



UNIVERSITE ABDELHAMID IBN-BADIS DE MOSTAGANEM  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

# MEMOIRE

Présenté pour obtenir

LE DIPLOME DE MAGISTER  
SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

OPTION : MODELISATION ET SIMULATION MESOSCOPIQUE DES PHENOMENES  
DE TRANSPORT THERMO-FLUIDE

Par

**SAHRAOUI Nassim Mahfoud**

**Etude de la convection mixte dans un canal  
horizontal chauffé par le bas par la méthode  
de Boltzmann sur réseau**

Soutenu le \_\_\_\_\_ devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	Mr. GUECHICHI Hocine	Professeur	Université de Mostaganem
<b>Examineurs :</b>	Mr. AZZI Abbess	Professeur	USTO
	Mr. ZENASNI Ramdane	Professeur	Université de Mostaganem
	Mr. OUADHA Ahmed	Maître de conférences A	USTO
<b>Rapporteur :</b>	Mr. HOUAT Samir	Maître de conférences A	Université de Mostaganem

# Remerciements

*Je tiens à remercier tout particulièrement Mr. HOUAT Samir, maitre de conférences à l'université de Mostaganem, pour son encadrement efficace, ses conseils précieux, la qualité de ses rapports humains, ainsi sa contribution à la direction et la réalisation de ce projet.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude à Messieurs H. GUECHICHI, A.AZZI, R.ZENASNI et A.OUADHA, pour avoir accepté de consacrer une partie de leurs temps précieux à l'examen de ce document.*

*Je remercie tous les enseignants qui ont apporté leurs contributions dans cette formation de Magistère.*

*Sans oublier mes collègues de magistère avec qui j'ai vécu de bons moments à savoir : Zino, Brahim, Noureddine et Benameur.*

*Je remercie toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à ce travail: celles qui, gratuitement, m'ont consacré un peu de temps, m'ont apporté leur soutien, ou tout simplement m'ont donné le petit coup de pouce qui m'aura permis d'avancer d'un grand pas.*

# Dédicaces

*A mes parents, pour leurs affection et leurs conseils, leurs encouragement et leurs soutient tout au long de ces années d'études.*

*A mon encadreur Mr Houat Samir pour son soutient, son aide et sa patience depuis le début.*

*A mon frère Amine et ma sœur sabrina.*

*A mes grand parents Messaoud et Naffissa.*

*A mon défunt grand père Abdelkader paix à son âme.*

*A mes tantes Siham, Amel, Souhila.*

*A mes oncles Sofiane, Riad, Lotfi et Tadj Eddine.*

*A mon cousin Kenzi*

*A mes camarades Zino, Brahim, Noureddine et Benameur*

*A Mr A.Benouali et Mr R.Kerraouti.*

*A mes amis Aziz, Sid Ahmed, Mustapha, Salim et Moatez.*

*A Kika qui se reconnaitra.*

# **Etude de la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas par la méthode de Boltzmann sur réseau**

## **Résumé :**

Le travail exposé dans ce mémoire, porte sur la simulation numérique de la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas en utilisant la nouvelle méthode Boltzmann sur réseau.

Tout d'abord une étude détaillée sur le transfert de chaleur par convection notamment la convection mixte et les instabilités thermo convectives de Rayleigh Bénard et de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Une revue bibliographique et aussi présentée sur les travaux les plus importants trouvés dans la littérature associé à la configuration étudiée.

Le travail a été poursuivi par une présentation de l'historique de développement de la nouvelle méthode de modélisation et de simulation utilisée dans cette étude, notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population, ainsi que les bases théoriques fondamentales de son application.

La configuration géométrique choisie dans cette étude, est un canal horizontal à deux dimensions où la paroi inférieure est chauffée, tandis que la paroi supérieure est totalement refroidie. Le calcul a été effectué pour un régime laminaire et pour un fluide incompressible avec un nombre de Peclet  $Pe = 20/3$ .

Un code de calcul a été développé et testé durant cette étude sous l'éditeur MATLAB, en appliquant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique avec le modèle D2Q9 pour le champ dynamique et D2Q5 pour le champ thermique.

Une validation des résultats obtenus par la méthode de Boltzmann sur réseau sont confrontés avec ceux de la littérature, pour un domaine d'allongement de rapport  $B=H/L=20$ , un nombre de Reynolds  $Re=10$  et Rayleigh  $Ra = 10^4$ . Ce qui a permis de constater une bonne concordance entre les résultats.

Les résultats de l'analyse CFD ont été présentés, en traçant les lignes de courants, les isothermes, les profils de vitesse et de température au milieu et pour différentes positions de la conduite. Cette analyse est complétée par l'étude de l'influence de certains paramètres adimensionnels, notamment le nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh et l'allongement du domaine géométrique sur le transfert de chaleur.

Cette étude a permis d'évaluer la performance et la capacité de la méthode de Boltzmann sur réseau pour reproduire le phénomène physique de la convection mixte dans une conduite horizontale chauffée par le bas.

**Mots clefs :** Convection mixte laminaire, Méthode de Boltzmann sur réseau thermique, écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard.

# **Study of Mixed convection in a horizontal channel heated from below by lattice Boltzmann method.**

## **Abstract :**

The works presented, focuses on the numerical simulation of laminar mixed convection flow in horizontal channel heated from below using the new Lattice Boltzmann method.

First a detailed study of heat transfer by convection including mixed convection and convective thermal instability of Rayleigh Bénard and Rayleigh-Bénard-Poiseuille. A literature review was also presented on the most important works found about the configuration associated with this study.

The work was continued by a presentation of the historical development of the new method of modeling and simulation used in this work, including the thermal lattice Boltzmann method with double populations, as well as fundamental theoretical basis for its application.

The geometry chosen in this study is a two-dimensional horizontal duct heated from below, where the upper wall is considered cold. The calculation was performed for a laminar flow and an incompressible fluid with a Peclet number of  $Pe=20/3$ .

A code was developed and tested during this work using MATLAB, by applying the thermal lattice Boltzmann method, with the D2Q9 lattice model for dynamic field, and the D2Q5 lattice for the thermal field.

The validation of the results obtained with the lattice Boltzmann method are compared with those of the literature for an aspect ratio of  $B = H/L = 20$ , a Reynolds number of  $Re=10$  and a Rayleigh number of  $Ra= 10^4$ , which shows that there are good agreements between the results of the program and the previous studies.

The results of the CFD analysis where presented by plotting the streamlines, the isotherms, the profiles of velocity and the temperature in the middle of the duct. This analysis is completed by the study of the effect of non-dimensional parameters, in particular the Reynolds number, the Rayleigh number and the aspect ratio on the Nusselt number.

This study made possible to evaluate the performance and the capacity of the lattice Boltzmann method to reproduce the physical phenomena of the mixed convection in a horizontal duct heated from below.

**Keywords:** laminar mixed convection, Thermal Lattice Boltzmann method, Poiseuille Rayleigh Bénard flow.

# دراسة عددية للحمل الحراري المختلط داخل قناة أفقية مسخنة من الأسفل بطريقة بولتزمان للشبكات

## ملخص:

إن العمل الذي تم عرضه في هذه المذكرة، يتناول محاكاة عددية للحمل الحراري المختلط داخل قناة أفقية مسخنة من الأسفل باستعمال الطريقة الجديدة لبولتزمان للشبكات .

في البداية، تم عرض دراسة مفصلة لعموميات خاصة بانتقال الحرارة بالحمل وبالخصوص الحمل الحراري المختلط وحالات اللا استقرار للحمل الحراري متبوعة بعرض لأهم الأعمال الموجودة في المراجع والمشابهة للتكوين الهندسي المدروس.

تم خلال هذا العمل تقديم تطور الطريقة الجديدة للنمذجة والمحاكاة المستعملة في هذه الدراسة خصوصا طريقة بولتزمان للشبكات الحرارية بدالتي توزيع و القواعد النظرية الأساسية لتطبيقها.

التكوين الهندسي المختار في هذه الدراسة، عبارة عن قناة أفقية ثنائية الأبعاد أين يتم تسخين الجدار السفلي بينما الجدار العلوي مبردا كليا. أنجزت الحسابات مع مراعاة نظام رقائقي و مائع غير قابل للانضغاط بعدد بيكلي مساو ل:  $3/20$

تم تطوير برنامج "ماتلاب" وفحصه أثناء القيام بهذا الدراسة وذلك بتطبيق نموذج D2Q9 للمجال الهيدروديناميكي و النموذج D2Q5 للمجال الحراري.

تم عرض مقارنة للنتائج المحصل عليها من استعمال طريقة بولتزمان للشبكات بالنتائج الموجودة في المراجع لمجال ذو اتساع بنسبة  $B = H/L = 20$ ، عدد رينولدز  $eR = 10$  و رايلي  $aR = 10^4$ . ما سمح بملاحظة تطابق جيد بين هذه النتائج.

قدمت نتائج التحليل لديناميكا الموائع العددية برسم خطوط كل من الجريان والحرارة، منحنيات السرعة ودرجة الحرارة عند منتصف و في أوضاع مختلفة من القناة. شمل هذا التحليل كذلك دراسة تأثير بعض العوامل على انتقال الحرارة كعدد رايلي و رينولدز واتساع المجال الهندسي.

سمحت هذه الدراسة بتقييم قدرة هذه الطريقة على محاكاة الحمل المختلط داخل القناة الأفقية والمسخنة من الأسفل.

**الكلمات المفتاحية:** الحمل الحراري المختلط الرقائقي، طريقة بولتزمان للشبكات الحرارية، جريان بوازوي رايلي بينارد.

# Table des matières

Dédicaces

Remerciements

Résumé du travail i

Tables des matières iv

Nomenclature

Liste des figures et tableaux

## Chapitre I : INTRODUCTION

1. Introduction.....	1
2. But du travail.....	2
3. Organisation du mémoire.....	3

## Chapitre II : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1. Transfert de chaleur par convection.....	5
2. Formulation mathématique de l'écoulement par convection.....	6
2.1. Equations de Navier et Stokes.....	6
2.2. Approximation de Boussinesq.....	7
3. Les nombre adimensionnels caractérisant le transfert de chaleur par convection.....	8
4. Convection mixte.....	11
5. La convection de Rayleigh Bénard.....	12
6. La convection de poiseuille Rayleigh Bénard.....	12
6.1. Rouleaux transversaux.....	14
6.2. Rouleaux longitudinaux.....	15
6.2.1. Cas d'un écoulement entre deux plaques finies.....	15
6.2.2. Cas d'un écoulement entre deux plaques infinies.....	16

7. Applications industrielles.....	17
7.1. Dépôts de vapeurs chimiques CVD.....	17
7.2. Refroidissement des composants électroniques.....	18
8. Description du phénomène étudié.....	19
8.1. Configuration géométrique.....	19
8.2. Hypothèses.....	20
8.3. Description mathématique de l'écoulement.....	20
8.4. Conditions aux limites du problème.....	21
9. Conclusion.....	22

### **Chapitre III : METHODE DE BOLTZMANN SUR RESEAU**

1. Historique.....	23
2. L'équation de Boltzmann continue.....	28
3. Approximation BGK.....	29
4. Modèles dynamique de Boltzmann sur réseau.....	30
4.1. Le modèle bidimensionnel à 9 vitesses (D2Q9).....	30
4.2. Conditions aux limites .....	34
5. Modèle thermique de Boltzmann sur réseau.....	38
5.1. Modèle à double population.....	38
5.2. Réseau D2Q5 .....	39
5.3. Conditions aux limites .....	40
6. Mise en œuvre informatique.....	41
7. Conclusion.....	43

### **Chapitre IV : RESULTATS & DISCUSSIONS**

1. Problématique.....	44
2. Validation du code de calcul.....	45
2.1. Etude du maillage.....	45
2.2. Validation des résultats.....	45

2.3. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=20$ , $Pe=20/3$ , $Re=10$ et $Ra = 10^4$ .....	46
2.4. Composantes verticales de la vitesse $U_y$ et de la température le long de l'axe du canal pour différents allongements pour $Re=10$ et $Ra = 10^4$ et $Pe = 20/3$ .....	50
2.5. Résultats et discussions.....	51
<b>3. Etude de l'effet du nombre de Reynolds sur l'écoulement.....</b>	<b>52</b>
3.1. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=5</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	52
3.2. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=10</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	55
3.3. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=20</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	58
3.4. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=30</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	61
3.5. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=40</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	64
3.6. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=50</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	67
3.7. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=60</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	70
3.8. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=70</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	73
3.9. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=80</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	76
3.10. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=90</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	79
3.11. Fonctions de courants, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Pe=20/3$ , <b><math>Re=100</math></b> et $Ra = 10^4$ .....	82
3.12. Résultats et discussions.....	85
<b>4. L'effet du nombre de Reynolds sur le nombre de Nusselt .....</b>	<b>86</b>
<b>5. L'effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt .....</b>	<b>87</b>
<b>6. L'effet du domaine de l'allongement sur le nombre de Nusselt .....</b>	<b>88</b>
<b>7. Conclusion.....</b>	<b>89</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>90</b>
<b>Références bibliographiques</b>	

# Nomenclature

## Lettres latines :

$B$	Rapport d'allongement du domaine $B=L/H$
$c$	Vitesse [m/s].
$c_s$	Vitesse de son [m/s].
$c_i$	Vitesse de propagation [m/s].
$D$	Dimension (LBM).
$e_i$	Vitesse de particule [m/s].
$F$	Force extérieure [N].
$f(r,c,t)$	Fonction de distribution.
$f_i$	Fonction de distribution pour un ensemble de particules.
$f_i^{eq}$	Fonction de distribution à l'état d'équilibre.
$g$	Gravitation [m/s <sup>2</sup> ].
$g_i$	Fonction de distribution de l'énergie.
$g_i^{eq}$	Fonction de distribution de l'énergie à l'état d'équilibre.
$H$	Hauteur du canal [m].
$L$	Longueur du canal [m].
$p$	Pression [bars].
$P$	Pression adimensionnelle.
$Q$	Directions (LBM).
$r$	Position [m].
$T$	Température du fluide [°C].
$T^*$	Température adimensionnelle du fluide.
$T_f$	Température froide [°C].
$T_c$	Température chaude [°C].
$T$	Période adimensionnelle.
$t$	temps [s].
$U$	Vitesse adimensionnelle sur Ox.
$U_{max}$	Vitesse Maximale d'entrée [m/s].

$V$	Vitesse adimensionnelle sur Oy.
$w_i$	Constantes du réseau, facteurs de poids.
$\Delta x, \Delta y$	Dimensions du volume de contrôle considéré [m].

### Paramètres adimensionnels

$B$	H/L: allongement.
$Re^*$	Nombre de Reynolds critique.
$Ra^*$	Nombre de Rayleigh critique.
$Ra_{\parallel}^*$	Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux longitudinaux.
$Ra_{\perp}^*$	Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux transversaux.
$\tau$	période temporelle adimensionnelles des rouleaux transversaux.
$Re$	Nombre de Reynolds, $Re = u_e \cdot H / \nu$ .
$Ra$	Nombre de Rayleigh, $Ra = Gr * Pr$ .
$Nu$	Nombre de Nusselt.
$Pr$	Nombre de Prandtl, $Pr = \rho \cdot \nu \cdot C_p / \lambda$ .
$Pe$	Nombre de Peclet, $Pe = Re / Pr$ .
$\langle \overline{Nu} \rangle$	Moyenne temporelle du Nombre de Nusselt.

### Lettres grecques :

$\alpha$	Diffusivité thermique [ $m^2/s$ ].
$\beta$	Coefficient d'expansion thermique a pression constante [ $K^{-1}$ ].
$\rho$	Masse volume [ $Kg/m^3$ ].
$\nu$	Viscosité cinématique [ $m^2/s$ ].
$\mu$	Viscosité dynamique [ $Kg/m.s$ ].
$\lambda$	Conductivité thermique [ $W/m \cdot ^\circ K$ ].
$\Omega(f)$	Opérateur de collision.
$\omega_i$	Fréquence de relaxation [Hz].

$\tau$	facteur de relaxation.
$\tau$	Temps adimensionnel
$\delta t$	Variation de temps [s].
$\infty$	Infini.

### **Abréviations et symboles:**

2D	Bidimensionnel.
BGK	Bhatnagar-Gross-Krook.
LBM	Lattice Boltzmann Method.
TLBM	Thermal Lattice Boltzmann Method.
CFD	Computational Fluid Dynamics.
RB	Rayleigh Bénard
PRB	Posieuille Rayleigh Bénard.
CVD	Dépôt de Vapeurs Chimiques (Chemical Vapor Deposition).
$R_{\parallel}$	Rouleaux longitudinaux.
$R_{\perp}$	Rouleaux transversaux.

### **Indice**

Coll	collisions entre particules.
Eq	équilibre.
E	Est.
i	nombre de directions (LBM).
m	modèle de vitesse. (LBM).
n	dimension du problème (1 pour 1D, 2 pour 2D et 3 pour 3D)
(LBM).	
N	Nord.
S	Sud.
w	West.

# Liste des Figures & Tableaux

## 1. Liste des figures :

N°	Définition
<b>Fig. 2.1</b>	Représentation simplifiée de structures convectives bidimensionnelles entre deux plaques horizontales.
<b>Fig. 2.2</b>	Modèle de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard.
<b>Fig. 2.3</b>	Écoulement de Poiseuille purement conductif.
<b>Fig. 2.4</b>	Représentation schématique des rouleaux transversaux.
<b>Fig. 2.5</b>	Représentation schématique des rouleaux longitudinaux.
<b>Fig.2.6</b>	Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale finie
<b>Fig.2.7</b>	Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale infinie
<b>Fig. 2.8</b>	Exemple de CVD dans un réacteur
<b>Fig. 2.9</b>	Modèle de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard
<b>Fig. 3.1</b>	Modèle D2Q9
<b>Fig. 3.2</b>	Réseau D2Q9
<b>Fig. 3.3</b>	Bounce back.
<b>Fig. 3.4</b>	Conditions aux limites aux parois de la géométrie.
<b>Fig. 3.5</b>	Réseau D2Q5
<b>Fig. 3.6</b>	Réseau D2Q5
<b>Fig. 3.7</b>	Schéma représentant les fonctions de distributions inconnues
<b>Fig.4.0.</b>	Modèle de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard
<b>Fig.4.1.</b>	Etude du maillage
<b>Fig.4.2.</b>	Evolution des lignes de courant durant une période pour $Re = 10$ , $Pe = 20/3$ et $Ra = 10^4$

- Fig.4.3.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.4.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 10h) Pour  $B=20$ ,  $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.5.** Composantes verticales de la vitesse ( $U_y$ ) pour différentes périodes le long de l'axe du canal pour  $B = 20$ ,  $Re=10$  et  $Ra = 10^4$  et  $Pe = 20/3$ .
- Fig.4.6.** Courbes de températures pour différentes périodes le long de l'axe du canal pour  $B = 20$ ,  $Re=10$  et  $Ra = 10^4$  et  $Pe = 20/3$ .
- Fig.4.7** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re = 5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.8** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.9.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.10.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $B=5$ ,  $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.11.** Evolution des isothermes durant une période pour  $B=5$ ,  $Re=10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.12.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.13.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=20$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.14.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 20$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.15.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 20$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.16.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=30$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.17.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 30$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.18.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 30$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

- Fig.4.19.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=40$ ,  $Pe= 20/3$  et  $Ra=10^4$
- Fig.4.20.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 40$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.21.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 40$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.22.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=50$ ,  $Pe =20/3$  et  $Ra=10^4$
- Fig.4.23.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 50$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.24.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=50$ ,  $Re =5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.25.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=60$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra=10^4$
- Fig.4.26.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 60$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.27.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=60$ ,  $Re =5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.28.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=70$ ,  $Pe= 20/3$  et  $Ra=10^4$
- Fig.4.29.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 70$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.30.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $Re =70$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.31.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=80$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra=10^4$
- Fig.4.32.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 80$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.33.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 80$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.34.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=90$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra=10^4$

- Fig.4.35.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 90$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.36.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $Re = 90$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.37.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re = 100$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.38.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 100$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.39.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $Re = 100$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$
- Fig.4.40.** Courbe représentant la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds.
- Fig.4.41.** Courbe représentant la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh.
- Fig.4.42.** Courbe représentant la variation du nombre de Nusselt en fonction de l'allongement.

## 2. Liste des tableaux :

N°	Définition
<b>Tableau I</b>	Validation des résultats

# Chapitre I

# Chapitre I : Introduction

## 1. Introduction :

La convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec mouvement de matière. Ces dernières années, ce phénomène a connu un accroissement notable des activités de recherche tant expérimentale que numérique dans le domaine des écoulements de fluide et des transferts de chaleur entre deux parois parallèles. Dans cette configuration géométrique, on s'intéresse essentiellement à la richesse en types de structures thermo convectives susceptibles d'apparaître (sous forme de rouleaux longitudinaux, transversaux, etc.). Ce phénomène a fait l'objet de nombreux travaux de recherches[1,2,3] en vue d'applications industrielles variées liées à ce type d'écoulement telles que : le refroidissement des composants électroniques, le dépôt par vapeurs chimiques (CVD), la ventilation dans les bâtiments, les échangeurs de chaleur.

Dans ce travail, nous nous intéressons à étudier numériquement le transfert de chaleur par convection mixte dans un canal horizontal, dont les parois du haut et du bas sont considérées isothermes et différentiellement chauffées. La contribution apportée dans ce travail est l'utilisation de la nouvelle méthode de modélisation et simulation se basant sur l'approche thermique de l'équation de Boltzmann sur réseau.

La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM : *Lattice Boltzmann Method*) est une méthode numérique récente qui a vu le jour au début des années 90. Elle est initialement issue de la théorie des automates cellulaires (Cellular automata)[4], de la méthode des gaz sur réseau (LGA : lattice Gas automata)[5] et en se basant sur le formalisme de la physique statistique[6].

C'est une méthode qui s'appuie sur la résolution de l'équation de Boltzmann avec l'approche hydrodynamique, contrairement aux méthodes classiques qui sont basées sur la discrétisation des équations de Navier et Stokes. Elle décrit le phénomène non pas par des quantités macroscopiques (vitesse, pression, densité), mais directement à la répartition des différentes particules constituant un fluide. On parle alors de représentation mésoscopique. Ce qui en fait une nouvelle approche très

intéressante relativement aux méthodes classiques telles que les volumes finies, différences finies et éléments finies.

L'avantage de la méthode de Boltzmann sur réseau réside principalement dans la simplicité de la modélisation et de la simulation des phénomènes d'écoulements complexes ainsi que la facilité de mise en œuvre informatique. L'algorithmique de cette méthode permet aussi une mise en œuvre d'un calcul parallèle aisée et efficace.

## **2. But de travail :**

La méthode de Boltzmann sur réseau est une méthode numérique relativement récente et originale. Il est important de connaître ses performances et l'étendu de son application dans le domaine de la modélisation et la simulation des écoulements thermo fluides, en la comparant à celle des méthodes numériques classiques utilisées.

De ce fait, l'étude présentée dans ce travail a pour but l'analyse du phénomène de transfert de chaleur avec des écoulements de convection mixte en régime laminaire, dans un canal où les parois du haut et du bas sont considérées isothermes et différentiaient chauffées.

Le modèle thermique de la méthode de Boltzmann sur réseau à double population en deux dimensions est appliqué. Le réseau à neuf vitesses (D2Q9) est utilisé pour reproduire le champ dynamique et celui simplifié à cinq vitesses (D2Q5) est utilisé pour le champ de température.

Un code de calcul sera développé et testé durant cette étude sous l'éditeur MATLAB. Les résultats obtenus seront confrontés et validés avec ceux de la littérature obtenus avec des méthodes différentes et ce pour un rapport d'allongement  $B=20$  et le nombre de Peclet  $Pe=20/3$ .

Le travail se poursuivra par une analyse thermique et dynamique des résultats obtenus par la méthode de Boltzmann sur réseau thermique, sous influence des paramètres comme le rapport d'allongement, le nombre de Reynolds et le nombre de Rayleigh.

Ce travail ne permettra de tester la capacité du LBM de reproduire l'écoulement en convection mixte dans ce type de géométrie et traiter les instabilités thermo convectives susceptible d'apparaître dans ce genre d'écoulement.

### **3. Organisation du mémoire :**

Le premier paragraphe de ce chapitre d'introduction a permis de présenter le phénomène physique à étudier et la méthode numérique à utiliser, notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double populations. Nous avons présenté aussi dans ce premier chapitre les principaux objectifs de ce travail et nous continuerons par les étapes de présentation de ce mémoire.

Le deuxième chapitre présente une étude détaillée sur le transfert de chaleur par convection, notamment la convection mixte dans un canal horizontal chauffée par le bas, ainsi qu'une revue bibliographique sur les différents domaines d'applications concernant la configuration physique étudiée. La formulation mathématique des équations de Navier et Stokes régissant le phénomène, les hypothèses simplificatrices liées à la résolution du problème ainsi que la description des conditions aux limites propre à notre problème.

Dans Le troisième chapitre nous exposons l'historique de développement de la nouvelle méthode de modélisation et simulation utilisée dans ce travail, notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique ainsi que les bases théoriques et fondamentales de son application. Nous présenterons par la suite l'algorithme du code de calcul qui a été développé et testé durant ce travail sous l'éditeur MATLAB, en appliquant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population, avec le modèle D2Q9 pour le champ dynamique et le modèle D2Q5 pour le champ thermique. Ce code est appliqué pour la simulation de la configuration physique étudiée

Les résultats et l'analyse physique sont présentés dans le chapitre quatre. Tout d'abord, une validation du code de calcul utilisé pour le phénomène de convection mixte dans un canal horizontale chauffé par le bas avec des valeurs tirées de la littérature est discutée.

Le reste des résultats de l'analyse CFD est présentée en traçant les lignes de courants, les isothermes, la distribution des profils de vitesses et de température le long du canal et dans différentes sections. L'étude de l'influence des différents paramètres sur le transfert de chaleur notamment le nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh et l'allongement du domaine est discuté.

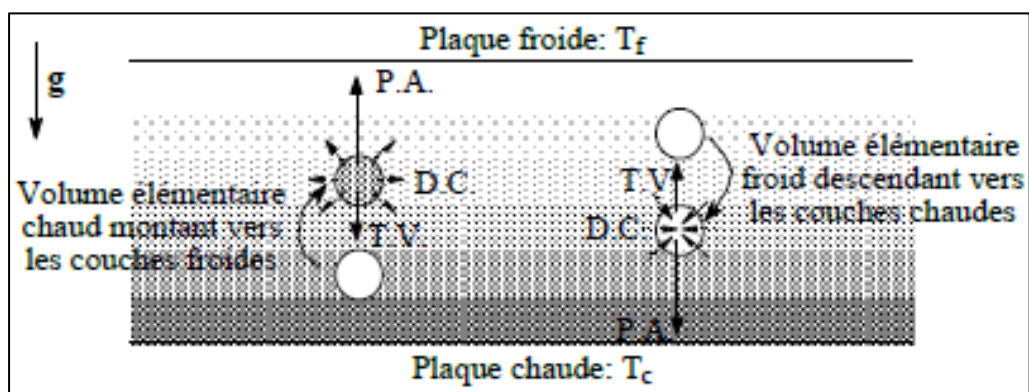
Nous terminerons ce travail par une conclusion et une discussion des perspectives tracées.

# Chapitre II

# Chapitre II : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

## 1. Transfert de chaleur par convection :

Le transfert de chaleur entre une paroi et un fluide est un processus par lequel l'énergie est échangée sous forme de chaleur grâce au gradient de températures qui peut exister entre ces deux milieux. Comme le gradient de pression, le gradient de température va donner naissance à une nouvelle force (la poussée d'Archimède) dont il faudra tenir compte dans l'établissement du bilan total des forces appliquées à une particule fluide en mouvement. En fait, la différence de température aura pour conséquence une modification de la densité déclenchant ainsi un mouvement au sein du fluide du fait de la poussée d'Archimède (Fig.2.1). Ce mouvement de brassage, dans lequel les parties les plus chaudes du fluide ont tendance à s'élever et les parties froides et denses à descendre, s'appelle "la convection". Le mouvement du fluide peut être naturel ou forcé. Ces mouvements dus uniquement à des différences de température du fluide constituent la convection naturelle. La convection forcée est obtenue en soumettant le fluide à une augmentation de pression, l'écoulement induit obéit aux lois de la mécanique des fluides. Si les deux modes de convection sont importants, la convection est dite mixte.



**Fig.2.1 :** Rupture de l'équilibre des forces donnant naissance à la convection naturelle dans une couche fluide horizontal chauffée par le bas

Les premières recherches sur la convection ont été entamées par Henri Bénard en 1900 [7,8]. Son dispositif expérimental était composé d'une fine couche d'huile (1mm d'épaisseur) chauffée par le bas par de la vapeur tandis que la surface supérieure était refroidie par de l'air à une température et une pression atmosphérique.

Malgré le manque de précision, il a observé un modèle régulier de cellules hexagonales en utilisant de l'aluminium et de la poudre de graffite.

Il a observée aussi une dépression locale au centre de chaque cellule. Cette instabilité thermo convective est en fait due principalement à la convection de Marangoni [ ]. Ce phénomène a été modélisé 50 ans plus tard par Person [9] et reproduit expérimentalement par Block [10]. La première étude théorique de la convection a été faite par Lord Rayleigh en 1916 [11], il a essayé d'expliquer les expériences expérimentales de Bénard par une théorie linéaire en utilisant l'approximation de Boussinesq [12] (toutes les propriétés du fluide excepté la densité sont indépendantes de la température). En négligeant tous les termes non-linéaires de l'équation de mouvement et de l'équation thermique, il a fondé les bases de ce que nous appelons aujourd'hui la convection de Rayleigh-Bénard (RB). Les valeurs critiques caractérisant le problème ont été calculées par Jeffreys [13], [14].

## 2. Formulation mathématique de l'écoulement par convection :

### 2.1 Equation de Navier et stokes :

Afin de mener à bien les calculs prédictifs concernant les phénomènes de convection thermique, il est nécessaire de spécifier la modélisation du fluide et les équations vérifiées par les champs de grandeurs physiques le décrivant. Ces équations sont l'expression des conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'objectif visé de cette formulation est la détermination de la distribution de la température, de la pression et des vitesses dans le système considéré.

- **Equation de de continuité (conservation de la masse) :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

- **Equation de l'énergie :**

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.3)$$

En deux dimensions, L'opérateur  $\nabla$  est un vecteur est défini comme suit :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \quad (2.4)$$

Et :

$$\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.5)$$

$\Phi$  est la fonction de la dissipation définie en deux dimensions comme suit :

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

## 2.2 L'approximation de Boussinesq :

La résolution des équations décrivant le phénomène d'écoulement par convection est complexe, si on prend en considération que les propriétés physiques peuvent varier en fonction de la température et la pression. On se place dans l'hypothèse formulée par Boussinesq [12] à savoir que les propriétés physiques ne varient pas avec la température à l'exception de la densité lorsque les variations de celle-ci créent des forces de gravitation. Des simplifications sont apportées aux équations de mouvement notamment, négliger les variations de  $\rho$  dans les termes autres que  $\rho g$  ce qui conduit à considérer le fluide comme incompressible. La variation de la densité (qui produit l'écoulement) est linéarisée autour de l'état de référence ( $T_{\text{réf}}, \rho_{\text{réf}}$ ). Elle est exprimée comme suit :

$$\rho = \rho_{\text{réf}} (1 - \beta (T - T_{\text{réf}})) \quad (2.7)$$

ou  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique à pression constante

La condition :  $\rho_{\text{réf}} \beta (T - T_{\infty}) \ll 1$  est très importante pour la validation de cette équation.

### 3. Les Nombres adimensionnels caractérisant le transfert de chaleur par convection:

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures, pour permettre l'obtention d'informations généralisées pour une variété des problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un côté, et de l'autre, réduire le nombre de paramètres d'un problème.

En effet, pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire les nombres adimensionnels suivants :

#### a) Nombre de Rayleigh :

Est un nombre sans dimension qui caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle qui devient importante.

On peut le définir comme le produit du Nombre de Grashof, reliant la force d'Archimède à la viscosité du fluide et du nombre de Prandtl.

$$Ra = \frac{g\beta(T_c - T_f)d^3}{\nu\alpha} \quad (2.8)$$

Où :  $g$  est la force gravitationnelle,  $T_c$  et  $T_f$  sont respectivement les températures des parois du bas (chaude) et celle du haut (froide) à l'intérieur du canal.

$d$  est la hauteur du canal,  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $\alpha$  la diffusivité thermique définie par l'usage de la conductivité thermique  $\lambda$ , la densité  $\rho$  et la chaleur spécifique à pression constante  $c_p$  :

$$\alpha \equiv \frac{1}{\rho c_p} \quad (2.9)$$

$\beta$  est le coefficient d'expansion volumétrique :

$$\beta \equiv \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (2.10)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.11)$$

Selon le travail de Rayleigh, pour un cas bidimensionnel, le transfert de chaleur est purement par conduction pour un nombre de Rayleigh inférieur à une valeur critique  $Ra_c$ . Lorsque cette dernière est atteinte, le système devient instable et passe à un autre état où la convection devient la principale forme de transfert de chaleur.

### **b) Nombre de Reynolds :**

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il caractérise la nature de l'écoulement : laminaire, transitoire ou turbulent.

$$Re = \frac{U_0 \cdot d}{\nu} \quad (2.12)$$

On note que le nombre de Reynolds se base sur la valeur maximale de la vitesse dans le profil de Poiseuille (On considère toujours que l'écoulement de Poiseuille est stationnaire, pleinement développé) :

$$Re = \frac{U_{max} d}{\nu} \quad (2.13)$$

Où :  $U_{max}$  est la valeur maximale de la vitesse dans le profil de Poiseuille,  $d$  la hauteur du canal et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

**c) Nombre de Prandtl :**

Est un nombre adimensionnel qui représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement  $\nu$  (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique  $\alpha$ .

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.14)$$

**d) Nombre de Grashof :**

Ce nombre correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. Il caractérise la convection naturelle dans un fluide.

$$Gr = \frac{g\beta(T_c - T_f)d^3}{\nu^2} \quad (2.15)$$

**e) Nombre de Péclet :**

Il représente le rapport des forces d'inertie diffusives et les forces thermiques diffusives. Il est défini par le produit du Nombre de Reynolds par le nombre de Prandtl.

$$Pe \equiv Re Pr \quad (2.16)$$

**f) Nombre de Nusselt :**

Est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert thermique total et le transfert par conduction. L'échange thermique entre les parois chaudes et froides est représenté par le nombre de Nusselt moyen :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\frac{L}{H}} \int_0^{L/H} Nu dx \quad (2.17)$$

Où : Nu est le nombre de Nusselt local :

$$Nu = \left| \frac{\partial T^*}{\partial n} \right| \quad (2.18)$$

On définit aussi le nombre de Nusselt moyen dans le temps et l'espace comme suit :

$$\langle \overline{Nu} \rangle = \frac{1}{t} \int_0^{t_1} \overline{Nu} dt \quad (2.19)$$

#### 4. La Convection mixte :

La Convection mixte correspond au couplage de deux phénomènes, à savoir la convection naturelle et forcée qu'on peut qualifier de cas général de la convection, quand le fluide est soumis simultanément à une augmentation de pression et à une différence de température. Parmi les exemples de cette mixité, on peut citer : les écoulements lents en canalisation (les radiateurs à eau) ou le long d'une paroi, les écoulements atmosphériques et les courants marins (qui sont importants pour les questions de climatologie et de pollution), le dépôt de vapeurs chimiques (CVD), ainsi que le refroidissement des composants électroniques.

Les deux mécanismes de convection (naturelle et forcée) vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement gravitaire, qui jouera donc un rôle essentiel. Si les effets de la pesanteur s'opposent au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique a tendance à diminuer et on parle de convection mixte "*contrariée*". Si l'écoulement forcé est de même sens que l'écoulement libre (cas de la plaque verticale chauffée, dans un fluide lui-même en mouvement ascendant) il se produit une amplification des transferts par rapport à la convection forcée seule et on parle alors de convection mixte "*aidée*".

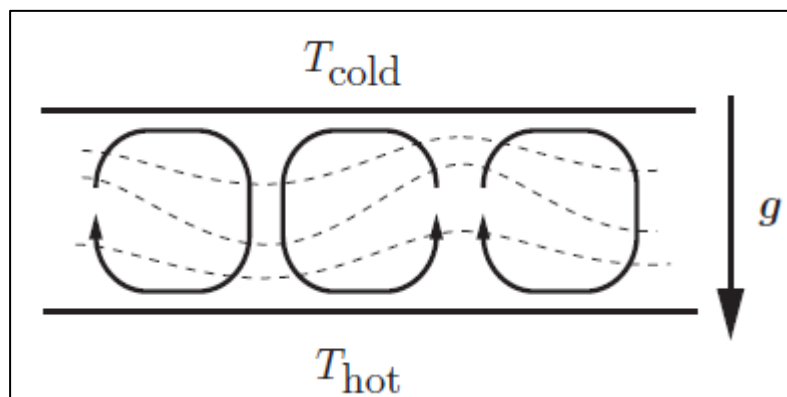
Le problème de l'écoulement d'un fluide entre deux parois parallèles différentiellement chauffées, a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs dans le domaine. Dans cette configuration géométrique, on s'intéresse essentiellement à la richesse en types de structures thermo convectives susceptibles d'apparaître (sous forme de rouleaux longitudinaux, transversaux, etc.). On peut citer les travaux sur les écoulements de Rayleigh-Bénard (RB) et Les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB), qui sont des écoulements laminaires de convection (Naturelle/mixte) en conduite rectangulaire horizontale chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut.

## 5. La convection de Rayleigh Bénard :

L'écoulement de Rayleigh-Bénard est caractérisé par l'apparition de structures convectives dans une couche de fluide fermée et chauffée par la partie basse, sujettes à l'effet de la gravité. Si on produit un gradient de température suffisamment grand orienté dans la direction inverse de la gravité, une partie du fluide proche de la paroi inférieure se déplace verticalement vers le haut. L'équation de continuité requière que ce mouvement vers le haut soit compensé par un mouvement vers le bas.

Le résultat se traduit par la formation de cellules convectives où le fluide froid est constamment remplacé par le fluide chaud du bas.

On peut observer dans la figure (Fig.2.2). Une apparition de deux cellules voisines contre rotatifs. Les lignes discontinues représentent les lignes isothermes, il aurait été horizontales dans un phénomène de transfert de chaleur par conduction pure.



**Fig.2.2.** Représentation simplifiée de structures convectives bidimensionnelles entre deux plaques horizontales [15]

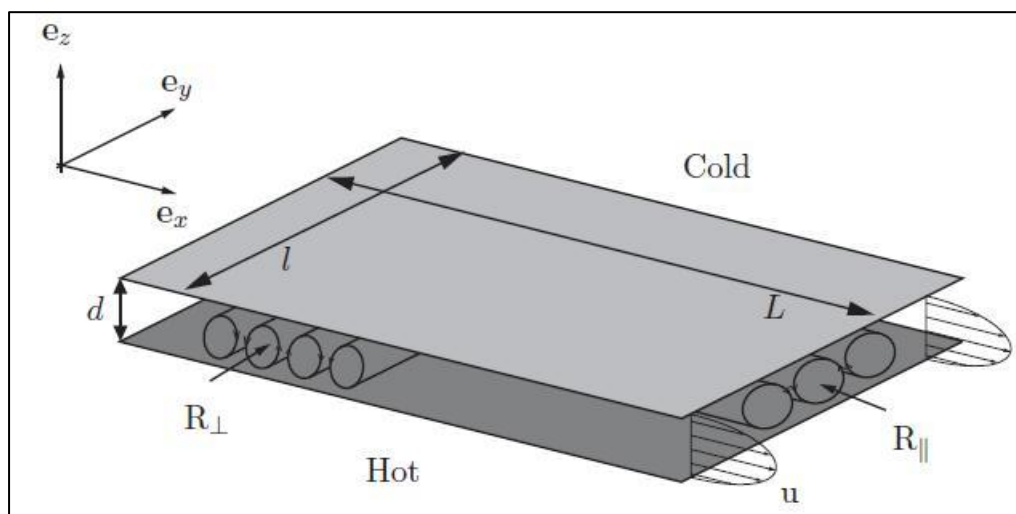
## 6. La convection de Poiseuille Rayleigh Bénard:

La première étude sur le problème de Rayleigh-Bénard a été réalisée par Paul Idrac (1920, 1921) [16,17] où on trouve dans son travail expérimental la première description des rouleaux transversaux  $R_{\parallel}$ , seule structure observée par l'auteur dans les écoulements Poiseuille Rayleigh-Bénard (PRB).

Philips et Sir Walker (1932) [18], ont été les premiers à observer les rouleaux transversaux, pour des écoulements cisailés à petits nombres de Reynolds.

Graham (1933) [19], a confirmé l'existence des  $R_{\perp}$  et en 1951 Brunt [20], a fait une synthèse et bibliographie de l'ensemble des résultats de cette époque tentant d'expliquer l'apparition des structures thermoconvectives dans l'atmosphère.

Abassi et al (2001) [1], Evans et al (1990) [21] et Comini et al (1997) [22] ont simulés le phénomène de Poiseuille Rayleigh Bénard pour un rapport d'allongement égal à 20,  $Re = 10$ ,  $B=20$ ,  $Ra= 10^4$  et un  $Pe = 20/3$  et ont obtenus les nombres de Nusselt moyens ainsi que les périodes pour ces paramètres.



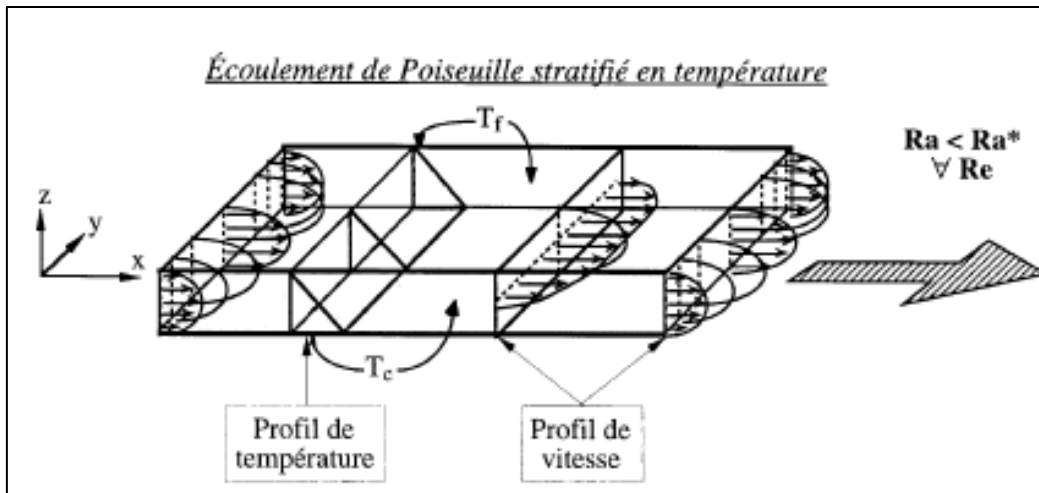
**Fig.2.4.**..Modèle de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard

Ils résultent de la superposition de deux sources convectives :

- Un gradient de pression horizontal entraine le fluide dans une conduite.
- Un gradient de température vertical est à l'origine de la formation des structures thermo convectives.

Le phénomène est caractérisé par des nombres adimensionnels autres que le nombre de Rayleigh, nous avons le nombre de Reynolds **Re** et le nombre de Prandtl **Pr** .

Lorsque le fluide est isotherme ou le transfert de chaleur purement conductif c.à.d: lorsque **Ra < Ra\***, (  $Ra^*$  est une valeur critique du nombre de Rayleigh) on a affaire à un écoulement de Poiseuille. (fig3)



**Fig.2.5.** Ecoulement de Poiseuille purement conductif [3]

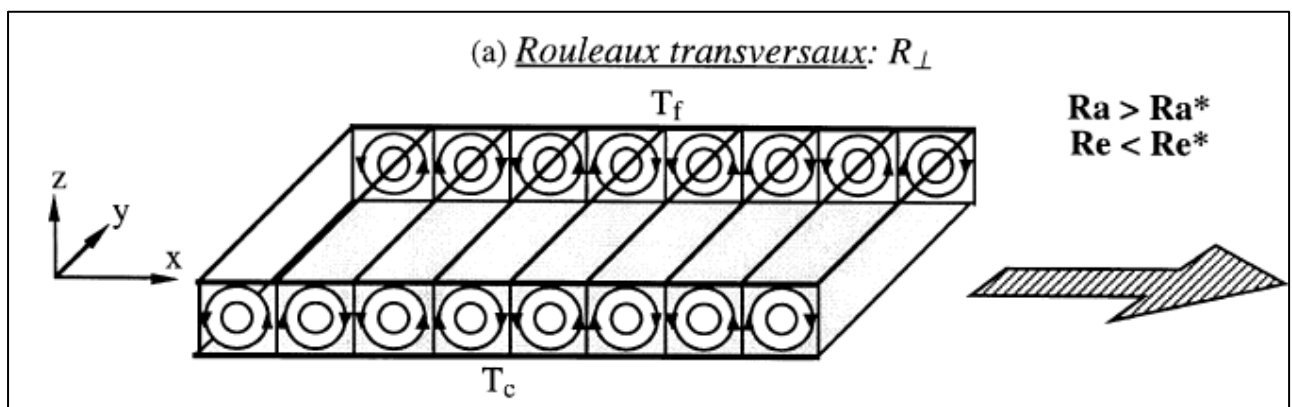
Lorsque  $Ra > Ra^*$ , plusieurs types d'écoulements peuvent apparaître :

- Si  $Re = 0$  : Ecoulement de Rayleigh-Bénard (convection naturelle)
- Si  $Re \neq 0$  et  $Re < Re^*$ , il apparaît des rouleaux d'axes transversaux à l'axe de la conduite et formant une chaîne de cylindres contrarotatifs emportés par l'écoulement moyen.

### 6.1 Rouleaux transversaux :

Ces structures (rouleaux) sont quasi bidimensionnelles : la composante transversale de la vitesse est nulle, excepté près des bords latéraux [3].

On appellera cette configuration « rouleaux transversaux » et on les notera  $R_{\perp}$  (fig.4).



**Fig.2.6.** Représentation schématique des rouleaux transversaux [3]

## 6.2 Rouleaux longitudinaux :

L'autre configuration qui peut apparaître quand  $Ra > Ra^*$  et  $Re > Re^*$  est celle observé par **Idrac (1920)**, cette dernière est constituée de rouleaux thermo convectifs hélicoïdaux, contrarotatifs, stationnaires et d'axes parallèles à celui de la conduite [3]. On appellera cette configuration « rouleaux longitudinaux » et on les notera  $R_{\parallel}$  (fig 5).

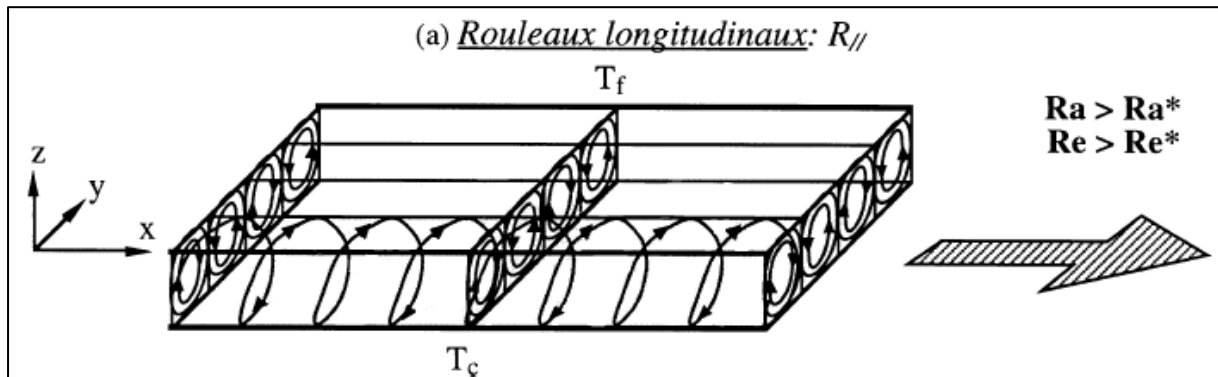


Fig.2.7. Représentation schématique des rouleaux longitudinaux [3]

Il existe dans les écoulements de Poiseuille Rayleigh Bénard deux cas :

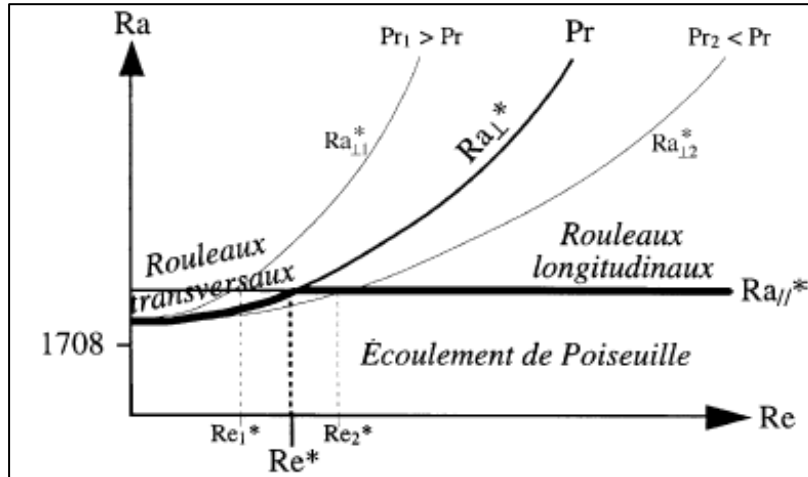
- Cas d'un écoulement entre deux plaques finies
- Cas d'un écoulement entre deux plaques infinies.

### 6.2.1 Cas d'un écoulement entre deux plaques finies :

C'est un cas où l'allongement transversal  $B = l/h$  est un nombre fini.

Lorsque  $Re < Re^*$  les parois verticales favorisent l'apparition des  $R_{\perp}$ , par contre lorsque  $Re > Re^*$  l'écoulement moyen favorise les  $R_{\parallel}$ .

Nous limiterons notre travail pour un  $Re < Re^*$



**Fig.2.8.** Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale finie [3]

### 6.2.2 Cas d'un écoulement entre deux plaques infinies :

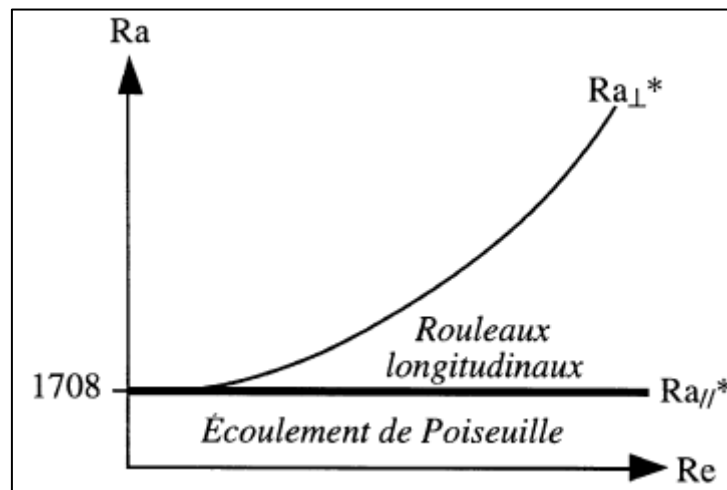
L'allongement transversal  $B = l/h \rightarrow \infty$

Ces études montrent que les  $R_{\parallel}$  sont plus instables que les  $R_{\perp}$  et  $Ra_{\parallel}^* < Ra_{\perp}^*$ .

Où :  $Ra_{\parallel}^*$  : Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des  $R_{\parallel}$ .

$Ra_{\perp}^*$  : Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des  $R_{\perp}$ .

Pour  $Re = 0$  (convection naturelle) : pas de direction privilégié dans l'écoulement, et on ne peut pas différencier les  $R_{\parallel}$  des  $R_{\perp}$ , donc  $Ra_{\parallel}^* = Ra_{\perp}^* = 1708$ .



**Fig.2.9.** Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale infinie [3]

## 7 Applications industrielles :

Ces vingt dernières années, de nombreux travaux motivés par une application industrielle se sont intéressés à la configuration des écoulements de PRB.

Ces applications concernent :

- L'étude des dépôts de vapeur chimiques CVD (*chemical vapor deposition*).
- Le refroidissement des composants électroniques dans les circuits imprimés.

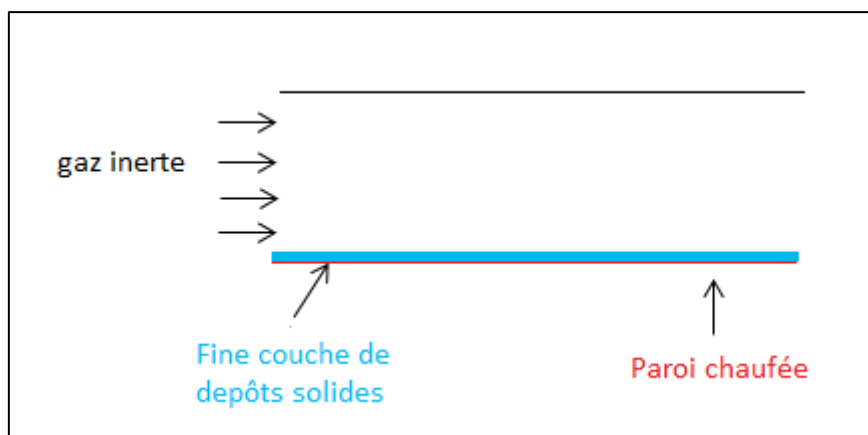
L'augmentation des transferts thermiques ou des taux de dépôt de vapeur chimiques, ainsi que la détermination des longueurs nécessaires à l'apparition des structures convectives sont l'intérêt principal de ces recherches.

Dans le premier paragraphe, on présente des travaux affairant aux dépôts des vapeurs chimiques (CVD), et les travaux sur le refroidissement des composants électroniques sera présenté dans le second.

### 7.1 Dépôts de vapeur chimiques CVD :

Les dépôts de vapeur chimiques est un procédé utilisé pour la fabrication de films minces de matière inorganique.

Dans un réacteur on fait circuler un mélange de gaz inertes et réactifs qui, par pyrolyse au contact d'un substrat chauffé, va créer une fine couche de dépôts solides. (Fig8)



**Fig.2.10.** Exemple de CVD dans un réacteur

Les applications industrielles de cette technologie interviennent par exemple lors de la fabrication des circuits microélectroniques pour l'obtention des couches

minces de semi-conducteurs, ou lors de la conception de supports d'enregistrements magnétiques ou optiques.

L'enjeu de cette technologie est de pouvoir contrôler le taux de dépôts des vapeurs chimiques (variation de l'épaisseur du dépôt par rapport au temps,  $\text{Å}/\text{min}$ ), pour l'obtention des couches les plus uniformes possible à l'épaisseur souhaitée.

La géométrie du réacteur peut varier, mais la plus utilisée est une conduite horizontale d'une section rectangulaire, où le substrat chauffé est placé sur la paroi du bas Jensen et al. (1991) [23]. (Evans et Grief 1989) donnent l'ordre de grandeur des dimensions de ces réacteurs et les caractéristiques de l'écoulement typique rencontré en CVD.

Jensen et al. (1991) [23] et Ingle et Mountziaris (1994) [24] ont fait une revue complète sur ce domaine. Chiu et al (2000) [25] ont fait la Visualisation expérimentales et la mesure de transferts thermiques associés à ces différentes configurations thermodynamiques ( $R_{\perp}$ ,  $R_{\parallel}$ ,  $R_{\perp}$  fixe,  $R_{\parallel}$  sinueux) dans les écoulements d'air à :  $9.5 < Re < 40$  et  $3 \times 10^5 < Ra' < 4,5 \times 10^6$

Dans les réacteurs chimiques de  $B = 5$ . Avec un substrat horizontal ou inclinée à  $8^{\circ}$ .

## **7.2 Refroidissement des composants électroniques :**

La miniaturisation des composants et équipements électroniques a permis de réduire la taille des ordinateurs, et d'augmenter la quantité de chaleur volumique dissipée par les circuits intégrés. La géométrie est une cellule d'un écoulement PRB, mis à part :

Le chauffage des plaques est périodique, sur la paroi du bas, du haut ou les deux plaques en mêmes temps.

Hasnaoui et al (1991) [26], ont simulé le problème en utilisant dans conditions aux limites périodiques avec  $A = 2$ .

Pour :  $10^3 < Ra < 10^6$ ,  $Re \leq 6$  et  $Pr = 0.7$

(Quelques résultats sont données pour :  $Pr = 0.1$  et  $Pr = 7$ )

- $Re = 0$  : Deux  $R_{\perp}$  symétriques et stationnaires sont observés de l'écoulement chauffant.
- $Re \neq 0$  et  $Re < Re^*$  : ils deviennent dissymétriques, mais restent attachées à l'élément chauffant.

- $Re > Re^*$  : Les cellules thermoconvectives se détachent et sont emportées par l'écoulement qui devient périodique en temps.

La variation de  $Re^*$  en fonction de  $Ra$  et de la taille de l'élément chauffant est déterminée.

Bilgen et al (1995) [27] montrent que pour :  $5 \times 10^3 < Ra < 2 \times 10^4$  et  $0.1 \leq Pe \leq 2.5$

Comparent des simulations effectuées avec de conditions aux limites périodiques dans un domaine d'allongement  $A=L/h= 2$ , avec un seul élément chauffant.

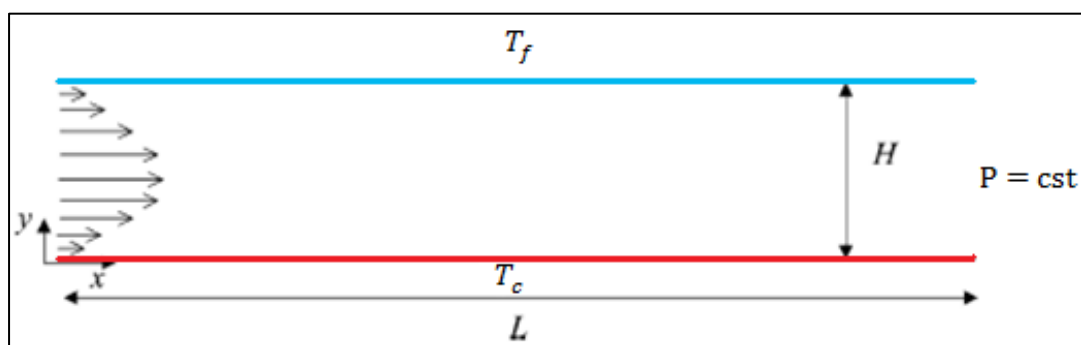
Avec des simulations effectuées avec des conditions aux limites ouvertes à l'entrée et à la sortie avec  $A = L/h= 8$  avec quatre éléments chauffants placés périodiquement.

Ils montrent que les nombres de Nusselt pariétaux sont les mêmes dans les deux configurations.

## 8 Description du phénomène étudié:

### 8.1 configuration Géométrie

La configuration géométrique choisie pour ce problème est une conduite rectangulaire chauffée par le bas et refroidis par le haut, traversé par un fluide incompressible et newtonien avec un profil de vitesse parabolique à l'entrée et une température supposée froide Fig.2.3.



**Fig.2.3.**Modèle de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard

## 8.2 Hypothèses :

Les hypothèses simplificatrices appliquées dans notre étude sont les suivantes :

- Le fluide considéré est un fluide newtonien, incompressible et satisfait l'hypothèse de Boussinesq.
- La masse volumique varie linéairement avec la température et elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_{\infty} [1 - \beta \cdot (T - T_{\infty})]$$

- L'écoulement est de type mixte « convection naturelle et forcée » et reste laminaire.
- L'écoulement est considéré 2D et stationnaire.
- Le transfert de chaleur par radiation est négligeable.
- La dissipation de la chaleur par effet de viscosité est négligeable.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence.

## 8.3 Description mathématique de l'écoulement :

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. En appliquant les hypothèses citées, et afin de donner une forme sans dimension aux variables dépendantes et indépendantes, nous employons des quantités caractéristiques qui sont constantes dans tout le champ de l'écoulement thermique. Ces quantités sont : H la hauteur de la cavité,  $U_{\max}$  la vitesse maximal du profile de poiseuille,  $T_0 = T_f$  température de référence et  $p_0$  la pression. Ces équations s'écrivent sous forme adimensionnelle pour le cas étudié comme suit [28]:

**Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.20)$$

**Equations de quantité de mouvement suivant l'axe des x :**

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.21)$$

**Equations de quantité de mouvement suivant l'axe des y :**

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Ra}{Re Pe} T^* \quad (2.22)$$

**Equation de l'énergie:**

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau} + U \frac{\partial T^*}{\partial X} + V \frac{\partial T^*}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial Y^2} \right) \quad (2.23)$$

Les équations ci-dessus ont été ramené à une forme adimensionnelle où :

$$X = \frac{x}{H} \quad (2.24)$$

$$Y = \frac{y}{H} \quad (2.25)$$

$$U = u/u_{max} \quad (2.26)$$

$$V = v/u_{max} \quad (2.27)$$

$$T^* = \frac{T-T_0}{T_c-T_0} \quad (2.28)$$

$$P = \frac{p}{\rho \cdot u_{max}^2} \quad (2.29)$$

#### **8.4 Conditions aux limites du problème :**

Pour notre problème (fig2) les conditions aux limites s'écrivent de la manière suivante:

$$\text{Paroi du bas : } 0 \leq x \leq L \text{ et } y = 0 \rightarrow u = v = 0, T = T_c. \text{ par}$$

$$\text{Paroi du haut : } 0 \leq x \leq L \text{ et } y = h \rightarrow u = v = 0, T = T_f.$$

$$\text{Entée du fluide : } x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq H : \rightarrow u = U_{max} \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right), v=0, T = T_f.$$

$$\text{Sortie du fluide : } x = L \text{ et } 0 \leq y \leq H : \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 ; P = \text{cst.}$$

## **Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude détaillée sur le transfert de chaleur par convection, notamment la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas. Une revue bibliographique sur les structures thermo convectifs notamment celles reliées à la convection de Rayleigh-Bénard et celles de Poiseuille-Rayleigh-Bénard est présentée, ainsi que leur intérêt dans différents domaines d'application industrielle.

La formulation mathématique des équations de Navier et Stokes régissant le phénomène, les hypothèses simplificatrices liées à la résolution du problème ainsi que les conditions aux limites propres à notre problème ont été décrites.

Dans le chapitre qui suit, nous allons présenter l'approche théorique et fondamentale de la nouvelle méthode utilisée dans cette étude, notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique en se basant sur le modèle thermique à double population.

# Chapitre III

# Chapitre III : METHODE DE BOLTZMANN SUR RESEAU

## 1. Historique :

La méthode de Boltzmann sur Réseau est une méthode numérique relativement nouvelle par rapport aux approches classiques utilisées en simulation numérique.

Pourtant, entre le fondement de la physique statistique sur laquelle elle est basée et son achèvement théorique, il s'est écoulé plus d'un siècle. Ainsi, en guise d'introduction, nous allons présenter les grandes lignes historiques, nécessaires pour comprendre les différents aspects théoriques de cette méthode. Nous essaierons dans ce court paragraphe de faire ressortir les étapes fondamentales dans l'élaboration de l'équation de Boltzmann sur Réseau, dont la construction théorique sera détaillée dans la suite. La construction de la méthode Boltzmann sur Réseau peut se résumer en deux étapes paradoxalement indépendantes : le développement de la physique statistique d'une part et l'apparition des automates cellulaires d'autre part.

La première étape nous propulse au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle avec l'avènement de la physique statistique basée sur les travaux de l'Américain Josiah Willard Gibbs, des Anglais Lord Kelvin et James Clerk Maxwell et de l'Autrichien Ludwig Eduard Boltzmann. La physique statistique, dérivée de la théorie cinétique des gaz, s'intéresse non plus à l'évolution globale des quantités macroscopiques (densité, vitesse, pression) mais au comportement microscopique de la matière et tente de décrire l'évolution des particules qui la constitue. Ainsi en 1872, Boltzmann propose sa célèbre équation (3.1) décrivant l'évolution spatio-temporelle d'une fonction  $f$  représentant la distribution des particules ayant une vitesse donnée à un endroit et à un temps donnés. Cette fonction est souvent appelée fonction de distribution et dépend donc de l'espace, de la vitesse et du temps :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (3.1)$$

Le membre de droite de l'équation de Boltzmann, appelé opérateur de collision, représente l'effet des collisions entre particules. Si ce terme est nul, les particules sont alors simplement advectées et soumises à l'action de la force  $F$  présente dans le membre de gauche. Si les particules se rencontrent, l'évolution du système dépend alors de la forme de l'opérateur de collision. A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle Boltzmann lui-même n'avait qu'une idée approximative de cet opérateur et ne considérait que les collisions à deux particules (dites collisions binaires). On sait aujourd'hui depuis les travaux de Cohen et Dorfman (1970) que l'équation de Boltzmann avec un tel opérateur de collision ne peut pas s'appliquer aux liquides et aux gaz de haute densité. Les travaux de Boltzmann [29], très controversés à l'époque ne furent validés expérimentalement qu'après sa mort en 1906. Ce n'est que plus tard, dans les années 1920 que les travaux indépendants d'un astronome anglais, Sydney Chapman et d'un mathématicien suisse, David Enskog s'intéressent à des collisions plus complexes mettant en jeu plus de deux particules. Le jeune Enskog eut l'idée d'utiliser la méthode de Hilbert (1912) pour effectuer un développement systématique de la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann.

Chapman approfondi alors l'idée d'Enskog et décide de considérer les particules comme des sphères dures pour prendre en compte les collisions complexes. Ainsi, à partir de 1921 les travaux de Chapman et Enskog [30, 31], validés expérimentalement par le chimiste F.W. Dootson, permettent d'établir des liens directs entre l'équation de Boltzmann et celles de Navier-Stokes (1823), élargissant ainsi les travaux de Boltzmann (cette procédure sera détaillée plus précisément dans la suite de ce chapitre). Toutefois, l'opérateur de collision utilisé par Chapman et Enskog reste très complexe et très spécifique. Il faut alors attendre une trentaine d'années pour qu'un modèle de collision simple voit le jour. Ce sont les mathématiciens Prabhu Lal Bhatnagar, E.P. Gross et Max Krook qui lui donneront naissance en 1954 [32]. Ce modèle, établi à partir de développements théoriques complexes, est basé sur l'idée que la collision des particules peut être décrite comme la relaxation en un temps donné des particules, vers un état d'équilibre donné. Cette idée fondamentale permet ainsi d'écrire l'opérateur de collision sous une forme très simple qui porte le nom d'opérateur BGK, du nom de ses créateurs. Ainsi dès 1954, la physique statistique a montré que

l'équation de Boltzmann munie de l'opérateur BGK permettait de décrire les écoulements de la mécanique des fluides régis par les équations de Navier-Stokes. La méthode de Boltzmann sur Réseau aurait alors pu naître à cette époque. Mais la notion de discrétisation et de réseau, propres aux usages informatiques, ne verra le jour que bien plus tard avec le développement intensif de la simulation numérique.

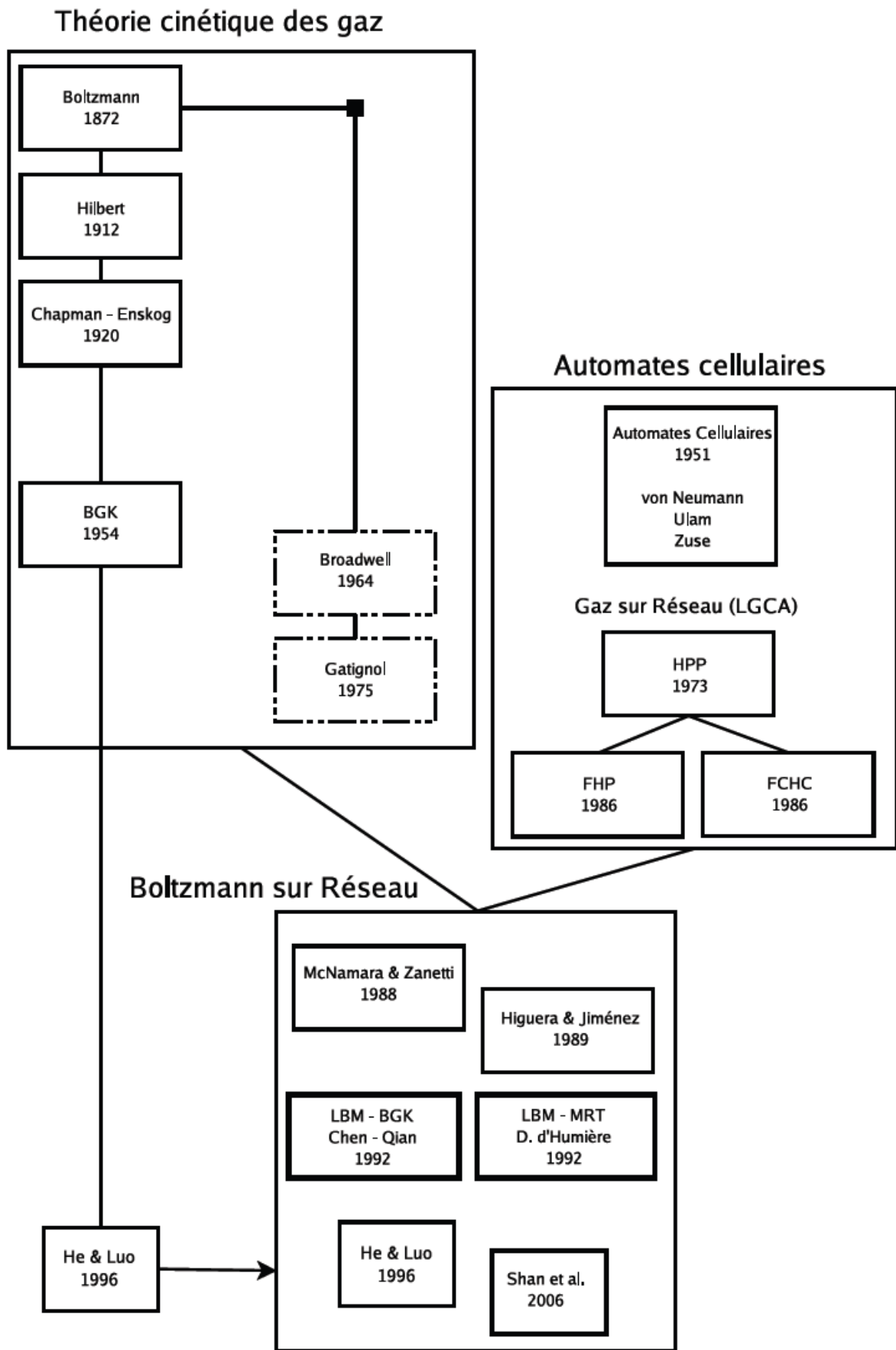
La notion de discrétisation naît donc dans la seconde moitié du XX<sup>ème</sup> siècle avec l'apparition des premières machines de calculs. Les automates cellulaires apparaissent pour la première fois dans les années 50 avec John von Neumann, Stanislas Ulam et Konrad Zuse et utilisent des opérations booléennes (0 ou 1) très proches du langage machine [33]. Les premiers modèles à vitesses discrètes sont introduits par Broadwell [34] en 1964 puis par Gatignol [35] en 1973. Pourtant dans ces premiers modèles, la discrétisation spatiale et temporelle en vue d'une résolution numérique n'est pas introduite. C'est en fait le développement en 1973 des premiers automates cellulaires appliqués à la simulation en mécanique des fluides qui feront le lien avec la discrétisation de l'espace et du temps avec l'apparition des gaz sur réseau (LGCA pour Lattice Gas Cellular Automata). Le premier modèle de gaz sur réseau fut développé par Hardy, Pomeau et Pazzis (modèle HPP) en 1973 [36] et utilisait les distributions de Fermi-Dirac pour l'état d'équilibre mais ne permettait pas de retrouver les équations de Navier-Stokes. Il fut suivi en 1986 par le modèle 2D FHP (Frisch, Hasslacher et Pomeau) [5] basé sur une meilleure symétrie du réseau permettant de retrouver les équations de Navier-Stokes puis par le modèle 3D FCHC (pour Face Centered HyperCube) proposé par d'Humièrre quelques mois plus tard [37]. Très vite, les modèles de gaz sur réseau souffrent d'inconvénients importants comme la brisure de l'invariance galiléenne due à l'utilisation des distributions de Fermi-Dirac et du bruit numérique dû à l'utilisation de variables booléennes.

Ainsi, à la fin des années 80, les travaux sur les gaz sur réseau se tournent vers l'équation de Boltzmann. Une étude reprenant l'ensemble des modèles de gaz sur réseau, menée par Wolfram en 1986 [1] puis par Frisch l'année suivante [38], permet de faire le lien entre les gaz sur réseau et l'équation de Boltzmann. Les variables booléennes sont alors remplacées par des variables réelles et les distributions de Maxwell-Boltzmann sont utilisées pour l'état d'équilibre. Ces modifications entraînent

la suppression des inconvénients majeurs des gaz sur réseau. On peut alors parler des premiers modèle Boltzmann sur Réseau à proprement parler, introduit par McNamara et Zanetti en 1988 [39]. L'apparition des modèles Boltzmann sur réseau actuels se fera progressivement avec la linéarisation de l'opérateur de collision par Higuera et Jiménez en 1989 [40] et enfin, par l'utilisation de l'opérateur BGK par Koelman en 1991 puis par Chen [41] et Qian en 1992 [42].

L'équation de Boltzmann sur Réseau est alors née et, au début des années 90 la méthode de Boltzmann sur Réseau est présentée comme une amélioration des gaz sur réseau. On peut alors remonter aux équations de Navier-Stokes et à l'équation de Boltzmann continue par un développement a posteriori. Pourtant, en 1996, He & Luo [43] montrent que l'équation de Boltzmann sur Réseau peut être dérivée directement de l'équation de Boltzmann continue. On parle alors de dérivation a priori de la méthode Boltzmann sur Réseau. Cette dérivation a priori fixe un cadre théorique pour la méthode Boltzmann sur Réseau sans passer par les gaz sur réseau dont elle est initialement issue. Dans la suite de ce chapitre, c'est cette méthode a priori qui sera explicitée dans ses grandes lignes. Cet aspect historique que nous venons d'exposé montre bien l'évolution longue et périlleuse qui s'est écoulée entre l'apparition de l'équation de Boltzmann en 1872 et l'équation de Boltzmann sur Réseau en 1992, soit 120 années de recherches. Ceci montre l'importance et la place de la physique statistique dans la science contemporaine.

Aujourd'hui la méthode de Boltzmann sur Réseau est utilisée dans de nombreux domaines de modélisation et simulation physique [44, 45].



**Fig.3.1.** Historique de la méthode den Boltzmann sur réseau [46]

## 2. L'équation de Boltzmann continue :

En physique statistique, un gaz est décrit par un nuage de particules obéissant à l'équation de Boltzmann [47, 48].

Cette équation continue telle qu'elle fut proposée par Boltzmann en 1872 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (3.2)$$

Où  $f = f(x, c, t)$  représente la densité de particule ayant la vitesse  $\mathbf{c}$  au point  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$ . Ainsi, la probabilité de trouver une particule ayant une vitesse comprise entre  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{c} + d\mathbf{c}$  dans le voisinage de  $\mathbf{x}$  peut s'écrire :  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}$ .

$\mathbf{F}$  désigne les forces extérieures et  $m$  la masse moléculaire du gaz.

Dans la suite nous ne considérerons aucune force extérieure et les effets de la pesanteur seront négligés.

On remarque alors que la densité, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique du fluide sont retrouvées en considérant toutes les vitesses possibles :

$$\rho u = \int_{R^3} \mathbf{c} f d\mathbf{c} \quad (3.3)$$

$$\rho = \int_{R^3} f d\mathbf{c} \quad (3.4)$$

$$\rho e + \frac{1}{2} \rho |u|^2 = \frac{1}{2} \int_{R^3} |\mathbf{c}|^2 f d\mathbf{c} \quad (3.5)$$

L'opérateur de collision  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$  décrit l'effet des collisions entre particules.

En ne considérant que les collisions binaires, transformant les vitesses  $[c_1; c_2]$  (pré-collision) en  $[c'_1, c'_2]$  (post-collision).

### 3. L'approximation BGK :

Il est très difficile de résoudre l'équation de Boltzmann à cause de la complexité de l'opérateur de collision.

Cependant il est possible d'approximer l'opérateur de collision en un simple opérateur qui ne tient pas compte des erreurs qui proviennent de la collision entre particules.

Bhatnagar, Gross and Krook (BGK) ont mis au point en 1954 un modèle simplifié de l'opérateur de collision [32].

L'opérateur de collision peut être écrit de la façon suivante :

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (3.6)$$

Où :  $\omega = \frac{1}{\tau}$

Le coefficient  $\omega$  est appelé fréquence de collision et  $\tau$  le facteur de relaxation.

$f^{eq}$  est la fonction de distribution locale, qui est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann.

Après application de l'approximation de BGK l'équation de Boltzmann (sans forces extérieures) peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (3.7)$$

L'équation de Boltzmann à vitesses discrètes peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_i \cdot \nabla f_i = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (3.8)$$

Cette équation remplace les équations de Navier et Stokes dans les simulations CFD.

L'équation (3.8) est caractérisé par :

1. L'équation est une PDE.
2. La partie droite de l'équation représente la propagation.
3. La partie gauche de l'équation représente le processus de collision.

La discrétisation de l'équation (3.8) nous donne :

$$f_i(r + c_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i(r, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] \quad (3.9)$$

La fonction de distribution locale et le temps de relaxation déterminent le type de problème à résoudre.

Dans la méthode LBM, le domaine doit être considéré comme un réseau. Dans chaque nœud du réseau réside une particule (fonction distribution). Certaines de ces particules se propagent en suivant les directions spécifiées vers le nœud voisin.

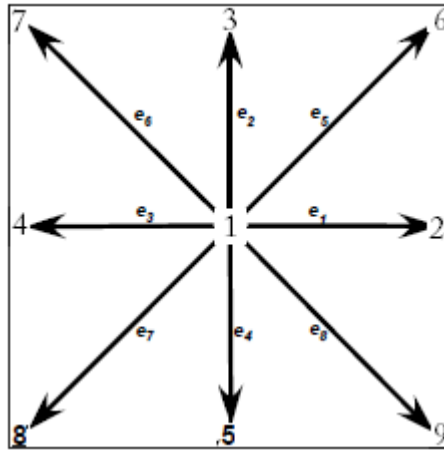
Le nombre de directions dépend de l'arrangement du réseau, ex : 9 directions pour le modèle D2Q9.

#### **4. Modèles dynamique de Boltzmann sur réseau :**

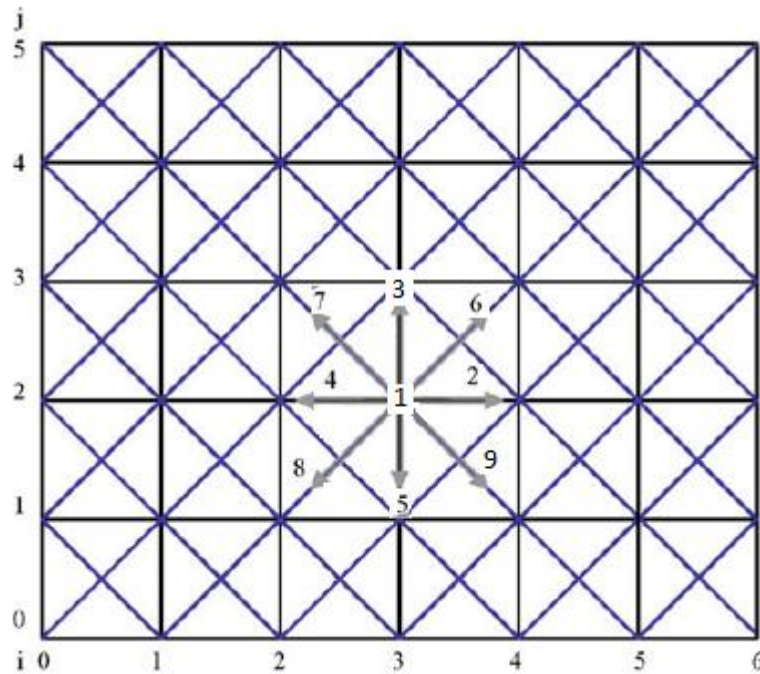
La terminologie utilisée dans la méthode LBM pour décrire (la spécification de) la dimension et du nombre de directions d'un modèle est la suivante : DnQm, où : n représente la dimension du problème (1 pour 1D, 2 pour 2D et 3 pour 3D) et m : représente le nombre de directions (vitesses) du modèle.

##### **4.1. Le modèle bidimensionnel à 9 vitesses (D2Q9) :**

C'est le modèle le plus utilisé spécialement pour l'étude des problèmes d'écoulement. Le modèle D2Q9 est basé sur un réseau carré de pas  $\delta x = \delta y = 1$ , chaque motif du réseau est caractérisé par neuf vitesses discrètes ( $c_i, (i = 1 \dots 9)$ ) [49] Fig(3.2).



**Fig.3.2.** Modèle D2Q9



**Fig.3.3** réseau D2Q9

Les particules fluides se déplacent d'un nœud de la grille vers le nœud voisin avec les vitesses discrètes qui sont données par :

$c_1 = (0,0)$ , les composantes suivant x et y sont nulles.

$c_2 = (1,0)$ , la composante suivant x est égale à 1 et suivant y est nulle.

$c_3 = (0,1)$ , la composante suivant x nulle et suivant y est égale à 1.

$c_4 = (-1,0)$ , la composante suivant x est égale à -1 et suivant y est nulle

$c_5 = (0, -1)$ , la composante suivant x est nulle suivant y est égale à -1.

$c_6 = (1,1)$ , la composante suivant x est égale à 1 suivant y est égale à 1.

$c_7 = (-1,1)$ , la composante suivant x est égale à -1 suivant y est égale à 1.

$c_8 = (-1,-1)$ , la composante suivant x est égale à -1 suivant y est égale à -1.

$c_9 = (1,-1)$ , la composante suivant x est égale à 1 suivant y est égale à -1.

Chaque réseau est caractérisé des coefficients qu'on appelle des facteurs de poids pour le réseau D2Q9 les facteurs de poids sont les suivants :

$$w_1 = 4/9, w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 1/9, w_6 = w_7 = w_8 = w_9 = 1/36.$$

En général la fonction de distribution d'équilibre du réseau D2Q9 s'exprime par [50] :

$$f_i^{eq} = f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left[ 1 + \frac{(\mathbf{e}_i \mathbf{u})}{\chi \cdot c^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \mathbf{u})^2}{2 \chi \cdot c^4} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2 \chi \cdot c^2} \right] \quad (3.10)$$

Donc les fonctions de distribution à l'équilibre peuvent s'écrire pour chaque nœud de la manière suivante :

$$f_0^{eq} = \rho \left( \frac{4}{9} - \frac{2}{3} u^2 \right) \quad (3.11)$$

i=1

$$f_i^{eq} = \rho \left[ \frac{1}{9} + \frac{1}{3c^2} (e_i u) + \frac{1}{2c^4} (e_i \cdot u)^2 - \frac{1}{6c^2} u^2 \right] \quad (3.12)$$

i=2, 3, 4,5

$$f_i^{eq} = \rho \left[ \frac{1}{36} + \frac{1}{12c^2} (e_i u) + \frac{1}{2c^4} (e_i \cdot u)^2 - \frac{1}{24c^2} u^2 \right] \quad (3.13)$$

i=6, 7, 8, 9

La viscosité est reliée au temps de relaxation par la relation :

$$\nu = \left( \tau_v - \frac{1}{2} \right) c_s^2 \delta t \quad (3.14)$$

La pression est donnée par la relation :  $p = \rho/3$ , ce qui nous permet de calculer la vitesse du son :

$$c_s = \frac{c_i}{\sqrt{3}} \quad (3.15)$$

La méthode LBM se fait en deux étapes : la collision et la propagation.

L'étape de collision est décrite de la façon suivante :

$$f_k(x, y, t + \Delta t) = f_k(x, y, t)[1 - \omega] + \omega f_k^{eq}(x, y, t) \quad (3.16)$$

$i=1, \dots, 9$

L'étape de propagation :

$$f_k(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = f_k(x, y, t + \Delta t) \quad (3.17)$$

$i=1, \dots, 9$

Où :  $\omega$  est la fréquence de relaxation.

Dans l'étape de propagation, par exemple  $f_2(i, j)$  se déplace et devient  $f_2(i + 1)$ ,  $f_3(i, j)$  se déplace et devient  $f_3(i, j + 1)$ ,  $f_4(i, j)$  devient  $f_4(i - 1, j)$ ,  $f_5(i, j)$  devient  $f_3(i, j - 1)$ ,  $f_6(i, j)$  devient  $f_6(i + 1, j + 1)$ ,  $f_7(i, j)$  devient  $f_7(i - 1, j + 1)$ ,  $f_8(i, j)$  devient  $f_8(i - 1, j - 1)$ ,  $f_9(i, j)$  devient  $f_3(i + 1, j - 1)$

La conservation de la masse: peut être décrite comme étant La sommation des fonctions de distributions dans chaque nœud du réseau représente la densité macroscopique du fluide [50] :

$$\rho = \sum_{i=1}^9 f_i \quad (3.18)$$

La conservation quantité de mouvement : peut être décrite comme étant la sommation du produit des vitesses microscopiques du réseau par la fonction de distribution.

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{i=1}^9 f_i c_i \quad (3.19)$$

Donc :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^9 f_i c_i \quad (3.20)$$

## 4.2 Conditions aux limites :

L'une des plus importantes parties d'une simulation avec la méthode de Boltzmann sur réseau est l'établissement des conditions aux limites.

L'établissement des conditions aux limites pour les méthodes de calcul classique utilisées en hydrodynamique (CFD) se fait par l'obtention des variables de l'écoulement.

Ce n'est pas le cas pour la méthode LBM, où les fonctions de distributions entrantes dans le domaine doivent être déterminées.

On doit déterminer donc les équations appropriées pour le calcul des fonctions de distributions aux limites du domaine pour chaque condition aux limites.

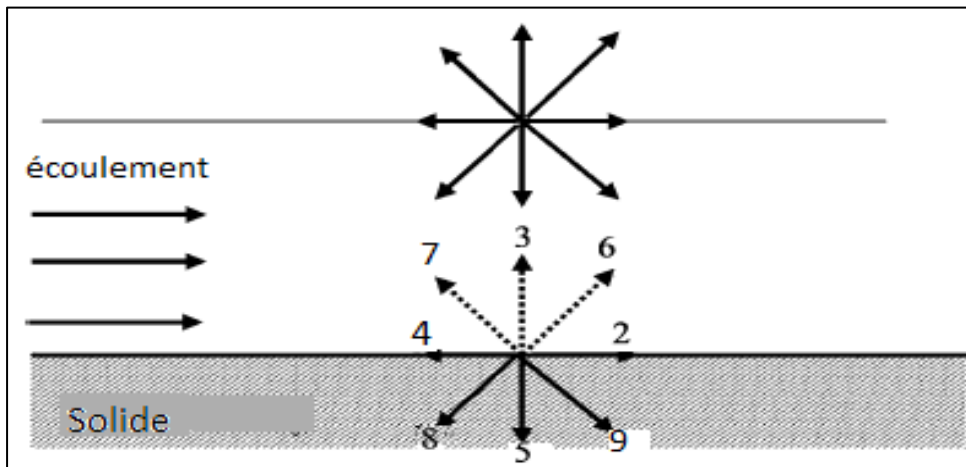
Dans la littérature, plusieurs approches sont suggérées et testées, dans ce qui suit les conditions aux limites présentées sont celles utilisées dans notre travail.

### Le rebond :

Cette condition aux limites est utilisée quand une particule rencontre une limite de type solide paroi, la particule rebondit sur ce dernier pour revenir dans l'écoulement en suivant sa direction d'origine. Le processus de collision n'intervient pas à la limite mais seulement dans la région interne du fluide.

Pour sa simplicité, la méthode du rebond joue un rôle majeur dans la simulation des écoulements des fluides par la méthode de LBM, dans des domaines caractérisés par la complexité de leurs géométries. Cela peut être illustré par exemple dans la simulation des écoulements dans les milieux poreux.

La beauté du modèle réside dans le fait qu'on a qu'à designer une particule comme étant un obstacle solide, pas besoin d'autres traitements en programmation.



**Fig.3.4.** Le rebond des particules

Les fonctions de distributions  $f_5$ ,  $f_8$  et  $f_9$  sont connues par le processus de propagation. Lorsque ces fonctions de distributions rencontrent le mur, le schéma du rebond est appliquée, donc :

$$f_9 = f_7,$$

$$f_3 = f_5$$

$$f_6 = f_8.$$

Le schéma du rebond assure la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et peut être appliquée aux obstacles et aux murs, en considérant que la vitesse aux surfaces solides est nulle en chaque point.

### **Les conditions aux limites avec une vitesse imposée (connue) :**

La connaissance la vitesse à la limite du domaine est très courant dans les applications pratiques, par exemple la vitesse à l'entrée d'un écoulement dans un canal.

Zu et He [51] ont mis au point une méthode pour calculer les fonctions de distributions inconnues, et se sont basée sur l'équation de conservation de masse et de conservation de quantité de mouvement.

L'équation de conservation de masse peut donc être écrite de la manière suivante :

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (3.21)$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement peut être écrite suivant la composante de x comme suit :

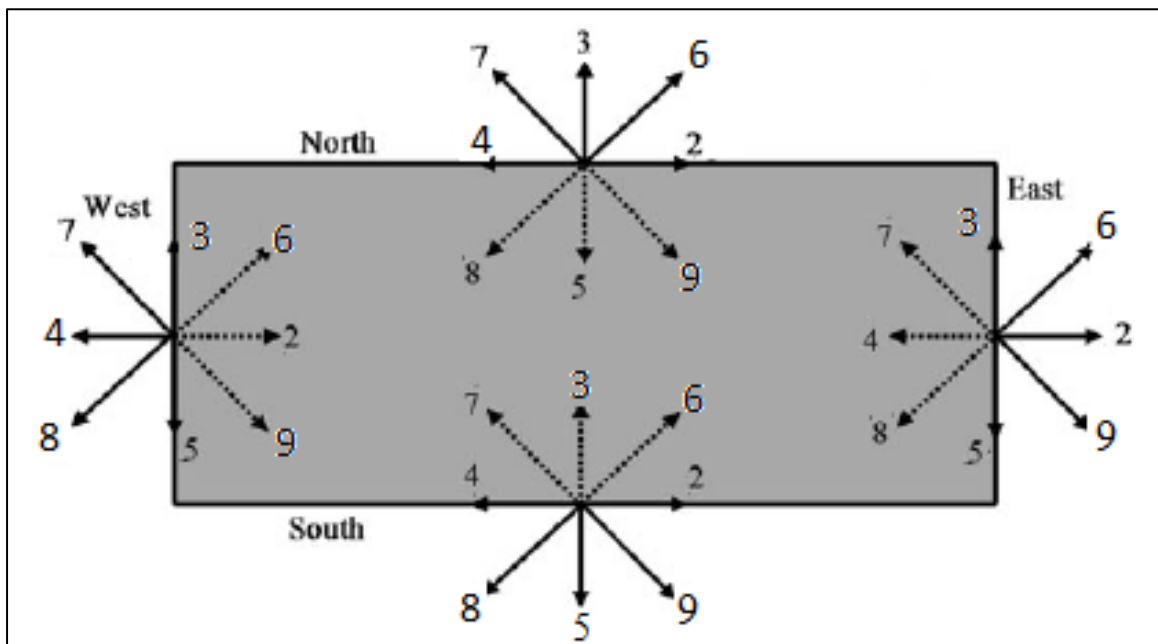
$$\rho u = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (3.22)$$

Et suivant y :

$$\rho v = f_5 + f_2 + f_6 - f_5 - f_4 - f_8 \quad (3.23)$$

Illustrons ce concept par un exemple, Fig.3.4 montre un domaine avec des limites (nord, sud, est et ouest), les composantes de vitesses sont connues dans toutes ces limites.

Dans cette figure, les fonctions de distributions inconnues sont représentées par des lignes discontinues, tandis que les fonctions de distributions connues sont représentées par des lignes continues.



**Fig.3.5.** Conditions aux limites aux parois de la géométrie.

**Ouest :**

Les composantes de la vitesse suivant x :  $u = u_w$ , et suivant y  $v = v_w$  sont connues.

Les inconnues pour la limite ouest sont les fonctions de distributions :  $f_2, f_6$  et  $f_9$  et la densité  $\rho_w$ , selon Zou et He les inconnues peuvent être calculées par la résolution de ces équations :

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho_w u_w \quad (3.24)$$

$$\rho_w = \frac{1}{1 - u_w} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \quad (3.25)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho_w u_w + \frac{1}{2}\rho_w v_w \quad (3.26)$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho_w u_w - \frac{1}{2}\rho_w v_w \quad (3.27)$$

Les quatre inconnues peuvent être obtenues en résolvant ces quatre équations. La même méthode peut être appliquée pour les autres limites (Est, Nord et Sud).

**Est :**

$$\rho_E = \frac{1}{1 - u_E} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8)] \quad (3.28)$$

$$f_3 = f_1 + \frac{2}{3}\rho_E u_E \quad (3.29)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) - \frac{1}{6}\rho_w u_w - \frac{1}{2}\rho_w v_w \quad (3.30)$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho_E u_E - \frac{1}{2}\rho_E v_E \quad (3.31)$$

## 5. Modèle thermique de Boltzmann sur réseaux (TLBM) :

Durant les 15 dernières années, la méthode LBM à connue une évolution rapide concernant la résolution d'une grande variété de types d'écoulements.

Cependant l'effort fournis pour l'établissement d'un modèle stable pour la méthode de Boltzmann sur réseaux thermique (TLBM) n'a porté ses fruits que récemment.

McNamera et Alder ont réussi à simuler le phénomène de transfert de chaleur en utilisant l'approche à double population [52]. Ce modèle sera utilisé dans notre travail.

### 5.1. Modèle à double population :

Dans ce modèle une fonction de distribution indépendante d'énergie interne est introduite pour obtenir le champ de températures. Donc deux fonction de distributions indépendantes sont utilisées à savoir la fonction de distribution de la densité de masse et celle de l'énergie interne pour simuler l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur respectivement.

Puisque deux fonctions de distributions indépendantes sont adoptées pour décrire l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur, ces deux dernières peuvent ne pas partager le même réseau et la même fonction d'équilibre.

Par exemple dans notre travail nous avons utilisées le réseau D2Q9 pour simuler l'écoulement du fluide, et le réseau simplifié D2Q5 pour le transfert de chaleur.

Pour un problème thermique incompressible, He et al [50] ont proposé deux fonctions de distributions : la fonction de distribution de densité de masse et la fonction de distribution de l'énergie interne.

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] + \delta \mathbf{F} \quad (3.32)$$

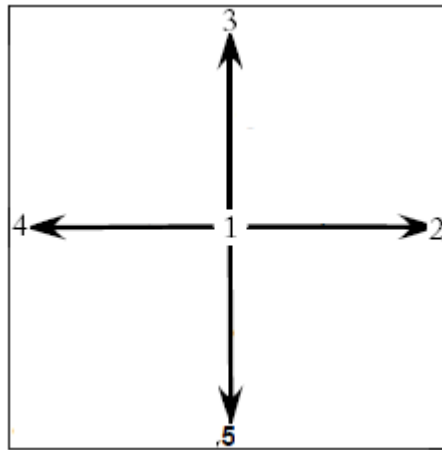
$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_T} [g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (3.33)$$

Où :  $F$  : représente la force externe,  $\tau_v$  et  $\tau_T$  sont les temps de relaxation de l'écoulement et du transfert thermique respectivement.

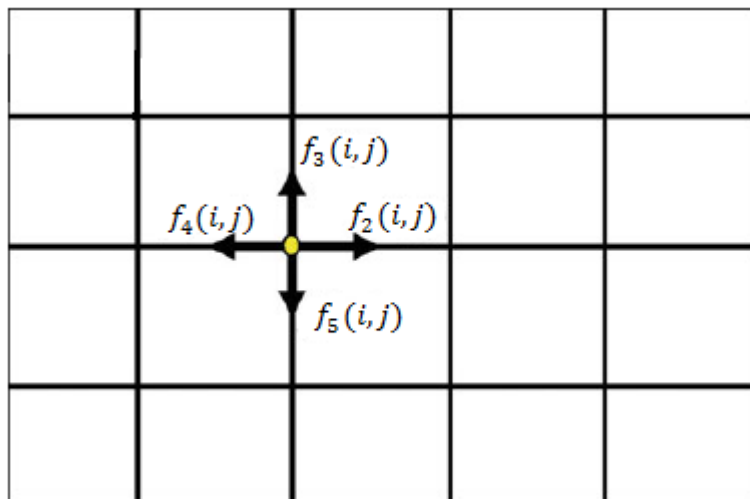
### 5.2 Réseau D2Q5 :

C'est le réseau le plus utilisé pour la simulation du transfert de chaleur dans la méthode à double population.

Le modèle D2Q5 est basé sur un réseau carré de pas  $\delta x = \delta y = 1$ , chaque motif du réseau est caractérisé par cinq vitesses discrètes ( $c_i, (i = 1 \dots 5)$ ) (fig.3.6).



**Fig.3.6.** Modèle D2Q5



**Fig.3.7.** Réseau D2Q5

Les particules fluides se déplacent d'un nœud de la grille vers le nœud voisin avec les vitesses discrètes qui sont données par :

$c_1 = (0,0)$ , les composantes suivant x et y sont nulles.

$c_2 = (1,0)$ , la composante suivant x est égale à 1 et suivant y est nulle.

$c_3 = (0,1)$ , la composante suivant x nulle et suivant y est égale à 1.

$c_4 = (-1,0)$ , la composante suivant x est égale à -1 et suivant y est nulle

$c_5 = (0, -1)$ , la composante suivant x est nulle suivant y est égale à -1.

Les facteurs de poids du réseau D2Q5 sont les suivants :

$$w_1 = 2/6, w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 1/6$$

La diffusivité thermique est reliée au temps de relaxation par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{1}{3} \left( \tau_T - \frac{1}{2} \right) c^2 \delta t \quad (3.34)$$

Champ de température :

La sommation des fonctions de distributions dans chaque nœud du réseau D2Q5 représente nous donne la température :

$$T = \sum_{i=1}^5 g_i \quad (3.35)$$

### 5.3 Conditions aux limites :

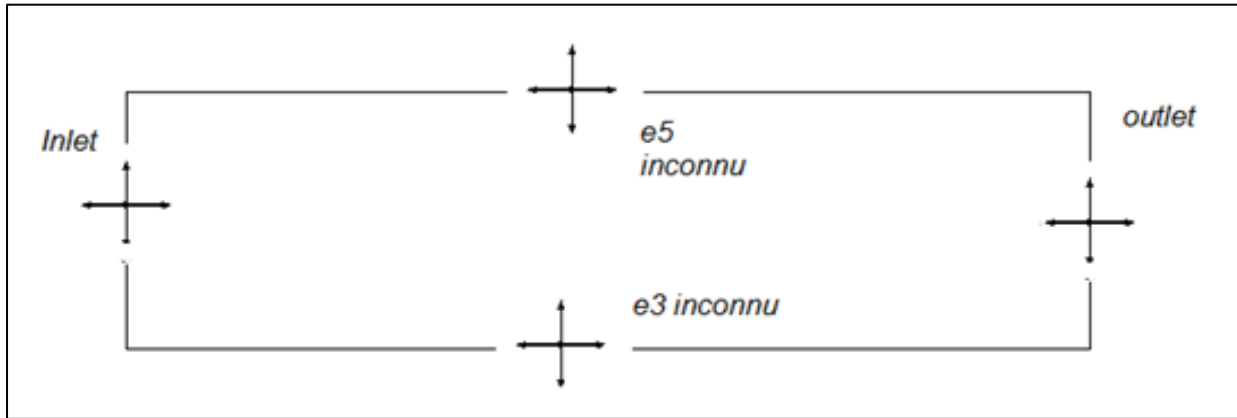
L'établissement des conditions aux limites pour l'approche TLBM est légèrement différente de celles vu précédemment dans la mesure où il faut déterminer les fonctions de distributions entrantes du réseau D2Q5 avec cette fois ci le flux ou comme dans notre cas la température comme donnée.

On doit donc déterminer et résoudre les équations adéquates pour calculer les fonctions de distributions inconnues.

Dans notre cas nous avons trois températures imposées : du fluide à l'entrée, de la paroi froide  $T_0$  et de la paroi chaude  $T_1$ .

Par exemple à la paroi chaude, on doit déterminer  $g_3$  (Fig.3.7) et nous avons une température imposée  $T_1$ , donc en utilisant l'équation (3.27) on aura :

$$g_3 = T_1 - (g_1 + g_2 + g_4 + g_5) \quad (3.36)$$



**Fig.3.8.** Schéma représentant la fonction de distribution inconnue aux paroi du bas.

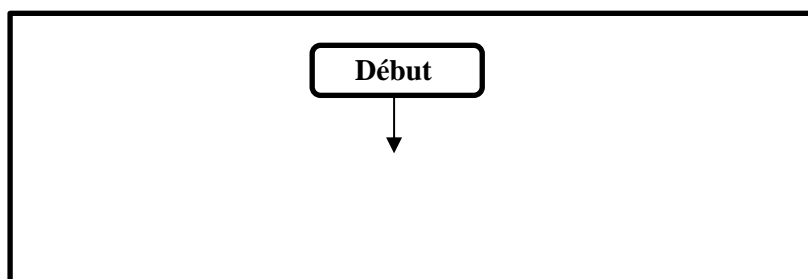
Pour la sortie on considère que la fonction de distribution inconnue c.à.d. la température au nœud à la sortie est égale à la température du nœud précédent [53]:

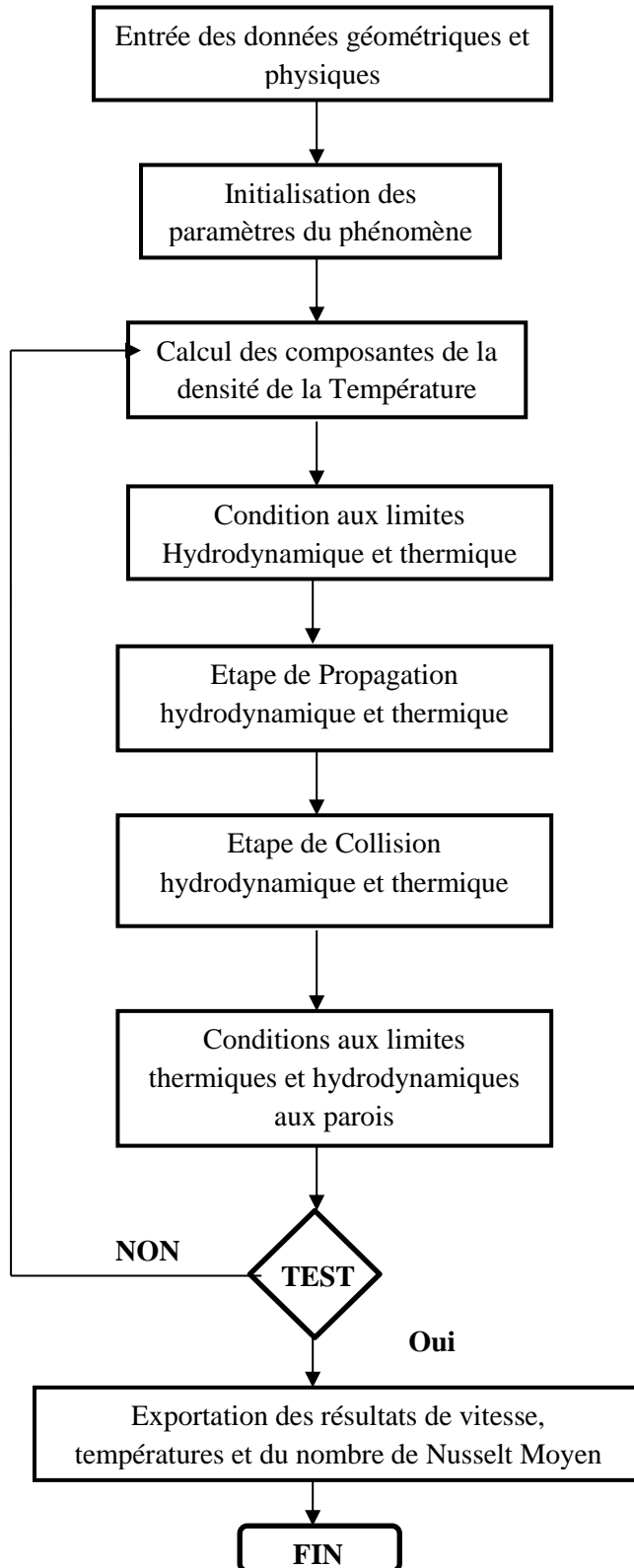
$$T(i, j) = T(i - 1, j) \quad (3.37)$$

## 6. Mise en œuvre informatique :

Un code de calcul a été élaboré sous l'éditeur MATLAB, en appliquant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population pour simuler le transfert de chaleur par convection mixte dans une conduite rectangulaire en deux dimensions, le réseau D2Q9 pour le champ dynamique et le réseau D2Q5 pour le champ thermique ont été implémentés et élaborés. L'organigramme de calcul est présenté dans la figure (Fig.3.9).

Le choix d'utilisation de l'éditeur MATLAB pour élaborer le code de calcul, est justifié par le fait que ce logiciel offre une richesse et une diversité des procédures et fonctions prédéfinies, ainsi que la facilité de la mise en œuvre d'un programme de calcul.





**Fig. 3.9 :** Organigramme de calcul de TLBM

Après l'implémentation la configuration géométrique étudiée, les entrées du programme sont :

- Le nombre de Peclet
- Le nombre de Reynolds  $Re$ .
- Le nombre de Rayleigh  $Ra$ .
- L'allongement du domaine  $B$ .

Les sorties du programme ou les résultats du calcul se manifestent d'une manière numérique et graphique des champs de température, de la distribution des vitesses le long du domaine, des lignes de courant, les courbes de températures le long du canal, des profils de vitesses pris dans différentes sections du canal ainsi que le calcul du nombre de Nusselt Moyen  $\langle \overline{Nu} \rangle$ .

Ce code de calcul a été testé et validé en le comparant aux résultats trouvés dans la littérature pour le cas du nombre de Reynolds  $Re=10$ ,  $Ra=10^4$ ,  $Pe=20/3$  et  $B=20$ . Les résultats de la validation sont présentés dans le chapitre suivant.

## **Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons exposé l'historique de développement de la nouvelle méthode de modélisation et simulation utilisée dans ce travail, notamment la méthode de Boltzmann sur réseau thermique ainsi que les bases théoriques et fondamentales de son application. Une description détaillée du modèle de Boltzmann sur réseau thermique à double population, avec le réseau D2Q9 pour le champ dynamique et le réseau D2Q5 pour le champ thermique a été exposé. Suivi d'une présentation de l'algorithme du code de calcul qui a été développé et testé durant ce travail sous l'éditeur MATLAB,

La validation de ce code de calcul et les résultats de la simulation ainsi que l'analyse physique du phénomène seront présentés dans le chapitre suivant.

# Chapitre IV

# Chapitre IV

## RESULTATS & INTERPRETATIONS

### 1) Problématique :

Dans ce travail, une étude est effectuée numériquement sur le phénomène de convection mixte dans une conduite rectangulaire chauffée par le bas et refroidit par le haut, où un fluide incompressible traverse cette conduite avec un profil de vitesse parabolique et une température supposée froide comme le montre la figure suivante :.

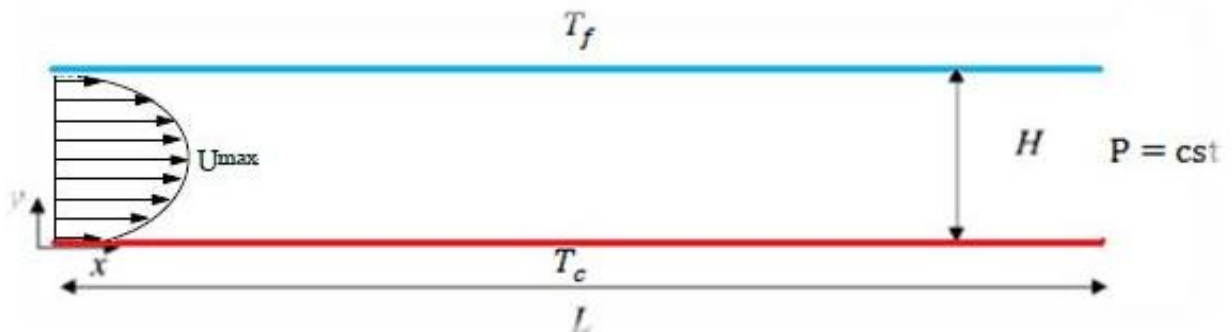


Fig.4.0. Modèle de l'écoulement de Poiseuille Rayleigh Bénard

### Hypothèses de Travail :

On considère dans cette étude en plus des hypothèses déjà citées dans le chapitre (II.8.2), que la vitesse du fluide entrant forme un profile de Poiseuille et la conduite d'extension latérale est finie.

### Conditions aux limites :

Pour notre problème (Fig2) les conditions aux limites s'écrivent de la manière suivante:

$$\text{À } 0 \leq X \leq L/H; \quad Y=0 \quad U = V = 0, \theta = 1.$$

$$\text{À } 0 \leq X \leq L/H; \quad Y=H/H=1 \quad U = V = 0, \theta = 0.$$

$$\text{À } X = 0; \quad 0 \leq Y \leq H \quad u = U_{max}(1 - \frac{y^2}{H^2}), V=0, \theta = 0.$$

$$\text{À } X=L/H; \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0; P = \text{cst.}$$

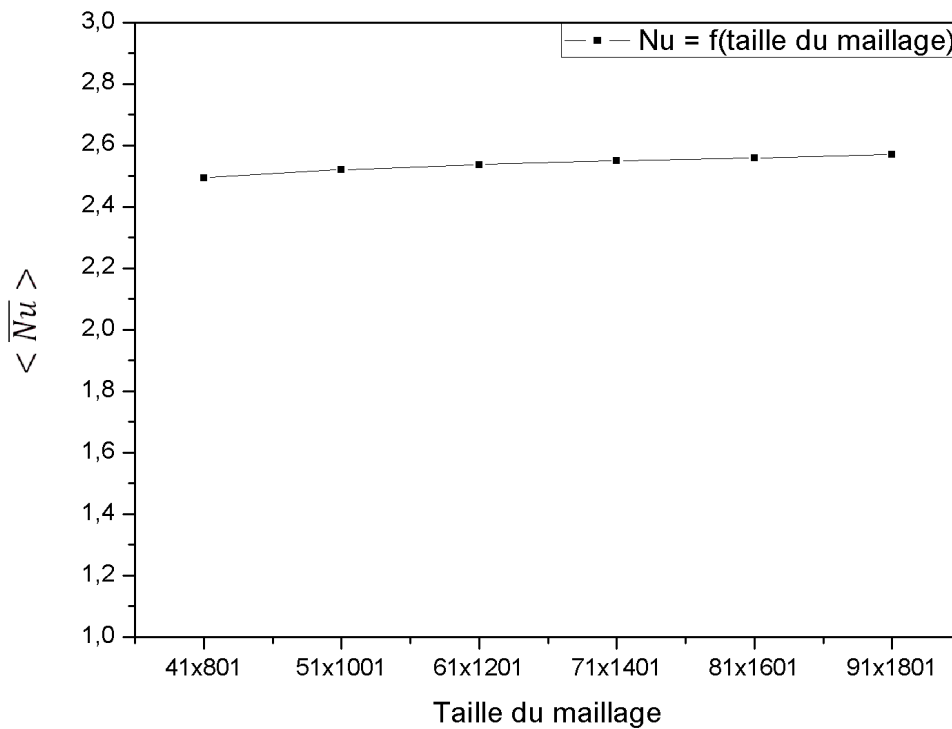
## 2) Validation de code de calcul:

Afin d'effectuer l'étude numérique sur la configuration proposée dans ce travail, un code de calcul se basant sur la méthode de Boltzmann sur réseau avec le modèle thermique avec double population a été élaboré et implémenté sur l'éditeur Matlab.

### 2.1) Etude du maillage :

Dans cette partie, les résultats de l'étude numérique du maillage en utilisant le code de calcul élaboré sont présentés.

Pour la validation de ce code, un écoulement de type convection mixte dans un canal différentiellement chauffé, caractérisé par un rapport de forme  $B=20$ , un nombre de Reynolds  $Re = 10$ , un nombre de Peclet  $Pe = 20/3$  et un nombre de Rayleigh  $Ra=10^4$  a été simulé.



**Fig 4.1.** Etude du maillage

Plusieurs tailles de maillage ont été utilisées, variant de 41x801 jusqu'à 91x1801. Les résultats de cette étude sont représentés dans Fig4.1. Vu la stabilité des résultats sur le nombre de Nusselt et afin d'économiser sur le temps de calcul, le choix du maillage 71x1401 est suffisant pour la validation du code.

## 2.2) Validation des résultats:

La comparaison de nos résultats avec d'autres travaux, notamment ceux de **Abassi et al** (2001) [2], **Evans et al** (1990) [21] et **Comini et al** (1997) [22] reportées dans le tableau I, montrent qu'ils sont en bon accord avec ces derniers, où l'erreur du Nombre de Nusselt moyen est de 0.56% pour Abassi et al (2001) [2] , 0.30% pour Evans et al (1990) [21] et 0.92% pour Comini et al (1997) [22]. Nous tenons à préciser que les résultats reportées dans le tableau II sont obtenus par une simulation dans un domaine deux fois plus long que celui indiqué dans les figures. Vu le temps de calcul important pour la simulation de notre phénomène avec un rapport de forme  $B = 20$ , et que Nicolas et al [3] ont montré qu'un rapport de forme  $B=5$  était suffisant pour l'étude d'un écoulement PRB, nous allons travailler avec  $B=5$  et voir l'évolution de l'écoulement en fonction du Nombre de Reynolds.

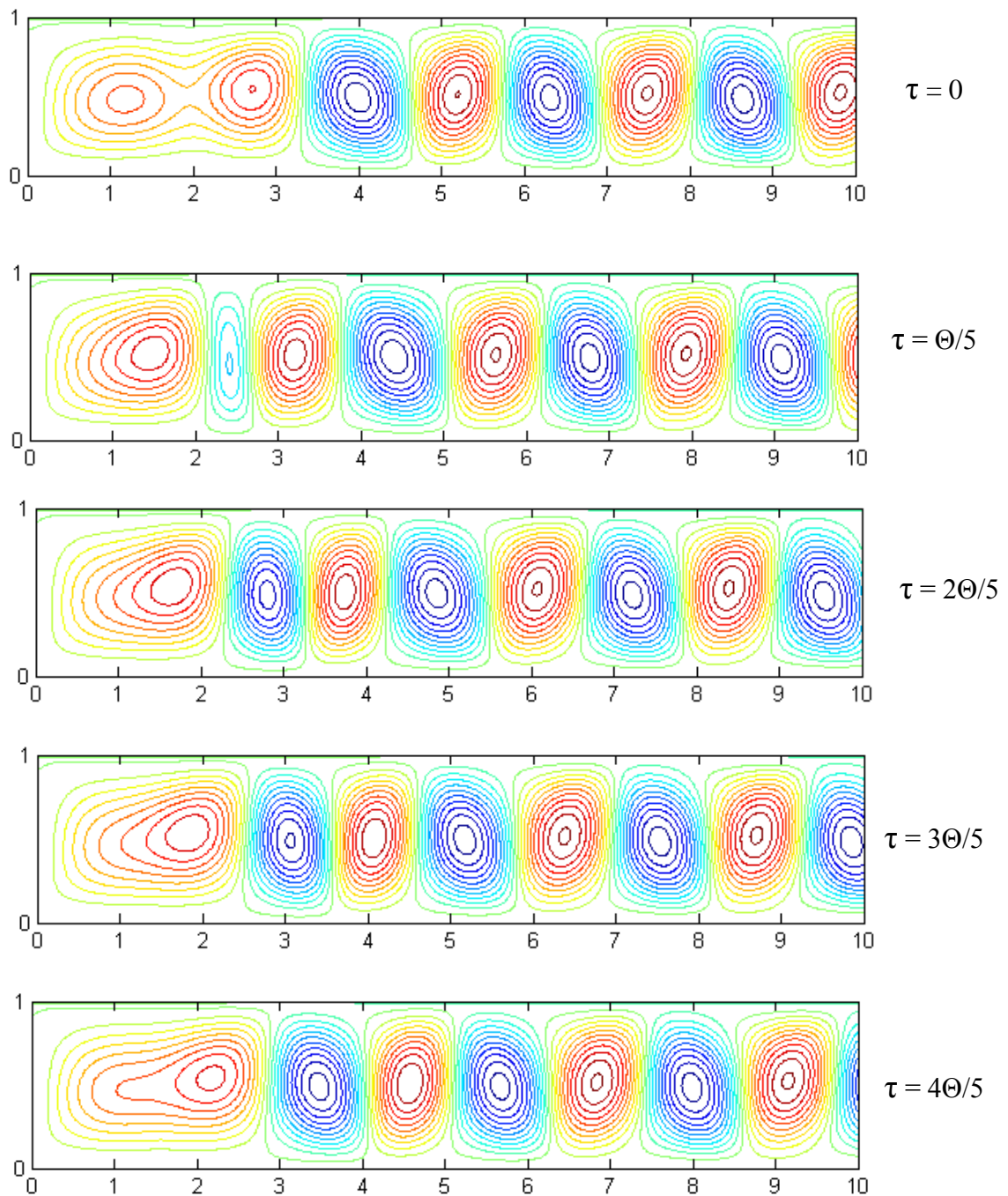
Reference	Présent 71x1401	Abassi et al (2001) [2]	Evans et al (1990) [21]	Comini et al (1997) [22]
$\langle \overline{Nu} \rangle$	<b>2.5503</b>	2.536	2.558	2.574

Tableau I validation des résultats

2.3) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=20$ ,

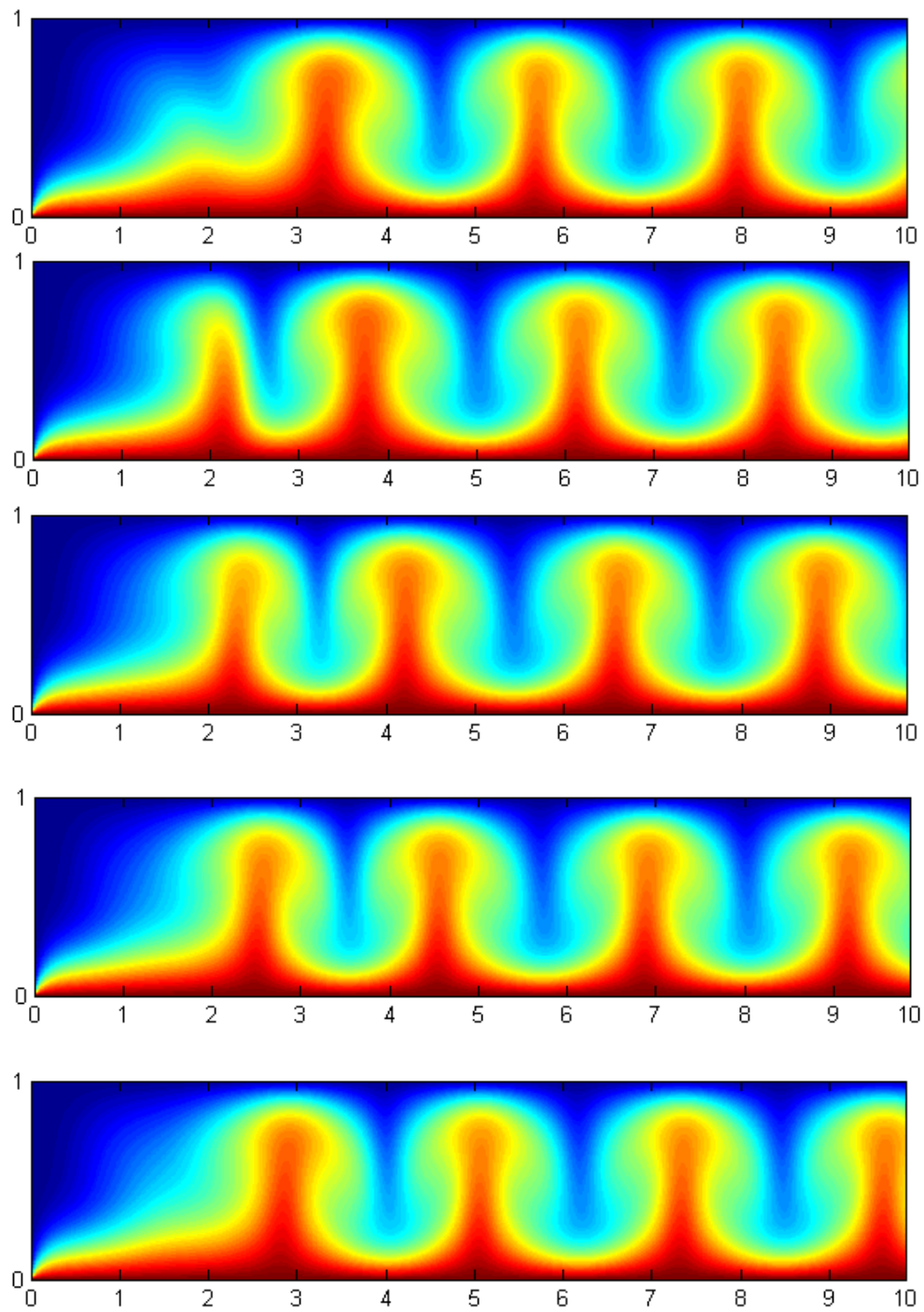
$Pe = 20/3$ ,  $Re=10$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant



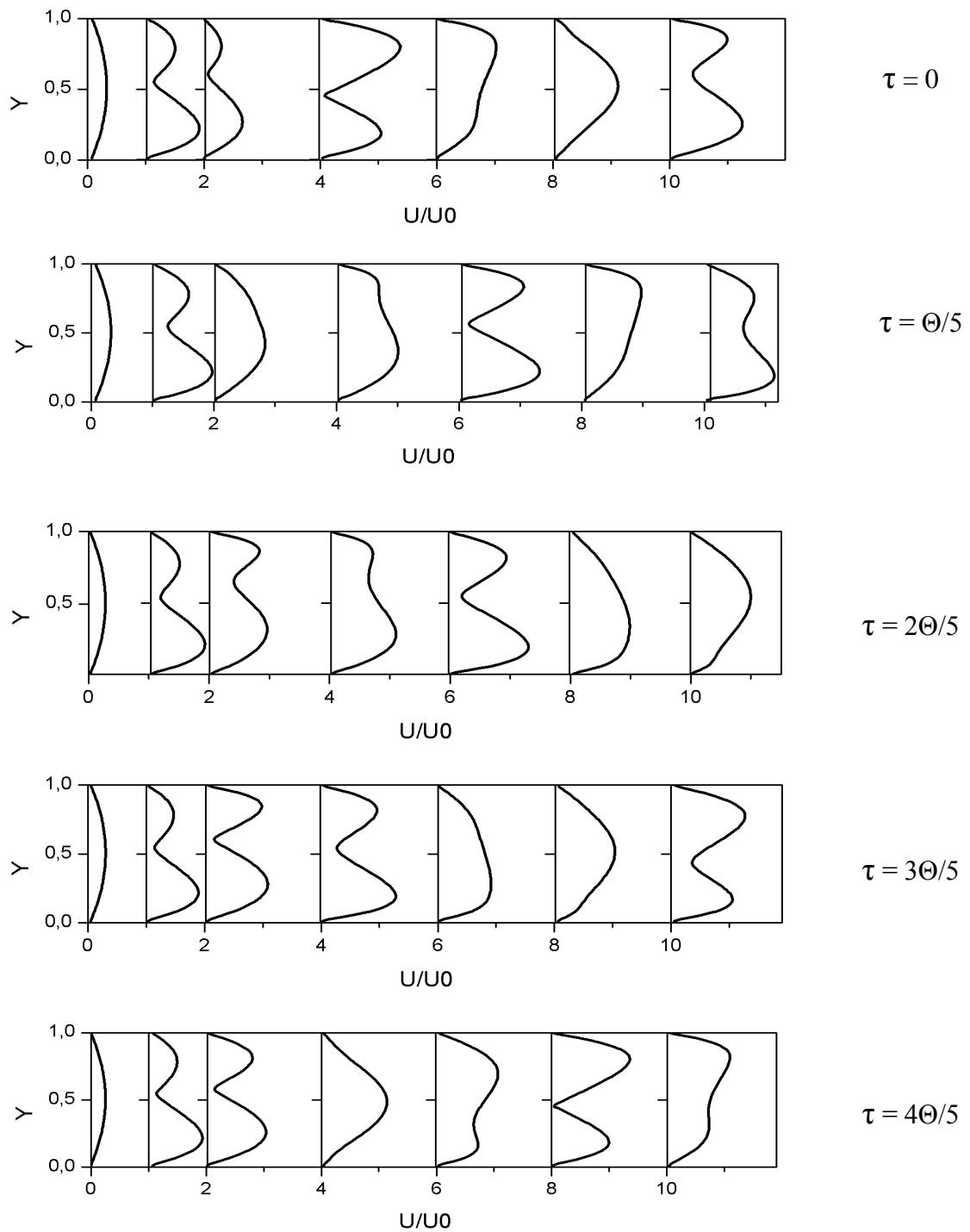
**Fig.4.2.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**b) Isothermes :**



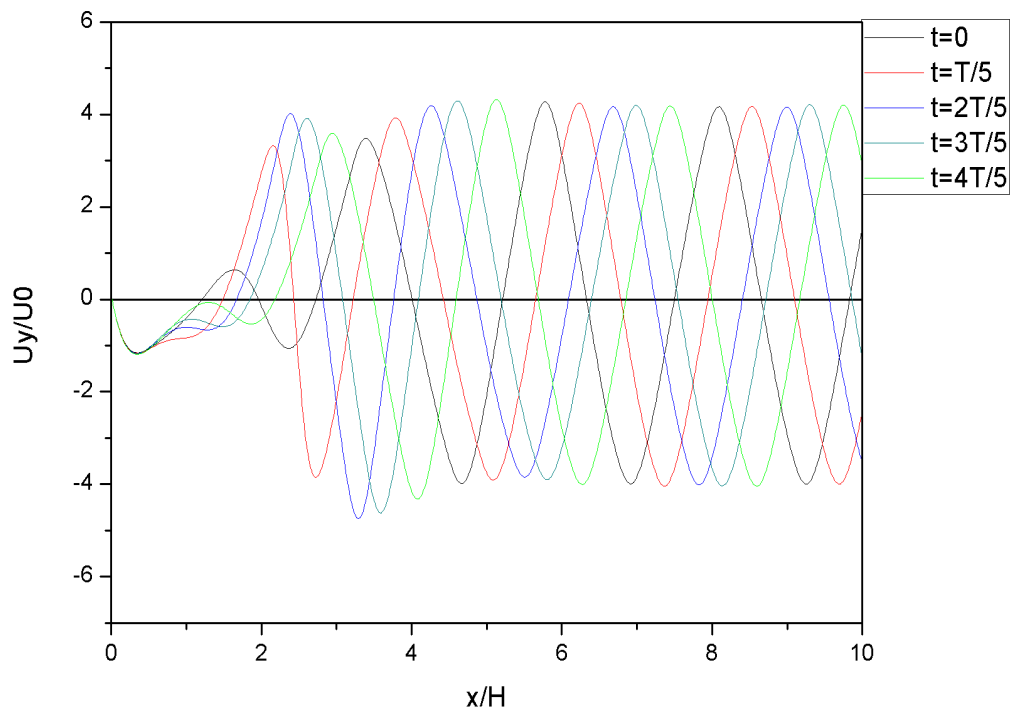
**Fig.4.3.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**c) Profils de vitesses :**

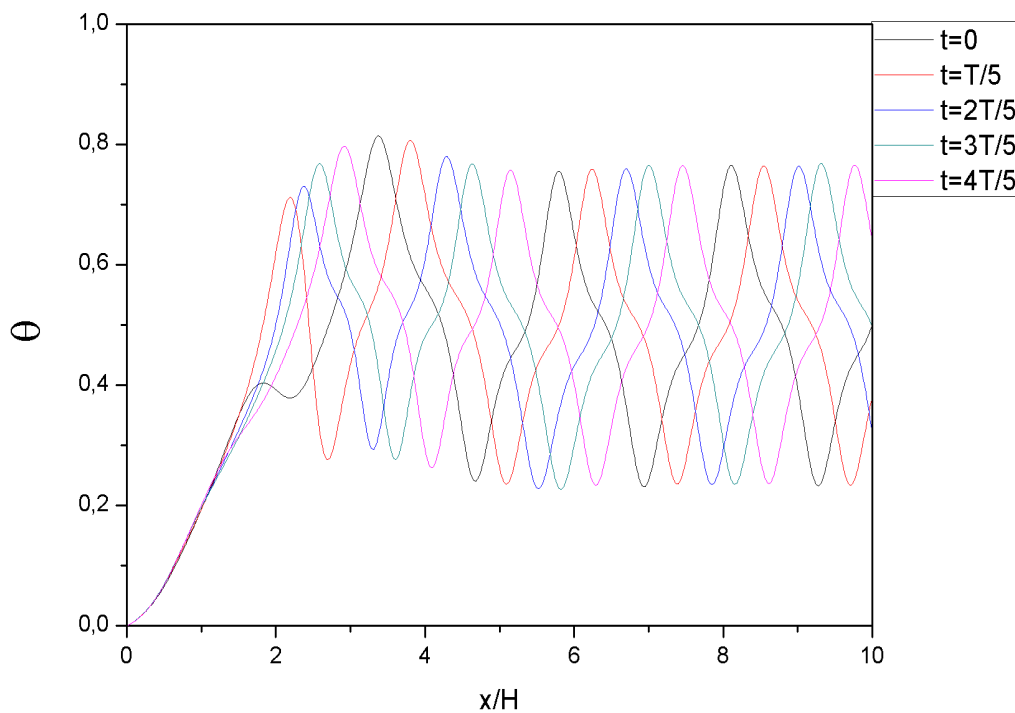


**Fig.4.4.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 10h) Pour  $B=20$ ,  $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**2.5. Composantes verticales de la vitesse  $U_y$  et de la température le long de l'axe du canal pour différents allongements pour  $Re=10$  et  $Ra = 10^4$  et  $Pe = 20/3$  :**



**Fig.4.5.** Composantes verticales de la vitesse ( $U_y$ ) pour différentes périodes le long de l'axe du canal pour  $B = 20$   $Re=10$  et  $Ra = 10^4$  et  $Pe = 20/3$  .



**Fig.4.6 .** Courbes de températures pour différentes périodes le long de l'axe du canal pour  $B = 20$ .  $Re=10$  et  $Ra = 10^4$  et  $Pe = 20/3$  .

## 2.4. Résultats et discussion:

La Figure (Fig.4.2) représente l'évolution des fonctions de courants sur une période  $T$ . Les résultats sont pris par intervalles de  $T/6$ . Le début de la période  $t=0$  est pris au temps où le nombre de Nusselt moyen est maximal. Cet instant est choisi arbitrairement [50].

Comme le montre cette figure des cellules convectives apparaissent alternativement près des parois du haut et du bas respectivement, ils sont déclenchées par le contact du fluide froid avec la paroi chaude créant ainsi un gradient de température donnant naissance à un mouvement de convection suivant le sens de l'écoulement.

Les cellules du bas tournent selon le sens des aiguilles d'une montre, tandis que celles du haut tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. L'existence des cellules convectives imposent la formation de l'allée de Von Karman. La nature de l'écoulement n'implique que les quantités scalaires telles que la température et la vitesse avec une progression périodiques.

La Figure (Fig.4.3) représente l'évolution des isothermes sur une période  $T$ . On remarque l'apparition de panaches prenant la forme de champignons qui servent à transporter de la chaleur de l'entrée du canal jusqu'à sa sortie. La taille des panaches est la même à cause du même gradient de température entre les parois.

La figure 4.4 représente l'évolution des vitesses normalisées le long du canal. On remarque qu'à l'entrée du canal le profil de poiseuille est conservé pour toute la période à cause de son imposition dans les conditions aux limites du problème. Ce profile vitesse se déforme à fur et à mesure que l'écoulement avance le long du canal vers la sortie droite.

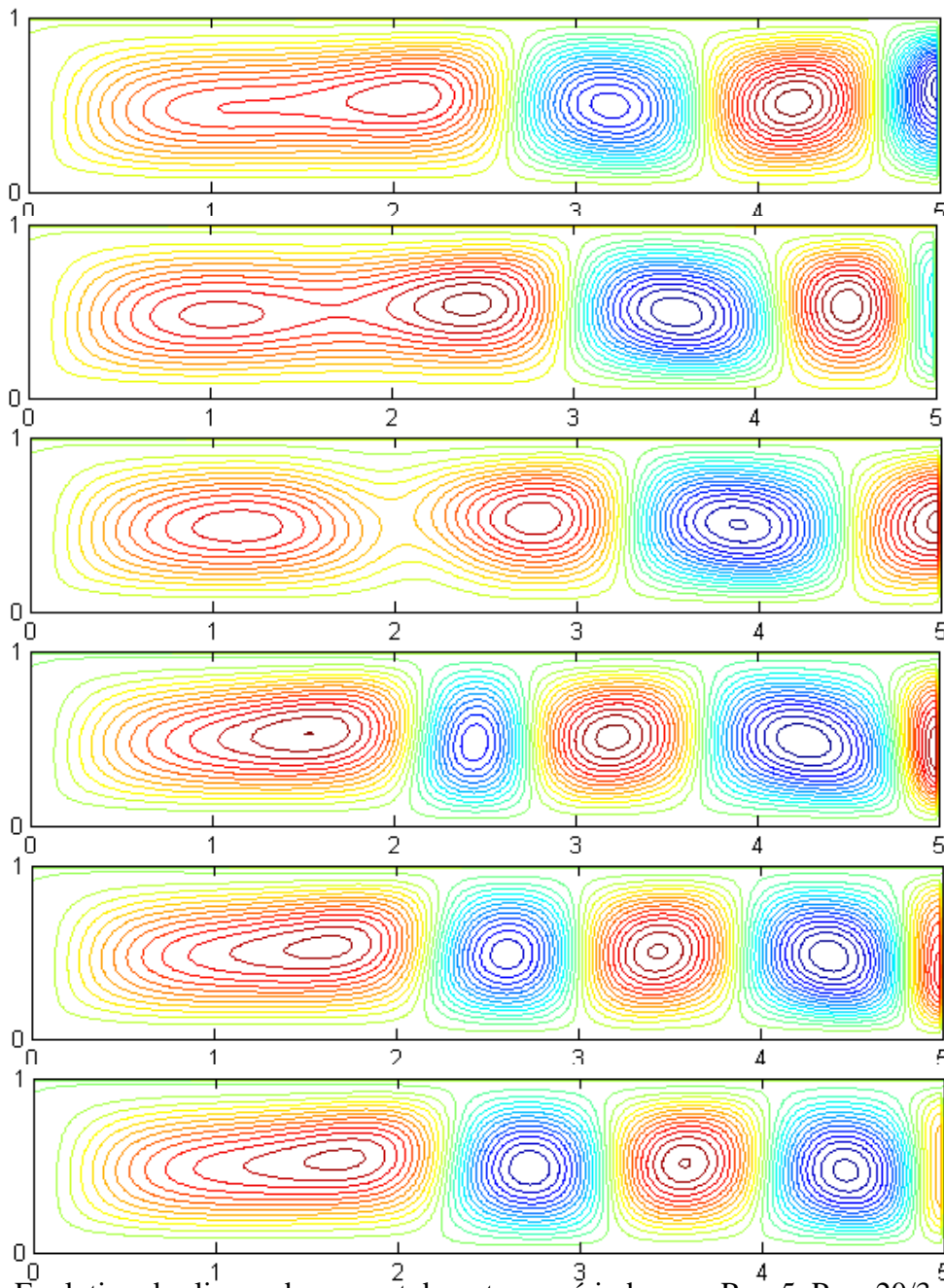
Les figures (Fig.4.4 et Fig.4.5) représentent les profils de la composante de la vitesse verticale  $U_y/U_0$  et la température adimensionnelle  $\theta$  le long de l'axe du canal. On remarque bien la périodicité des ces valeurs et que le mouvement devient régulier après que l'écoulement aura traversé la distance de  $X/H=4$  à partir de l'entrée du canal. Pour ce qui est du panache thermique, il commence à apparaître et se former dans l'intervalle de  $X/H=1,8$  à environ  $X/H=3$  et ce jusqu'à atteindre une périodicité après que l'écoulement aurait parcourus  $1/4$  de la longueur du canal c-à-d dépassé la distance de  $X/H=5$ .

### 3) Etude de l'effet Reynolds sur l'écoulement :

Dans cette partie d'étude, le nombre de Rayleigh ( $Ra$ ) est fixé à  $10^4$  avec un allongement du domaine  $B=5$ , c-à-d le rapport entre la longueur du canal et la hauteur  $B= L/H$ . On s'intéresse dans cette partie à l'influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement en le variant de  $Re=5$  à  $100$ .

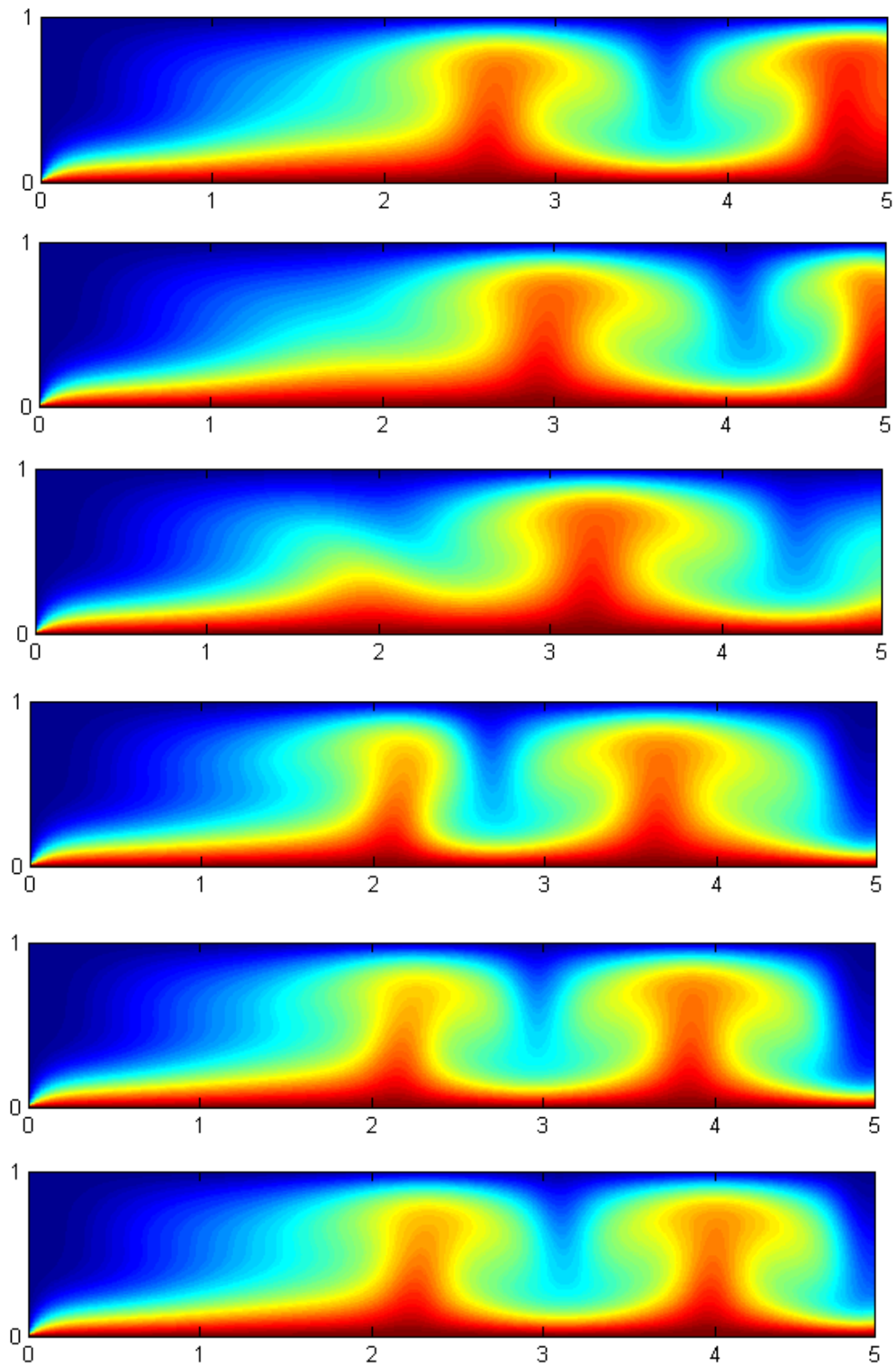
#### 3.1) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ , $Re=5$ et $Ra = 10^4$ :

##### a) Fonctions de courant :



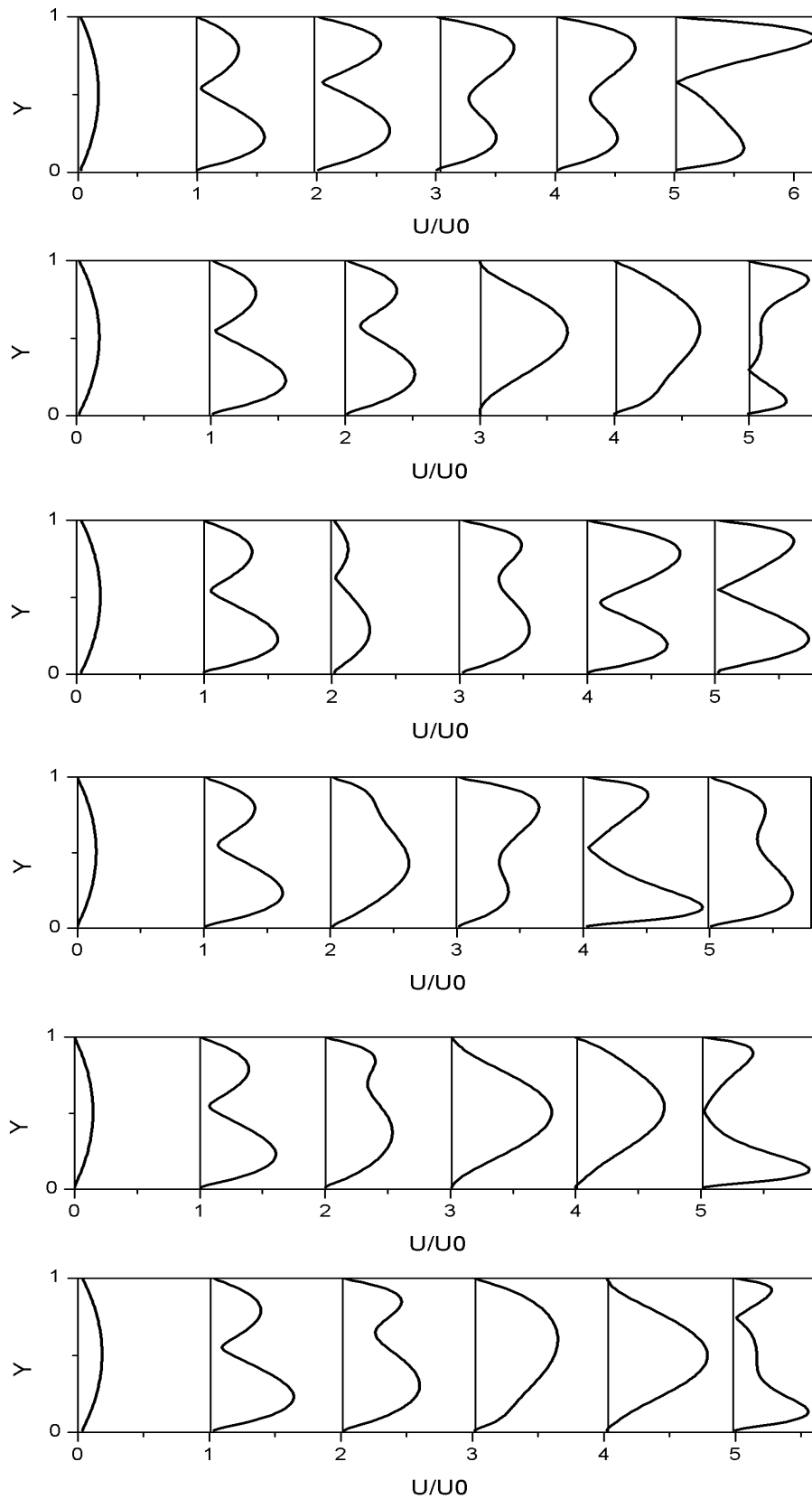
**Fig.4.7.** Évolution des lignes de courant durant une période pour  $Re =5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.8.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**c) Profils de vitesse :**

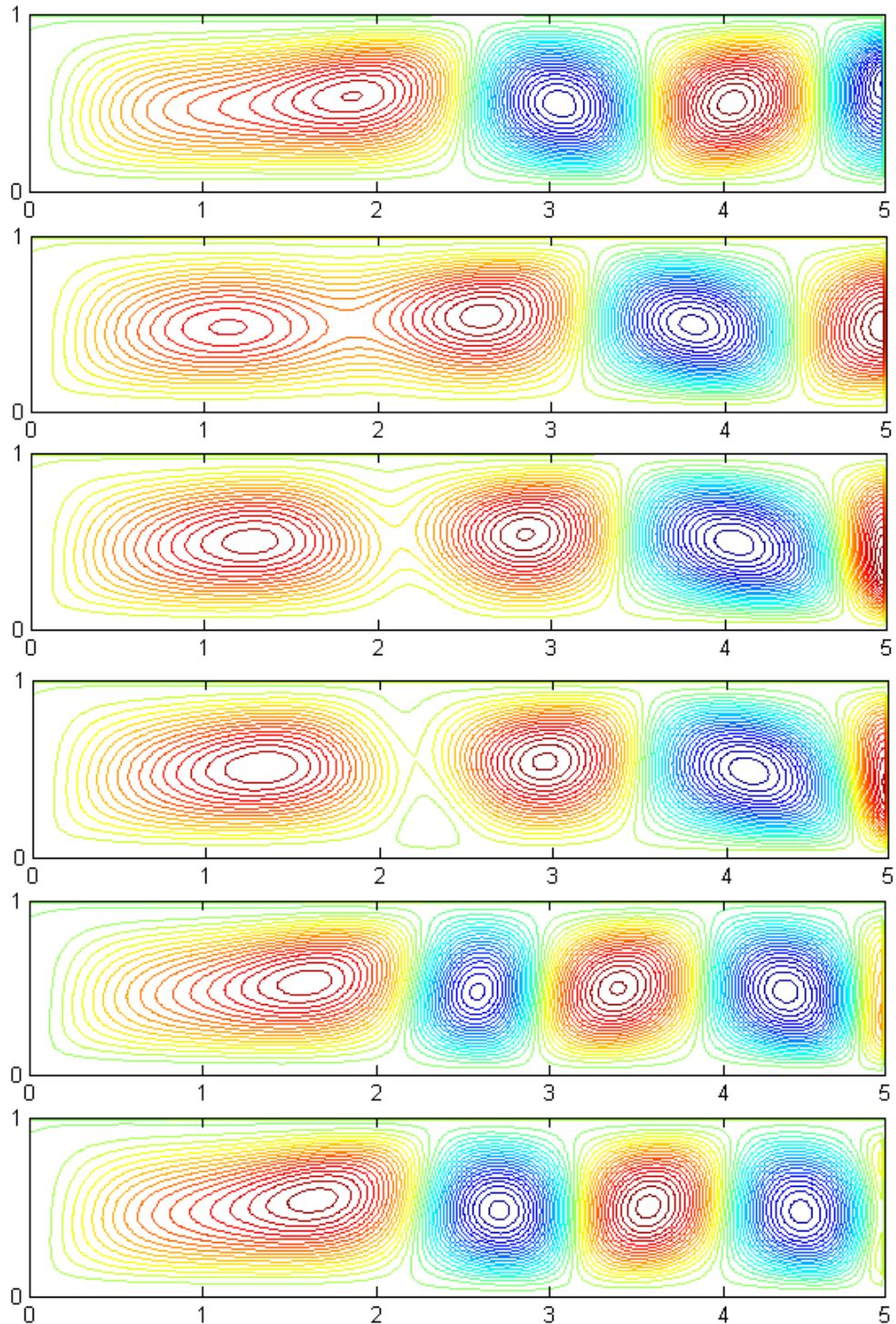


**Fig.4.9.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  ( $X= 0$  à  $5H$ ) Pour  $B=5$ ,  
 $Re =5$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

3.2) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,

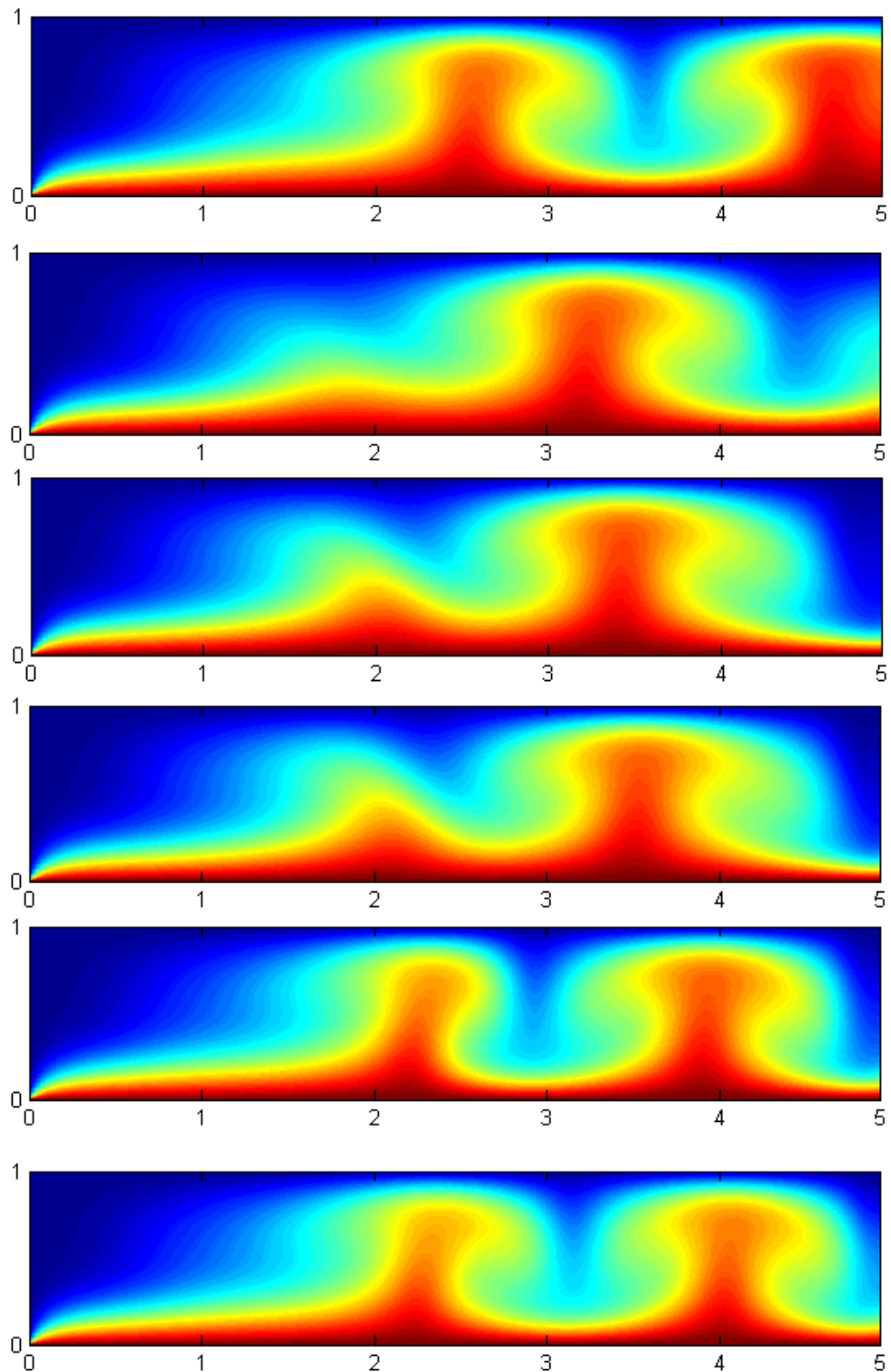
$Re=10$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant :



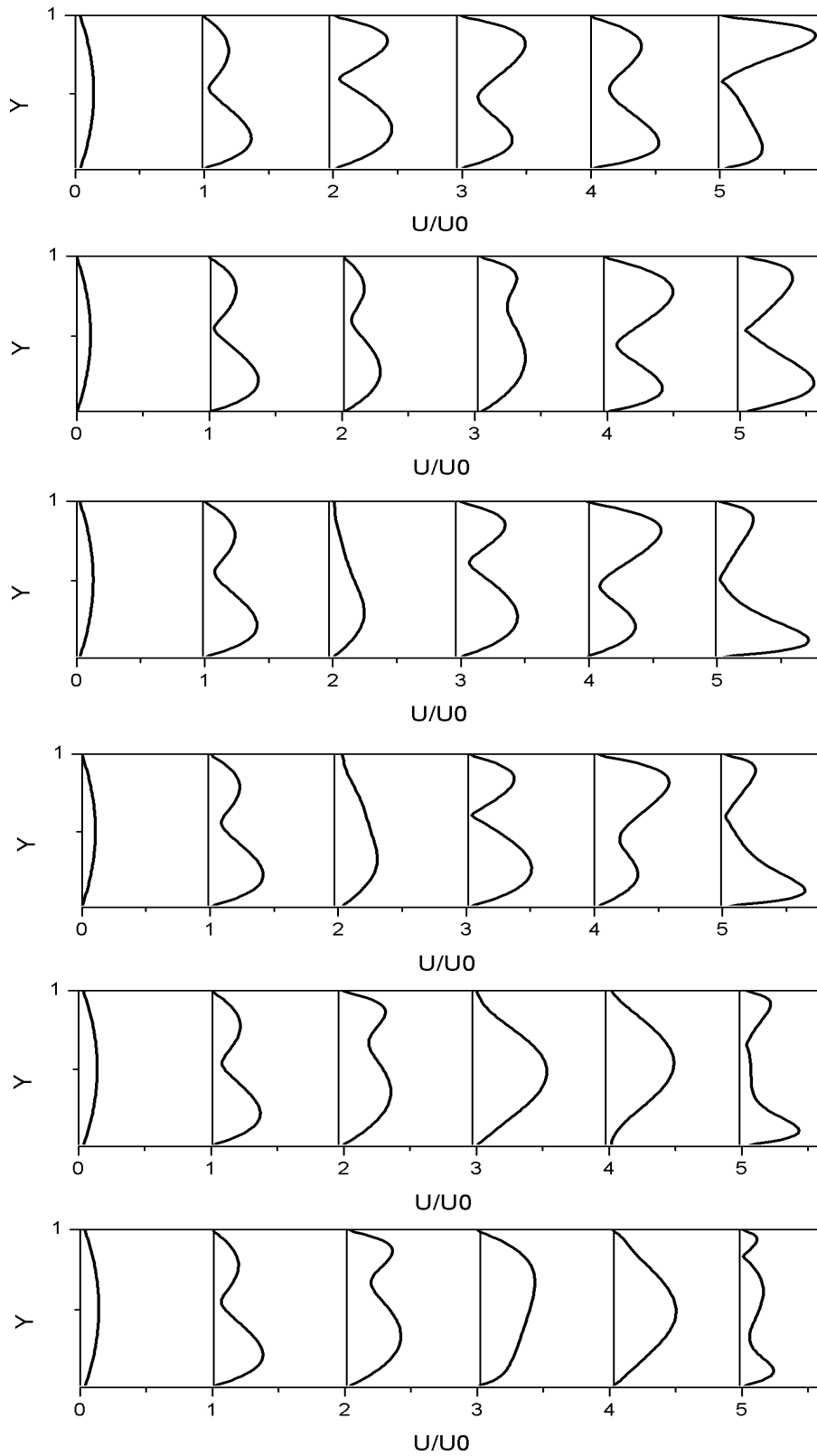
**Fig.4.10.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $B=5$ ,  
 $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$ .

**b) isothermes :**



**Fig.4.11.** Evolution des isothermes durant une période pour  $B=5$ ,  $Re=10$ ,  
 $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**c) Profils de vitesses :**

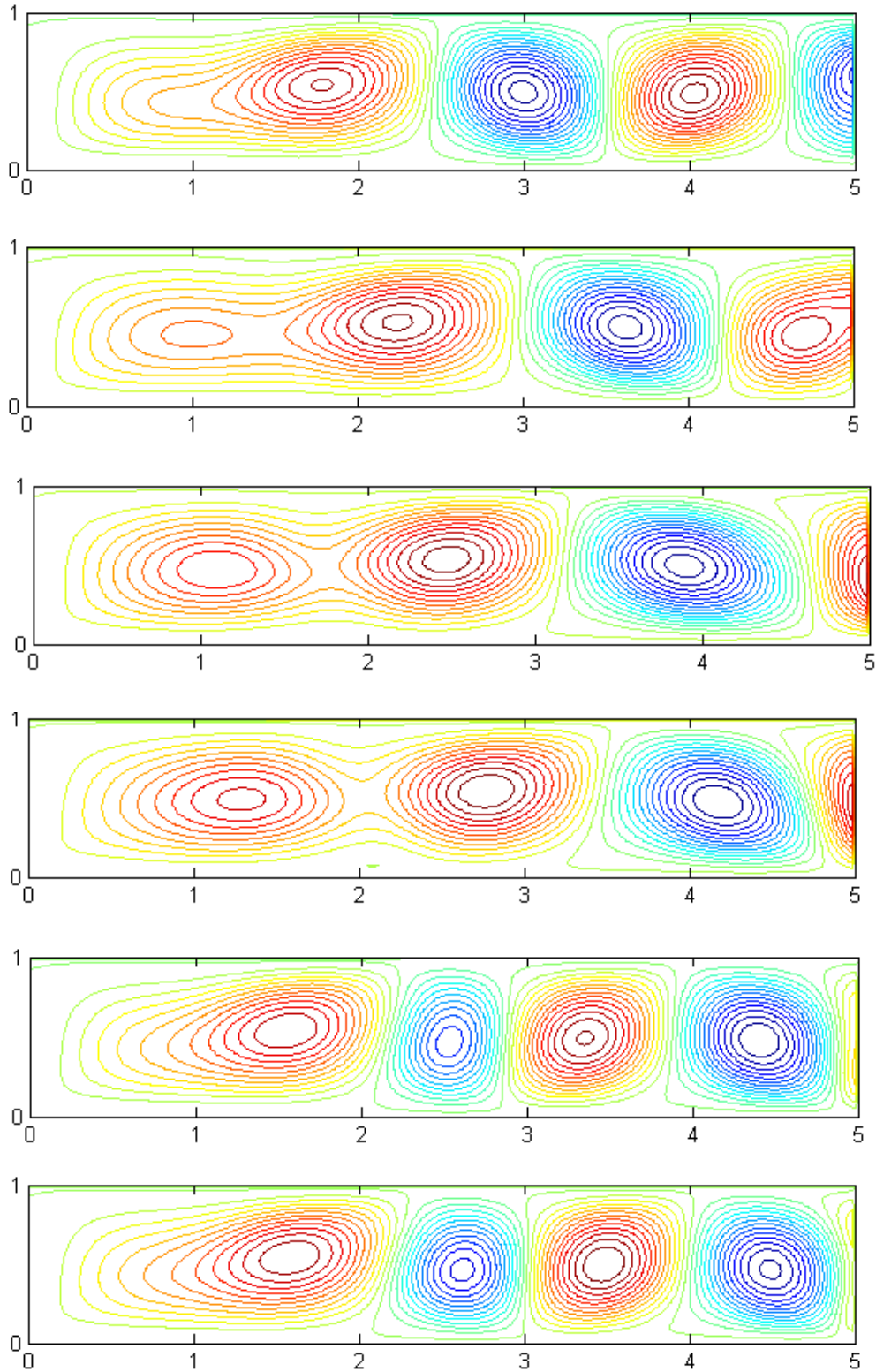


**Fig.4.12.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  
 $Re = 10$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

3.3) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,

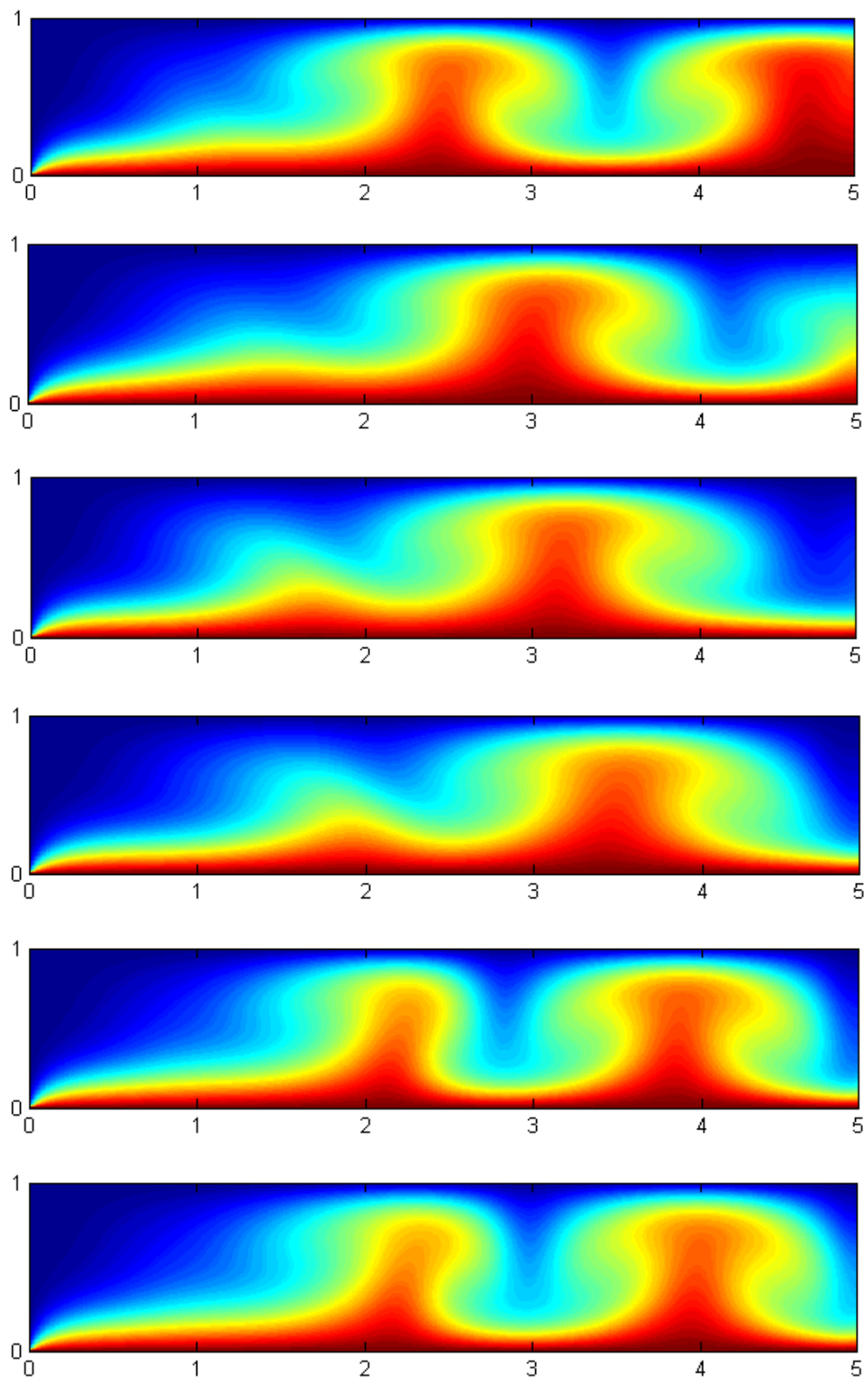
$Re=20$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant :



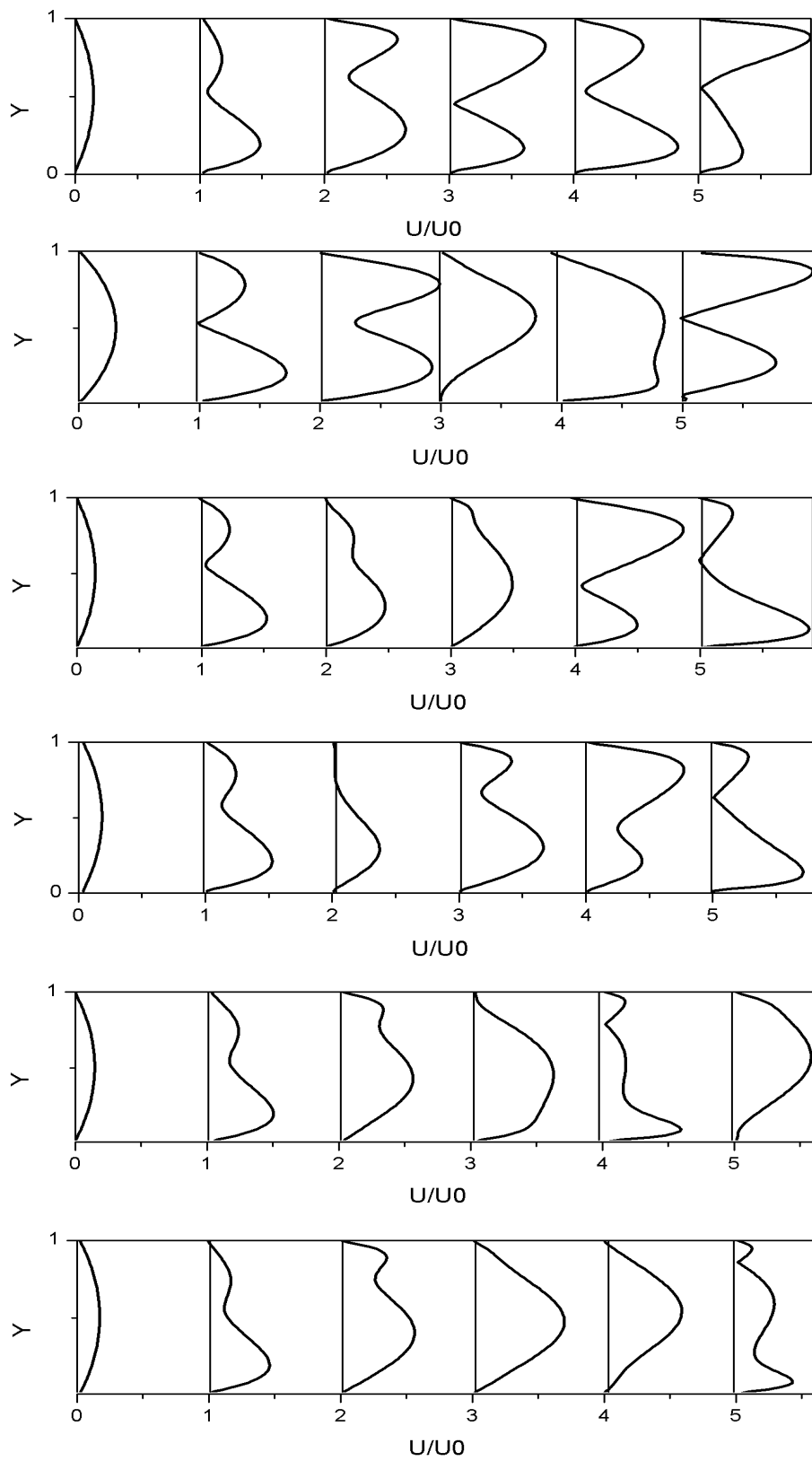
**Fig.4.13.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=20$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.14.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 20$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**c) Profils de vitesses :**

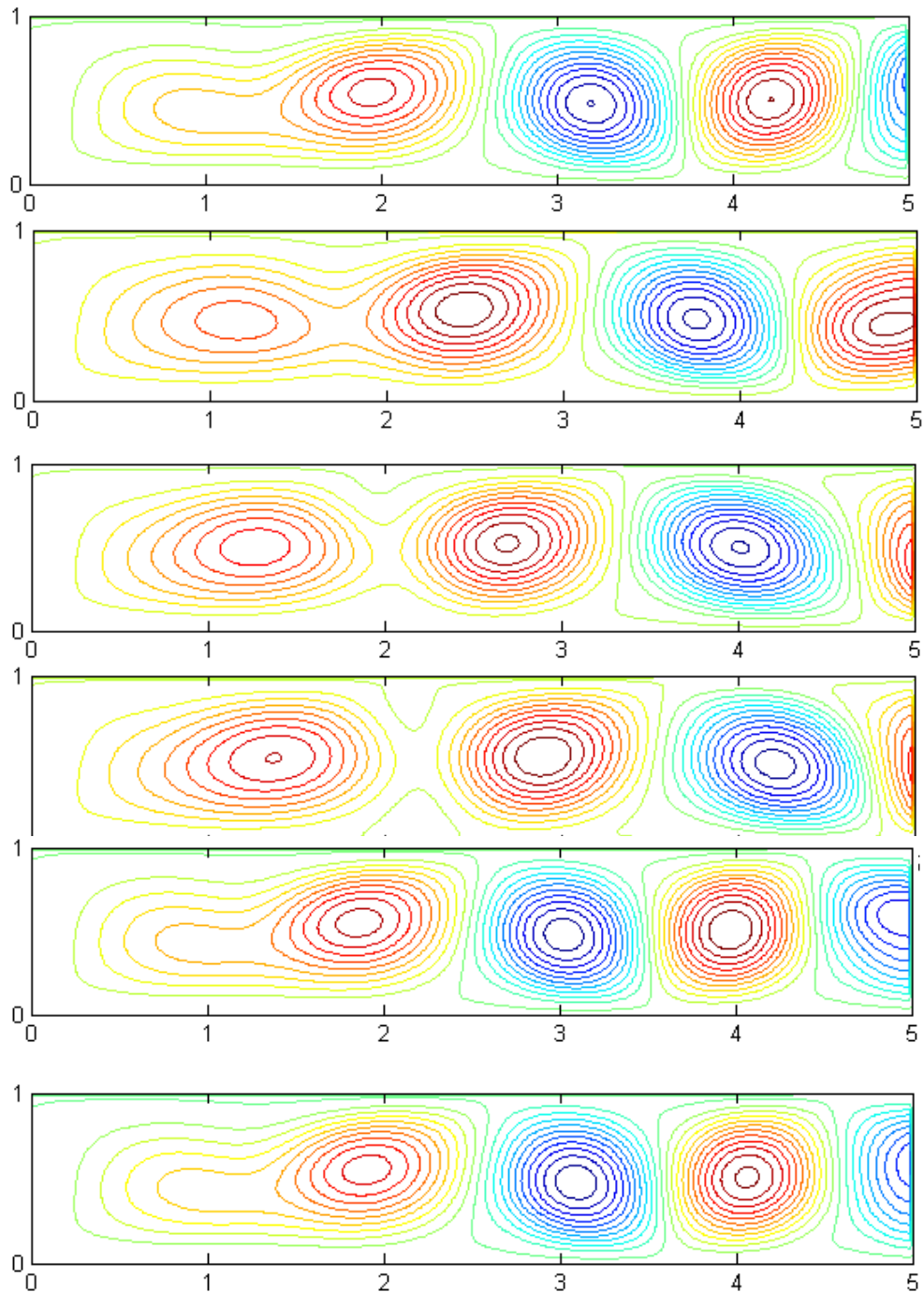


**Fig.4.15.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5, Re = 20, Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**3.4) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,**

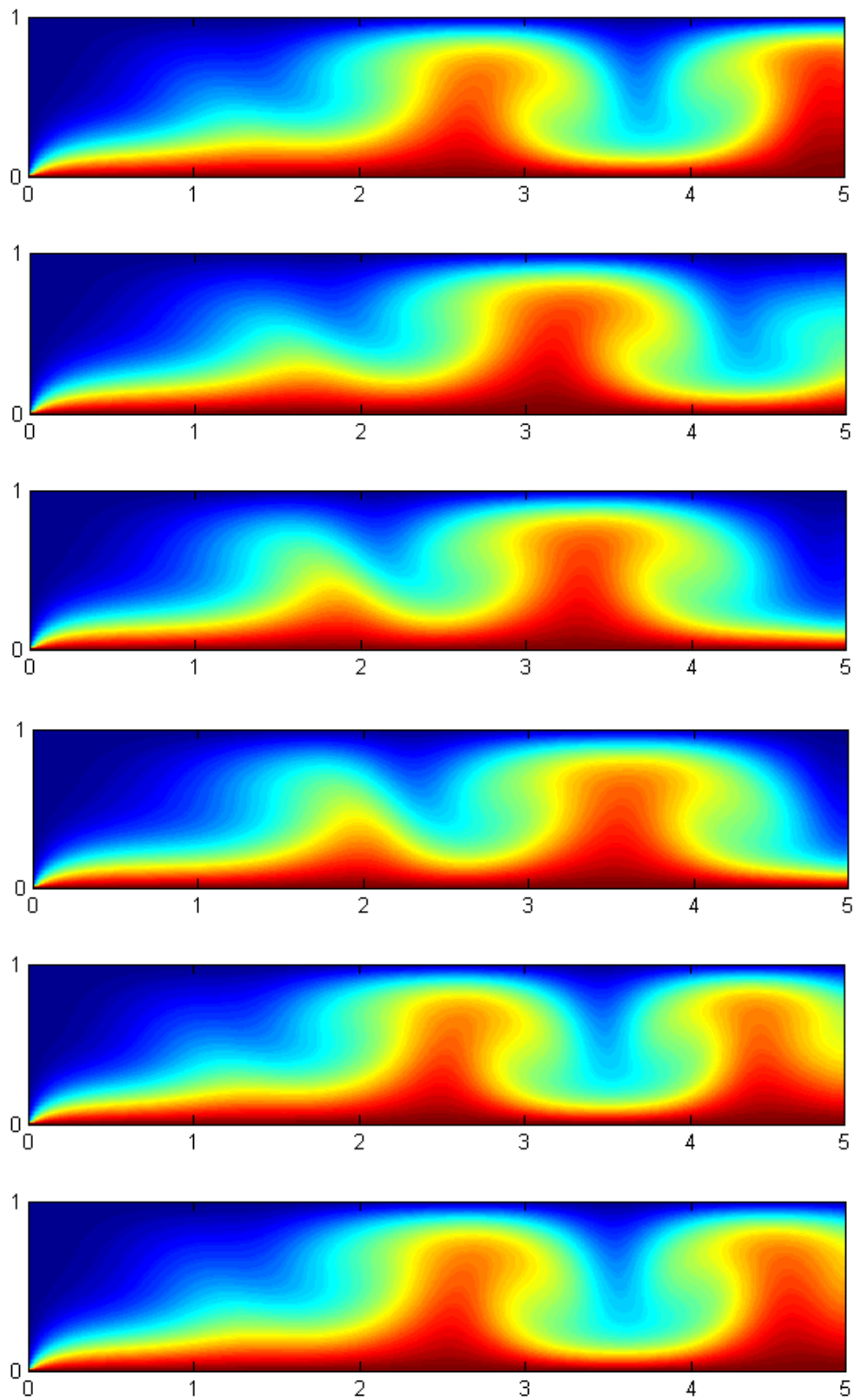
**$Re=30$  et  $Ra = 10^4$  :**

**a) Fonctions de courant :**



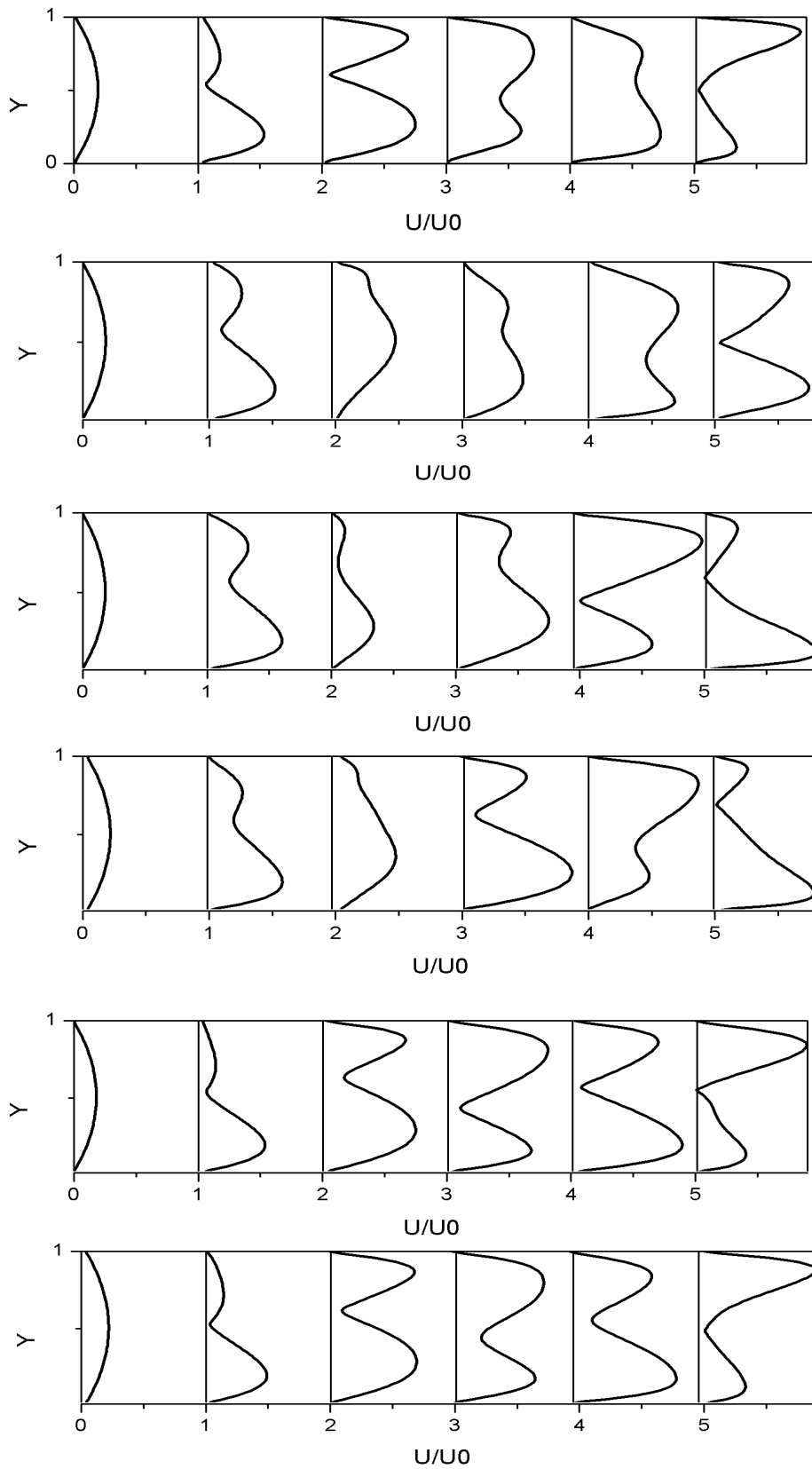
**Fig.4.16.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=30$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra= 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.17.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 30$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

c) Profils de vitesses :

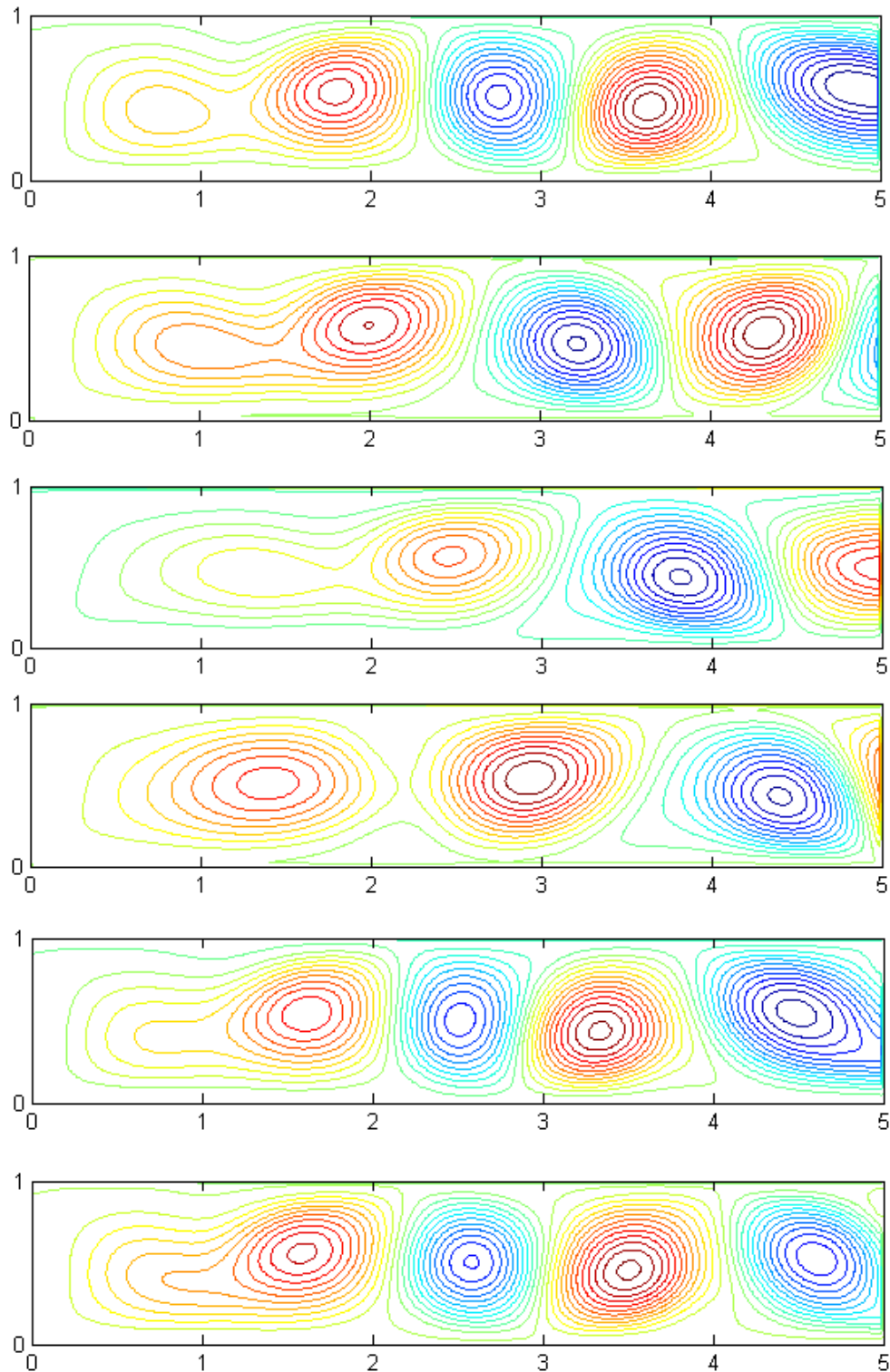


**Fig.4.18.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 30$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

3.5) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,

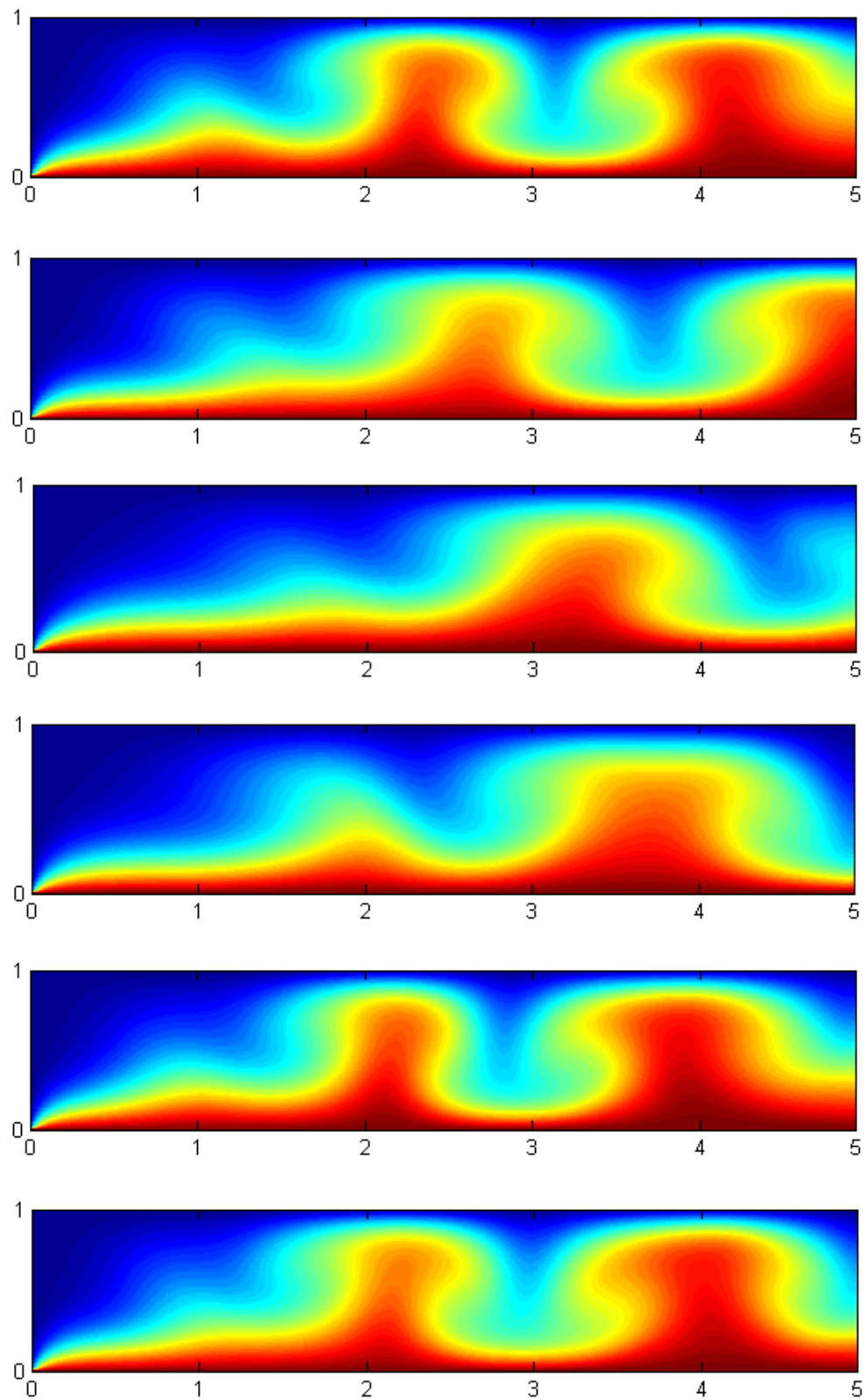
$Re=40$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant



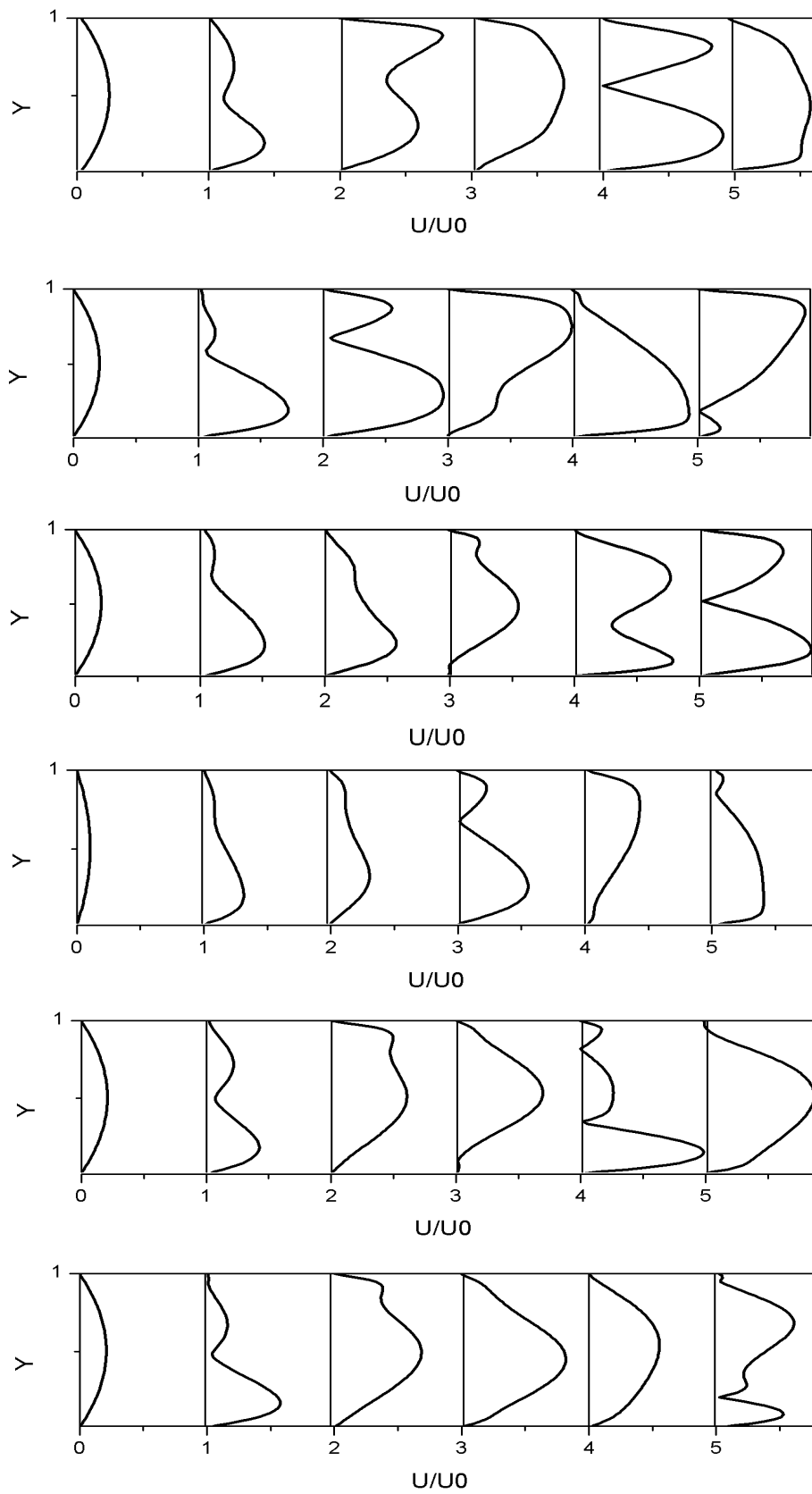
**Fig.4.19.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=40$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra= 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.20.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 40$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

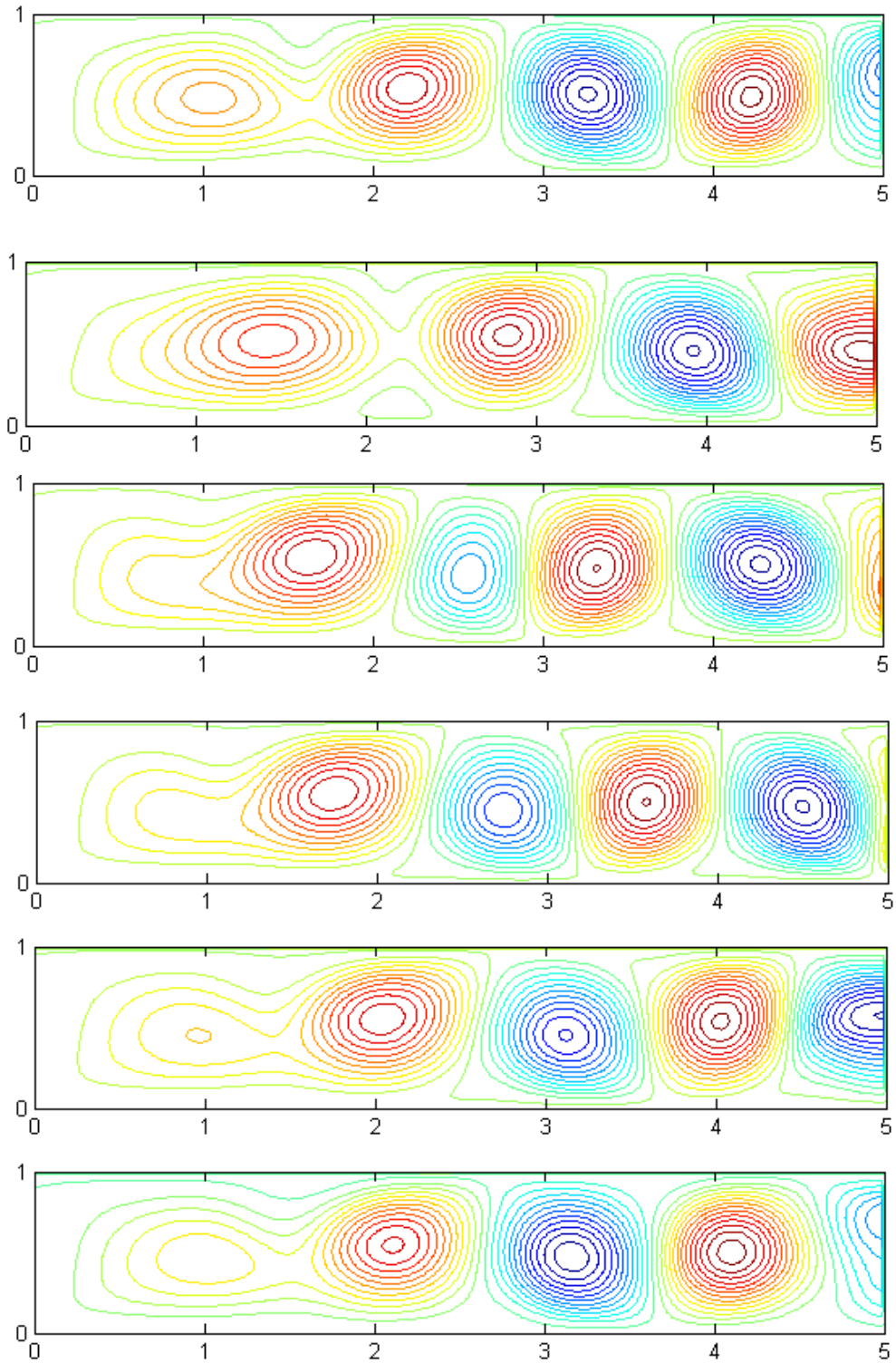
**c) Profils de vitesses :**



**Fig.4.21.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 40$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

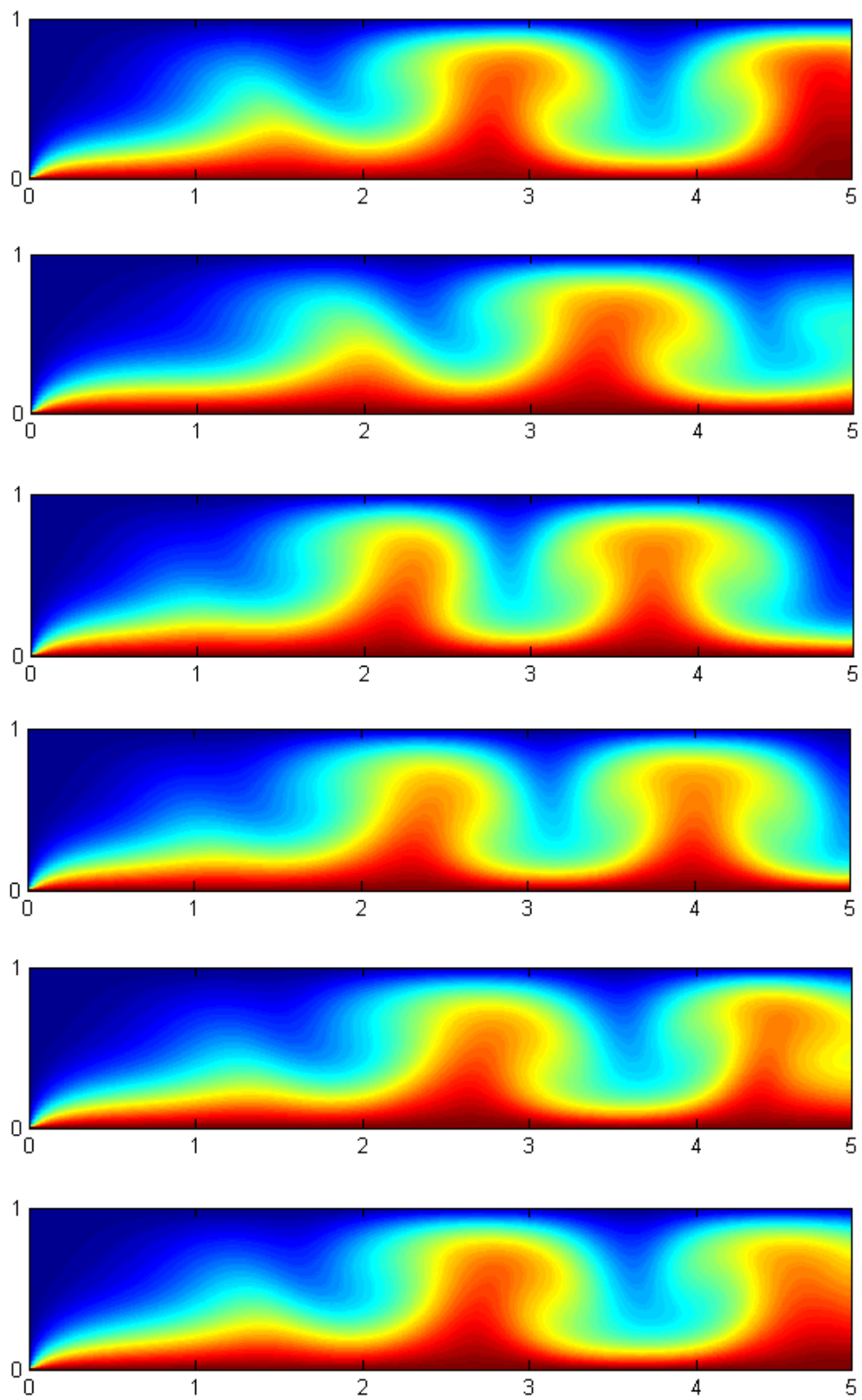
3.6) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,  
 $Re=50$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant



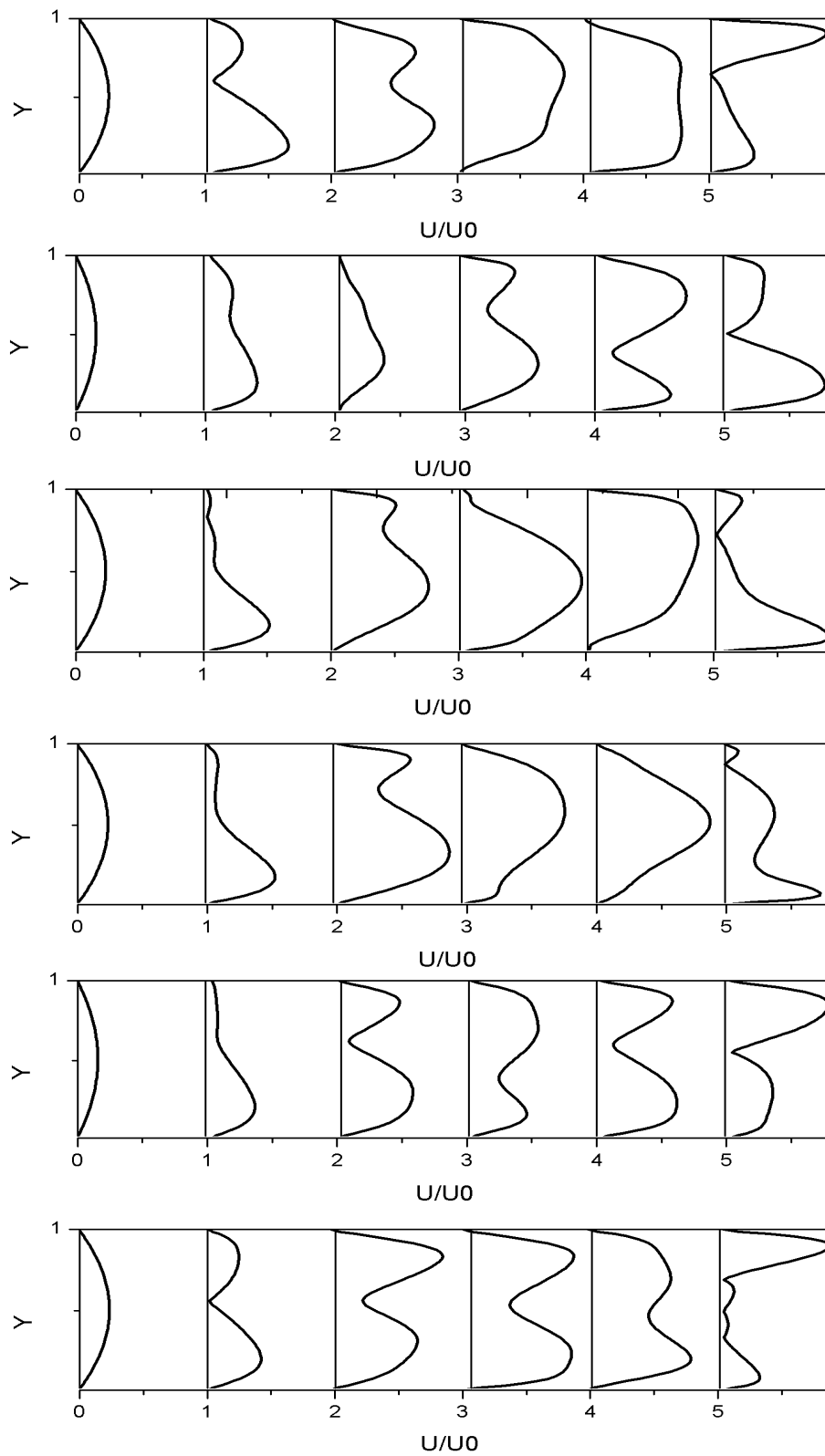
**Fig.4.22.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=50$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra= 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.23.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 50$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

c) Profils de vitesses :



**Fig.4.24.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=50, Re = 5, Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

3.7) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,

$Re=60$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant :

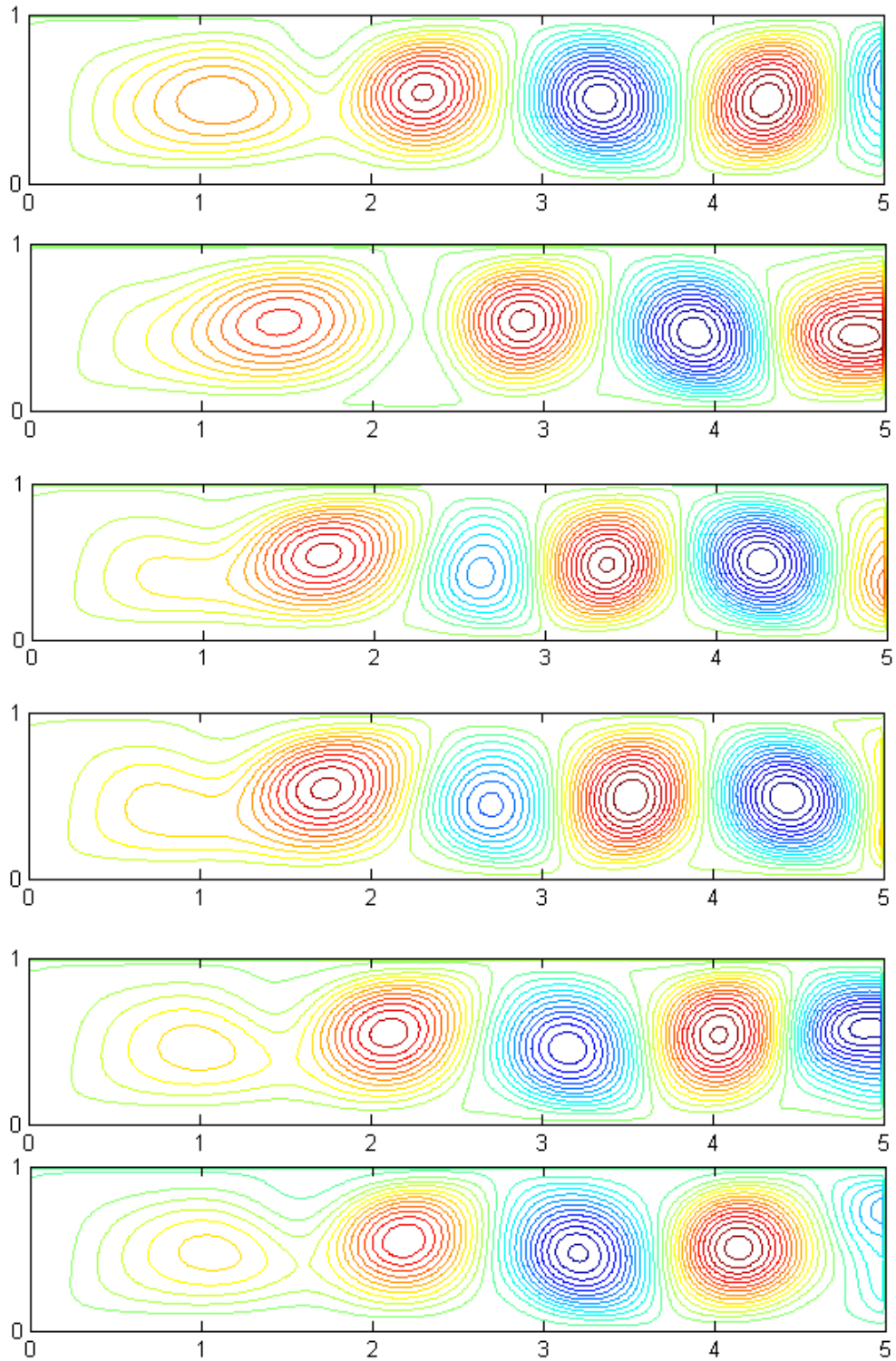
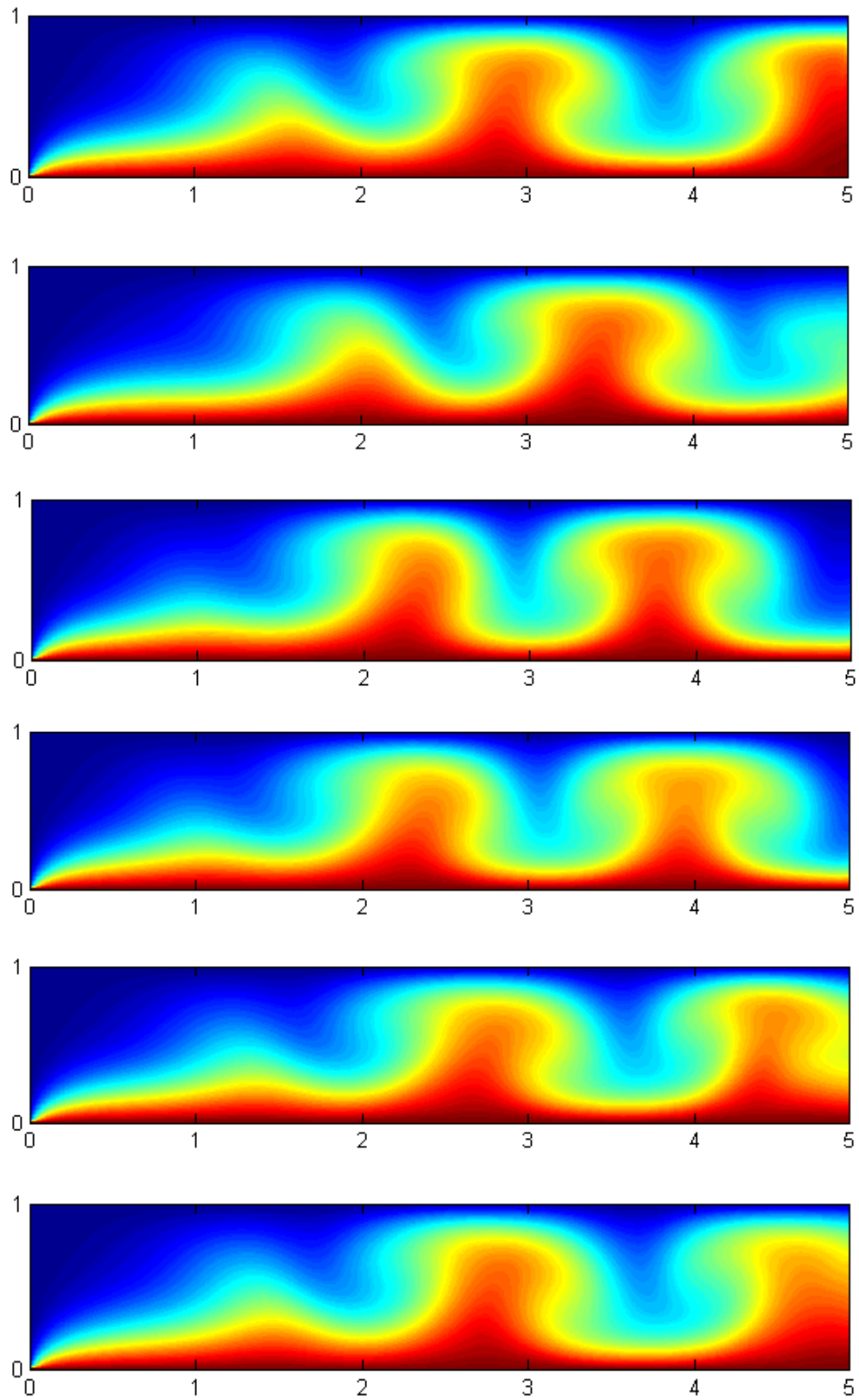


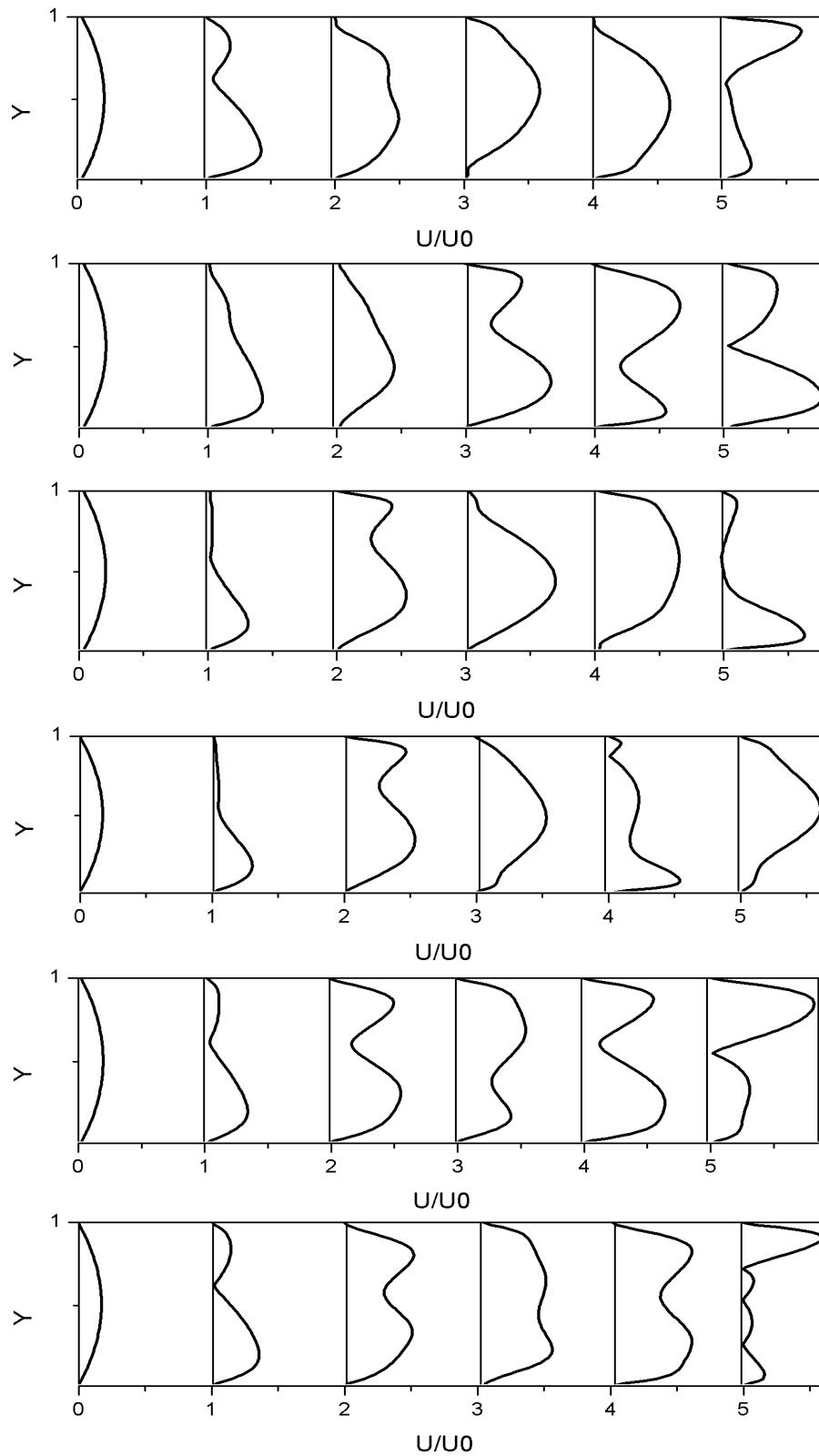
Fig.4.25. Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=60$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra= 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.26.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 60$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**c) Profils de vitesses :**

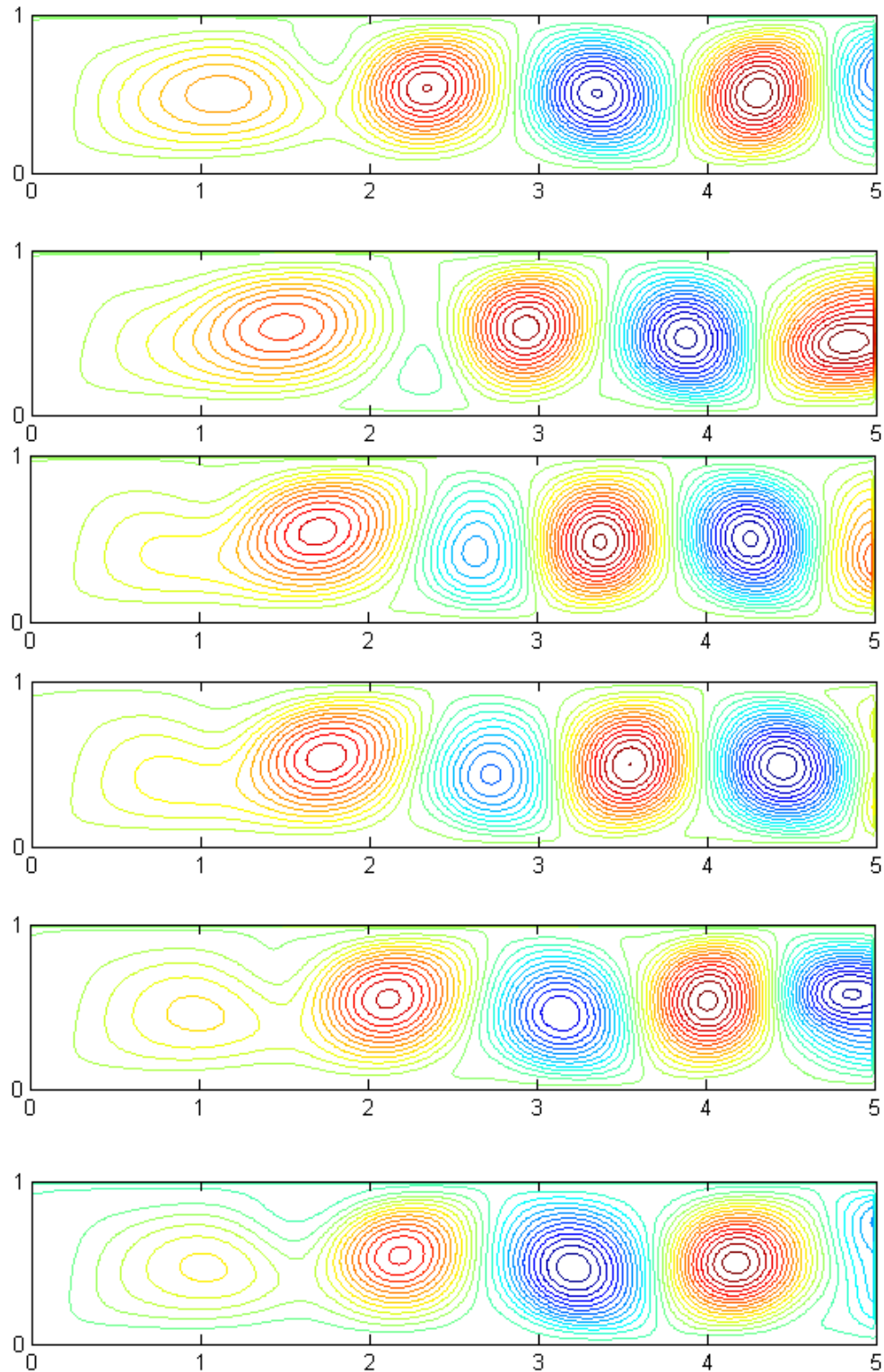


**Fig4.27.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=60, Re = 5, Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**3.8) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,**

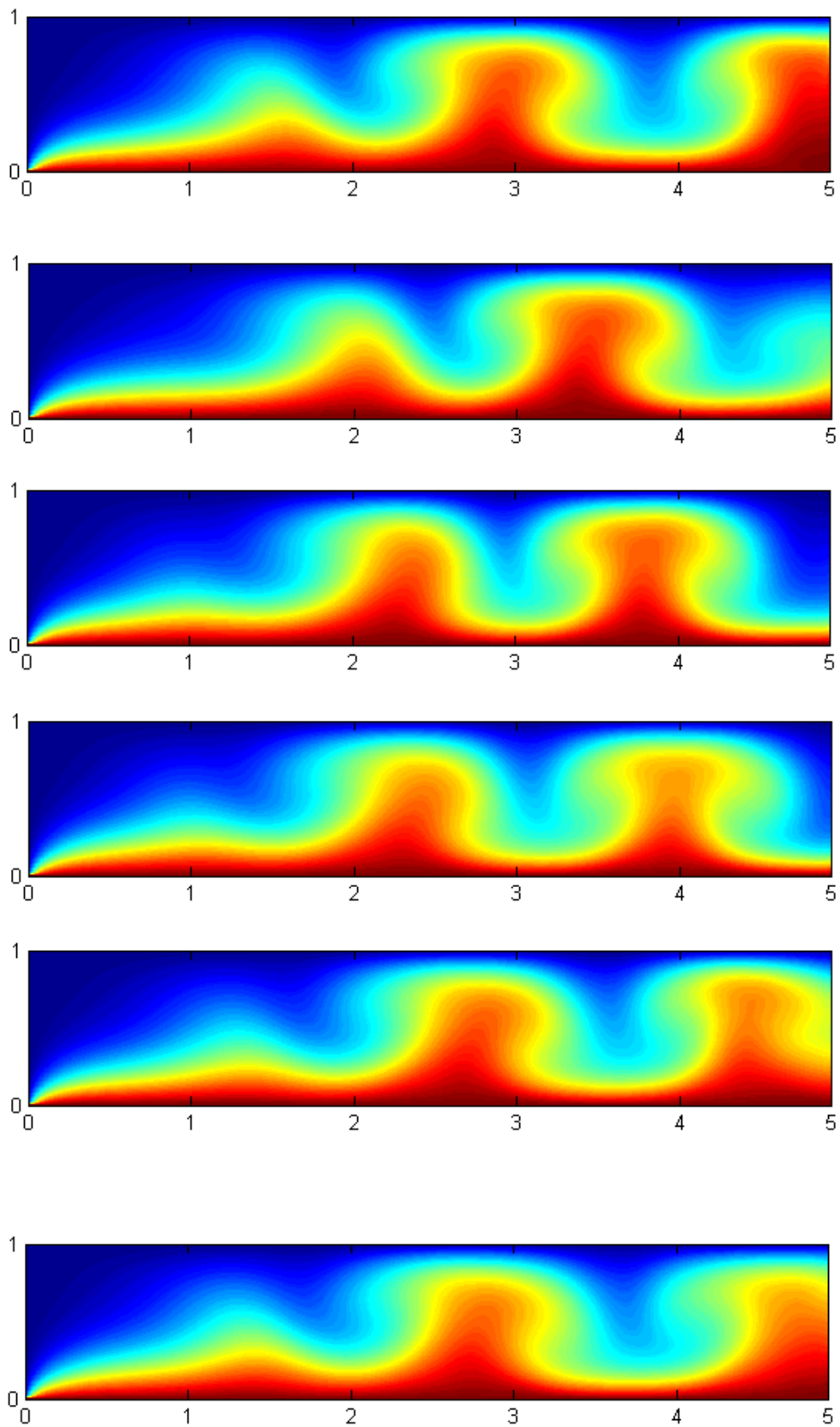
**$Re=70$  et  $Ra = 10^4$  :**

**a) Fonctions de courant**



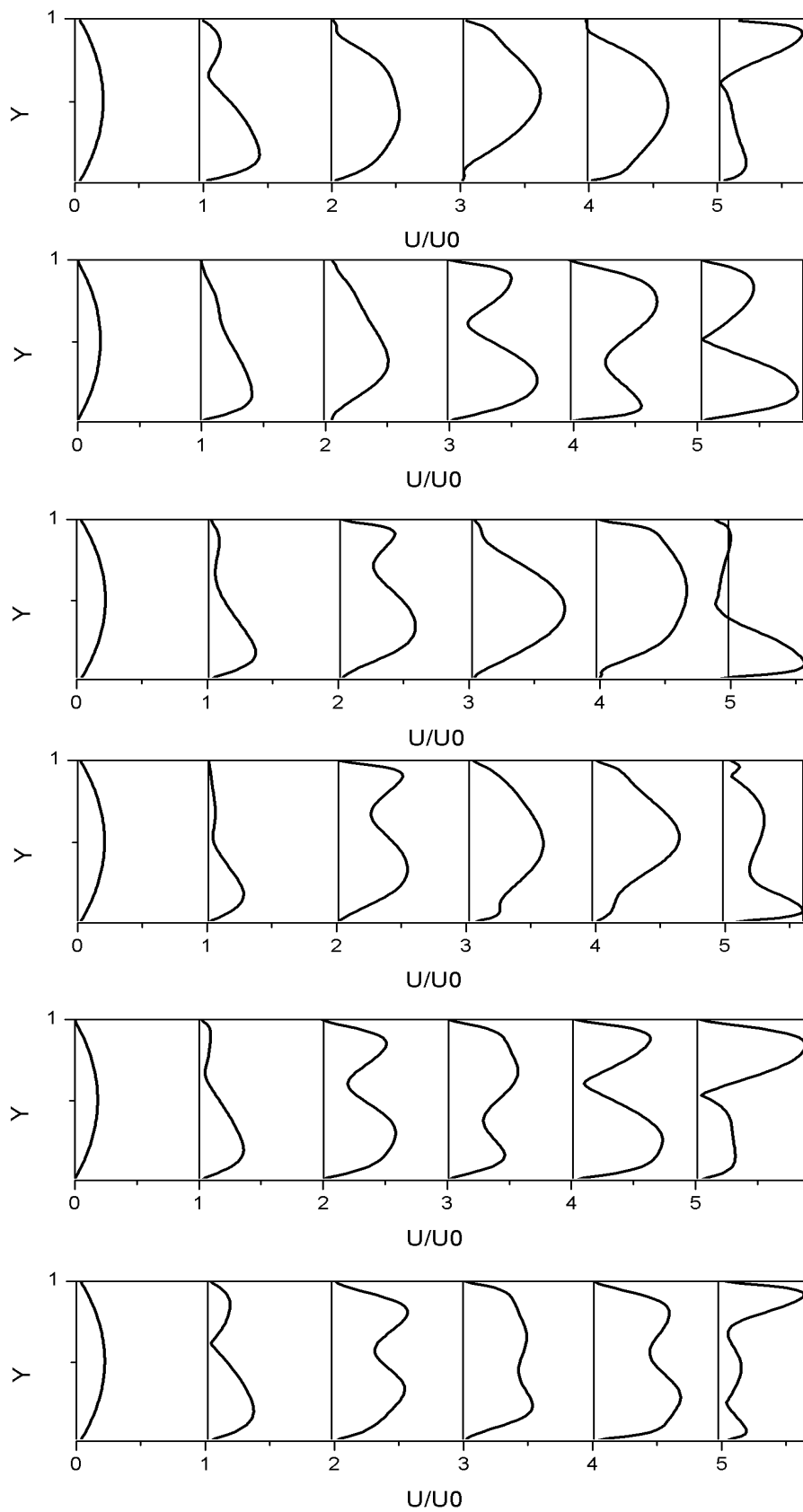
**Fig.4.28.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=70$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra= 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.29.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 70$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

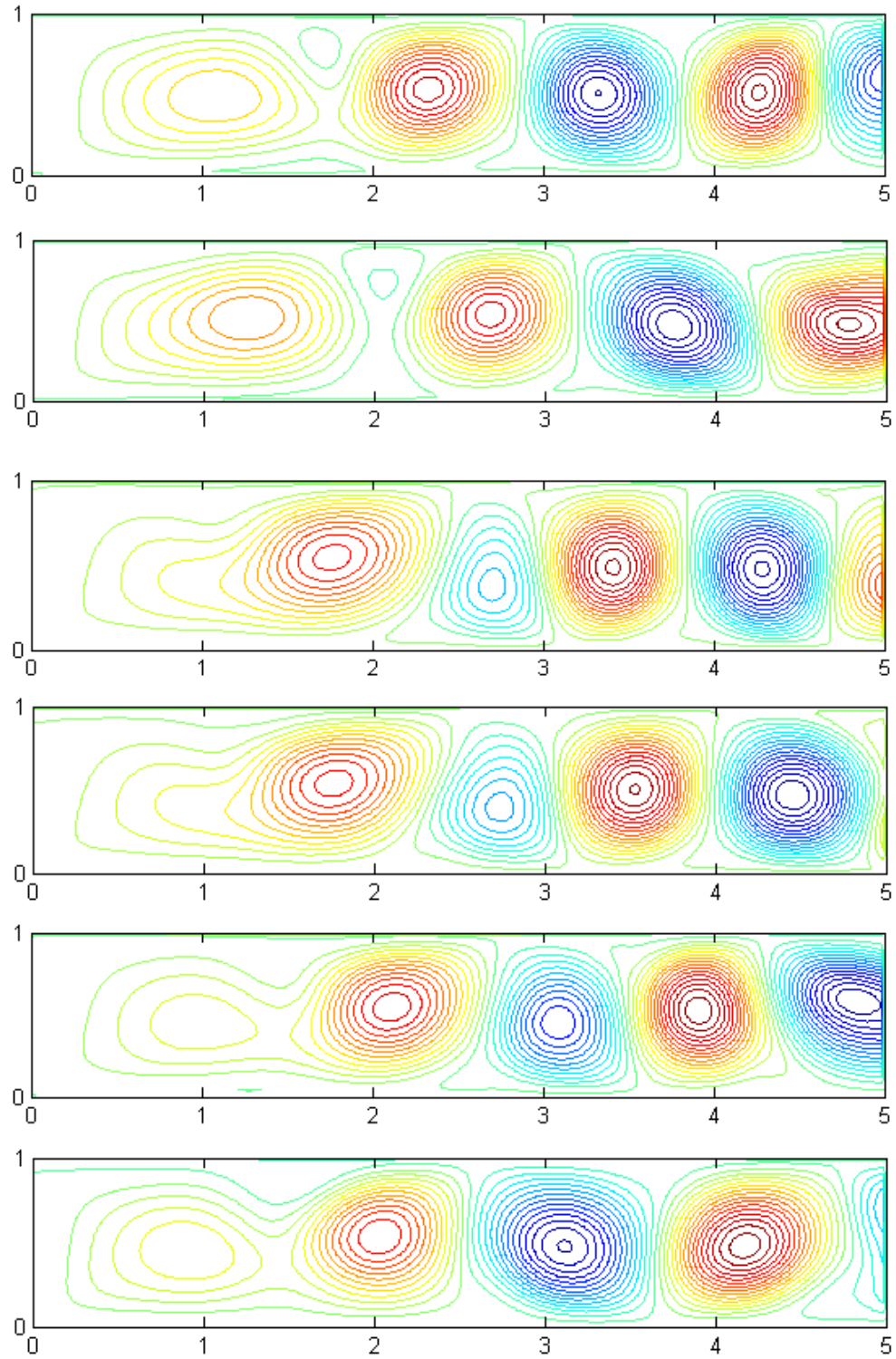
c) Profils de vitesses :



**Fig.4.30.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $Re=70$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$

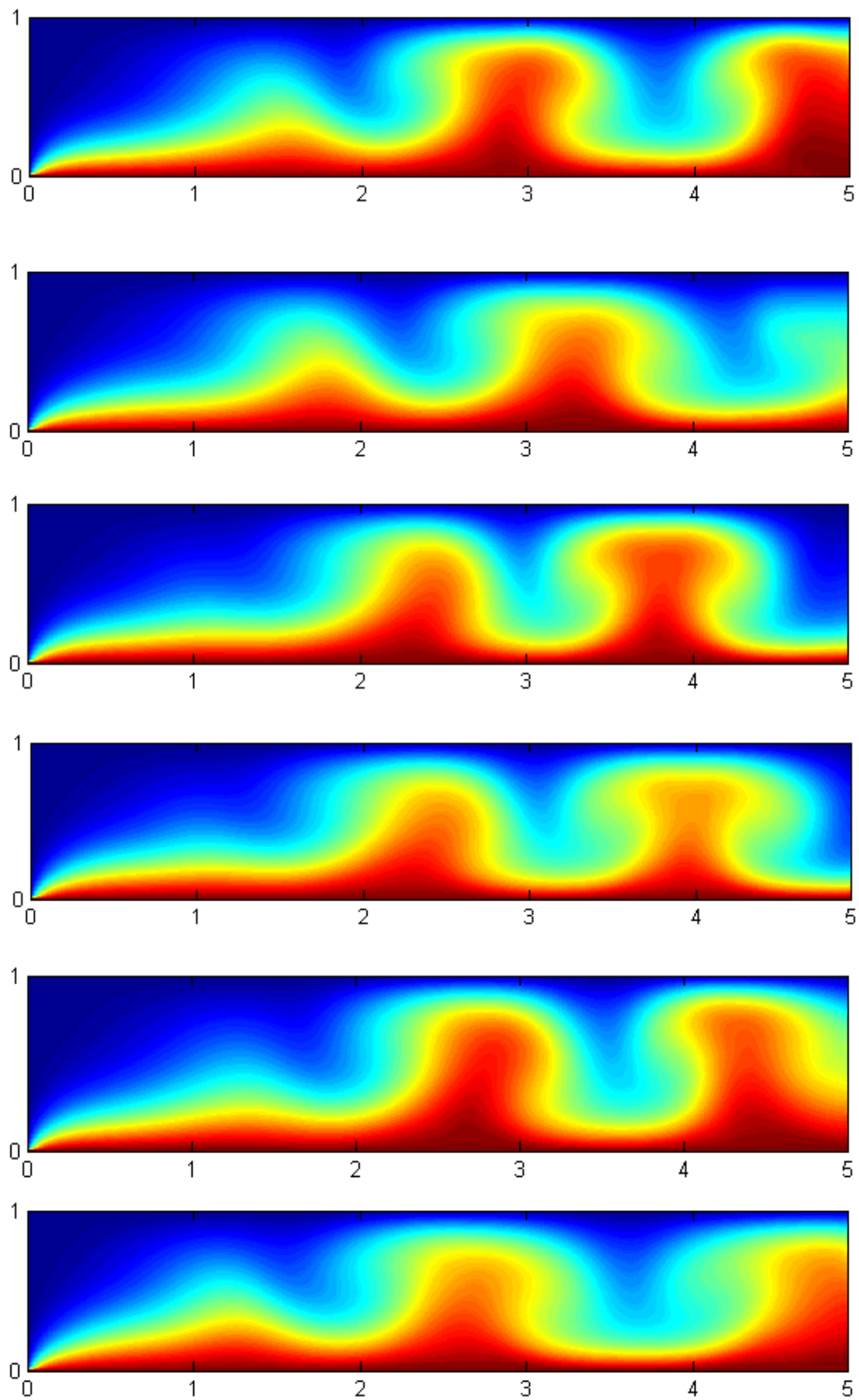
3.9) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour  $B=5$ ,  
 $Re=80$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant



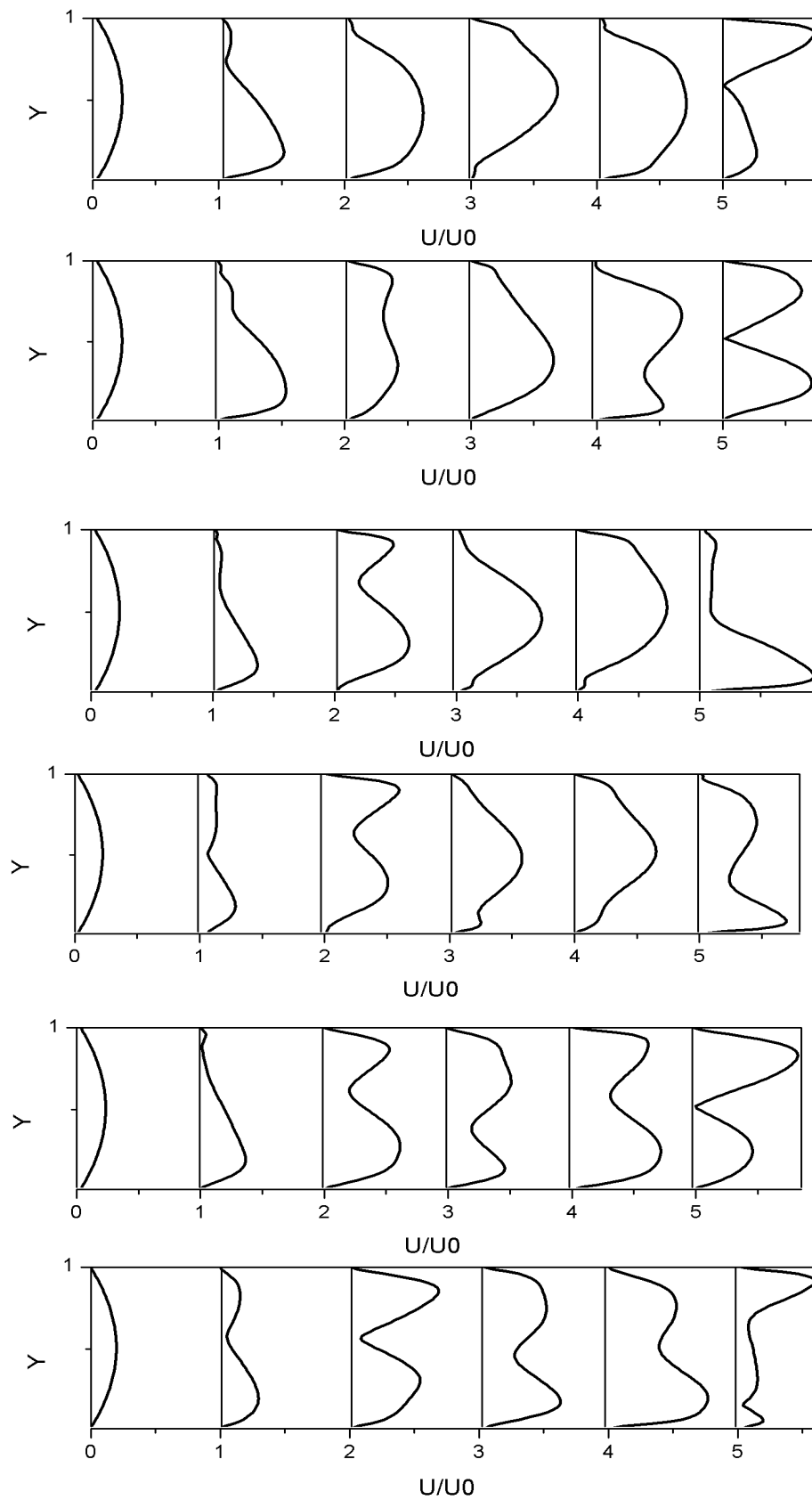
**Fig.4.31.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=80$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra= 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig.4.32.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 80$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

c) Profils de vitesses :

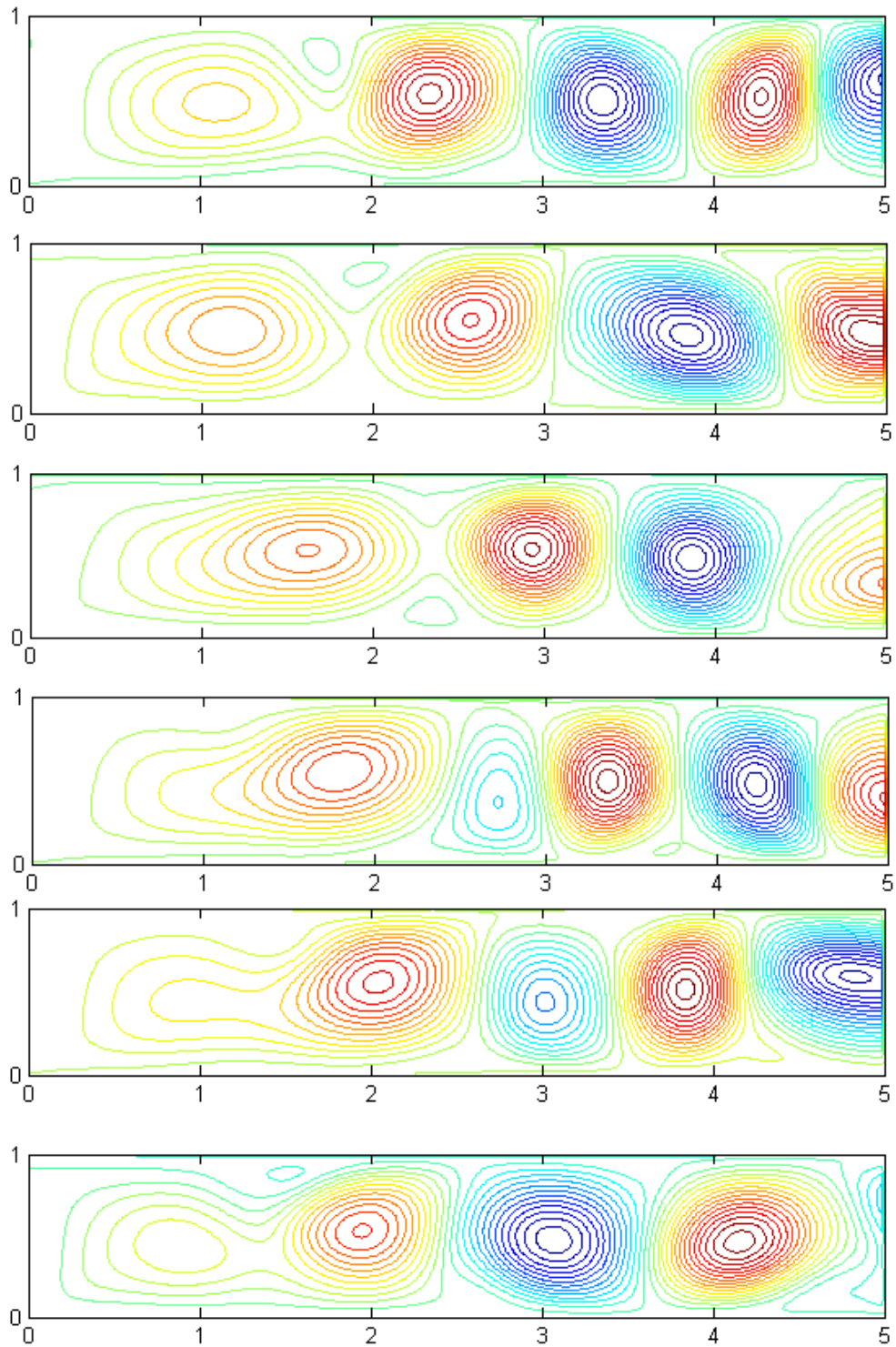


**Fig4.33.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $B=5$ ,  $Re = 80$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

### 3.10) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ ,

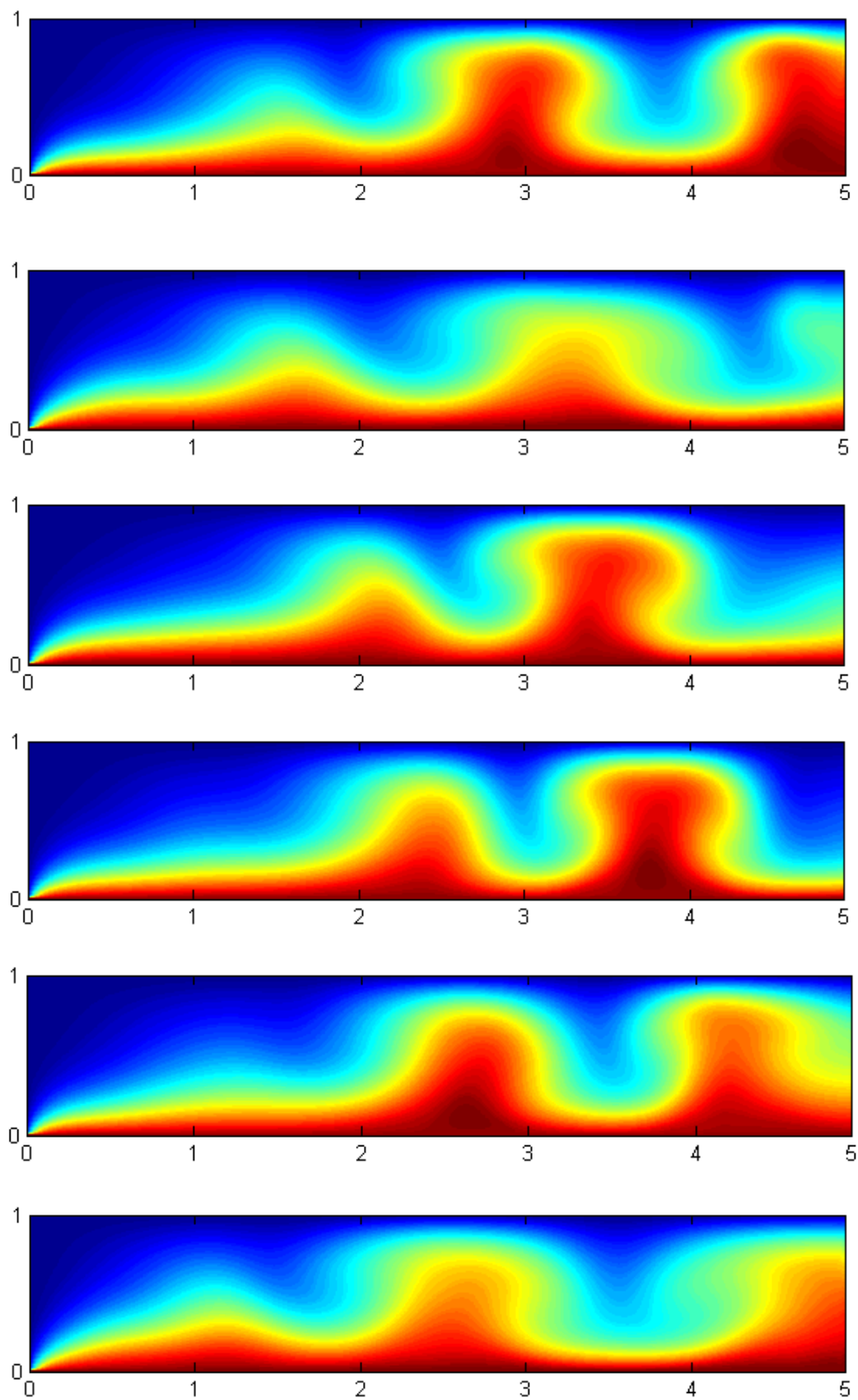
$Re=90$  et  $Ra = 10^4$  :

#### a) Fonctions de courant



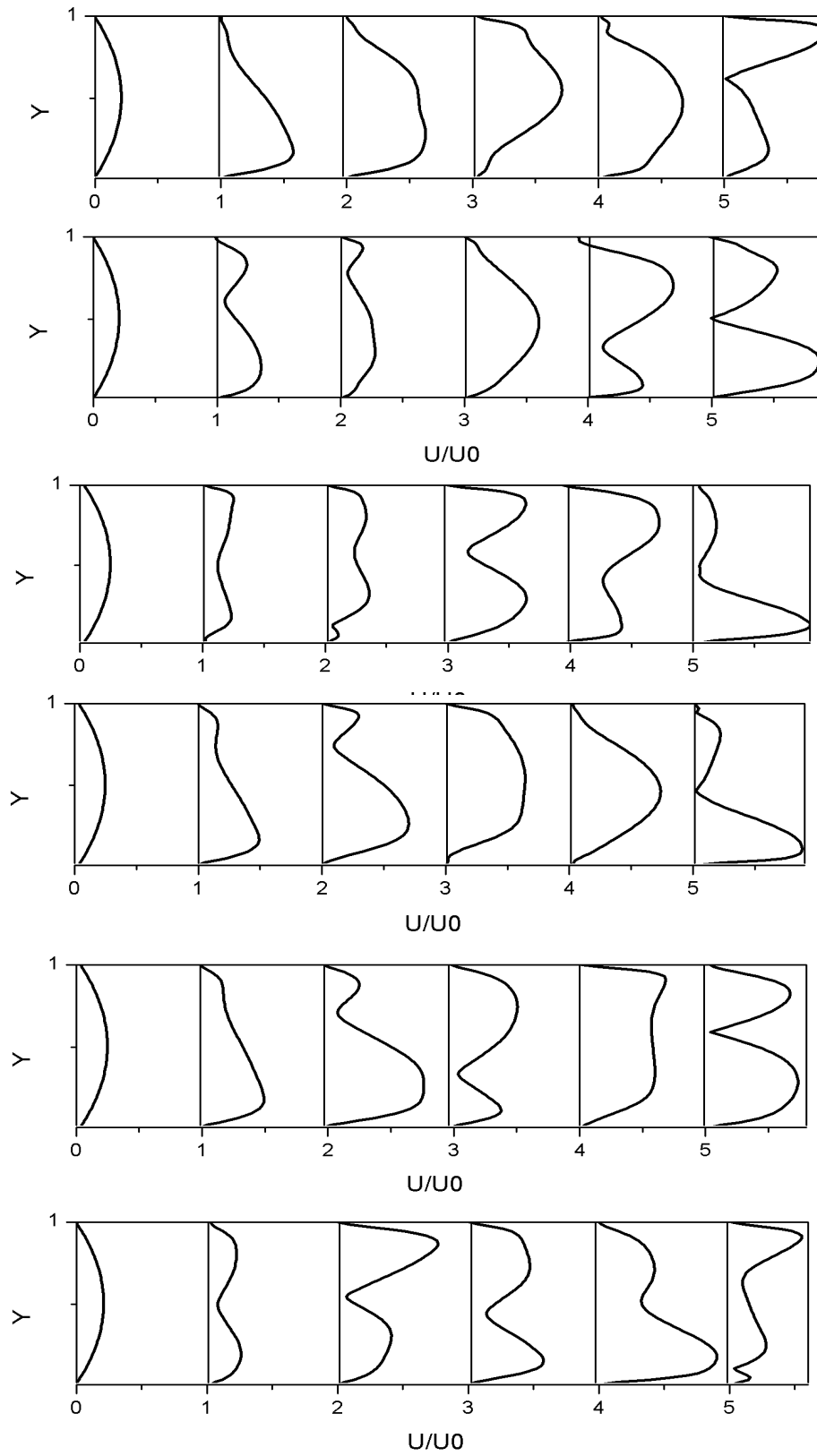
**Fig.4.34.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=90$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra= 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig4.35.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 90$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

c) Profils de vitesses :

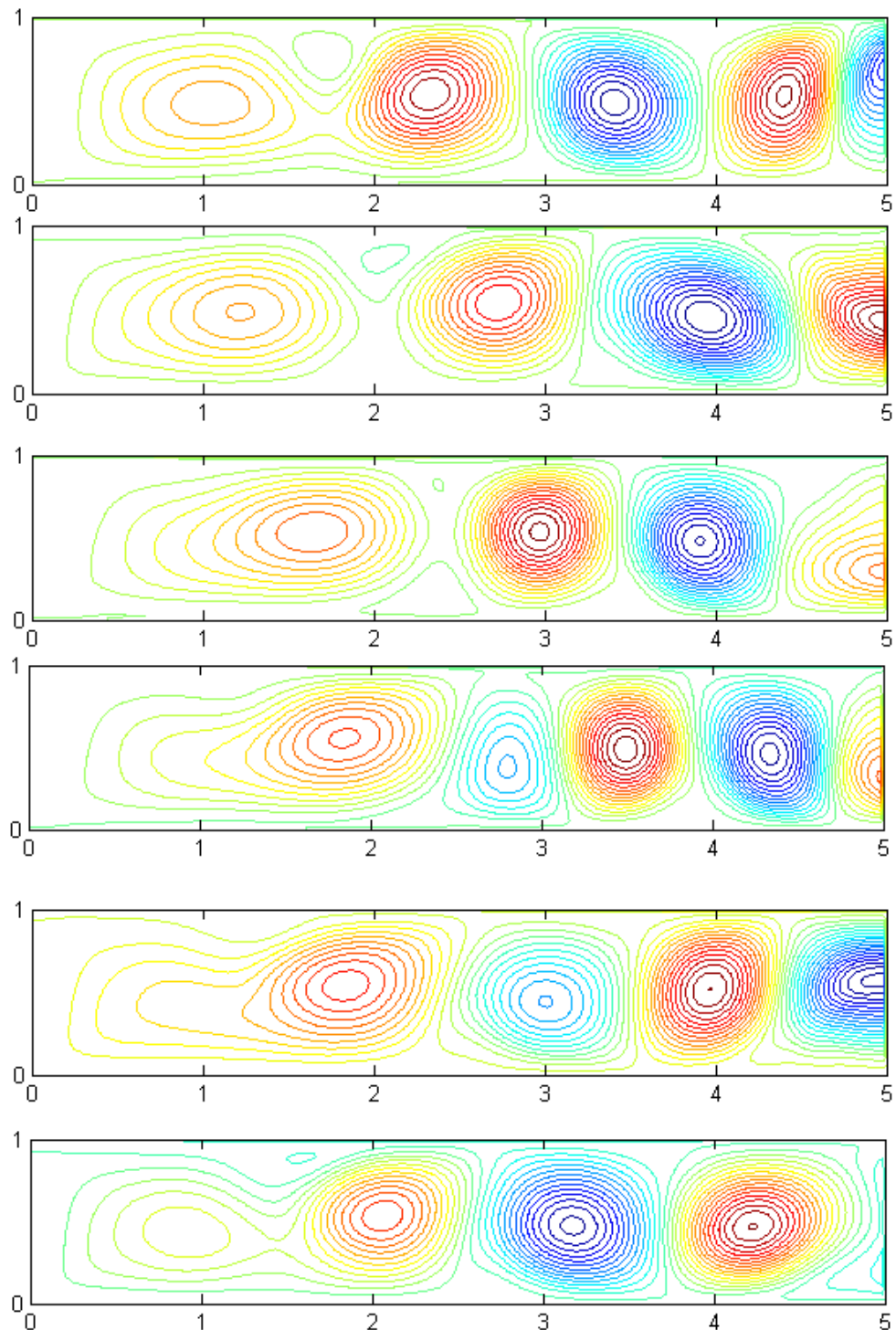


**Fig4.36.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $Re= 90$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$

### 3.11) Fonctions de courant, isothermes et profils de vitesses pour $B=5$ ,

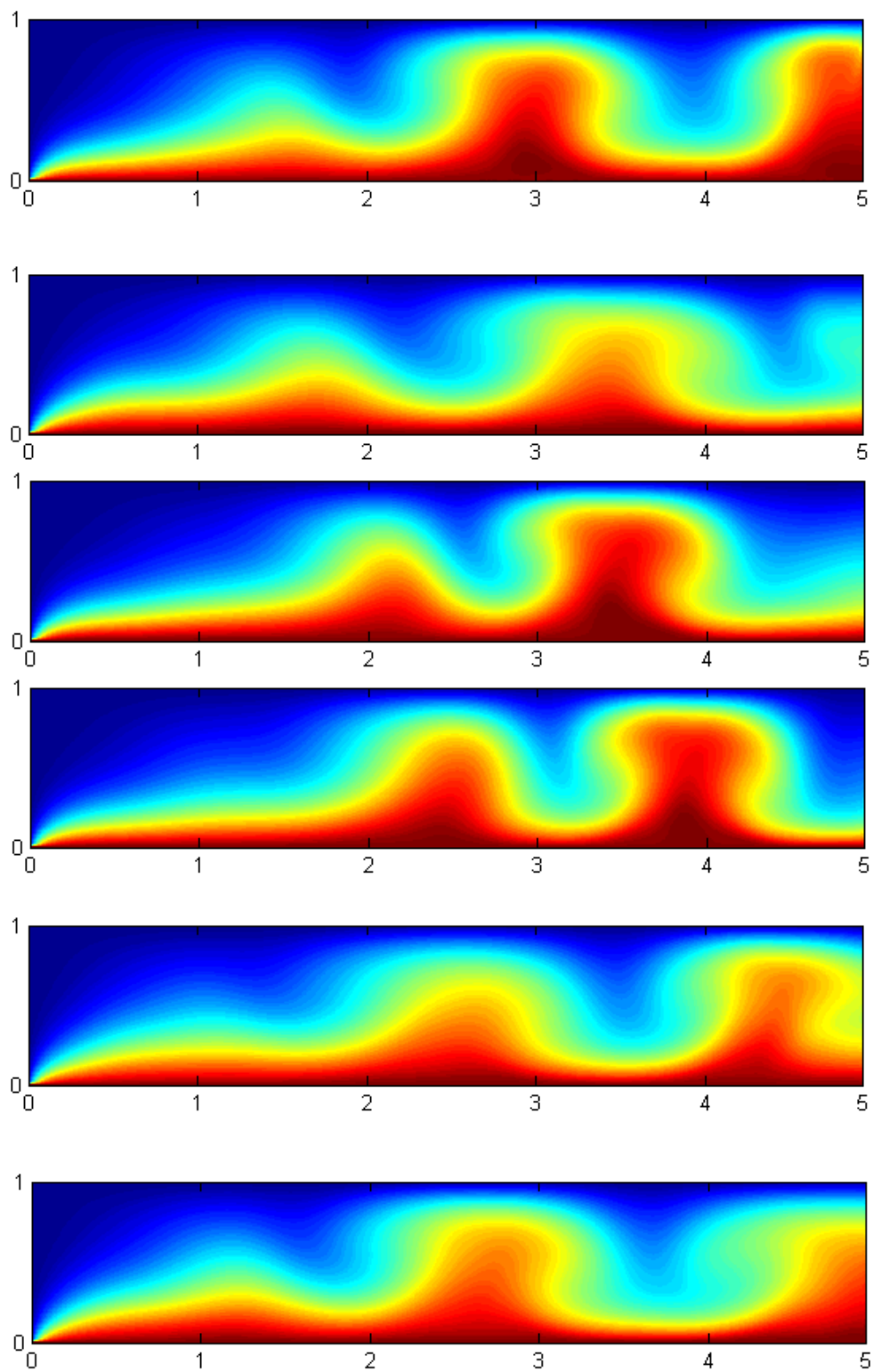
$Re=100$  et  $Ra = 10^4$  :

a) Fonctions de courant :



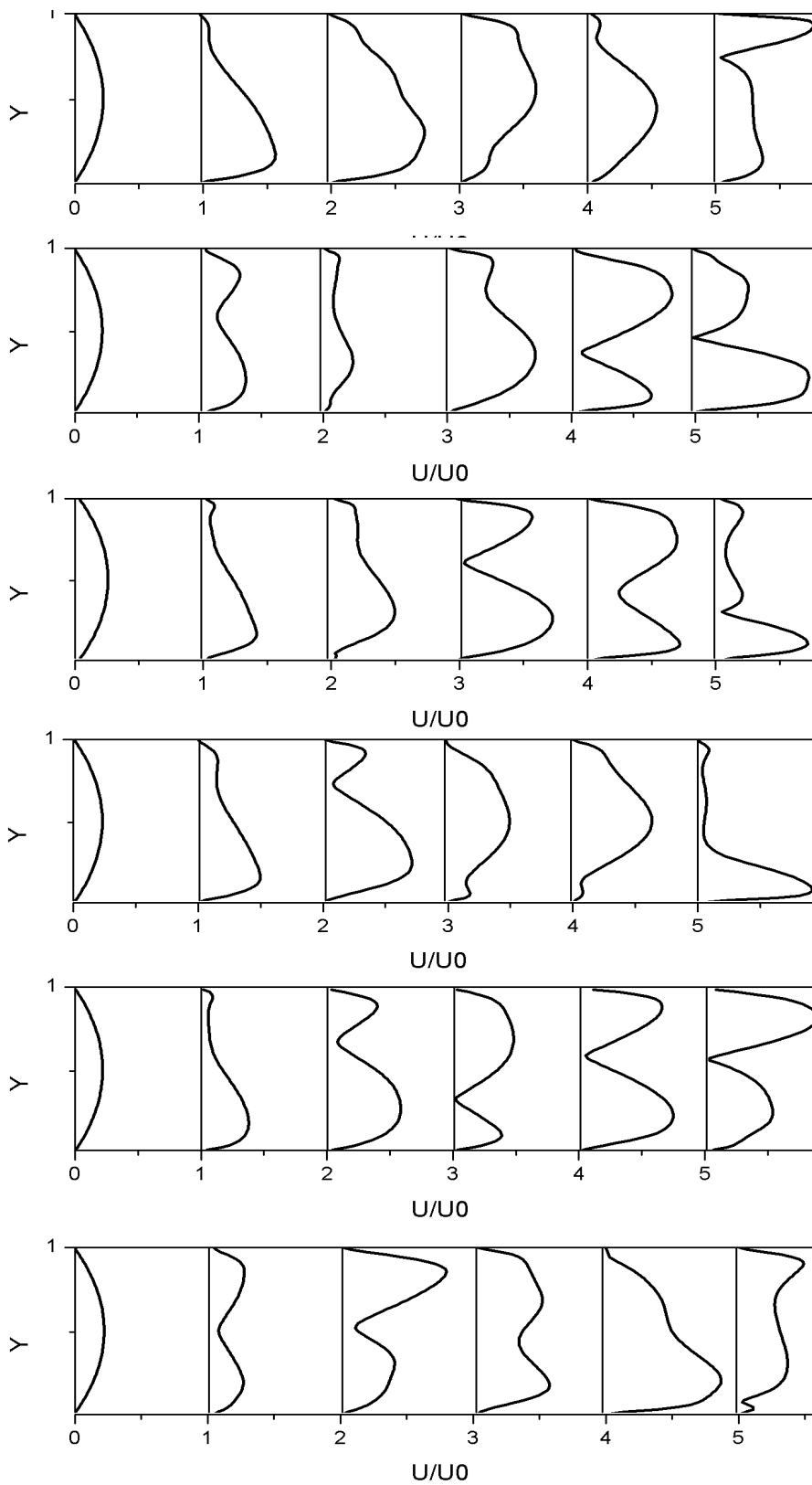
**Fig.4.37.** Evolution des lignes de courant durant une période pour  $Re=100$ ,  $Pe=20/3$  et  $Ra = 10^4$

**b) Isothermes :**



**Fig4.38.** Evolution des isothermes durant une période pour  $Re = 100$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

**c) Profils de vitesses :**



**Fig4.39.** Evolution des profils de vitesses  $U/U_0$  (de 0 à 5h) Pour  $Re = 100$ ,  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$

### 3.12. Résultats et discussions:

Dans les figures représentant l'évolution des fonctions de courants, des isothermes et les distributions des profils de vitesses sur une période pour des nombres de Reynolds allant de 5 jusqu'à 100, les résultats sont pris par intervalles de  $T/6$  où  $T$  représente la période. Le début de la période  $t=0$  est pris au temps où le nombre de Nusselt moyen est maximal [50].

On remarque sur la représentation des fonctions de courants, que les cellules convectives apparaissent alternativement près des parois du haut et du bas respectivement, suivant le sens de l'écoulement, et leurs fréquences d'apparition et la vitesse de leurs déplacements augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Les cellules du bas tournent selon le sens des aiguilles d'une montre, tandis que celles du haut tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

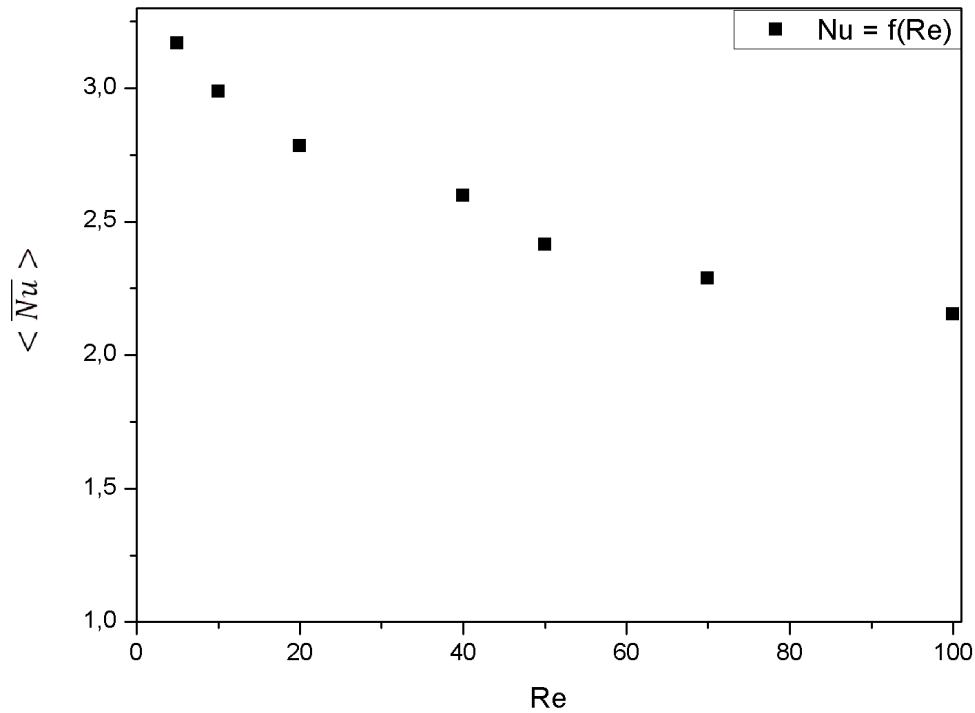
L'existence des cellules convectives imposent la formation de l'allée de Von Kármán. Les variations des quantités scalaires telles que la température et la vitesse sont périodiques à cause des faibles nombres de Reynolds et des nombres de Rayleigh importants.

Pour les figures représentant l'évolution des isothermes sur une période, on remarque l'apparition de panaches prenant la forme de champignons qui servent à transporter de la chaleur de l'entrée du canal jusqu'à sa sortie.

La taille des panaches sont les mêmes à cause du même gradient de température. La vitesse des panaches augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'augmentation du nombre de Reynolds engendre la formation de plusieurs panaches durant une période.

#### 4. L'effet du nombre de Reynolds sur le nombre de Nusselt :

Dans cette partie d'analyse, les caractéristiques physiques de l'écoulement sont conservées :  $Pe = 20/3$  et  $Ra = 10^4$  avec la variation du nombre de Reynolds entre 5 et 100. Les résultats de calcul du nombre de Nusselt moyen max sont présentés dans la figure (Fig. 4.40).



**Fig.4.40.** Courbe représentant la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds.

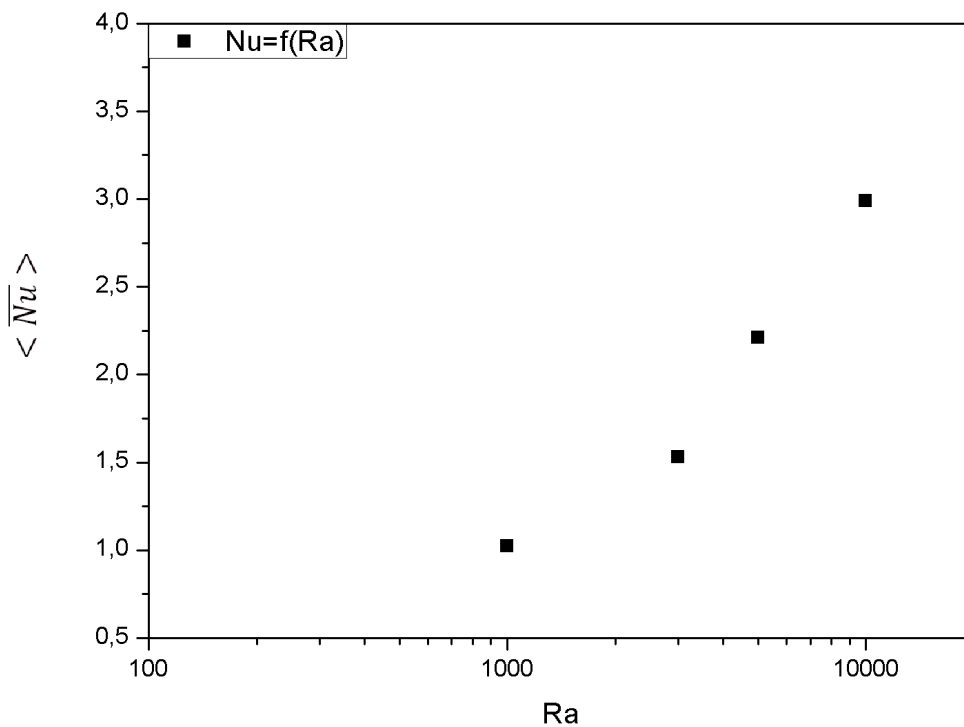
On remarque dans cette courbe que quand le nombre de Reynolds augmente pour un nombre de Rayleigh fixe, Le nombre de Nusselt moyen décroît. Ceci est confirmé par les résultats des travaux de Nicolas [3] dans le cas de l'apparition que les rouleaux transversaux. Ce qui est similaire à notre cas de figure. On remarque aussi que lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand, le nombre de Nusselt décroît et il peut tendre vers la valeur de 1 (ce qui correspondra à la transition vers l'écoulement de Poiseuille).

## 5. L'effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt :

Dans cette partie d'analyse, les caractéristiques physiques de l'écoulement sont :

- $Pe = 20/3$
- Le nombre de Reynolds fixe  $Re=10$ .
- Le nombre de Rayleigh varie et prend les valeurs suivantes : 1000, 3000, 5000,10000.

Les résultats de calcul du nombre de Nusselt moyen max sont présentés dans la figure (Fig. 4.41).



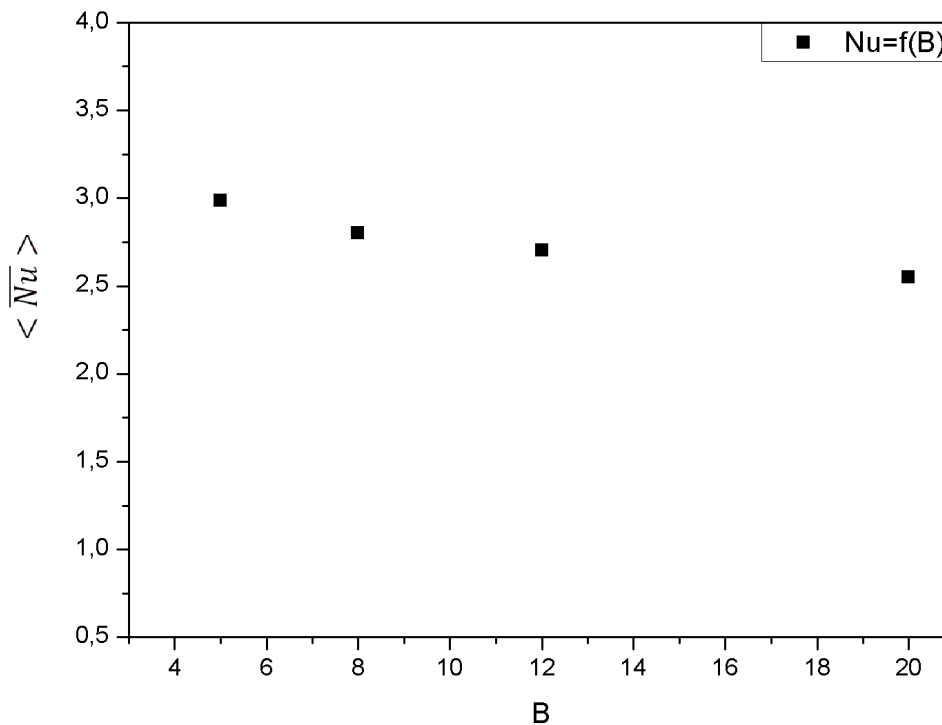
**Fig.4.41** Courbe représentant la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh.

On remarque que le nombre de Nusselt moyen max croit quand le nombre de Rayleigh augmente ce qui explique l'importance du transfert de chaleur entre la paroi chaude et le fluide quand le régime d'écoulement bascule vers un régime où la convection naturelle est prédominante.

## 6. L'effet de l'allongement du domaine géométrique sur le nombre de Nusselt :

Cette analyse concerne l'étude de l'influence de l'allongement du domaine géométrique  $B=L/H$  sur l'écoulement de convection mixte. De ce fait, on a choisis l'écoulement avec les données suivantes :

- Le nombre de Peclet  $Pe=20/3$ .
- Le nombre de Rayleigh  $Ra=10000$ .
- Le nombre de Reynolds  $Re= 10$ .
- L'allongement du domaine  $B$  prend les valeurs 5, 10, 12,20



**Fig.4.42.** Courbe représentant la variation du nombre de Nusselt en fonction de l'allongement.

Les résultats de la simulation sont présentés sur la figure (Fig. 4.50). On remarque bien que la valeur moyenne maximale du nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du domaine d'allongement du canal et cette diminution est plus significative pour  $B \leq 12$  par rapport à  $B > 12$ .

## **7. Conclusion :**

Dans cette dernière partie nous avons présenté tout d'abord une validation du code de calcul utilisé pour la simulation de la convection mixte dans un canal horizontal chauffée par le bas, la comparaison des valeurs obtenus avec ceux trouvées dans la littérature montre qu'ils sont en bon accord avec ces derniers où l'erreur ne dépasse pas 0,92 % . Le reste des résultats de l'analyse du phénomène étudiée a été présenté, en affichant les lignes de courants, les isothermes, la distribution des profils de vitesses le long du canal ont été normalisées et affichées pour différents nombre de Reynolds. Les courbes de températures le long du canal ainsi que des profils de vitesses pris dans différentes sections du canal. L'influence des différents paramètres sur le transfert de chaleur notamment le nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh et l'allongement du domaine a été discuté.

# Conclusion générale

## Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons apporté une contribution numérique à l'étude de la convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas par la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double populations,

Nous avons exposés l'historique de développement de la nouvelle méthode de Boltzmann sur réseau thermique ainsi que les bases théoriques et fondamentales de son application. Suivi de la présentation de l'algorithme du code de calcul qui a été développé et testé durant ce travail sous l'éditeur MATLAB, en appliquant la méthode de Boltzmann sur réseau thermique à double population, avec le modèle D2Q9 pour le champ dynamique et le modèle D2Q5 pour le champ thermique. Ce code a été appliqué pour la simulation de la configuration physique étudiée.

Une validation du code a été faite pour l'appliquer sur le phénomène de convection mixte dans un canal horizontal chauffé par le bas, la comparaison des valeurs obtenus avec ceux trouvés dans la littérature montre qu'ils sont en bon accord avec ces derniers où l'erreur ne dépasse pas 0,92 % .

Le reste des résultats de l'analyse du phénomène étudiée a été présenté dans le but de visualiser les structures thermo convectives de l'écoulement, en affichant les lignes de courants, les isothermes, la distribution des profils de vitesses le long du canal ont été normalisées et affichées pour différents nombre de Reynolds. Les courbes de températures le long du canal ainsi que des profils de vitesses pris dans différentes sections du canal ont été affichées. L'influence des différents paramètres sur le transfert de chaleur notamment le nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh et l'allongement du domaine a été discuté.

Les résultats obtenus dans ce travail ont permis d'évaluer la performance et la capacité du LBM pour reproduire le phénomène de convection mixte dans un canal chauffé par le bas et refroidis par le haut. Le modèle TLBM à double population utilisé, a tous les avantages, y compris une bonne stabilité numérique et la capacité à gérer en général les problèmes de transfert de chaleur par convection

Toutefois, la visualisation de structures convectives telles que les rouleaux longitudinaux, nécessite un code de calcul en trois dimensions. Les Modèles de calcul en 3D de la méthode de Boltzmann sur réseau thermique tels que D3Q19 et D3Q15 nécessitent un temps de calcul relativement long. Il est nécessaire de mener une réflexion pour rechercher le code numérique le plus performant et le plus adapté. Ce travail entre dans les perspectives tracées pour continuer dans cette étude.

# Références bibliographiques

## Références bibliographiques :

- [1] Abbassi, M. magharbi, A. Benbrahim, 2003. Entropy generation in Poiseuille-Bénard channel flow, *International Journal of Thermal Sciences* 42, 1081–1088.
- [2] Abbassi, H., Turki, S., Nasrallah, S., B., 2001. Numerical Investigation of Forced Convection in a Plane Channel with a Built-in Triangular Prism, *International Journal of Thermal Sciences*, 40, 7, pp. 649-658
- [3] X. Nicolas, 2002. Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas, *Internat. J. Thermal Sciences* 41 961–1016.
- [4] Wolfram, S., 1986. Theory and application of Cellular Automata. World Publishing Co.,.
- [5] Frisch, U., B., H., and Pomeau, Y., 1986. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Phys. Rev. Letter* 56(14), 1505-1508.
- [6] Giovanni Gallavotti. Statistical mechanics. Roma, 1999
- [7] H. Bénard, 1900. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Rev. Gén. Sci. Pur. Appl.* 11 1261–1271.
- [8] H. Bénard, 1900. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Rev. Gén. Sci. Pur. Appl.* 11 1309–1328.
- [9] L. Rayleigh, 1916 On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside, *Philos. Mag.* 32 529–546.
- [10] J. R. A. Pearson, 1958. On convection cells induced by surface tension. *Journal of Fluid Mechanics*, 4:489-500.
- [11] M.J. Block, 1956. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid. *Nature*, 178:650-651.
- [12] J. Boussinesq, 1903. Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière, Tome II: Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courant de convection. *Gauthier-Villars*.
- [13] H. Jeffreys, 1926. The stability of a layer of fluid heated from below. *Philosophical Magazine*.

- [14] H. Jeffreys, 1928. Some cases of instability in fluid motion. *Proceedings of the Royal Society of London, Serie A*, pages 195–208.
- [15] D. Martinand, 2003. Détermination analytique des modes globaux tridimensionnels en écoulement de convection mixte du type Rayleigh–Bénard–Poiseuille. *PhD thesis*, Université Lyon I Claude Bernard.
- [16] P. Idrac, 1920. Sur les courants de convection atmosphérique et leur rapport avec le vol à voile et la formation des bandes nuageuses, *CRAS 171* 42–44.
- [17] P. Idrac, 1921. Etudes expérimentales sur le vol à voile, *Thèse de doctorat*, Paris.
- [18] A.C. Philips, Sir G.T. Walker, 1932. The forms of stratified clouds, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 58 23–30.
- [19] A. Graham, 1933. Shear patterns in an unstable layer of air, *Philos. Trans. Roy. Soc. A* 232 285–296.
- [20] D. Brunt, 1951. Experimental cloud formation, in: *Compendium of Meteorology*, American *Meteorological Society*, Boston, pp. 1255–1262.
- [21] Evans, G., Paolucci, S., 1990. The Thermoconvective Instability of Plane Poiseuille Flow Heated from below: A Benchmark Solution for Open Boundary Flow, *International Journal Numerical Method in Fluids*, 11, 7, pp. 1001-1013
- [22] Comini, G., Manzan, M., Cortella, G., 1997. Open Boundary Conditions for the Stream Function of Unsteady Laminar Convection, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 31, 2, pp. 217-234
- [23] K.F. Jensen, E.O. Einset, D.I. Fotiadis, 1991. Flow phenomena in chemical vapor deposition of thin films, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 23 197–233.
- [24] N.K. Ingle, T.J. Mountziaris, 1994. The onset of transverse recirculations during flow of gases in horizontal ducts with differentially heated lower walls, *J. Fluid Mech.* 277 249–269.
- [25] W.K.S. Chiu, C.J. Richards, Y. Jaluria, 2000. Flow structure and heat transfer in a horizontal converging channel heated from below, *Phys. Fluids* 12 2128–2136.
- [26] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, L. Robillard, 1991. Mixed convective heat transfer in a horizontal channel heated periodically from below, *Numer. Heat Transfer A* 20 297–315.

- [27] E. Bilgen, X.Wang, P. Vasseur, F.Meng, L. Robillard, 1995. On the periodic conditions to simulate mixed convection heat transfer in horizontal channels, *Numer. Heat Transfer A* 27 461–472.
- [28] Nourollahi, M., et al., **2010**. Numerical Study of Mixed Convection and Entropy Generation in different angles. *THERMAL SCIENCE* Vol. 14, No. 2, pp. 329-340
- [29] Boltzmann, Ludwig, 1878. Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-molekülen. *Wien. Ber.* 66 , 275\_370.
- [30] Chapman, S. and Cowling, T.G. 1991. The Mathematical theory of Non- Uniform gases. *Cambridge,3rd edition*.
- [31] Enskog, 1917. D. Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen. *PhD thesis,Uppsala*.
- [32] Bhatnagar, P., Gross, E., and Krook, M., 1954. A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component systems. *Phys.Rev.* 94(3) , 511\_525.
- [33] von Neumann, J. The theory of self-reproducing Automata. *University of Illinois Press*,
- [34] Broadwell, J, 1964. Study of rarified shear flow by the discrete velocity method. *Journal of Fluid Mechanics* 19 , 401\_414.1966.
- [35] Gatignol, R, 1975. Théorie cinétique des gaz à répartition discrète des vitesses, *vol. 36. Springer*, Berlin.
- [36] Hardy, J., Pomeau, Y., and de Pazzis, O, 1973. Time evolution of twodimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions. *J. Math. Phys.* 14(12) ,1746\_1759.
- [37] d'Humièrè, D., Lallemand, P., and Frisch, U, 1986. Lattice gas models for 3D hydrodynamics. *Europhys. Letter* 2(4), 291\_297.
- [38] Frisch, U., d'Humièrè, D., Hasslacher, B., Lallemand, P., Pomeau, Y., and Rivet., J. 1987. Lattice-gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex System* 1 , 649\_707.
- [39] McNamara, G. and Zanetti, G, 1988. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas Automata. *Phys. Rev. Lett.* 61, 2332\_2335.

- [40] Higuera, F. and Jimenez, J, 1989. Boltzmann approach to lattice-gas simulations. *Europhys. Lett.* 9(7), 663\_668.
- [41] Chen, H. and Matthaeus, 1992. W.H. Recovery of Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. *Phys.Rev.A* 45 , R5339\_42.
- [42] Qian, Y.-H., d'Humières, D., and Lallemand, P, 1992. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys.Lett.* 17 , 479\_484.
- [43] He, X. and Luo, L.S, 1997. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E* 55, R6333.
- [44] Thürey, N., Rude, U., and Stamminger, M, 2006. Animation of Open Water phenomena with coupled Shallow water and free surface simulations. *In Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer animation .*
- [45] Zhong, L., Feng, S., Dong, P., and Gao, S, 2006 Lattice Boltzmann schemes for the nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. E*. 74, 036704.
- [46] Boltzmann, Ludwig, 1878. Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-molekülen. *Wien. Ber.* 66 , 275\_370.
- [47] Cercignani, C. Theory and application of the Boltzmann Equation. *Elsevier*,
- [48] U. Frisch, B. Hasslacher & Y. Pomeau, 1986. Lattice Gaz automata for the Navier Stokes equation, *Phys. Rev. Lett.* 56 pp. 1505-1508.
- [49] Li-Shi Luo, 1993. Lattice-Gaz Automata and Lattice Boltzmann Equations for two-dimensional Hydrodynamics. *Phd Thesis*, Georgia Tech .
- [50] Q. Zou and X. He, 1997. "On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model," *Physics of Fluids*, vol. 9, no. 6, pp. 1591–1596.
- [51] Guy McNamara, Berni Alder, 1993. Analysis of the lattice Boltzmann treatment of hydrodynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 194, Issues 1–4, 15, Pages 218-228.
- [52] X. He, S. Chen, G. D. Doolen, 1998. A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit, *Journal of Computational Physics*, vol. 146, pp.282-300.