepsilon\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A-z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (\lambda-z)^{-1} ((B+z)^{-1} - (B+\lambda)^{-1}) B^\theta y \, d\lambda \, dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} \int_{-\varepsilon\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A-z)^{-1} (B+z)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (\lambda-z)^{-1} B^\theta y \, d\lambda \, dz \\
&\quad - \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} (A-z)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (\lambda-z)^{-1} B^\theta y \, dz \, d\lambda; \\
&\quad \text{(d'après le théorème de Fubini)}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Cauchy ; le premier terme de l'équation est égal à 0. D'où on trouve :

$$\begin{aligned}
Ky &= - \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} (A-z)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} (\lambda-z)^{-1} B^\theta y \, dz \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{c+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} (A-z)^{-1} (\lambda-z)^{-1} \, dz \right) B^\theta y \, d\lambda
\end{aligned}$$

D'où :

$$Ky = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda. \quad (2.2.3)$$

Donc les deux intégrales :

$$\int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} A(A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda \text{ et } \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A-\lambda)^{-1} B(B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda;$$

convergent absolument. On a : $Ky \in D(A) \cap D(B)$, et

$$\begin{aligned} AKy &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} A(A - \lambda)^{-1} (B + \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda \\ BKy &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A - \lambda)^{-1} B (B + \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (A + B)Ky &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A + B)(A - \lambda)^{-1} (B + \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A - \lambda + B + \lambda)(A - \lambda)^{-1} (B + \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A - \lambda)(A - \lambda)^{-1} (B + \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A - \lambda)^{-1} (B + \lambda)(B + \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (B + \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A - \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Cauchy, le premier terme de l'équation est égal à 0. Donc d'après la définition des puissances complexes, on trouve

$$\begin{aligned} (A + B)Ky &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A - \lambda)^{-1} (-\lambda)^{-\theta} B^\theta y \, d\lambda \\ &= B^{-\theta} B^\theta y = y. \end{aligned}$$

Maintenant ; on prend $\phi \in]0, 1[$; alors $\forall y \in E$ et d'après (2.2.1) on a

$$\begin{aligned} A^{\phi-1}Ky &= KA^{\phi-1}y \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_{\rho, \theta_A}} (A - z)^{-1} (B + z)^{-1} z^{\phi-1} y \, dz. \end{aligned}$$

D'où : l'intégrale

$$\int_{-\Gamma_{\rho, \theta_A}} A(A - z)^{-1} (B + z)^{-1} z^{\phi-1} y \, dz.$$

Converge absolument et on obtient $A^{\phi-1}Ky \in D(A)$; ceci implique que $Ky \in D(A^\phi)$. Et d'après les propriétés des puissances complexes d'un opérateur on trouve : $Ky \in (E, D(A))_{\phi', q}$ pour tout $0 < \phi' < \phi; \forall q \in [1, \infty[$ et d'après (2.2.3) on trouve :

$$B^{\phi-1}ky = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A-z)^{-1} (B+z)^{-1} (-z)^{\phi-1} y dz.$$

D'où l'intégrale

$$\int_{\Gamma_{\rho, \theta_B}} (A-z)^{-1} B (B+z)^{-1} (-z)^{\phi-1} y dz$$

converge absolument; on obtient $B^{\phi-1}ky \in D(B)$ ou $ky \in D(B^\phi)$ d'où, on trouve comme précédemment que $ky \in (E, D(A))_{\phi', q}$. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $D(A+B)$ avec

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 \text{ et} \\ (A+B)x_n \rightarrow y; \end{cases}$$

quand $n \rightarrow \infty$ on a

$$\begin{aligned} x_n &= (A+B)kx_n \\ &= k(A+B)x_n \rightarrow ky; \\ &\Rightarrow ky = 0. \end{aligned}$$

D'après la relation :

$$\begin{aligned} A^{-1}B^{-1}\omega &= (A+B)K A^{-1}B^{-1}\omega \\ &= (A^{-1}+B^{-1})K\omega; \forall \omega \in E; \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

on trouve $y = 0$. D'où, $A+B$ est fermable. Donc

$$(\overline{A+B})ky = y,$$

pour tout $y \in E$; et par la densité de $\bigcup_{\theta > 0} (E, D(A))_{\theta, p} \cup (E, D(B))_{\theta, p}$ dans $E, \forall p \in [1, \infty[$. Pour la fermeture de la somme de deux opérateurs, Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $D(A+B)$ avec

$$\begin{cases} \tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x} \text{ et} \\ (A+B)\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{y}, \end{cases}$$

quand $n \rightarrow \infty$. Si on applique K à la limite précédente on trouve :

$$\tilde{x} = K\tilde{y}.$$

Si $k \in D(A + B)$; alors d'après l'équation

$$(A + B)K = I,$$

dans l'espace dense $\bigcup_{\theta > 0} (E, D(A))_{\theta,p} \cup (E, D(B))_{\theta,p}$; on trouve, $A + B$ est fermé. D'après (2.2.4) on trouve $k \in D(A)$ ou $k \in D(B)$ Comme $\theta_A > \frac{\pi}{2}$, A génère le semigroupe holomorphe borné sur E , et il est défini par

$$e^{-\omega A} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} e^{\omega \lambda} (A + \lambda)^{-1} d\lambda,$$

avec $|\arg \omega| \leq \theta_A - \frac{\pi}{2}$. Pour tout $y \in E$, et $c < 0$ suffisamment proche de 0. D'après le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} ke^{-\omega A}y &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (A-z)^{-1} (B+z)^{-1} \left(\int_{\Gamma_{\theta_A}} e^{\omega \lambda} (A+\lambda)^{-1} y d\lambda \right) dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} \int_{\Gamma_{\theta_A}} (B+z)^{-1} e^{\omega \lambda} (z+\lambda)^{-1} ((A-z)^{-1} - (A+\lambda)^{-1}) y d\lambda dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} \int_{\Gamma_{\theta_A}} (A-z)^{-1} (B+z)^{-1} e^{\omega \lambda} (z+\lambda)^{-1} y d\lambda dz \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_{\theta_A}} \int_{c+\Gamma_{\theta_B}} (A+\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} e^{\omega \lambda} (z+\lambda)^{-1} y dz d\lambda. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Cauchy; le premier terme de l'équation est égal à 0. D'où

$$ke^{-\omega A}y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} (A+\lambda)^{-1} (B-\lambda)^{-1} e^{\omega \lambda} y d\lambda.$$

Donc, l'intégrale

$$\int_{\Gamma_{\theta_A}} A(A+\lambda)^{-1} (B-\lambda)^{-1} e^{\omega \lambda} y d\lambda.$$

Converge absolument , $ke^{-\omega A}y \in D(A)$, et

$$\begin{aligned}
Ake^{-\omega A}y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} A(A+\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} e^{\omega\lambda}y \, d\lambda; \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} (A+\lambda-\lambda)(A+\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} e^{\omega\lambda}y \, d\lambda; \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} (B-\lambda)^{-1} e^{\omega\lambda}y \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} (A+\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} \lambda e^{\omega\lambda}y \, d\lambda; \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} (A+\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} \lambda e^{\omega\lambda}y \, d\lambda. \tag{2.2.5}
\end{aligned}$$

Si on utilise le théorème de Cauchy, l'opérateur A admet $H_{L(E)}^{e,\infty}(\theta_A)$ -calcul. Si $y \in D(A)$ dans (2.2.5) et

$$\lim \omega \rightarrow 0,$$

avec, $\omega \in \mathbb{R}$; comme

$$Ake^{-\omega A}y = e^{-\omega A}Ak y,$$

on trouve

$$\|Aky\| \leq c \|y\| \quad \forall c > 0,$$

dépendent de A et B ; par l'argument de suite de Cauchy et la fermeture de A ; on a k est à valeurs dans $D(A)$. \square

Application à un problème parabolique

Ce chapitre est consacré à l'application des résultats de chapitre 02. Les notations utilisées ici seront conformes à celles de chapitre 02.

Soit l'opérateur $B = \partial_t$ dans $L^p(0, T; E)$ avec

$$D(B) = \{f(t) \in w^{1,p}(0, T; E) / f(0) = 0\}, \forall p \in]0, +\infty[\text{ et } T > 0.$$

On trouve que $\sigma(B) = \emptyset$ et

$$(B + \lambda)^{-1} g = \int_0^t e^{\lambda(x-t)} g(x) dx, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.0.1)$$

où d'après l'inégalité de Young pour la convolution, on obtient :

$$\|(B + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda)T}}{\operatorname{Re}(\lambda)}, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si on étend

$$A : D(A) \rightarrow E \text{ à } A : L^p(0, T; D(A)) \rightarrow L^p(0, T; E).$$

Par

$$(Af)(t) = Af(t).$$

Alors d'après le théorème (2.1) on trouve le résultat suivant sur la L^p -régularité maximale.

3.1 Théorème

Théorème 3.1.1 Soit E un espace de Banach et $A \in P(\theta_A)$ avec $\theta_A > \frac{\pi}{2}$, alors on a le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} f'(t) + Af(t) = g(t) \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

dans $L^p(0, T; E)$, avec $g \in L^p(0, T; E)$

$p > 1$ et $T > 0$ finis, a une unique solution :

$$f \in \bigcap_{\phi < 1} W^{\phi, p}(0, T; E) \cap L^p\left(0, T; (E, D(A))_{\phi, q}\right); \forall q \geq 1,$$

continument dépendante de g , donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_A}} \int_0^t (A+z)^{-1} e^{z(t-x)} g(x) dx dz, \forall t \in [0, T].$$

Si

$$g \in \bigcup_{\phi > 0} W^{\phi, p}(0, T; E) \cup L^p\left(0, T; (E, D(A))_{\phi, q}\right) \forall q > 1,$$

alors,

$$f \in W^{1, p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D(A))$$

De plus, si A admet $H_{\mathcal{L}(L^p(0, T; E))}^{e, \infty}(\theta_A)$ -calcul, alors,

$$f \in W^{1, p}(0, T; E) \cap L^p(0, T; D(A)) \forall g \in L^p(0, T; E).$$

D'après l'intégrale de Riemann-Lebesgue, et la transformation de fourier pour les fonctions dans $L^1(\mathbb{R}; E)$ finie à l'infini. D'où, si $\operatorname{Re}(\lambda) \geq K, \forall K \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|(B + \lambda)^{-1} g\| = 0, \forall g \in L^p(0, T; E). \quad (3.1.1)$$

Aussi, par intégration par partie, on trouve la relation

$$\lambda (B + \lambda)^{-1} g(t) = g(t) - (B + \lambda)^{-1} Bg(t), \forall g \in W^{1, p}(0, T; E), g(0) = 0.$$

D'où, pour $\operatorname{Re}(\lambda) \geq K$, $K \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\lambda| \|(B + \lambda)^{-1} g\| &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\lambda| \|(B + \lambda)^{-1}\| \|g\| \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\lambda| \frac{1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda)T}}{\operatorname{Re}(\lambda)} \|g\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\lambda| \|(B + \lambda)^{-1} g\| < \infty, \forall g \in W^{1,p}(0, T; E), g(0) = 0. \quad (3.1.2)$$

Problème hyperbolique

Dans ce chapitre on reprend l'étude faite au chapitre 02 pour le problème du second ordre avec conditions initiales.

4.1 Problème hyperbolique abstrait

Définition 4.1.1 Soit E un espace de Banach et $c > 0$.

Soit $Q(c)$, la classe des opérateurs linéaires fermés dans E , tel que si $A \in Q(c)$, alors $A \in P(\theta)$,

$$\rho(-A) \supset \pi_c = \left\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \geq c - \frac{(\operatorname{Im}(z))^2}{4c} \right\},$$

et $\|(A+z)^{-1}\| = o(1)$; $|z|^{\frac{1}{2}} \|(A+z)^{-1} A^{-\frac{1}{2}}\| = o(1)$ dans π_c .

On note

$$W_0^{k,p}(0, T; D(A^\alpha)) = B^{-k} A^{-\alpha} L^p(0, T; E) \quad \forall \alpha \geq 0 \text{ et } k \in \mathbb{N},$$

où B^{-1} est définie dans (3.0.1).

4.1.1 Théorème et preuve

Le but de ce paragraphe est de montrer que si $T > 0$ fini. Alors le problème de Cauchy qui l'on pose admet une unique solution $f \in W^{1,p}(0, T; E)$ donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c} \int_0^t (A+z^2)^{-1} e^{z(x-t)} g(x) \, dx \, dz, \quad \forall t \in [0, T].$$

Théorème 4.1.1 Soit E un espace de Banach et $A \in Q(c^2) \forall c > 0$. Alors on a le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} f''(t) + Af(t) = g(t) \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{cases}$$

dans $L^p(0, T; E)$ Avec $g \in L^p\left(0, T; D\left(A^{\frac{3}{2}}\right)\right) \cap W_0^{2,p}\left(0, T; D\left(\sqrt{A}\right)\right)$. $T > 0$ fini, a une solution unique $f \in W^{1,p}(0, T; E)$ donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c}^t \int_0^t (A + z^2)^{-1} e^{z(x-t)} g(x) dx dz, \quad \forall t \in [0, T].$$

Preuve. Si B est l'opérateur donner dans le paragraphe précédent, alors le problème devient :

$$(B^2 + A)f = g,$$

par la relation :

$$\left(\pm i\sqrt{A} + z\right)^{-1} = z(A + z^2)^{-1} \mp i\sqrt{A}(A + z^2)^{-1},$$

on sait que si l'image par

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z^2 \\ \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \leq -c\} &\rightarrow \pi_{c^2}, \end{aligned}$$

et aussi par l'équation

$$\left(\pm i\sqrt{A} + z\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} = z(A + z^2)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \mp i(A + z^2)^{-1},$$

on trouve que

$$\left\| \left(\pm i\sqrt{A} + z\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \right\| = o(1), \quad \text{par rapport à } \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \leq -c\}. \quad (4.1.1)$$

Soit $c' > c > 0$ et $g \in L^p \left(0, T; D \left(A^{\frac{3}{2}}\right)\right) \cap W_0^{2,p} \left(0, T; D \left(\sqrt{A}\right)\right)$. Par (3.1.1), (4.1.1) et le théorème de Cauchy on trouve que :

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2}B^{-1}\sqrt{A}g + \frac{1}{2}g \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} (B+z)^{-1} \left(-i\sqrt{A}+B\right) g \frac{1}{2z} dz \\
& -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} \left(i\sqrt{A}-z\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \left(-i\sqrt{A}+B\right) g \frac{1}{2z} dz \\
= & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \left(-i\sqrt{A}+B\right) g d\lambda dz \\
& +\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(i\sqrt{A}-z\right)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \left(-i\sqrt{A}+B\right) g d\lambda dz \\
= & \frac{1}{(2\pi i)^2} \\
& \times \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(i\sqrt{A}-z\right)^{-1} (B+z)^{-1} \left(i\sqrt{A}+B\right) (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \left(-i\sqrt{A}+B\right) g d\lambda dz \\
= & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(i\sqrt{A}-z\right)^{-1} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} (B^2+A) g d\lambda dz \quad (4.1.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} \left(i\sqrt{A}-z\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} (B-z)^{-1} A^{\frac{1}{2}} (B^2+A) g \frac{1}{2z} dz \\
= & -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(i\sqrt{A}-z\right)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} (B^2+A) g d\lambda dz \quad (4.1.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2}B^{-1}\sqrt{A}g + \frac{1}{2}g \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} (B+z)^{-1} \left(i\sqrt{A}+B\right) g \frac{1}{2z} dz \\
& +\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} \left(i\sqrt{A}+z\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \left(i\sqrt{A}+B\right) g \frac{1}{2z} dz \\
= & -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} \left(-i\sqrt{A}-z\right)^{-1} (B+z)^{-1} \left(-i\sqrt{A}+B\right) \left(i\sqrt{A}+B\right) g \frac{1}{2z} dz
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(i\sqrt{A} + \lambda\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} A^{\frac{1}{2}} (B^2 + A) g \, d\lambda \, dz, \quad (4.1.4)$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} (B-z)^{-1} \left(i\sqrt{A} + B\right) g \frac{1}{2z} dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} \left(-i\sqrt{A} - z\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \left(i\sqrt{A} + B\right) g \frac{1}{2z} dz \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} (B+\lambda)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \left(i\sqrt{A} + B\right) g \, d\lambda \, dz \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(-i\sqrt{A} - \lambda\right)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} A^{\frac{1}{2}} \left(i\sqrt{A} + B\right) g \, d\lambda \, dz \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \\ &\quad \times \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(-i\sqrt{A} - \lambda\right)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \left(-i\sqrt{A} + B\right) (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \left(i\sqrt{A} + B\right) g \, d\lambda \, dz \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} \left(i\sqrt{A} + \lambda\right)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} (B^2 + A) g \, d\lambda \, dz. \quad (4.1.5) \end{aligned}$$

Soit la famille $y_{\lambda,z}(h) \in L^p(0, T; E)$, définie pour $\lambda \in i\mathbb{R} - c'$ et $\forall h \in L^p(0, T; E)$ par

$$y_{\lambda,z}(h) = \left(i\sqrt{A} - z\right)^{-1} \left(-i\sqrt{A} - \lambda\right)^{-1} (B+z)^{-1} (B+\lambda)^{-1} h.$$

On a

$$\begin{aligned} y_{\lambda,z}(h) &= \left[\left(i\sqrt{A} - z\right)^{-1} + \left(-i\sqrt{A} - \lambda\right)^{-1} \right] (z+\lambda)^{-1} \left[(B+z)^{-1} - (B+\lambda)^{-1} \right] (z-\lambda)^{-1} h \\ &= \left(i\sqrt{A} - z\right)^{-1} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} h \\ &\quad - \left(i\sqrt{A} - z\right)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} h \\ &\quad - \left(i\sqrt{A} + \lambda\right)^{-1} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} h \\ &\quad + \left(i\sqrt{A} + \lambda\right)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} h, \end{aligned}$$

d'après (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) et (4.1.5), on trouve :

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} y_{\lambda,z} \left((B^2 + A) g \right) \, d\lambda \, dz = g. \quad (4.1.6)$$

$\forall \omega \in W_0^{1,p} \left(0, T; D \left(\sqrt{A} \right) \right)$, par (3.1.2), (4.1.1) et le théorème de Cauchy on trouve :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c} (A+z^2)^{-1} (B+z)^{-1} \omega \, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} \left((i\sqrt{A}+z)^{-1} - (i\sqrt{A}-z)^{-1} \right) (B+z)^{-1} \frac{1}{2z} \omega \, dz \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} (i\sqrt{A}-z)^{-1} (B+z)^{-1} \frac{1}{2z} \omega \, dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} (i\sqrt{A}-z)^{-1} (B-z)^{-1} \frac{1}{2z} \omega \, dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c'} (i\sqrt{A}+z)^{-1} (B+z)^{-1} \frac{1}{2z} \omega \, dz \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} (i\sqrt{A}-z)^{-1} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \omega \, d\lambda \, dz \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} (i\sqrt{A}-z)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \omega \, d\lambda \, dz \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} (i\sqrt{A}+\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \omega \, d\lambda \, dz \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} (i\sqrt{A}+\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} (z+\lambda)^{-1} (z-\lambda)^{-1} \omega \, d\lambda \, dz \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{i\mathbb{R}-c'} \int_{i\mathbb{R}-c} y_{\lambda,z}(\omega) \, d\lambda \, dz. \tag{4.1.7}
\end{aligned}$$

D'où, par (4.1.6) on trouve : la solution du problème est :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-c} (A+z^2)^{-1} (B+z)^{-1} g \, dz,$$

cette dernière expression est trouvée par (3.0.1). \square

Exemple 4.1.1 Soit H un espace de Hilbert et A strictement positive opérateur auto-adjoint sur H . Alors par le théorème spectral, on peut facilement voir que $A \in Q(c)$, où c est la borne inférieure du spectre. D'où, on peut appliquer le théorème précédent pour donner une solution au problème de second ordre pour g

Bibliographie

- [1] **H.Amann**, linear and Quasilinear Parabolic Problems, Monogr. Math, vol. 89, Birkhäuser Verlag, 1995.
- [2] **Boccaro**, Analyse fonctionnelle une introduction pour physiciens 1984-Win DJ View.
- [3] **G.Da Prato-P.Grisvard**, Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, Math. Pures Appl(9) 54 (3) (1975) 305-387.
- [4] **G.Dore-A.Venni**, On the closedness of the sum of two closed operators, Math. Z. 196 (2) (1987) 189-201.
- [5] **Hasse**, The Functional calculus for sectorial operators.
- [6] **N.Kalton-L.Weis**, The H^∞ -calcul and sums of closed operators, Math. Ann. 321 (2) (2001) 319-345.
- [7] **F.Lencien, G.Lencien**, C.Le Merdy, A joint functional calculus for sectorial operators with commuting resolvent, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 77 (2) (1998) 387-414.
- [8] **Marco**, J.P mathématique, cours complet avec 600 tests et exercices corrigés.
- [9] **Nikolaos Roidos** "On the inverse of the sum of two operators" Journal of functional Analysis 265 (2013) 208-222.