

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES  
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par  
Université de Mostaganem  
Spécialité "Analyse Fonctionnelle"  
*Présenté par :*  
Mortada Charaf-Eddine DJILALI

**Application du Théorème de Kato :  
Semi-Groupes Analytiques Générés par un  
Processus de Dispersion Dans deux Habitats Incorporant le  
Comportement Individuel à L'interface**

*Soutenu publiquement le 11 juin 2025 devant le jury composé de :*

|                    |                    |     |                          |
|--------------------|--------------------|-----|--------------------------|
| <b>Président :</b> | Berrabah BENDOUKHA | Pr  | Université de Mostaganem |
| <b>Examineur :</b> | Maamar ANDASMAS    | MCA | Université de Mostaganem |
| <b>Encadreur :</b> | Abdallah MENAD     | MCA | Université de Mostaganem |

Année Universitaire : 2024 / 2025

M  
A  
S  
T  
E  
R

# Table des Matières

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Introduction</b>                                              | iv |
| <b>Chapitre -1 Notions et rappels</b>                            |    |
| 1.1 Opérateurs linéaires fermés                                  | 1  |
| 1.2 Les semi-groupes                                             | 2  |
| 1.2.1 Semi-groupes analytiques                                   | 2  |
| 1.3 Les espaces d'interpolation                                  | 3  |
| 1.4 Les espaces de Hölder                                        | 4  |
| <b>Chapitre -2 Lemmes techniques</b>                             |    |
| 2.1 Lemmes techniques                                            | 5  |
| 2.2 Calcul fonctionnel                                           | 12 |
| 2.2.1 Opérateurs sectoriels                                      | 12 |
| 2.3 Théorème Conditions nécessaires                              | 14 |
| 2.4 Théorème de Kato                                             | 16 |
| <b>Chapitre -3 Représentation de la solution</b>                 |    |
| 3.1 Opérateur $\mathcal{L}$ et son équation résolvante           | 23 |
| 3.2 Formulation opérationnelle de $\mathcal{L}u - \lambda u = g$ | 25 |
| 3.3 Résolution du problème opérationnel $(P_A)$                  | 27 |
| 3.4 Inversibilité de $\Delta_{\lambda, p_-, p_+}$                | 33 |
| 3.5 Retour à l'équation spectrale                                | 36 |
| 3.6 La discontinuité de la densité                               | 38 |
| <b>Chapitre -4 Estimation de l'opérateur résolvant</b>           |    |
| 4.1 Estimation de la norme $\ u_-\ _\infty$                      | 40 |
| 4.2 Estimation de la semi-norme $[u_-]_\theta$                   | 42 |
| 4.3 Estimation de la semi-norme $[u_+]_\theta$                   | 46 |
| <b>Bibliographie</b>                                             | 49 |

## Résumé

Dans ce mémoire, on étudie un système d'équations différentielles elliptiques défini dans deux habitats et qui modélise le problème de dispersion de la dynamique de population dans le cas linéaire stationnaire incluant des comportements individuels à l'interface. On prouve que cet opérateur génère un semi-groupe analytique dans un espace adapté de fonctions höldériennes continues.

## Remerciments

Je tiens à remercier mes honorables professeurs :  
Mr Menad Abdallah d'avoir encadré ce mémoire, Mr  
Berrabah Bendoukha d'avoir présidé ce jury, et Mr  
Andasmas Maamar qui a accepté d'examiner ce travail.  
Sans oublier toutes les professeurs qui m'ont enseigné  
tout au long de mon parcours universitaire.

Je remercie ma mère et mon père pour tous les efforts  
déployés pour atteindre mes objectifs ,et je n'oublie pas  
ma sœur, amis et collègues, et je leur souhaite du succès  
dans leur carrière professionnelle.

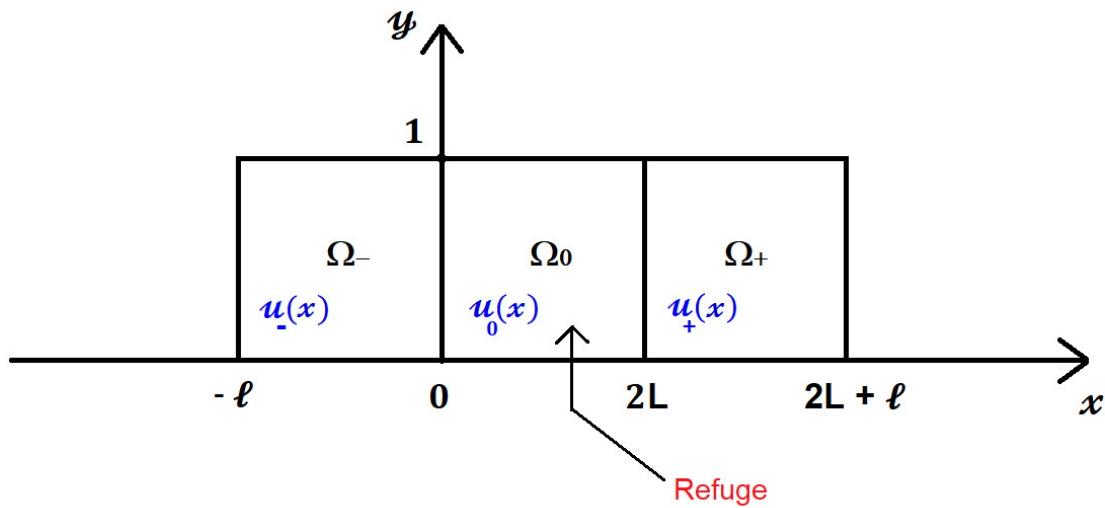
# Introduction

L'objectif de mon travail est de faire une synthèse de l'article :

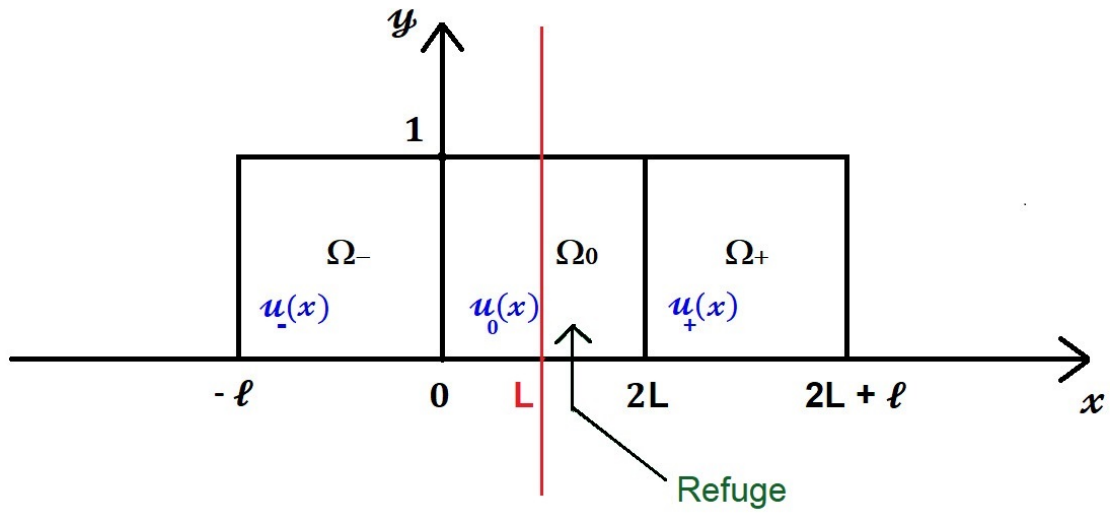
A.Favini, R. Labbas, A.Medeghri, A.Menad : *Analytic semigroups generated by the dispersal process in two habitats incorporating individual behavior at the interface*, J. Math. Anal. Appl. 471 (2019) 448–480.

Dans le papier de Cantrell, R.S., et Cosner, C.[2], les auteurs ont trouvé une étude intéressante d'un modèle de diffusion pour la dynamique des populations avec dispersion, intégrant le comportement individuel aux frontières. Cette étude a été détaillée en une seule dimension spatiale.

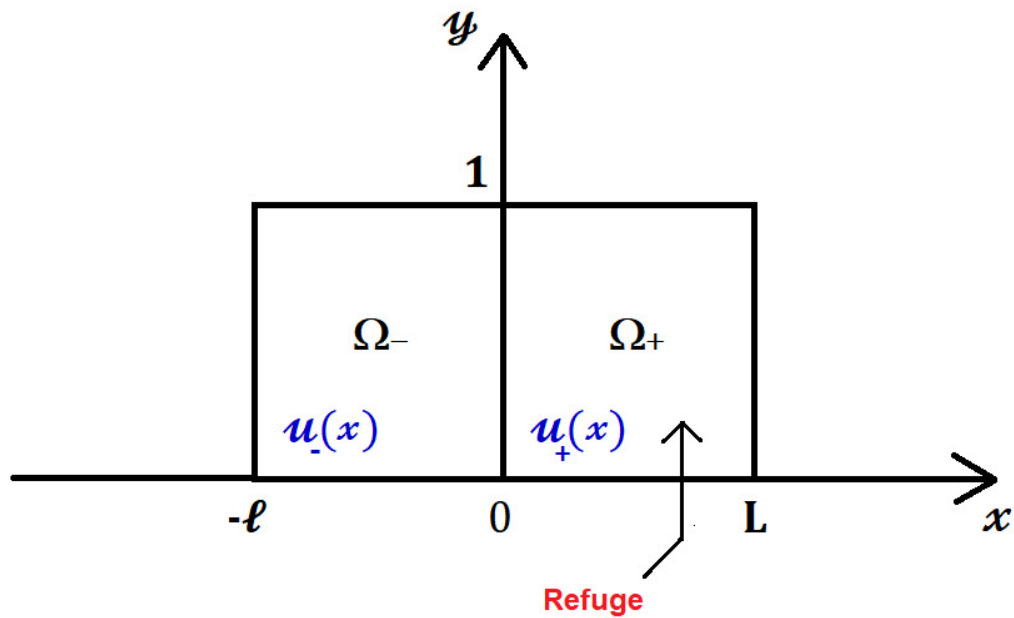
Dans [11], les auteurs ont étudié un problème similaire, mais sans paramètre spectral et avec une condition de transmission différente. Ce travail a été réalisé dans trois habitats :



Nous nous intéressons à étudier le problème précédent avec un paramètre spectrale car les habitats qui définissent ce dernier sont symétriques par rapport à l'axe  $x = L$ .



Notre but dans ce travail est d'analyser la situation dans un espace bidimensionnel (dimension 2), plus précisément, on s'intéresse à l'étude de l'analyticité du  $C_0$ -semi-groupe généré par le processus de dispersion dans deux habitats, sous la condition de discontinuité de flux avec la condition de la continuité de dispartin à l'interface, qui représente le comportement des individus aux frontières. Ces problèmes sont basés sur des équations aux dérivées partielles de type parabolique, définies dans le paysage suivant, constitué de deux habitats différents :



$$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+,$$

où

$$\begin{cases} \Omega_- = ]-\ell, 0[ \times ]0, 1[ \\ \Omega_+ = ]0, L[ \times ]0, 1[ \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\ell, L > 0$ . L'équation de diffusion est donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \begin{cases} d_- \Delta u_-(t, x, y) + F_-(u_-(t, x, y)) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_- \\ d_+ \Delta u_+(t, x, y) + F_+(u_+(t, x, y)) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_+, \end{cases} \quad (2)$$

où,  $F$  est la fonction logistique, généralement non linéaire,

$$F(u) = ru \left( 1 - \frac{u}{k} \right),$$

sous la condition initiale

$$u(0, x, y) = \begin{cases} \varphi_-(x, y), & \text{dans } \Omega_- \\ \varphi_+(x, y), & \text{dans } \Omega_+, \end{cases} \quad (3)$$

les conditions aux bords sont

$$\begin{cases} u_-(t, -\ell, y) = f_-(t, y), & y \in ]0, 1[ \\ u_-(t, x, 0) = u_-(t, x, 1) = 0, & x \in ]-\ell, 0[ \\ u_+(t, x, 0) = u_+(t, x, 1) = 0, & y \in ]0, 1[ \\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, L, y) = f_+(t, y), & y \in ]0, 1[, \end{cases} \quad (4)$$

avec la condition de continuité de la dispersion à l'interface  $\Gamma_0 = \{0\} \times ]0, 1[$ ,

$$\begin{cases} d_- \Delta u_-(t, 0, y) + F_-(u_-(t, 0, y)) = d_+ \Delta u_+(t, 0, y) + F_+(u_+(t, 0, y)), \\ y \in ]0, 1[, \end{cases} \quad (5)$$

et la discontinuité du flux à  $\Gamma_0$

$$(1-p)d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(t, 0, y) = pd_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, 0, y), \quad y \in ]0, 1[. \quad (6)$$

Nous avons utilisé les notations suivantes

$$u_- = u|_{\Omega_-}, \quad u_+ = u|_{\Omega_+}.$$

La condition (5) est différente de celle considérée dans [11]. Ici,  $u(t, x, y)$  représente une densité de population,  $\Omega_+$  est la zone refuge, tandis que  $\Omega_-$  est la zone tampon avec leurs

coefficients de diffusion respectifs  $d_+$  et  $d_-$ . Les équations (2) définissent les différentes diffusions dans les habitats avec leurs fonctions logistique de croissance ou de déclin  $F_-$  et  $F_+$ . Les conditions aux bords (4) signifient que les individus meurent lorsqu'ils atteignent les autres parties des frontières  $\{-\ell, L\} \times \{0, 1\}$ , ce qui implique que notre domaine est entouré d'un habitat hostile. Comme spécifié dans [2], les conditions (5) sont essentielles dans ce travail et expriment le fait que le processus de dispersion ne permet pas aux individus de rester fixés en un point donné et n'autorise aucune barrière infranchissable à la dispersion. Il est donc primordial de considérer qu'il y a une continuité dans tout le domaine. Enfin, la condition à l'interface dans (6) est basée sur un mouvement brownien caractérisé par le paramètre  $p \in ]0, 1[$ , qui représente la probabilité qu'un individu situé à l'interface se déplace vers le refuge  $\Omega_+$ . Bien sûr, lorsque  $p = \frac{1}{2}$ , la continuité du flux aura lieu. La condition (6) est justifiée par le fait que le temps local du processus lorsque  $p \neq \frac{1}{2}$  est discontinu, voir par exemple Otso Ovaskainen et Stephen J. Cornell dans [14]. Notons également que, lorsque nous considérons différents types d'habitats, la réponse des individus à l'interface est importante pour le comportement global du mouvement. Les auteurs concentreront sur l'étude du problème stationnaire linéaire en prenant :

$$\begin{cases} F_-(u_-) = -r_-u_- & \text{sur } ]-\ell, 0[ \times ]0, 1[ \\ F_+(u_+) = r_+u_+ & \text{sur } ]0, L[ \times ]0, 1[ \end{cases}$$

où  $r_+$  est le taux de croissance à l'intérieur du refuge  $\Omega_+$  et  $r_-$  est le taux de mortalité dans la zone tampon  $\Omega_-$ .

Le résultat obtenu dans ce travail est donné par le théorème :

**Théorème :** L'opérateur de dispersion  $\mathcal{L}$  défini dans (3.7) sur les deux habitats ci-dessous génère un semi-groupe analytique (pas nécessairement continu en 0).

Ce mémoire est organisé comme suit :

**Le premier chapitre** est consacré à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce mémoire.

**Le deuxième chapitre** est destiné à rappeler certains lemmes techniques qui seront utilisés par la suites. .

**Au troisième chapitre**, on donne la représentation de la solution du notre problème, ainsi que l'étude de l'inversibilité du déterminant du système en utilisant le calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels et quelques inégalités d'analyse complexe.

**Dans le dernier chapitre**, on étudie les estimations de la solution à l'aide des lemmes techniques qui sont basés sur les espaces d'interpolations et les résultats de Sinestrari.

# 1

## Notions et rappels

---

### 1.1 Opérateurs linéaires fermés

**Définition 1.1.** On rappelle que  $A$  est un opérateur linéaire sur un espace de Banach  $X$  si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel  $D(A)$  (domaine de définition de  $A$ ) de  $X$  à valeurs dans  $X$ . Alors :

1.  $A$  est dit borné si

$$D(A) = X \text{ et } \exists C > 0 \text{ tel que } \|A\xi\| \leq C\|\xi\|_X, \forall \xi \in X$$

et on écrit  $A \in L(X)$ .

2.  $A$  est dit fermé si et seulement si son graphe est fermé, i.e., pour toute suite  $(x_n)_n \subset D(A)$  telle que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x, \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D(A), \\ Ax = y. \end{cases}$$

3.  $A$  est dit fermable si et seulement s'il admet une extension fermée, ce qui équivaut à dire que pour toute suite  $(x_n)_n \subset D(A)$  telle que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0, \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

Les convergences des suites  $x_n$  et  $Ax_n$  sont au sens de la norme de l'espace  $X$ .

**Définition 1.2.** Soit  $X$  un espace de Banach complexe, muni de la norme  $\|\cdot\|_X$ . On appelle :

- **Ensemble résolvant de  $A$** , noté  $\rho(A)$ , est défini dans  $\mathbb{C}$  par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } L(X)\}.$$

- **Résolvante de  $A$** , noté  $R_\lambda(A)$ , est définie par  $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$  pour  $\lambda \in \rho(A)$ .
- **Spectre de  $A$**  est le complémentaire de  $\rho(A)$ .

## 1.2 Les semi-groupes

**Définition 1.3.** On appelle semi-groupe fortement continu (ou vérifiant la  $c_0$ -condition), une application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow L(X) \\ t \mapsto G(t), \end{cases}$$

telle que :

- (a)  $G(0) = I$
- (b)  $G(t+s) = G(t)G(s), \quad \forall t, s \geq 0$
- (c)  $\forall \varphi \in X$  l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow X \\ t \mapsto G(t)\varphi, \end{cases}$$

est fortement continue en 0,

$$\forall \varphi \in X, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)\varphi - \varphi\|_X = 0.$$

**Remarque 1.1.** 1. Si  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(G(t))$  est dit groupe.

2. La condition (c) n'implique pas que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t) - I\|_{L(X)} = 0.$$

**Définition 1.4.** On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe  $(G(t))$ , l'opérateur linéaire non borné  $A$  défini par

$$\begin{cases} D_A = \left\{ \varphi \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } X \right\} \\ \forall \varphi \in D_A, \quad A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}. \end{cases}$$

### 1.2.1 Semi-groupes analytiques

**Définition 1.5.** Soit  $X$  un espace de Banach complexe. Soit le secteur

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2 \text{ et } \theta_1 < 0 < \theta_2\},$$

soit  $\{G(z)\}_{z \in \Sigma}$  une famille d'opérateurs linéaires bornés sur  $X$ . On dit que  $\{G(z)\}_{z \in \Sigma}$  forme un semi-groupe holomorphe, si elle vérifie :

- 1.  $G(0) = I$ .
- 2.  $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$ , pour tout  $z_1, z_2 \in \Sigma$ .
- 3.  $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma} G(z)\varphi = \varphi$ , pour  $\varphi \in X$ .
- 4. L'application  $z \in \Sigma \setminus \{0\} \mapsto G(z)\varphi \in X$  est holomorphe  $\forall \varphi \in X$ .

### 1.3 Les espaces d'interpolation

**Définition 1.6.** Soit  $X$  un espace de Banach, on désigne par  $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$  avec  $p \in [1, +\infty[$ , l'espace de Banach des fonctions  $f$  fortement mesurables définies pour presque tout  $t \in \mathbb{R}^+$  et telles que

$$\left( \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X)} < +\infty.$$

Si  $p = +\infty$ , on définit l'espace  $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$  par

$$f \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \iff \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X \text{ est fortement mesurable et} \\ \sup_{0 < t < \infty} \|f(t)\|_X < +\infty. \end{cases}$$

**Définition 1.7.** Soient  $(X_0, \|\cdot\|_0)$  et  $(X_1, \|\cdot\|_1)$  deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé  $E$ .

Pour  $p \in [1, +\infty[$ , et  $\theta \in ]0, 1[$ , on dit que  $x \in (X_0, X_1)_{\theta, p}$  si et seulement si

1.  $\forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 : x = u_0(t) + u_1(t).$
2.  $t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1).$

**Proposition 1.1.** Soient  $(X_0 \cap X_1, \|\cdot\|_{X_0 \cap X_1})$ ,  $(X_0 + X_1, \|\cdot\|_{X_0 + X_1})$  et  $((X_0, X_1)_{\theta, p}, \|\cdot\|_{\theta, p})$  des espaces de Banach pour les normes respectives

$$\begin{aligned} \|x\|_{X_0 \cap X_1} &= \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} \text{ si } x \in X_0 \cap X_1, \\ \|x\|_{X_0 + X_1} &= \inf_{\substack{x_i \in X_i, i=0,1 \\ x = x_0 + x_1}} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}) \text{ si } x \in X_0 + X_1, \\ \|x\|_{\theta, p} &= \inf_{\substack{u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow X_i, i=0,1 \\ \forall t > 0, u_0(t) + u_1(t) = x}} \left( \|t^{-\theta} u_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0)} + \|t^{1-\theta} u_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1)} \right) \text{ si } x \in (X_0, X_1)_{\theta, p}. \end{aligned}$$

alors

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta, p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

**Notation 1.1.**

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_1, X_0)_{1-\theta, p}.$$

**Notation 1.2.** Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A) \subset X$  muni de la norme,

$$\forall x \in D(A) : \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X,$$

alors on note

$$D_A(\theta, p) = (D_A, X)_{1-\theta, p} \text{ pour } p \in [1, +\infty] \text{ et } 0 < \theta < 1.$$

Grâce à la propriété de réitération, on a :

$$D_A(m\theta, p) = D_{A^m}(\theta, p),$$

où  $m$  entier  $\geq 1$ ,  $p \in [1, +\infty]$ ,  $\theta \in ]0, 1[$  (voir [4]), cas particulier  $m = 2$ , on a

$$D_A(2\theta, p) = D_{A^2}(\theta, p).$$

## 1.4 Les espaces de Hölder

**Définition 1.8.** Soient  $E$  un espace de Banach complexe et  $C([0, 1], E)$  l'espace de Banach des fonctions continues de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $E$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{C([0,1],E)} = \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_E.$$

Pour  $0 < \theta < 1$ , l'espace de Hölder des fonctions continues, notés  $C^\theta([0, 1], E)$ , est défini par

$$C^\theta([0, 1], E) = \left\{ f \in C([0, 1], E), \sup_{t-s \neq 0} \frac{\|f(t) - f(s)\|_E}{|t - s|^\theta} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{t-s \neq 0} \frac{\|f(t) - f(s)\|_E}{|t - s|^\theta}.$$

# 2

## Lemmes techniques

---

Dans ce chapitre on donne quelques lemmes techniques utilisés pour ce travail.

### 2.1 Lemmes techniques

**Lemme 2.1.** Soient  $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , on a :

$$|w + z| \geq (|w| + |z|) \left| \cos \left( \frac{\arg w - \arg z}{2} \right) \right|.$$

**Preuve 2.1.** On pose

$$\begin{cases} \alpha = \arg w \\ \beta = \arg z, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} w = |w|e^{i\alpha} \\ z = |z|e^{i\beta}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |w + z|^2 &= ||w|e^{i\alpha} + |z|e^{i\beta}|^2 \\ &= ||w| \cos \alpha + i|w| \sin \alpha + |z| \cos \beta + i|z| \sin \beta|^2 \\ &= |(|w| \cos \alpha + |z| \cos \beta) + i(|w| \sin \alpha + |z| \sin \beta)|^2 \\ &= (|w| \cos \alpha + |z| \cos \beta)^2 + (|w| \sin \alpha + |z| \sin \beta)^2 \\ &= |w|^2 \cos^2 \alpha + |z|^2 \cos^2 \beta + 2|w||z| \cos \alpha \cos \beta + |w|^2 \sin^2 \alpha + |z|^2 \sin^2 \beta + 2|w||z| \sin \alpha \sin \beta \\ &= |w|^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + |z|^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + 2|w||z| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta), \quad \text{car } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \end{aligned}$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right),\end{aligned}$$

car, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

alors

$$|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z| \left( \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right),$$

et comme

$$\cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 1,$$

alors

$$\begin{aligned}|w + z|^2 &= (|w|^2 + |z|^2) \left( \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) + 2|w||z| \left( \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) \\ &= (|w|^2 + |z|^2 + 2|w||z|) \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + (|w|^2 + |z|^2 - 2|w||z|) \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= (|w| + |z|)^2 \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + (|w| - |z|)^2 \sin^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &\geq (|w| + |z|)^2 \cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right),\end{aligned}$$

d'où

$$|w| + |z| \geq (|w| + |z|) \cos \left| \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right|.$$

Finalement

$$|w| + |z| \geq (|w| + |z|) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

**Lemme 2.2.** Soient  $\eta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$  et  $z \in S_\eta$ , avec

$$S_\eta = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |arg z| < \eta \quad \text{si } \eta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

alors on a

1.  $|\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z})| < \eta$ .
2.  $|1 + e^{-z}| \geq C_\eta = 1 - \exp \left( \frac{-\pi}{2 \tan \eta} \right) > 0$ .
3.  $\frac{|z| \cos \eta}{1 + |z| \cos \eta} \leq |1 - e^{-z}| \leq \frac{2|z|}{1 + |z| \cos \eta}$ .

**Preuve 2.2.** Soient  $\eta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $z \in S_\eta$ , on pose  $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ .

1.

$$\begin{aligned} 1 - e^{-z} &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z} = 1 - e^{-\operatorname{Re} z} e^{-i \operatorname{Im} z} \\ &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) - i \sin(\operatorname{Im} z)) \\ &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) + i e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z). \end{aligned}$$

Si

$$z = x + iy, \quad x > 0, \quad \text{alors}$$

$$\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si  $z \in S_\eta$ , on obtient

$$|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} < 1.$$

Donc

$$\arg(1 - e^{-z}) = \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right),$$

car  $1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) > 0$ . En utilisant la même méthode, on obtient

$$\begin{aligned} \arg(1 + e^{-z}) &= \arg(1 + e^{-\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z}) \\ &= \arg(1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) - i e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)) \\ &= \arctan\left(\frac{-e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right), \end{aligned}$$

car la fonction  $\arctan$  est impaire.

Donc

$$\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) = \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right) + \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right).$$

**Remarque 2.1.** On a l'égalité suivante

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right) \quad \text{si } ab < 1.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)} \cdot \frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)} &= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z} \sin^2(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z)} \\ &= e^{-2\operatorname{Re} z} \frac{1 - \cos^2(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z)} < 1, \end{aligned}$$

car

$$e^{-2\operatorname{Re} z} < 1 \Rightarrow e^{-2\operatorname{Re} z} - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z) < 1 - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z).$$

Alors

$$\begin{aligned} \arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) &= \arctan\left(\frac{2e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-2\operatorname{Re} z}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)}\right), \end{aligned}$$

car

$$\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Et comme  $z \in S_\eta$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $\sin \theta \leq \theta$  et  $\sinh \theta \geq \theta$  pour  $\theta \geq 0$ , on a

$$\left| \frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)} \right| \leq \frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Re} z|} = \frac{|\operatorname{Im} z|}{\operatorname{Re} z} < \tan \eta, \quad (\text{d'après Remarque 2.2}).$$

Alors

$$\left| \arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) \right| < \eta.$$

2.

$$\begin{aligned} |1 + e^{-z}|^2 &= |1 + e^{-\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z}|^2 \\ &= |1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) - ie^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)|^2 \\ &= (1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z))^2 + e^{-2\operatorname{Re} z} \sin^2(\operatorname{Im} z) \\ &= 1 + 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) + e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z) + e^{-2\operatorname{Re} z} \sin^2(\operatorname{Im} z) \\ &= 1 + 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) + e^{-2\operatorname{Re} z} (\cos^2(\operatorname{Im} z) + \sin^2(\operatorname{Im} z)) \\ &= 1 + 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) + e^{-2\operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

**1<sup>ère</sup> cas :** si  $\operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2 \tan \eta}$ , alors

$$|\operatorname{Im} z| \leq \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\cos(\operatorname{Im} z) \geq 0$$

d'où

$$|1 + e^{-z}|^2 \geq 1.$$

2<sup>ème</sup> cas : si  $\operatorname{Re} z \geq \frac{\pi}{2 \tan \eta}$ , alors

$$\begin{aligned} |1 + e^{-z}|^2 &= 1 + 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) + e^{-2\operatorname{Re} z} \\ &\geq 1 - 2e^{-\operatorname{Re} z} + e^{-2\operatorname{Re} z} \\ &= (1 - e^{-\operatorname{Re} z})^2 \\ &\geq \left(1 - \exp\left(\frac{-\pi}{2 \tan \eta}\right)\right)^2, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{Im} z) &\geq -1 \Rightarrow 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) \geq -2e^{-\operatorname{Re} z} \\ &\Rightarrow 1 + 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) \geq 1 - 2e^{-\operatorname{Re} z} \\ &\Rightarrow 1 + 2e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) + e^{-2\operatorname{Re} z} \geq 1 - 2e^{-\operatorname{Re} z} + e^{-2\operatorname{Re} z}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z \geq \frac{\pi}{2 \tan \eta} &\Rightarrow -\operatorname{Re} z \leq -\frac{\pi}{2 \tan \eta} \\ &\Rightarrow \exp(-\operatorname{Re} z) \leq \exp\left(\frac{-\pi}{2 \tan \eta}\right) \\ &\Rightarrow -\exp(-\operatorname{Re} z) \geq -\exp\left(\frac{-\pi}{2 \tan \eta}\right) \\ &\Rightarrow 1 - \exp(-\operatorname{Re} z) \geq 1 - \exp\left(\frac{-\pi}{2 \tan \eta}\right) \\ &\Rightarrow (1 - \exp(-\operatorname{Re} z))^2 \geq \left(1 - \exp\left(\frac{-\pi}{2 \tan \eta}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Donc : pour  $\eta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $z \in S_\eta$ , on a

$$|1 + e^{-z}| \geq \left(1 - \exp\left(\frac{-\pi}{2 \tan \eta}\right)\right).$$

3. On a,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $e^x \geq 1 + x$ , alors :

$$\begin{aligned} e^x \geq 1 + x &\Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{1 + x} \\ &\Rightarrow 1 - e^{-x} \geq 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x} \end{aligned}$$

Donc : pour  $z \in S_\eta$ , on a  $\operatorname{Re} z > 0$  et  $|e^{-z}| < 1$

$$\begin{aligned} |1 - e^{-z}| &\geq |1 - |e^{-z}|| \\ &= |1 - e^{-\operatorname{Re} z}| \\ &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z} \\ &\geq \frac{\operatorname{Re} z}{1 + \operatorname{Re} z}, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z)^2} \\ &\leq \sqrt{\tan^2 \eta (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 (1 + \tan^2 \eta)} \\ &= \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{\cos^2 \eta}}, \quad \text{car } 1 + \tan^2 \eta = \frac{1}{\cos^2 \eta} \\ &= \frac{\operatorname{Re} z}{\cos \eta}, \quad \text{car } \eta < \frac{\pi}{2}, \text{ alors } \cos \eta > 0. \end{aligned}$$

D'où

$$|1 - e^{-z}| \geq \frac{|z| \cos \eta}{1 + |z| \cos \eta}. \quad (2.1)$$

D'autre part, pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a :

$$e^{-x} \geq \max\{1 - x, 0\} \geq \frac{1 - x}{1 + x},$$

car :

$$\begin{cases} e^{-x} \geq 1 - x \\ e^{-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow e^{-x} \geq \max\{1 - x, 0\},$$

et comme :

$$\max\{1 - x, 0\} = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

et

$$\frac{1 - x}{1 + x} \leq \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

alors

$$\max\{1 - x, 0\} \geq \frac{1 - x}{1 + x},$$

donc

$$e^{-x} \geq \frac{1 - x}{1 + x},$$

alors

$$1 - e^{-x} \leq 1 - \frac{1 - x}{1 + x} = \frac{2x}{1 + x}. \quad (2.2)$$

Pour  $z \in S_\eta$  :

$$|1 - e^{-z}| = \left| \int_{\Gamma_z} e^{-w} dw \right|,$$

avec :  $\Gamma_z$  est un segment dans le plan complexe qui relie 0 à  $z$ , donc

$$\begin{aligned} |1 - e^{-z}| &= \left| \int_{\Gamma_z} e^{-w} dw \right| \\ &\leq \int_0^1 e^{-t \operatorname{Re} z} |z| dt, \quad \text{on pose } w = tz \\ &= (1 - e^{-t \operatorname{Re} z}) \frac{|z|}{\operatorname{Re} z} \\ &\leq \frac{2|z|}{1 + |z| \cos \eta}, \quad \text{d'après (2.2),} \end{aligned}$$

alors

$$|1 - e^{-z}| \leq \frac{2|z|}{1 + |z| \cos \eta}. \quad (2.3)$$

De (2.1) et (2.3), on obtient :

$$\frac{|z| \cos \eta}{1 + |z| \cos \eta} \leq |1 - e^{-z}| \leq \frac{2|z|}{1 + |z| \cos \eta}.$$

**Lemme 2.3.** Il existe une constante  $C_{\theta_0} > 0$  telle que pour tout  $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$ , on a :

$$|1 + e^{-\sqrt{-z}}| \geq C_{\theta_0} = \min \left( 1 - e^{-\frac{-\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}}, 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})} \right) > 0.$$

**Preuve 2.3.** Soit  $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$  avec  $|z| = r_0$  (on rappelle que  $r_0$  est assez petit), on a

$$\begin{aligned} |1 + e^{-\sqrt{-z}}| &\geq 1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} = 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos \nu} \\ &\geq 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \nu \in \left[ -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right].$$

Pour  $z \in \Sigma_{r_0, \theta_0}$  avec  $|z| > r_0$ , on a

$$\begin{aligned} |1 + e^{-\sqrt{-z}}|^2 &= \left| 1 + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} - i \operatorname{Im} \sqrt{-z}} \right|^2 \\ &= \left| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left( e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + e^{-i \operatorname{Im} \sqrt{-z}} \right) \right|^2 \\ &= e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left( e^{2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 2 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) + 1 \right) \\ &= \left( e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1 \right) + 2 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}). \end{aligned}$$

Maintenant, si  $\operatorname{Re} \sqrt{-z} \leq \frac{\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}$ , alors

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| \leq \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right) \leq \frac{\pi}{2},$$

ainsi

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \geq 0,$$

donc

$$|1 + e^{-\sqrt{-z}}| \geq 1.$$

$$\text{Si } \operatorname{Re} \sqrt{-z} \geq \frac{\pi}{2 \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right)}, \text{ on a}$$

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| = \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right) \geq \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \leq 0,$$

et donc

$$|1 + e^{-\sqrt{-z}}|^2 \geq e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1 - 2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} = (1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}})^2 \geq \left( 1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right)}} \right)^2.$$

## 2.2 Calcul fonctionnel

### 2.2.1 Opérateurs sectoriels

Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé sur  $X$ , vérifiant les propriétés suivantes, il existe  $\theta \in [0, \pi[$  tels que  $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\theta}$

$$S_\theta = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0, |\arg z| < \theta\} & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ (0, \infty) & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

et pour tout  $\alpha \in ]\theta, \pi[$  :

$$\sup_{w \in \mathbb{C} \setminus S_\alpha} \|w(wI - A)^{-1}\| < +\infty$$

(on dit que  $A$  est un opérateur sectoriel avec angle spectral  $\theta$ ) (voir [10] p 17). On remarque que si  $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(A)$  et  $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda \|(\lambda I + A)^{-1}\| < +\infty$ , alors  $A$  est sectoriel (voir [7] ; lemme 6.4.1).

**Remarque 2.2.** Soit  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

$$z \in S_\alpha \Leftrightarrow 0 \leq \frac{|\operatorname{Im} z|}{\operatorname{Re} z} < \tan \alpha.$$

**Définition 2.1.** Pour  $\varphi \in ]0, \pi[$

—  $H(S_\varphi)$  : l'espace des fonctions holomorphes de  $S_\varphi$  dans  $\mathbb{C}$ .

- $H^\infty(S_\varphi) = \{f \in H(S_\varphi) : \sup_{z \in S_\varphi} |f(z)| < \infty\}$ .
- $H_0^\infty(S_\varphi) = \{f \in H(S_\varphi) : \exists s \in \mathbb{R}^+, \sup_{z \in S_\varphi} \max(|z|^s, |z|^{-s}) |f(z)| < \infty\}$ .
- $H_p(S_\varphi) = \{f \in H(S_\varphi) : \exists s \in \mathbb{R}^+, \sup_{z \in S_\varphi} \min(|z|^s, |z|^{-s}) |f(z)| < \infty\}$ .

**Remarque 2.3.**

$$H_0^\infty(S_\varphi) \subseteq H^\infty(S_\varphi) \subseteq H_p(S_\varphi) \subseteq H(S_\varphi),$$

et  $H^\infty(S_\varphi)$  est un espace de Banach muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{z \in S_\varphi} |f(z)|$ .

**Définition 2.2.** Soit  $A$  un opérateur sectoriel, injectif et  $\overline{\text{Im}(A)} = X$ , alors pour  $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$ , on définit l'opérateur linéaire borné  $f(A)$

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_\alpha} f(z)(zI - A)^{-1} dz.$$

où  $\alpha \in ]\theta, \varphi[$  et  $\tau_\alpha$  est un chemin dans le plan complexe composé par deux demi-lignes

$$\{\rho e^{\pm i\alpha}, \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\},$$

orienté avec une partie imaginaire décroissante (voir [10] p 27).

**Définition 2.3.** On dit que  $A$  admet  $H^\infty(S_\varphi)$  calcul fonctionnel borné si pour tout  $f \in H^\infty(S_\varphi)$  l'opérateur  $f(A)$  est borné et il existe  $c \in \mathbb{R}^+$  (indépendante de  $f$ ) tel que

$$\|f(A)\| \leq c \|f\|_\infty.$$

**Proposition 2.2.1.** Soit  $A$  un opérateur sectoriel, injectif et  $\overline{\text{Im}(A)} = X$ .

S'il existe  $c \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $f \in H_0^\infty(S_\varphi)$  on a :  $\|f(A)\| \leq c \|f\|_\infty$  alors  $A$  admet  $H^\infty(S_\varphi)$  calcul fonctionnel borné.

**Preuve 2.4.** voir [3] corollaire 2.2 ou [6], théorème 4.9.

**Proposition 2.2.2.** Soit  $A$  un opérateur sectoriel, injectif et  $\overline{\text{Im}(A)} = X$ .

$$f, g \in H_p(S_\varphi) \Rightarrow \begin{cases} f(A) + g(A) \subseteq (f + g)(A) \\ f(A).g(A) \subseteq (f.g)(A). \end{cases}$$

$$\begin{cases} f, g \in H_p(S_\varphi) \\ g(A) \in L(X) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A) + g(A) = (f + g)(A) \\ f(A).g(A) = (f.g)(A). \end{cases}$$

**Preuve 2.5.** Pour la preuve voir [3] ou [6], théorème 4.5 et corollaire 4.6.

**Proposition 2.2.3.** Soit  $A$  un opérateur sectoriel, injectif et  $\overline{\text{Im}(A)} = X$ .

Si  $f \in H_p(S_\varphi)$ ,  $\left(\frac{1}{f}\right) \in H_p(S_\varphi)$  et  $\left(\frac{1}{f}\right)(A) \in L(X)$  alors  $f(A)$  est inversible à inverse borné

$$[f(A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A).$$

**Preuve 2.6.** voir [5], proposition 3.3.

**Proposition 2.2.4.** Soit  $A$  un opérateur sectoriel, injectif et  $\overline{\text{Im}(A)} = X$ . Si  $A$  admet  $H^\infty(S_\varphi)$  calcul fonctionnel borné alors  $A^{\frac{1}{2}}$  est un opérateur sectoriel, injectif,  $\overline{\text{Im}(A^{\frac{1}{2}})} = X$  et admet  $H^\infty(S_{\frac{\varphi}{2}})$  calcul fonctionnel borné.

**Preuve 2.7.** voir [5], proposition 3.4.

## 2.3 Théorème Conditions nécessaires

**Théorème 2.1.** Soit  $A$  le générateur infinitésimal du  $C_0$  semi groupe  $G(t)$  alors :

1.  $A$  fermé (linéaire).
2.  $D_A$  est dense dans  $E$ .
3.  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} / \text{Re}\lambda > \omega\}$  et  $\forall \lambda : \text{Re}\lambda > \omega, \forall k \geq 1$

$$\|(A - \lambda I)^{-k}\| \leq \frac{M}{(\text{Re}\lambda - \omega)^k}.$$

**Preuve de (3) :**

$\rho(A) = ?$  pour  $x \in E$  ; on définit :

$$(R\lambda)x = - \int_0^\infty \exp(-\lambda t) G(t) x dt, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

alors

$$\begin{aligned} \|\exp(-\lambda t) G(t) x\|_E &\leq \exp(-\text{Re}\lambda t) \cdot M \cdot \exp(\omega t) \cdot \|x\|_E \\ &\leq M \exp[(\omega - \text{Re}\lambda)t] \cdot \|x\|_E, \end{aligned}$$

donc  $R(\lambda)x \in E$  si  $\text{Re}\lambda > \omega$ .

- $-R(\lambda)x \in D_A$ ?

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)(-R(\lambda))x - (-R(\lambda))x}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [G(s) \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t+s) x dt - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\int_s^{+\infty} \exp(-\lambda(\tau-s)) G(\tau) x d\tau - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\exp(\lambda s) \int_s^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\exp(\lambda s) \int_s^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt - \int_s^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt \\
 &\quad - \int_0^s \exp(-\lambda t) G(t) x dt] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\frac{\exp(\lambda s) - 1}{s} \int_s^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x dt - \frac{1}{s} \int_0^s \exp(-\lambda t) G(t) x dt] \\
 &= \lambda \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) G(t) x - x dt \\
 &= A(-R(\lambda)x),
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \lambda(-R(\lambda)x) - x &= A(-R(\lambda)x) \implies A(-R(\lambda)x) - \lambda(-R(\lambda)x) = -x \\
 &\implies R(\lambda)x = (A - \lambda)^{-1}x.
 \end{aligned}$$

Il reste à montrer que :

$$\|(A - \lambda I)^{-k}\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^k}.$$

On définit une nouvelle norme sur  $E$  par :

$$\|x\|_E = \sup_{t \geq 0} [\exp(-\omega t)] \cdot \|G(t)x\|_E,$$

$\|x\|_E$  et  $\|x\|_E$  sont équivalentes car :

$$\begin{aligned}
 \|x\|_E &= \sup_{t \geq 0} [\exp(-\omega t)] \cdot \|G(t)x\|_E \\
 &\leq \sup_{t \geq 0} [\exp(-\omega t)] \cdot M \cdot [\exp(\omega t)] \cdot \|x\|_E \\
 &\leq M \cdot \|x\|_E.
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \|G(t)x\|_E &= \sup_{r \geq 0} [\exp(-\omega r)] \cdot \|G(r)G(t)x\|_E \\
 &= \sup_{r \geq 0} [\exp(-\omega r)] \cdot \|G(r+t)x\|_E \\
 &= \sup_{r \geq 0} [\exp(-\omega(r+t))] \cdot [\exp(\omega t)] \cdot \|G(r+t)x\|_E \\
 &\leq [\exp(\omega t)] \cdot \|x\|_E,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)x\|_E &= \|(A - \lambda I)^{-1}x\|_E \\
&\leq \int_0^{+\infty} [\exp(-Re\lambda t)] \cdot \|G(t)x\|_E dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} [\exp(\omega t - Re\lambda t)] \cdot dt \|x\|_E \\
&\leq \frac{1}{Re\lambda - \omega} \|x\|_E \\
&\leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \|x\|_E,
\end{aligned}$$

donc :

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}.$$

## 2.4 Théorème de Kato

**Théorème 2.2.** Soit  $A : \mathcal{D}_A \subset E \rightarrow E$  un opérateur linéaire non borné vérifiant :

1.  $A$  fermé.
2.  $\mathcal{D}_A$  dense.
3.  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* / Re\lambda \geq 0\}$  et  $\exists L > 0 / \forall \lambda \in \rho(A)$  on ait :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{L}{|\lambda|}.$$

Alors :  $A$  est générateur infinitésimal d'un Semi groupe tel que :

- (a)  $\exists M > 0 / \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M.$
- (b)  $\forall t > 0 \quad G(t) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{D}_A)$  et

$$\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{t}.$$

**Lemme 2.4.**  $\exists \delta > 0, \rho(A) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^*, |\arg(\lambda)| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\}$   
l'ensemble résolvante contient un secteur ( $\Rightarrow A$  est sectoriel).

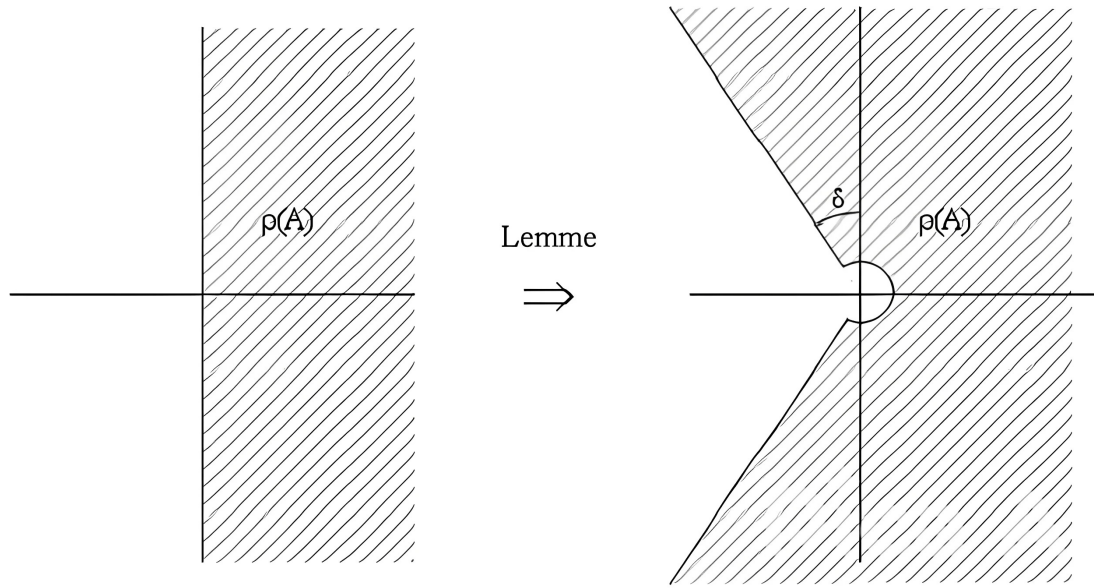
**Preuve 2.8.** On a

$$(A + x + iy) = (A + iy)[I + (A + iy)^{-1}x],$$

donc  $(A + x + iy)^{-1}$  existe pour  $\|(A + iy)^{-1}x\| < 1$ , donc pour  $\frac{|x|}{|y|} < \frac{1}{L}$ , on peut prendre  $\delta = k \arctan(\frac{1}{L})$ .

**Définition 2.4.** On pose pour  $\varphi \in E$

$$G(t)\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp(tz) \cdot (zI - A)^{-1} \varphi dz = e^{tA} \varphi.$$



**Remarque 2.4.** 1.  $\forall k \in \mathbb{N}^* : G(t)/E \rightarrow D_{A^k} \text{ et } \forall t \in [0, T] : \|A^k G(t)\| \leq \frac{C_k}{t^k}$

$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall x \in D_{A^k} \frac{d^k}{dt^k} G(t) = A^k G(t).$

2. La multiplication d'un semi groupe  $G(t)$  par  $e^{\omega t}$  est sans effet sur le prolongement analytique. On en déduit alors, les résultats pour les semi groupes analytiques non uniformément bornés.

**Preuve 2.9.** Soit  $t > 0$  alors :

$$G(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp(tz) \cdot (zI - A)^{-1} x dz. \quad (*)$$

1. On a :

$$\begin{aligned} \|\exp(tz) \cdot (zI - A)^{-1} x\|_E &\leq \exp(t \operatorname{Re} z) \cdot \frac{L \|x\|_E}{|z|} \\ &\leq \frac{L}{|z|} \cdot \exp(-t|z|\delta) \cdot \|x\|_E, \end{aligned}$$

( $z \in \gamma; \operatorname{Re} z = -|z|\sin\delta < 0$ ). Donc

$$\begin{aligned} \|G(t)x\|_E &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{L}{|z|} \cdot \exp(-t|z|\sin\delta) \cdot |dz| \cdot \|x\|_E; \quad (|dz| = c|z|) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t\rho\sin\delta)}{\rho} \cdot d\rho \cdot \|x\|_E \\ &\leq c_t \cdot \|x\|_E. \end{aligned}$$

On pose  $tz = \mu$ , alors

$$\begin{aligned} G(t)x &= \frac{1}{2i\pi} \int_{t\gamma} \exp(\mu) \cdot \left(\frac{\mu}{t}I - A\right)^{-1} x \frac{d\mu}{t} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\mu) \cdot \left(\frac{\mu}{t}I - A\right)^{-1} x \frac{d\mu}{t}, \end{aligned}$$

car  $\gamma$ ,  $t\gamma$  sont homotopes

$$\begin{aligned} \|G(t)x\|_E &\leq K \cdot \int_{\gamma} \exp(\operatorname{Re}\mu) \cdot \frac{L}{|\frac{\mu}{t}|t} |d\mu| \cdot \|x\|_E \\ &\leq M \cdot \|x\|_E. \end{aligned}$$

$M$  indépendant de  $t$ .

2.  $G(t) \in \mathcal{L}(E, D_A)$

$$\begin{aligned} \|A \exp(tz) \cdot (z - A)^{-1} x\|_E &\leq \exp(t\operatorname{Re}z) \cdot \| - A(z - A)^{-1} x \|_E \\ &\leq \exp(t\operatorname{Re}z) \left\{ \|x\|_E + |z| \|(z - A)^{-1} x\|_E \right\} \\ &\leq K \exp(-t|z|\sin\delta) \|x\|_E \quad (\text{convergence de l'intégrale}), \end{aligned}$$

et donc

$$\|AG(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{t}.$$

Montrons que  $G(t)$  est un  $C_0$ -Semi groupe

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t)x - x = 0?$$

Supposons que c'est vrai pour  $x \in D_A$ .

Soit  $x \in E$ ,  $\exists (x_n) \subset D_A$  tel que  $x_n \xrightarrow{E} x$ , on a

$$G(t)x - x = G(t)x - G(t)x_n + G(t)x_n - x_n + x_n - x,$$

alors

$$\|G(t)x - x\|_E \leq M \underbrace{\|x - x_n\|_E}_0 + \underbrace{\|x_n - x\|_E}_0 + \underbrace{\|G(t)x_n - x_n\|_E}_0, \quad (\text{car } x_n \in D_A).$$

Soit maintenant  $x \in D_A$ ; on a

$$\begin{aligned} (z - A)^{-1}x &= \frac{x}{z} + \frac{A(z - A)^{-1}x}{z} \\ &= \frac{x}{z} + \frac{(z - A)^{-1}Ax}{z}, \quad \text{car } x \in D_A, \end{aligned}$$

donc

$$G(t)x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(tz) \cdot \frac{(z-A)^{-1}Ax}{z} dz.$$

On a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz,$$

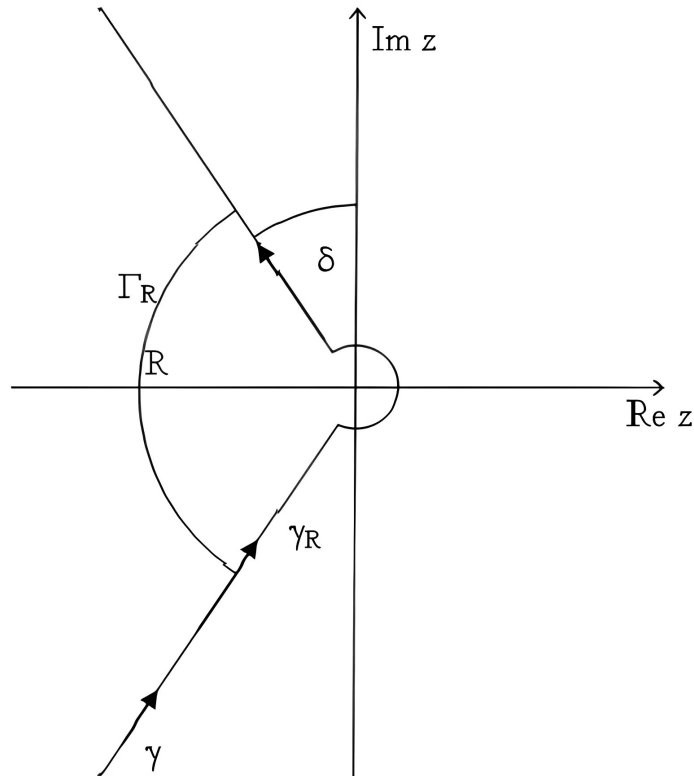
et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz \\ &= x - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz \\ &= x, \end{aligned}$$

$$\text{car } -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \exp(tz) \cdot \frac{x}{z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{d'autre part : } \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \exp(tz) \cdot \frac{(z-A)^{-1}Ax}{z} dz \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

$$C_R = \gamma_R + \Gamma_R$$



$$G(t+s) \stackrel{?}{=} G(t).G(s),$$

on a

$$G(s)x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\mu s).(\mu - A)^{-1}x d\mu = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \exp(\mu s).(\mu - A)^{-1}x d\mu,$$

telles que  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont homotopes alors

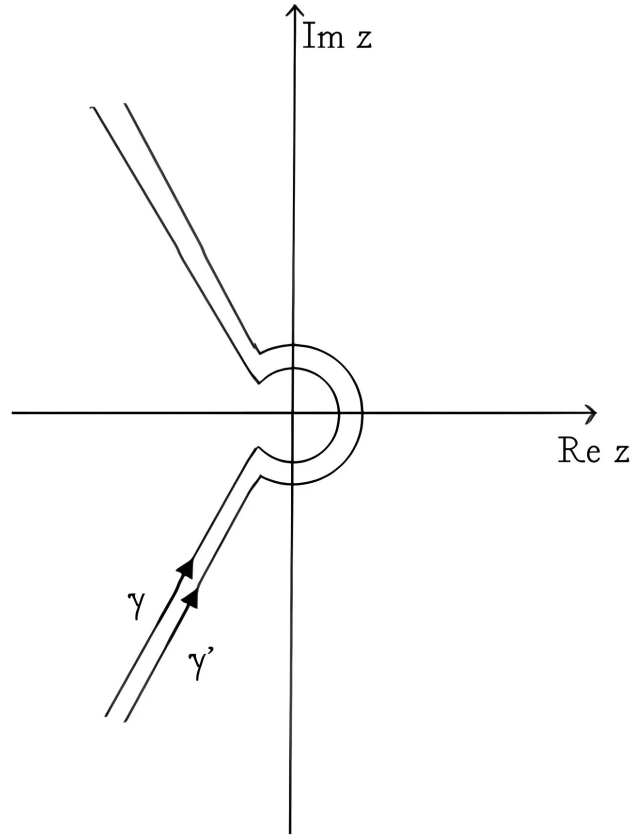
$$\begin{aligned} G(t).G(s)x &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t).(\lambda - A)^{-1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \exp(\mu s).(\mu - A)^{-1}x d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \exp(\lambda t + \mu s).(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x d\mu d\lambda. \end{aligned}$$

On utilise l'identité de la résolvante : pour  $\lambda, \mu \in \rho(A), \lambda \neq \mu$

$$(\lambda - A)^{-1}.(\mu - A)^{-1} = \frac{(\mu - A)^{-1}.(\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \mu},$$

On trouve

$$\begin{aligned} G(t).G(s)x &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \exp(\lambda t + \mu s).(\lambda - A) \frac{d\lambda d\mu}{\mu - \lambda} \\ &\quad + \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \exp(\lambda t + \mu s).(\mu - A) \frac{d\lambda d\mu}{\lambda - \mu} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \exp(\mu s) \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t)(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \right) \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t) \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \exp(\mu s)(\mu - A)^{-1}x d\mu \right) \frac{d\lambda d\mu}{\lambda - \mu} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t)(\lambda - A)^{-1}x \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{\exp(\mu s)d\mu}{\lambda - \mu} \right) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \exp(\mu s)(\mu - A)^{-1}x \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\exp(\lambda t)d\lambda}{\lambda - \mu} \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t)(\lambda - A)^{-1}x [\exp(\lambda s)] d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \exp(\mu s)(\mu - A)^{-1}x \underbrace{\left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\exp(\lambda t)}{\lambda - \mu} d\lambda \right)}_{\substack{\parallel \\ 0}} d\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t)(\lambda - A)^{-1}x [\exp(\lambda s)] d\lambda \\ &= G(t+s)x. \end{aligned}$$



Montrons maintenant que  $A$  est le générateur infinitésimal de  $G(t)$  donnée par la formule (\*), Supposons que  $A$  est le générateur infinitésimal de  $G(t)$ . Pour  $x \in D_A$  et  $t \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} = ?$$

On a

$$\begin{aligned} \|\exp(\lambda t) \cdot (\lambda - A)^{-1} x\|_E &\leq \frac{L \exp(-t|\lambda| \sin \delta)}{|\lambda|} \|x\|_E \\ &\leq \frac{L}{|\lambda|} \exp(-t_0 |\lambda| \sin \delta) \|x\|_E, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \exp(\lambda t) \cdot (\lambda - A)^{-1} x \right\|_E &= \|\lambda \exp(\lambda t) \cdot (\lambda - A)^{-1} x\|_E \\ &\leq L \exp(-t_0 |\lambda| \sin \delta) \|x\|_E, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{dt} (G(t)x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \lambda \exp(\lambda t) \cdot (\lambda - A)^{-1} x d\lambda,$$

On pose  $\lambda = (\lambda - A) + A$ , alors

$$\frac{d}{dt}(G(t)x) = \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t).x d\lambda}_{\parallel 0} + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t).(\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda}_{\parallel G(t)Ax}.$$

En effet

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \exp(\lambda t).x d\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{\lambda \in \gamma \\ |\lambda| \leq R}} \exp(\lambda t).x d\lambda,$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{\lambda \in \gamma \\ |\lambda| \leq R}} \exp(\lambda t).x d\lambda = \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \exp(\lambda t).x d\lambda}_{\parallel 0 \text{ Cauchy}} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \exp(\lambda t).x d\lambda$$

On a  $\lambda \in C_R \implies \lambda = R \exp(i\theta)$ , et donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \exp(\lambda t).x d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} R \exp(Rt \exp(i\theta)).x d\theta \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$$

( car  $R \exp(i\theta)$  se comporte en  $\exp(-R\theta)$  ), alors

$$\frac{d}{dt}(G(t)x) = G(t)Ax.$$

Donc pour  $x \in D_A$  ;  $t \geq t_0 \geq 0$

$$\left( \frac{d}{dt}(G(t)x) \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t)Ax = Ax.$$

# 3

## Représentation de la solution

---

### 3.1 Opérateur $\mathcal{L}$ et son équation résolvante

On considère le modèle :

$$\begin{cases} \Omega_- = ]-\ell, 0[ \times ]0, 1[ \\ \Omega_+ = ]0, L[ \times ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $\ell, L > 0$ . L'équation de diffusion est donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \begin{cases} d_- \Delta u_-(t, x, y) + F_-(u_-(t, x, y)) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_- \\ d_+ \Delta u_+(t, x, y) + F_+(u_+(t, x, y)) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_+, \end{cases} \quad (3.2)$$

où,  $F$  est la fonction logistique, généralement non linéaire,

$$F(u) = ru \left( 1 - \frac{u}{k} \right),$$

sous la condition initiale

$$u(0, x, y) = \begin{cases} \varphi_-(x, y), & \text{dans } \Omega_- \\ \varphi_+(x, y), & \text{dans } \Omega_+, \end{cases} \quad (3.3)$$

les conditions aux bords sont

$$\begin{cases} u_-(t, -\ell, y) = f_-(t, y), & y \in ]0, 1[ \\ u_-(t, x, 0) = u_-(t, x, 1) = 0, & x \in ]-\ell, 0[ \\ u_+(t, x, 0) = u_+(t, x, 1) = 0, & y \in ]0, 1[ \\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(t, L, y) = f_+(t, y), & y \in ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.4)$$

avec la condition de continuité de la dispersion à l'interface  $\Gamma_0 = \{0\} \times ]0, 1[$ ,

$$\begin{cases} d_- \Delta u_-(t, 0, y) + F_-(u_-(t, 0, y)) = d_+ \Delta u_+(t, 0, y) + F_+(u_+(t, 0, y)), \\ y \in ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.5)$$

et la discontinuité du flux à  $\Gamma_0$

$$(1-p)d_-\frac{\partial u_-}{\partial x}(t, 0, y) = pd_+\frac{\partial u_+}{\partial x}(t, 0, y), \quad y \in ]0, 1[. \quad (3.6)$$

Nous avons utilisé les notations suivantes

$$u_- = u|_{\Omega_-}, \quad u_+ = u|_{\Omega_+}.$$

La condition (3.5) est différente de celle considérée dans [11]. Ici,  $u(t, x, y)$  représente une densité de population,  $\Omega_+$  est la zone refuge, tandis que  $\Omega_-$  est la zone tampon avec leurs coefficients de diffusion respectifs  $d_+$  et  $d_-$ . Les équations (3.2) définissent les différentes diffusions dans les habitats avec leurs fonctions logistique de croissance ou de déclin  $F_-$  et  $F_+$ . Les conditions aux bords (3.4) signifient que les individus meurent lorsqu'ils atteignent les autres parties des frontières  $\{-\ell, L\} \times \{0, 1\}$ , ce qui implique que notre domaine est entouré d'un habitat hostile. Comme spécifié dans [2], les conditions (3.5) sont essentielles dans ce travail et expriment le fait que le processus de dispersion ne permet pas aux individus de rester fixés en un point donné et n'autorise aucune barrière infranchissable à la dispersion. Il est donc primordial de considérer qu'il y a une continuité dans tout le domaine. Enfin, la condition à l'interface dans (3.6) est basée sur un mouvement brownien caractérisé par le paramètre  $p \in ]0, 1[$ , qui représente la probabilité qu'un individu situé à l'interface se déplace vers le refuge  $\Omega_+$ . Bien sûr, lorsque  $p = \frac{1}{2}$ , la continuité du flux aura lieu.

La condition (3.6) est justifiée par le fait que le temps local du processus lorsque  $p \neq \frac{1}{2}$  est discontinu, voir par exemple Otso Ovaskainen et Stephen J. Cornell dans [14]. Notons également que, lorsque nous considérons différents types d'habitats, la réponse des individus à l'interface est importante pour le comportement global du mouvement. Les auteurs concentreront sur l'étude du problème stationnaire linéaire en prenant :

$$\begin{cases} F_-(u_-) = -r_-u_- & \text{sur } ]-\ell, 0[ \times ]0, 1[ \\ F_+(u_+) = r_+u_+ & \text{sur } ]0, L[ \times ]0, 1[ \end{cases}$$

où  $r_+$  est le taux de croissance à l'intérieur du refuge  $\Omega_+$  et  $r_-$  est le taux de mortalité dans la zone tampon  $\Omega_-$ . Les auteurs intéresseront à l'étude de l'opérateur suivant :

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} d_-\Delta u_- - r_-u_- & \text{sur } ]-\ell, 0[ \times ]0, 1[ \\ d_+\Delta u_+ + r_+u_+ & \text{sur } ]0, L[ \times ]0, 1[ \end{cases} \quad (3.7)$$

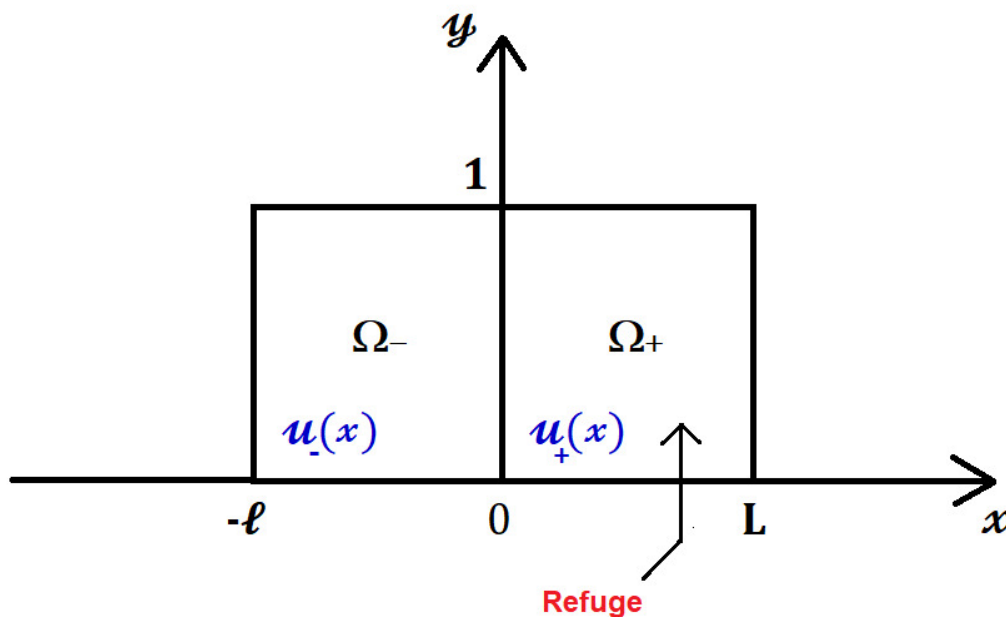
où  $u$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(Bound.C.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \text{ dans } ] - \ell, L[ \times \{0\} \\ u = 0 \text{ dans } ] - \ell, L[ \times \{1\} \\ u_- = 0 \text{ dans } \{-\ell\} \times ]0, 1[ \\ \frac{\partial u_+}{\partial x} = 0 \text{ dans } \{L\} \times ]0, 1[ \end{array} \right. \\ \text{(Interf.C.)} \quad d_- \Delta u_-(0, y) - r_- u_- = d_+ \Delta u_+(0, y) + r_+ u_+, \quad y \in ]0, 1[ \\ \text{(Skew.C.)} \quad (1 - p) d_- \frac{\partial u_-}{\partial x}(0, y) = p d_+ \frac{\partial u_+}{\partial x}(0, y), \quad y \in ]0, 1[. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Nous devons étudier l'équation spectrale :

$$\mathcal{L}u - \lambda u = g, \quad (3.9)$$

tel que  $u \in D(\mathcal{L})$ . Voir [8]. Dans un espace adéquat, où  $u$  vérifie les conditions (Bound.C.), (Interf.C.) et (Skew.C.). Nous rappelons que toutes les constantes  $r_-, r_+, d_-, d_+$  sont strictement positives,  $p \in ]0, 1[$  et  $\lambda$  appartient à un certain secteur.



## 3.2 Formulation opérationnelle de $\mathcal{L}u - \lambda u = g$

Considérons l'espace de Banach :

$$E = C_0([0, 1]) = \{\psi \in C([0, 1]) : \psi(0) = \psi(1) = 0\},$$

muni de la norme sup de  $C([0, 1])$ . Définissons l'opérateur  $A$  dans  $E$  par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{\psi \in C^2([0, 1]) : \psi(0) = \psi(1) = 0 \text{ et } \psi'' \in C_0([0, 1])\} \\ (A\psi)(y) = \psi''(y). \end{cases}$$

Nous savons alors que cet opérateur linéaire fermé vérifie

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{D}(A)} = E; \text{ pour tout } \eta \in ]0, \pi[, \rho(A) \supset S_{\pi-\eta} \cup \{0\} \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall z \in S_{\pi-\eta} \cup \{0\}, \|(zI - A)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |z|}, \end{cases} \quad (3.10)$$

voir [8].

D'autre part il existe une boule  $\mathcal{B}(0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , telle que  $\rho(A) \supset \overline{\mathcal{B}(0, \delta)}$  et l'estimation dans (3.10) reste valable dans  $S_{\pi-\eta} \cup \overline{\mathcal{B}(0, \delta)}$ . Ici,  $\rho(A)$  désigne l'ensemble résolvant de  $A$ .

Les notations usuelles suivantes des fonctions à valeurs vectorielles

$$u_{\pm}(x)(y) := u_{\pm}(x, y),$$

permettant alors d'écrire le problème (3.7) dans l'espace  $E$ , comme suit :

$$(P_A) \begin{cases} \begin{cases} u''_-(x) + Au_-(x) - \frac{r_-}{d_-}u_-(x) - \frac{\lambda}{d_-}u_-(x) = \frac{g_-(x)}{d_-} & \text{sur } ]-\ell, 0[ \\ u''_+(x) + Au_+(x) + \frac{r_+}{d_+}u_+(x) - \frac{\lambda}{d_+}u_+(x) = \frac{g_+(x)}{d_+} & \text{sur } ]0, L[ \end{cases} \\ u_-(-\ell) = 0 \\ u'_+(L) = 0 \\ \begin{cases} d_-[u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_-u_-(0^-) = d_+[u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+u_+(0^+) \\ (1-p)d_-u'_-(0^-) = pd_+u'_+(0^+). \end{cases} \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{E}$  est

$$\mathcal{E} = u \in C([-\ell, L] \setminus \{0\}; E) : u|_{[-\ell, 0]} \in C^{\theta}([-\ell, 0]; E) \text{ et } u|_{[0, L]} \in C^{\theta}[0, L]; E).$$

Alors,  $\mathcal{E}$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{E}} &= \max \left( \|u_-\|_{C^{\theta}([-\ell, 0]; E)}, \|u_+\|_{C^{\theta}([0, L]; E)} \right) \\ &= \max \left( \|u_-\|_{C^{\theta}([-\ell, 0]; E)}, \|u_+\|_{C^{\theta}[0, L]; E)} \right). \end{aligned}$$

La fonction  $g \in \mathcal{E}$  est

$$\begin{cases} g_- = g|_{[-\ell, 0]} \in C^{\theta}([-\ell, 0]; E) \\ g_+ = g|_{[0, L]} \in C^{\theta}([0, L]; E), \end{cases}$$

avec  $0 < \theta < 1$ . Il n'est pas difficile de prouver que l'hôlérianité global de  $g$  sur  $[-\ell, L]$  est vraie si et seulement si

$$g_-(0) = g_+(0).$$

### 3.3 Résolution du problème opérationnel ( $P_A$ )

Fixons  $\epsilon_0$  un petit nombre. Supposons que le nombre complexe  $\lambda$  vérifié

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \epsilon_0.$$

Posons

$$A_- = A - \frac{r_-}{d_-}I - \frac{\lambda}{d_-}I, \quad A_+ = A + \frac{r_+}{d_+}I - \frac{\lambda}{d_+}I,$$

qui ont le même domaine

$$D(A_-) = D(A_+) = D(A).$$

Pour l'opérateur  $-A$ , on peut vérifier que

$$-A_- = -A + \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-},$$

est sectoriel dans  $E$ . En fait, on peut facilement prouver que  $] -\infty, 0] \subset \rho(-A_-)$  et, en posant

$$M(-A_-) := M(-A_-, \pi) := \sup_{t>0} \|t(-A_- + tI)^{-1}\|,$$

on obtient pour tout  $\lambda$  vérifiant

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \epsilon_0,$$

$$M(-A_-) \leq \sup_{t>0} \left( \frac{t}{\cos \left[ \frac{1}{2} \arg \left( \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right) \right]} \cdot \frac{1}{\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right|} \right).$$

Nous avons deux cas

1. Si  $|\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2}$ , alors pour  $t > 0$

$$\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right| = d \left( \frac{\lambda}{d_-}, -t - \frac{r_-}{d_-} \right) \geq \frac{r_-}{d_-} + t,$$

où  $d(,)$  désigne la distance euclidienne.

2. Si  $\frac{\pi}{2} \leq |\arg(\lambda)| < \pi - \epsilon_0$

$$\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right| = d \left( \frac{\lambda}{d_-}, -t - \frac{r_-}{d_-} \right) \geq \left( \frac{r_-}{d_-} + t \right) \sin \alpha,$$

avec  $\alpha \in ]\epsilon_0, \frac{\pi}{2}]$  et donc

$$\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right| = d \left( \frac{\lambda}{d_-}, -t - \frac{r_-}{d_-} \right) \geq \left( \frac{r_-}{d_-} + t \right) \sin \epsilon_0,$$

il existe donc une constante  $C$  indépendante de  $\lambda$  telle que

$$\begin{aligned} M(-A_-) &\leq \sup_{t>0} \left( \frac{t}{\cos \left[ \frac{1}{2} \arg \left( \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right) \right]} \cdot \frac{1}{\left| \frac{r_-}{d_-} + \frac{\lambda}{d_-} + t \right|} \right) \\ &\leq \frac{C}{\cos \frac{\pi - \varepsilon_0}{2}} \sup_{t>0} \left( \frac{t}{\left| \frac{r_-}{d_-} + t \right|} \right) \\ &= \frac{C}{\sin(\frac{\varepsilon_0}{2})} \sup_{t>0} \left( \frac{t}{\left| \frac{r_-}{d_-} + t \right|} \right) < \infty, \end{aligned}$$

ainsi

$$-A_- \in \text{Sect}[\pi - \arcsin(1/M(-A_-))],$$

avec  $M(-A_-)$  indépendant de  $\lambda$ , voir Proposition 2.1.1 dans [10]. Puisque

$$|\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0,$$

il existe un petit  $\varepsilon_0(r_+, d_+) > 0$  tel que

$$\varepsilon_0(r_+, d_+) < \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \left| \arg \left( \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right) \right| < \pi - \varepsilon_0(r_+, d_+);$$

nous obtenons donc de manière similaire mais différente

$$-A_+ \in \text{Sect} \left( \pi - \arcsin \left[ \frac{1}{M(-A_+)} \right] \right),$$

avec  $M(-A_+)$  indépendant de  $\lambda$ . Nous déduisons également les opérateurs suivants

$$B_- = - \left[ - \left( A - \frac{r_-}{d_-} I - \frac{\lambda}{d_-} I \right) \right]^{1/2}, \quad B_+ = - \left[ - \left( A + \frac{r_+}{d_+} I - \frac{\lambda}{d_+} I \right) \right]^{1/2},$$

ayant le même domaine :

$$D(B_-) = D(B_+),$$

sont bien définis et génèrent des semi-groupes analytiques sur  $E$ , voir [10], p. 81 et aussi [1]. D'autre part, en utilisant la propriété d'homothétie (voir Proposition 3.1.2 dans [10]), nous déduisons le fait que

$$\begin{cases} \text{pour tout } z \in \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon(B_-)\}, \\ \|(B_- - zI)^{-1}\| \leq \frac{C_-}{|z|}, \\ \text{et pour tout } z \in \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon(B_+)\}, \\ \|(B_+ - zI)^{-1}\| \leq \frac{C_+}{|z|}, \end{cases} \quad (3.11)$$

où les constantes  $C_-$ ,  $C_+$ ,  $\epsilon(B_-)$  et  $\epsilon(B_+)$  sont indépendantes de  $\lambda$ .

Posons :

$$p_- = (1 - p)d_-, \quad p_+ = pd_+.$$

Notre équation spectrale

$$\mathcal{L}u - \lambda u = g \in \mathcal{E},$$

et

$$\begin{cases} G_-(x) = \frac{g_-(x)}{d}, & x \in ]-\ell, 0[ \\ G_+(x) = \frac{g_+(x)}{d_+}, & x \in ]0, L[ \\ p_- = (1 - p)d_- \\ p_+ = pd_+. \end{cases}$$

On commence par résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \begin{cases} u''_-(x) - B_-^2 u_-(x) = G_-(x) & \text{sur } ]-\ell, 0[ \\ u''_+(x) - B_+^2 u_+(x) = G_+(x) & \text{sur } ]0, L[ \end{cases} \\ u_-(-\ell) = 0 \\ u'_+(L) = 0 \\ \begin{cases} d_-[u''_-(0^-) + Au_-(0^-)] - r_- u_-(0^-) \\ = d_+[u''_+(0^+) + Au_+(0^+)] + r_+ u_+(0^+) \end{cases} \\ (1 - p)d_- u'_-(0^-) = p d_+ u'_+(0^+). \end{cases}$$

Par abus, l'équation caractéristique est

$$r^2 - B^2 = 0,$$

les racines de cette équation sont

$$r = B \quad \text{et} \quad r = -B,$$

donc la solution homogène du problème est de la forme

$$u(x) = e^{Bx}\alpha + e^{-Bx}\beta,$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

On pose

$$u(x) = e^{Bx}\alpha(x) + e^{-Bx}\beta(x),$$

par la méthode de la variation de la constante, nous obtenons

$$\begin{cases} e^{Bx}\alpha'(x) + e^{-Bx}\beta'(x) = 0, \\ B e^{Bx}\alpha'(x) - B e^{-Bx}\beta'(x) = G_{\pm}(x). \end{cases}$$

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{Bx} & e^{-Bx} \\ Be^{Bx} & -Be^{-Bx} \end{vmatrix}$$

est inversible, d'où

$$\alpha'(x) = \frac{-1}{2} B^{-1} \begin{vmatrix} 0 & e^{-Bx} \\ G_{\pm}(x) & -Be^{-Bx} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} B^{-1} e^{-Bx} G_{\pm}(x),$$

ainsi

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \int_0^x B^{-1} e^{-Bt} G_{\pm}(t) dt$$

et

$$\beta'(x) = \frac{-1}{2} B^{-1} \begin{vmatrix} e^{Bx} & 0 \\ Be^{Bx} & G_{\pm}(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} B^{-1} e^{Bx} G_{\pm}(x),$$

alors

$$\beta(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x B^{-1} e^{Bt} G_{\pm}(t) dt,$$

donc

$$\begin{aligned} u_{\pm}(x) &= \left( \frac{1}{2} \int_{a_{\pm}}^x B_{\pm}^{-1} e^{-B_{\pm}t} G_{\pm}(t) dt \right) e^{B_{\pm}x} + \left( -\frac{1}{2} \int_{b_{\pm}}^x B_{\pm}^{-1} e^{B_{\pm}t} G_{\pm}(t) dt \right) e^{-B_{\pm}x} \\ &\quad + e^{B_{\pm}(x-a_{\pm})} \alpha(x) + e^{B_{\pm}(b_{\pm}-x)} \beta(x) \\ &= e^{B_{\pm}(x-a_{\pm})} \alpha(x) + e^{B_{\pm}(b_{\pm}-x)} \beta(x) + v_{\pm}(G)(x). \end{aligned}$$

Finalement on a la solution de l'équation du second ordre suivante

$$u''(x) - B^2 u(x) = G(x),$$

dans  $E$  est écrite

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(x-a)B} \alpha + e^{(b-x)B} \beta + v(G)(x) \\ v(G)(x) &= \frac{1}{2} \int_a^x e^{(x-t)B} B^{-1} G(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^b e^{(t-x)B} B^{-1} G(t) dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{\pm}(x) &= e^{(x-a_{\pm})B_{\pm}} \alpha_{\pm} + e^{(b_{\pm}-x)B_{\pm}} \beta_{\pm} + v_{\pm}(G)(x) \\ v_{\pm}(G_{\pm})(x) &= \frac{1}{2} \int_{a_{\pm}}^x e^{(x-t)B_{\pm}} B_{\pm}^{-1} G_{\pm}(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^{b_{\pm}} e^{(t-x)B_{\pm}} B_{\pm}^{-1} G_{\pm}(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_{-}(x) &= e^{(x+\ell)B_{-}} \alpha_{-} + e^{-xB_{-}} \beta_{-} + v_{-}(G_{-})(x), \quad x \in ]-\ell, 0[ \\ u_{+}(x) &= e^{xB_{+}} \alpha_{+} + e^{(L-x)B_{+}} \beta_{+} + v_{+}(G_{+})(x), \quad x \in ]0, L[ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_-(G_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\ell}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\ v_+(G_+)(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^L e^{(t-x)B_+} B_+^{-1} G_+(t) dt, \end{aligned}$$

avec  $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm} \in E$ ;  $a_- = -\ell, b_- = 0$ ;  $a_+ = 0, b_+ = L$  qui donnent

$$\begin{aligned} u'_-(x) &= B_- e^{(x+\ell)B_-} \alpha_- - B_- e^{-xB_-} \beta_- + v'_-(G_-)(x), \quad x \in ]-\ell, 0[ \\ u'_+(x) &= B_+ e^{xB_+} \alpha_+ - B_+ e^{(L-x)B_+} \beta_+ + v'_+(G_+)(x), \quad x \in ]0, L[ \\ u'_-(0) &= B_- e^{\ell B_-} \alpha_- - B_- \beta_- + v'_-(G_-)(0), \\ u'_+(0) &= B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+ + v'_+(G_+)(0). \end{aligned}$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} u_-(-\ell) = \alpha_- + e^{\ell B_-} \beta_- + v_-(G_-)(-\ell) = 0 \\ u'_+(L) = B_+ e^{LB_+} \alpha_+ - B_+ \beta_+ + v'_+(G_+)(L) = 0, \\ \alpha_- = -e^{\ell B_-} \beta_- - v_-(G_-)(-1) \\ \beta_+ = e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L). \end{cases} \quad (3.12)$$

La condition de dispersion à l'interface

$$d_-[u''_-(0) - B_-^2 u_-(0)] - r_- u_-(0) = d_+[u''_+(0) - B_+^2 u_+(0)] + r_+ u_+(0),$$

devient

$$d_- G_-(0) + \lambda u_-(0) = d_+ G_+(0) + \lambda u_+(0).$$

On a

$$\begin{aligned} u''_-(x) &= B_-^2 e^{(x+\ell)B_-} \alpha_- - B_-^2 e^{-xB_-} \beta_- + v''_-(G_-)(x), \quad x \in ]-\ell, 0[ \\ u''_+(x) &= B_+^2 e^{xB_+} \alpha_+ - B_+^2 e^{(L-x)B_+} \beta_+ + v''_+(G_+)(x), \quad x \in ]0, L[ \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u''_-(0) &= B_-^2 e^{\ell B_-} \alpha_- - B_-^2 \beta_- + v''_-(G_-)(0), \\ u''_+(0) &= B_+^2 \alpha_+ - B_+^2 e^{LB_+} \beta_+ + v''_+(G_+)(0). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d_-[u''_-(0) - B_-^2 u_-(0)] - r_- u_-(0) &\iff d_-[B_-^2 e^{\ell B_-} \alpha_- - B_-^2 \beta_- + v''_-(G_-)(0) - B_-^2 u_-(0)] = \\ d_-[u''_+(0) - B_+^2 u_+(0)] - r_+ u_+(0) &\iff d_+[B_+^2 \alpha_+ - B_+^2 e^{LB_+} \beta_+ + v''_+(G_+)(0) - B_+^2 u_+(0)], \end{aligned}$$

ou :

$$d_- G_-(0) + \lambda [e^{\ell B_-} \alpha_- + \beta_- + v_-(G_-)(0)] = d_+ G_+(0) + \lambda [\alpha_+ + e^{LB_+} \beta_+ + v_+(G_+)(0)],$$

et comme

$$\begin{aligned} u'_-(0) &= B_- e^{\ell B_-} \alpha_- - B_- \beta_- + v'_-(G_-)(0), \\ u'_+(0) &= B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+ + v'_+(G_+)(0), \end{aligned}$$

la condition de symétrie est

$$\begin{aligned} p_- u'_-(0) - p_+ u'_+(0) &= 0 \\ p_-(B_- e^{\ell B_-} \alpha_- - B_- \beta_-) - p_+(B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+) &= -p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0). \end{aligned}$$

Nous obtenons le système

$$\begin{cases} \alpha_- = -e^{\ell B_-} \beta_- - v_-(G_-)(-\ell) \\ \beta_+ = e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ p_-(B_- e^{\ell B_-} \alpha_- - B_- \beta_-) - p_+(B_+ \alpha_+ - B_+ e^{LB_+} \beta_+) \\ \quad = -p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0) \\ \lambda [e^{\ell B_-} \alpha_- + \beta_-] - \lambda [\alpha_+ + e^{LB_+} \beta_+] \\ \quad = d_+ G_+(0) - d_- G_-(0) + \lambda v_+(G_+)(0) - \lambda v_-(G_-)(0), \end{cases}$$

ce qui équivaut à

donc

$$\begin{cases} \alpha_- = -e^{\ell B_-} \beta_- - v_-(G_-)(-\ell) \\ \beta_+ = e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ p_-(e^{\ell B_-} \alpha_- - \beta_-) - p_+(B_-^{-1} B_+ \alpha_+ - B_-^{-1} B_+ e^{LB_+} \beta_+) = (I) \\ [e^{\ell B_-} \alpha_- + \beta_-] - [\alpha_+ + e^{LB_+} \beta_+] = (II). \end{cases}$$

En utilisant les deux premières équations, nous obtenons

$$\begin{aligned} & p_-(e^{\ell B_-} \alpha_- - \beta_-) - p_+(B_-^{-1} B_+ \alpha_+ - B_-^{-1} B_+ e^{LB_+} \beta_+) \\ &= p_-(e^{\ell B_-} [-e^{\ell B_-} \beta_- - v_-(G_-)(-\ell)] - \beta_-) \\ &\quad - p_+(B_-^{-1} B_+ \alpha_+ - B_-^{-1} B_+ e^{LB_+} [e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)]) \\ &= -p_-[e^{2\ell B_-} \beta_- + \beta_-] - p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) - p_+ B_-^{-1} B_+ \alpha_+ \\ &\quad + p_+ B_-^{-1} B_+ e^{2LB_+} \alpha_+ + p_+ B_-^{-1} B_+ e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) \\ &= -p_-[I + e^{2\ell B_-}] \beta_- - p_+ B_-^{-1} [I + e^{2LB_+}] \alpha_+ \\ &\quad + p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) - p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} [e^{\ell B_-} \alpha_- + \beta_-] - [\alpha_+ + e^{LB_+} \beta_+] &= e^{\ell B_-} [-e^{\ell B_-} \beta_- - v_-(G_-)(-\ell)] + \beta_- \\ &\quad - [\alpha_+ + e^{LB_+} [e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} v'_+(G_+)(L)]] \\ &= (I - e^{2\ell B_-}) \beta_- - (I + e^{2LB_+}) \alpha_+ \\ &\quad - e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) - e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L). \end{aligned}$$

Alors, le système ci-dessus devient

$$\begin{cases} -p_- [1 + e^{2\ell B_-}] \beta_- - p_+ B_-^{-1} B_+ [1 - e^{2LB_+}] \alpha_+ \\ = (I) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) := (I') \\ (1 - e^{2\ell B_-}) \beta_- - (I + e^{2LB_+}) \alpha_+ \\ = (II) + e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) := (II'), \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} -p_- [1 + e^{2\ell B_-}] \beta_- - p_+ B_-^{-1} B_+ [1 - e^{2LB_+}] \alpha_+ = (I'') \\ (1 - e^{2\ell B_-}) \beta_- - (1 + e^{2LB_+}) \alpha_+ = (II''). \end{cases}$$

Le déterminant abstrait de ce système est

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -p_-(I + e^{2\ell B_-}) & -p_+ B_+^{-1} B_-(I - e^{2LB_+}) \\ (I - e^{2\ell B_-}) & -(I + e^{2LB_+}) \end{vmatrix} \\ &= p_-(I + e^{2\ell B_-})(I + e^{2LB_+}) + p_+ B_-^{-1} B_+(I - e^{2LB_+})(I - e^{2\ell B_-}). \end{aligned}$$

### 3.4 Inversibilité de $\Delta_{\lambda, p_-, p_+}$

Pour l'inversibilité de  $\Delta_{\lambda, p_-, p_+}$ , les auteurs utiliseront le calcul  $H^\infty$  pour les opérateurs sectoriels. Puisque  $(I + e^{2\ell B_-})$ ,  $(I + e^{2LB_+})$ ,  $(I - e^{2LB_+})$  et  $(I - e^{2\ell B_-})$  sont bornés et inversibles en appliquant la Proposition 2.3.6, page 60 dans A. Lunardi [12]. Posons :

$$\frac{r_-}{d_-} = \rho_-, \quad \frac{\lambda}{d_-} = \lambda_-, \quad \frac{r_+}{d_+} = \rho_+, \quad \frac{\lambda}{d_+} = \lambda_+,$$

et considérons  $\omega \in ]0, \pi[$  et rappelons

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\}.$$

Considérons la fonction suivante

$$e_{\lambda, p_-, p_+} : S_\omega \ni z \longmapsto e_{\lambda, p_-, p_+}(z),$$

définie par

$$\begin{aligned} e_{\lambda, p_-, p_+}(z) &= p_- \left(1 + e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}}\right) \left(1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}\right) \\ &\quad + p_+ \frac{(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}{(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \left(1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}\right) \left(1 - e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}}\right); \end{aligned}$$

Cette fonction est clairement holomorphe et bornée puisque

$$\operatorname{Re}(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} > 0,$$

ainsi  $e_{\lambda, p_-, p_+} \in H^\infty(S_\omega)$ . D'autre part, nous savons que l'opérateur  $-A$  a un calcul fonctionnel borné  $H^\infty(S_\omega)$ ; d'où

$$\Delta_{\lambda, p_-, p_+} = e_{\lambda, p_-, p_+}(-A).$$

Nous avons

$$|w + z| \geq (|w| + |z|) \cos \left( \frac{\arg w - \arg z}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} |e_{\lambda, p_-, p_+}(z)| &\geq \left( p_+ \left| \frac{(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}{(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \right. \\ &\quad \left. + p_- \left| 1 + e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \right) \cdot \left| \cos \left( \frac{\Phi}{2} \right) \right|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi &= \arg \left( \frac{(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}{(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) + \arg \left( 1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right) + \arg \left( 1 - e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) \\ &\quad - \arg \left( 1 + e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) - \arg \left( 1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |\Phi| &\leq \left| \arg(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} - \arg(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} \right| \\ &\quad + \left| \arg \left( 1 - e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) - \arg \left( 1 + e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) \right| \\ &\quad + \left| \arg \left( 1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right) - \arg \left( 1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Or, puisque

$$z \in S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\},$$

On peut alors voir qu'il existe des constantes  $\omega_{\lambda_-, \rho_-} \in ]0, \omega/2[$  et  $\omega_{\lambda_+, \rho_+} \in ]0, \omega/2[$ , (telles que  $\omega_{\lambda_-, \rho_-} < \omega_{\lambda_+, \rho_+}$ ) telles que

$$\begin{cases} 2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} \in S_{\omega_{\lambda_-, \rho_-}} \\ 2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} \in S_{\omega_{\lambda_+, \rho_+}}. \end{cases}$$

En utilisant le lemme (2.2) assertion 1, on obtient

$$\begin{cases} \left| \arg \left( 1 - e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) - \arg \left( 1 + e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right) \right| < \omega_{\lambda_-, \rho_-} \\ \left| \arg(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2} - \arg(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2} \right| \leq \omega_{\lambda_+, \rho_+}, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\Phi| &< \omega_{\lambda_+, \rho_+} - \omega_{\lambda_-, \rho_-} + \omega_{\lambda_-, \rho_-} + \omega_{\lambda_+, \rho_-} \\ &< 2\omega_{\lambda_+, \rho_+} \\ &< \omega, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |e_{\lambda,p_-,p_+}(z)| &\geq \left( p_+ \left| \frac{(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}}{(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \left| 1 - e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \right. \\ &\quad \left. + p_- \left| 1 + e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

en utilisant Lemme (2.2), assestion 2,

$$\begin{aligned} |e_{\lambda,p_-,p_+}(z)| &\geq p_- \left| 1 + e^{-2\ell(z + \lambda_- + \rho_-)^{1/2}} \right| \left| 1 + e^{-2L(z + \lambda_+ - \rho_+)^{1/2}} \right| \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &\geq p_- \left[ 1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega_{\lambda_-,\rho_-}))} \right] \left[ 1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega_{\lambda_+,\rho_+}))} \right] \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &\geq p_- \left( 1 - e^{-\pi/(2 \tan(\omega/2))} \right)^2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) > 0; \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que, pour tout  $z \in S_\omega$ , on a

$$\tan(\omega_{\lambda_-,\rho_-}) \leq \tan(\omega/2) \quad \text{et} \quad \tan(\omega_{\lambda_+,\rho_+}) \leq \tan(\omega/2).$$

Par conséquent, la fonction  $e_{\lambda,p_-,p_+}(z)$  ne s'annule pas sur  $S_\omega$ , et la fonction  $1/e_{\lambda,p_-,p_+}(z)$  est bornée, donc elle appartient à  $H^\infty(S_\omega)$ . De plus :

$$\left\| \frac{1}{e_{\lambda,p_-,p_+}} \right\|_\infty \leq \frac{C}{p_-} = \frac{C}{(1-p)d_-}.$$

Nous en déduisons que  $\Delta_{\lambda,p_-,p_+}$  est inversible avec

$$\begin{cases} \Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1} = \left( \frac{1}{e_{\lambda,p_-,p_+}} \right) (-A) \\ \left\| \Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{(1-p)d_-} \end{cases}$$

Remarquons que la constante  $C$  est indépendante de l'habitat et du paramètre  $\lambda$ .

$$\Delta_{\lambda,p_-,p_+} A^{-1} = A^{-1} \Delta_{\lambda,p_-,p_+},$$

il en découle que

$$\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1} A = A \Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1},$$

sur  $D(A)$ , donc  $\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1}$  est un opérateur borné de  $D(A)$  dans lui-même. Par interpolation,  $\Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1}$  est alors borné dans tout espace d'interpolation  $(D(A), X)_{\alpha,q}$  (voir la définition dans [9]), et on a clairement aussi l'estimation suivante

$$\left\| \Delta_{\lambda,p_-,p_+}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}((D(A), X)_{\alpha,q})} \leq \frac{C}{(1-p_-)d_-}.$$

### 3.5 Retour à l'équation spectrale

Rappelons que si

$$\begin{cases} (I) = B^{-1} [-p_- v'_-(G_-(0)) + p_+ v'_+(G_+(0))] \\ (II) = \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+(0)) - v_-(G_-(0)), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (I') = (I) - p_+ B_+^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) \\ (II') = (II) + e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L); \end{cases}$$

puis

$$\begin{aligned} (I') &= (I) - p_+ B_+^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) \\ &= B_-^{-1} [-p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0)] \\ &\quad - p_+ B_+^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell), \\ (II') &= (II) + e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \\ &= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+(0)) - v_-(G_-(0)) \\ &\quad + e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L). \end{aligned}$$

À partir du système

$$\begin{cases} -p_- (I + e^{2\ell B_-}) \beta_- - p_+ B_+^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \alpha_+ = (I') \\ (I - e^{2\ell B_-}) \beta_- - (I + e^{2LB_+}) \alpha_+ = (II'), \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \beta_- &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [p_+ B_+^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ \alpha_+ &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [-p_- (I + e^{2\ell B_-}) (II') - (I - e^{2\ell B_-}) (I')], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_- &= -e^{\ell B_-} \beta_- - \nu(G_-)(-\ell) \\ &= -\Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{\ell B_-} ([p_+ B_+^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')]) \\ &\quad - \nu(G_-)(-\ell), \end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned} u_-(x) &= e^{(x+\ell)B_-} \alpha_- + e^{-xB_-} \beta_- + \nu(G_-)(x) \\ &= -\Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{\ell B_-} e^{(x+\ell)B_-} [p_+ B_+^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ &\quad - e^{(x+\ell)B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] \\ &\quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [p_+ B_+^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) (II') - (I + e^{2LB_+}) (I')] \\ &\quad + \nu_-(G_-)(x); \end{aligned}$$

et maintenant, en utilisant

$$\begin{aligned}
& p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \\
&= p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \left[ \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] \right] \\
& \quad + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) [\nu_+(G_+)(0) - \nu_-(G_-)(0)] \\
& \quad + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \left[ e^{\ell B_-} \nu_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} \nu'_+(G_+)(L) \right] \\
& \quad - B_-^{-1} (I + e^{2LB_+}) \left[ -p_- \nu'_-(G_-)(0) + p_+ \nu'_+(G_+)(0) \right] \\
& \quad - (I + e^{2LB_+}) \left[ p_- e^{\ell B_-} \nu_-(G_-)(-\ell) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} \nu'_+(G_+)(L) \right],
\end{aligned}$$

Pour  $x \in ]-\ell, 0[$ , on a :

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= e^{(x+\ell)B_-} \alpha_- + e^{-xB_-} \beta_- + \nu_-(G_-)(x) \\
&= -\Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{\ell B_-} e^{(x+\ell)B_-} \left[ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \right] \\
& \quad - e^{(x+\ell)B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] \\
& \quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} \left[ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \right] \\
& \quad + \nu_-(G_-)(x),
\end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} \left( e^{-xB_-} - e^{(x+2\ell)B_-} \right) \left[ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') \right] \\
& \quad - \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} \left( e^{-xB_-} - e^{(x+2\ell)B_-} \right) \left[ (I + e^{2LB_+})(I') \right] \\
& \quad - e^{(x+\ell)B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] + \nu_-(G_-)(x).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\beta_+ &= e^{LB_+} \alpha_+ + B_+^{-1} \nu'_+(G_+)(L) \\
&= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{LB_+} \left( [-p_-(I + e^{2\ell B_-})(II') - (I - e^{2\ell B_-})(I')] \right) \\
& \quad + B_+^{-1} \nu'_+(G_+)(L),
\end{aligned}$$

et pour tout  $x \in ]0, L[$ , on a

$$\begin{aligned}
u_+(x) &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} \left( e^{xB_+} + e^{(2L-x)B_+} \right) \left[ -p_-(I + e^{2\ell B_-})(II') - (I - e^{2\ell B_-})(I') \right] \\
& \quad + B_+^{-1} (e^{(L-x)B_+}) \nu'_+(G_+)(L) \\
& \quad + \nu_+(G_+)(x).
\end{aligned}$$

### 3.6 La discontinuité de la densité

Comme nous l'avons mentionné, la densité de population n'est pas continue à travers l'interface. En effet, on a

$$u_-(0) = \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I - e^{2\ell B_-}) \left[ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2\ell B_+}) (II') - (I + e^{2\ell B_+}) (I') \right] - e^{\ell B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] + \nu_-(G_-)(0), \quad (3.14)$$

et

$$u_+(0) = \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I + e^{2\ell B_+}) \left[ -p_-(I + e^{2\ell B_-}) (II') - (I - e^{2\ell B_-}) (I') \right] + B_+^{-1} e^{L B_+} \nu'_+(G_+)(L) + \nu_+(G_+)(0),$$

alors

$$\begin{aligned} u_-(0) - u_+(0) &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I - e^{2\ell B_-}) \left[ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2\ell B_+}) (II') - (I + e^{2\ell B_+}) (I') \right] \\ &\quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} (I + e^{2\ell B_+}) \left[ p_-(I + e^{2\ell B_-}) (II') - (I - e^{2\ell B_-}) (I') \right] \\ &\quad - e^{\ell B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] - B_+^{-1} e^{L B_+} \nu'_+(G_+)(L) \\ &\quad + \nu_-(G_-)(0) - \nu_+(G_+)(0); \end{aligned}$$

mais

$$\Delta_{\lambda, p_-, p_+} = p_-(I + e^{2\ell B_-})(I + e^{2\ell B_+}) + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2\ell B_+})(I - e^{2\ell B_-}),$$

donc

$$\begin{aligned} u_-(0) - u_+(0) &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2\ell B_+}) (I - e^{2\ell B_-}) \\ &\quad + p_-(I + e^{2\ell B_+}) (I + e^{2\ell B_-})] (II') \\ &\quad + \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} [(I + e^{2\ell B_+}) (I - e^{2\ell B_-}) - (I - e^{2\ell B_-}) (I + e^{2\ell B_+})] (I') \\ &\quad - e^{\ell B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] - B_+^{-1} e^{L B_+} \nu'_+(G_+)(L) \\ &\quad + \nu(G_-)(0) - \nu_+(G_+)(0) \\ &= (II') - e^{\ell B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] - B_+^{-1} e^{L B_+} \nu'_+(G_+)(L) \\ &\quad + \nu_-(G_-)(0) - \nu_+(G_+)(0); \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que

$$\begin{aligned} (II') &= (II) + e^{\ell B_-} \nu_-(G_-)(-\ell) + e^{L B_+} B_+^{-1} \nu'_+(G_+)(L) \\ &= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + \nu_+(G_+)(0) - \nu_-(G_-)(0) \\ &\quad + e^{\ell B_-} \nu(G_-)(-\ell) + e^{L B_+} B_+^{-1} \nu'_+(G_+)(L). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 u_-(0) - u_+(0) &= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + \nu_+(G_+)(0) - \nu_-(G_-)(0) \\
 &\quad + e^{\ell B_-} \nu_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} \nu'_+(G_+)(L) \\
 &\quad - e^{\ell B_-} [\nu_-(G_-)(-\ell)] - B_+^{-1} e^{LB_+} \nu'_+(G_+)(L) \\
 &\quad + \nu_-(G_-)(0) - \nu_+(G_+)(0) \\
 &= \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] \neq 0,
 \end{aligned}$$

depuis

$$d_+ G_+(0) - d_- G_-(0) = g_+(0) - g_-(0) \neq 0.$$

# 4

## Estimation de l'opérateur résolvant

---

### 4.1 Estimation de la norme $\|u_-\|_\infty$

Ici,  $x \in [-\ell, 0]$ . Toutes les constantes  $C$  dans cette section sont indépendantes de  $\lambda$  en vertu de (3.9). Estimons d'abord :

$$\begin{aligned} (a) &= \frac{1}{2} \int_{-\ell}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\ell}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\ell}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(x) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(x) dt, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} (a) &= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-\ell}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} G_-(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(x) - B_-^{-2} G_-(x). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \|(a)\|_E &\leq C \|B_-^{-2}\| \|G_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)} \\
 &\leq C \left\| \left( A - \frac{r_-}{d_-} I - \frac{\lambda}{d_-} I \right)^{-1} \right\| \|G_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)} \\
 &\leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|G_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, estimons

$$\begin{aligned}
 (b) &= v_-(G_-)(-\ell) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\ell}^0 e^{(t+\ell)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-\ell}^0 B_- e^{(t+\ell)B_-} (G_-(t) - G_-(-\ell)) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} B_-^{-1} \int_{-\ell}^0 e^{(t+\ell)B_-} G_-(-\ell) dt. \\
 &= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-\ell}^0 B_- e^{(t+\ell)B_-} (G_-(t) - G_-(-\ell)) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} (e^{\ell B_-} - I) G_-(-\ell),
 \end{aligned}$$

comme ci-dessus. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|(b)\|_E &\leq C \|B_-^{-2}\| \|G_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)} \\
 &\leq \frac{C}{\left( \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right)} \|G_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)}.
 \end{aligned}$$

Pour le troisième terme suivant,

$$\begin{aligned}
 (c) &= v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L e^{tB_+} B_+^{-1} G_+(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\ell}^0 e^{-tB_-} B_-^{-1} G_-(t) dt, \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L B_+^{-1} e^{tB_+} (G_+(t) - G_+(0)) dt + \frac{1}{2} \int_0^L B_+^{-1} e^{tB_+} G_+(0) dt \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\ell}^0 B_-^{-1} e^{-tB_-} (G_-(t) - G_-(0)) dt - \frac{1}{2} \int_{-\ell}^0 B_-^{-1} e^{-tB_-} G_-(0) dt \\
 &= \frac{B_+^{-2}}{2} \int_0^L B_+ e^{tB_+} (G_+(t) - G_+(0)) dt \\
 &\quad - \frac{B_-^{-2}}{2} \int_{-\ell}^0 B_- e^{-tB_-} (G_-(t) - G_-(0)) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} (e^{LB_+} - I) G_+(0) + \frac{1}{2} B_-^{-2} (I - e^{\ell B_-}) G_-(0),
 \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned} \|(c)\|_E &\leq C\|B_+^{-2}\|\|G_+\|_{C^\theta([0,L],E)} + C\|B_-^{-2}\|\|G_-\|_{C^\theta([- \ell,0],E)} \\ &\leq \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+}\right|}\|G_+\|_{C^\theta([0,L],E)} + \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-}\right|}\|G_-\|_{C^\theta([- \ell,0],E)}; \end{aligned}$$

La même estimation est obtenue pour tous les termes dans  $u_-(x)$ . En résumé, nous avons, pour tout  $\lambda$  complexe tel que

$$\begin{cases} |\lambda| > r_+ \\ |\arg(\lambda)| < \pi - \varepsilon_0, \end{cases}$$

L'estimation

$$\|u_-\|_{C([- \ell,0],E)} \leq \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+}\right|}\|G_+\|_{C^\theta([0,L],E)} + \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-}\right|}\|G_-\|_{C^\theta([- \ell,0],E)}.$$

De la même manière, on obtient

$$\|u_+\|_{C([0,L],E)} \leq \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+}\right|}\|G_+\|_{C^\theta([0,L],E)} + \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-}\right|}\|G_-\|_{C^\theta([- \ell,0],E)}.$$

Tous ces dénominateurs ne s'annulent pas.

## 4.2 Estimation de la semi-norme $[u_-]_\theta$

Comme précédemment, toutes les constantes  $C$  de cette section sont indépendantes de  $\lambda$  en vertu de (3.9). Nous devons maintenant estimer la semi-norme

$$[u_-]_\theta = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [- \ell, 0] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\|u_-(x_1) - u_-(x_2)\|_E}{|x_1 - x_2|^\theta};$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} u_-(x) &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} \left( e^{-xB_-} - e^{(x+2\ell)B_-} \right) \left[ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \right] \\ &\quad - e^{(x+\ell)B_-} [v_-(G_-)(-\ell)] + v_-(G_-)(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \\ &= p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \left[ \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \right] \\ &\quad + p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \left[ e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \right] \\ &\quad - B_-^{-1} (I + e^{2LB_+}) \left[ -p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0) \right] \\ &\quad - (I + e^{2LB_+}) [p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L)]; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \\
&= p_+ B_-^{-1} B_+ \left[ \frac{1}{\lambda} (d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)) \right] \\
&+ p_+ B_-^{-1} B_+ [v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0)] \\
&- p_+ B_-^{-1} B_+ e^{2LB_+} \left[ \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + \nu_+(G_+)(0) - \nu_-(G_-)(0) \right] \\
&+ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+}) \left[ e^{\ell B_-} \nu_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} \nu'_+(G_+)(L) \right] \\
&- B_-^{-1} (I + e^{2LB_+}) \left[ -p_- \nu'_-(G_-)(0) + p_+ \nu'_+(G_+)(0) \right] \\
&- (I + e^{2LB_+}) \left[ p_- e^{\ell B_-} \nu_-(G_-)(-\ell) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} + \nu'_+(G_+)(L) \right];
\end{aligned}$$

donc, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \\
&= \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + (III),
\end{aligned}$$

où le terme  $(III)$  est régulier, c'est-à-dire, au moins dans le domaine de  $B_-$ . On obtient alors pour la représentation de  $u_-$  :

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] \\
&+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{(x+2\ell)B_-} \left[ p_+ B_-^{-1} B_+ (I - e^{2LB_+})(II') - (I + e^{2LB_+})(I') \right] \\
&+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} \left( e^{-xB_-} - e^{(x+2\ell)B_-} \right) [(III)] \\
&- e^{(x+\ell)B_-} [v_-(G_-)(-\ell)] + v_-(G_-)(x).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
e^{(x+\ell)B_-} [v_-(G_-)(-\ell)] &= \frac{1}{2} e^{(x+\ell)B_-} \left( \int_{-\ell}^0 e^{(t+\ell)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{(x+\ell)B_-} \left( \int_{-\ell}^0 e^{(t+\ell)B_-} B_-^{-1} (G_-(t) - G_-(-\ell)) dt \right) \\
&+ \frac{1}{2} e^{(x+\ell)B_-} \left( \int_{-\ell}^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(-\ell) dt \right) \\
&= \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} \left( \int_{-\ell}^0 B_- e^{(t+\ell)B_-} (G_-(t) - G_-(-\ell)) dt \right) \\
&+ \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} \left( e^{\ell B_-} G_-(-\ell) - G_-(-\ell) \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v_-(G_-)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\ell}^x e^{(x-t)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(t-x)B_-} B_-^{-1} G_-(t) dt \\
&= \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-\ell}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} G_-(x) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(x) - B_-^{-2} G_-(x).
\end{aligned}$$

En résumé, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + (IV) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} \left( \int_{-\ell}^0 B_- e^{(t+\ell)B_-} (G_-(t) - G_-(-\ell)) dt \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} (e^{\ell B_-} G_-(-\ell) - G_-(-\ell)) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-\ell}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} G_-(x) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(x) - B_-^{-2} G_-(x),
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= \frac{1}{\lambda} p_+ B_-^{-1} B_+ \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} e^{-xB_-} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + (IV) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} \left( \int_{-\ell}^0 B_- e^{(t+\ell)B_-} (G_-(t) - G_-(-\ell)) dt \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} e^{\ell B_-} G_-(-\ell) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} G_-(-\ell) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_{-\ell}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} (G_-(x) - G_-(\ell)) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{(x+\ell)B_-} G_-(-\ell) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} (G_-(x) - G_-(0)) + \frac{1}{2} B_-^{-2} e^{-xB_-} G_-(0) - B_-^{-2} G_-(x);
\end{aligned}$$

Remarquons que le terme  $(IV)$  est régulier. Posons

$$\begin{cases} w_1(x) = \frac{1}{2} \int_{-\ell}^x B_- e^{(x-t)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ w_2(x) = \frac{1}{2} \int_x^0 B_- e^{(t-x)B_-} (G_-(t) - G_-(x)) dt \\ \Psi = \int_{-\ell}^0 B_- e^{(t+\ell)B_-} (G_-(t) - G_-(-L)) dt. \end{cases}$$

Alors, nous savons que

$$[w_1]_\theta \leq C \|G_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)}, \quad [w_2]_\theta \leq C \|G_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)},$$

en appliquant exactement les mêmes techniques que dans [16], p. 46. D'autre part, nous avons

$$\Psi \in D_{B_-}(\theta, +\infty) = D_A(\frac{\theta}{2}, +\infty),$$

ce qui implique que

$$x \mapsto e^{(x+\ell)B_-} \left( \int_{-\ell}^0 B_- e^{(t+\ell)B_-} (G_-(t) - G_-(-\ell)) dt \right) \in C^\theta([- \ell, 0]; E).$$

Écrivons maintenant

$$w_3(x) = e^{-xB_-} (G_-(x) - G_-(0)) + e^{-xB_-} G_-(0) := w_{31}(x) + w_{32}(x),$$

et observons que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} w_3(x) = G_-(0),$$

car  $G_-(0) \in E = \overline{D(A)} = \overline{D(B_-)}$ . Ainsi,  $w_3 \in C([- \ell, 0]; E)$  et nous savons que

$$w_{31} \in C^\theta([- \ell, 0]; E),$$

en vertu de [16] (voir p. 47 pour la propriété höldérienne de la fonction dans (4.19)). D'autre part,

$$w_{32} \in C^\theta([- \ell, 0]; E),$$

si et seulement si

$$G_-(0) \in D_{B_-}(\theta, +\infty) = D_A(\theta/2, +\infty).$$

De manière similaire, on obtient

$$x \mapsto e^{(x+\ell)B_-} G_-(-\ell) \in C^\theta([- \ell, 0]; E),$$

si et seulement si

$$G_-(-\ell) \in D_{B_-}(\theta, +\infty) = D_A(\theta/2, +\infty).$$

En résumé, si nous supposons que

$$g_+(0), g_-(0), g_-(-\ell) \in D_A(\theta/2, +\infty),$$

nous avons

$$\begin{aligned} [u_-]_\theta &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|g_+(0) - g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + C \|B_-^{-2}\| \|g_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)} \\ &\quad + C \|B_-^{-2}\| \left[ \|e^{\ell B_-} G_-(-\ell)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \|G_-(-\ell)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} \right] \\ &\quad + C \|B_-^{-2}\| \|g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)}. \end{aligned}$$

Mais

$$\|B_-^{-2}\| = \left\| - \left[ - \left( A - \frac{r_-}{d_-} I - \frac{\lambda}{d_-} I \right) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|},$$

ainsi

$$\begin{aligned} [u_-]_\theta &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|g_+(0) - g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \|g_-\|_{C^\theta([- \ell, 0]; E)} \\ &\quad + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} + \frac{r_-}{d_-} \right|} \left[ \|e^{\ell B_-} G_-(-\ell)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \|G_-(-\ell)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} \right] \\ &\quad + \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_-} - \frac{r_-}{d_-} \right|} \|g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)}. \end{aligned}$$

### 4.3 Estimation de la semi-norme $[u_+]_\theta$

Comme dans les deux sections précédentes, toutes les constantes  $C$  ici sont indépendantes de  $\lambda$  en vertu de (3.9).

Rappelons que

$$\begin{aligned} u_+(x) &= \Delta_{\lambda, p_-, p_+}^{-1} \left( e^{xB_+} + e^{(2L-x)B_+} \right) \cdot \left[ -p_-(I + e^{2\ell B_-})(II') - (I + e^{2\ell B_-})(I') \right] \\ &\quad + B_+^{-1} e^{(L-x)B_+} v'_+(G_+)(L) + v_+(G_+)(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} (I') = (I) - p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) \\ (II') = (II) + e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L), \\ (I) = B_-^{-1} \left[ -p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0) \right] \\ (II) = \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} &-p_- \left( I + e^{2\ell B_-} \right) (II') - (I - e^{2\ell B_-})(I') \\ &= -p_- \left( I + e^{2\ell B_-} \right) \left[ (II) + e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \right] \\ &\quad - (I - e^{2\ell B_-}) \left[ (I) - p_+ B_+^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) \right] \\ &= -p_- \left( I + e^{2\ell B_-} \right) \left[ \frac{1}{\lambda} [d_+ G_+(0) - d_- G_-(0)] + v_+(G_+)(0) - v_-(G_-)(0) \right] \\ &\quad - p_- \left( I + e^{2\ell B_-} \right) \left[ e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) + e^{LB_+} B_+^{-1} v'_+(G_+)(L) \right] \\ &\quad - (I - e^{2\ell B_-}) \left[ B_-^{-1} \left( -p_- v'_-(G_-)(0) + p_+ v'_+(G_+)(0) \right) \right] \\ &\quad - (I - e^{2\ell B_-}) \left[ -p_+ B_-^{-1} e^{LB_+} v'_+(G_+)(L) + p_- e^{\ell B_-} v_-(G_-)(-\ell) \right]. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} v_+(G_+)(x) + B_+^{-1}e^{(L-x)B_+}v'_+(G_+)(L) &= \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_+} B_+^{-1}G_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^L e^{(t-x)B_+} B_+^{-1}G_+(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-1}e^{(L-x)B_+} \int_0^L e^{(L-t)B_+} G_+(t) dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B_+^{-1}e^{(L-x)B_+} \int_0^L e^{(L-t)B_+} G_+(t) dt &= \frac{1}{2} B_+^{-2}e^{(L-x)B_+} \int_0^L B_+e^{(L-t)B_+} [G_+(t) - G_+(L)] \\ &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-1}e^{(L-x)B_+} \int_0^L B_+e^{(L-t)B_+} G_+(L) dt \\ &= \frac{1}{2} B_+^{-2}e^{(L-x)B_+} \int_0^L B_+e^{(L-t)B_+} [G_+(t) - G_+(L)] dt \\ &\quad - \frac{1}{2} B_+^{-2}e^{(L-x)B_+} G_+(L) + \frac{1}{2} B_+^{-2}e^{(L-x)B_+} e^{LB_+} G_+(L), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-t)B_+} B_+^{-1}G_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^L e^{(t-x)B_+} B_+^{-1}G_+(t) dt \\ &= \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_0^x B_+e^{(x-t)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt, \\ &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_x^L B_+e^{(t-x)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-1} \int_0^x e^{(x-t)B_+} G_+(x) dt + \frac{1}{2} B_+^{-1} \int_x^L e^{(t-x)B_+} G_+(x) dt \\ &= \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_0^x B_+e^{(x-t)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} \int_x^L B_+e^{(t-x)B_+} (G_+(t) - G_+(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{xB_+} [G_+(x) - G_+(0)] + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{xB_+} G_+(0) \\ &\quad + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} [G_+(x) - G_+(L)] + \frac{1}{2} B_+^{-2} e^{(L-x)B_+} G_+(L) \\ &\quad - B_+^{-2} G_+(x). \end{aligned}$$

Puisque

$$\|B_+^{-2}\| = \left\| - \left[ - \left( A + \frac{r_+}{d_+} I - \frac{\lambda}{d_+} I \right) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\left| \frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+} \right|},$$

les estimations pour  $[u_+]_\theta$  sont valables pour  $[u_-]_\theta$ , sous l'hypothèse que

$$g_+(0), g_+(L) \in D_A(\theta/2, +\infty),$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned}
[u_+]_\theta &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|g_+(0) - g_-(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+}\right|} \|g_+\|_{C^\theta([0, L]; E)} \\
&\quad + \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+}\right|} \|g_+(L)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)} + \frac{C}{\left|\frac{\lambda}{d_+} - \frac{r_+}{d_+}\right|} \|g_+(0)\|_{D_A(\theta/2, +\infty)}.
\end{aligned}$$

**Théorème 4.1.** *L'opérateur de dispersion  $\mathcal{L}$  défini dans les deux habitats décrits en (3.7) ci-dessous génère un semi-groupe analytique (pas nécessairement continu en 0).*

## Bibliographie

- [1] **A.V. Balakrishnan** : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them.* Pacific J. Math. 10 (1960) 419–437.
- [2] **R.S. Cantrell, C. Cosner** : *Diffusion models for population dynamics incorporating individual behavior at boundaries : applications to refuge design.* Theor. Popul. Biol. 55 (1999) 189–207.
- [3] **M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh** : *A. Yagi, Banach space operator with a bounded  $H^\infty$  functional calculus.* J. Aust. Math. Soc. A 60 (1996) 51–89.
- [4] **G. Da Prato, P. Grisvard** : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles.* J. Math. Pures Appl., IX Ser. 54,6(1975),no.3, 305–387.
- [5] **G. Dore, A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet** : *An abstract transmission problem in a thin layer, I : sharp estimates.* J. Funct. Anal. 261 (2011) 1865–1922.
- [6] **G. Dore, A. Venni** :  *$H^\infty$  Functional Calculus for Sectorial and Bisectorial Operators.* Studia Math. 166 (2005) 221–241.
- [7] **H.O. Fattorini** : *The Cauchy problem, Encyclopedia Math. Appl., vol. 18, Addison Wesley publishing Co., Reading, MA, 1983.*
- [8] **A. Favini, R. Labbas, A. Medeghri, A. Menad** : *Analytic semigroups generated by the dispersal process in two habitats incorporating individual behavior at the interface,* J. Math. Anal. Appl. 471 (2019) 448–480.
- [9] **P. Grisvard** : *Spazi di Tracce e Applicazioni* Rend. Mat. (4) 5(VI) (1972) 657–729.
- [10] **M. Haase** : *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 169, 2006.*
- [11] **R. Labbas, A. Medeghri, A. Mened** : *Solvability of elliptic differential equation set in three habitats with skewness boundary conditions at the interfaces, Mediterr. J. Math.* (2018) 1–23.
- [12] **A. Lunardi** : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems.* Birkhäuser, 1995.
- [13] **A. Medeghri** : *Introduction aux Semi-groupes.* Polycopié de cour. Ecoles EDA-EDO. 13-18 Mai 2006.
- [14] **O. Ovaskainen, S.J. Cornell** : *Biased movement at a boundary and conditional occupancy times for diffusion process.* J. Appl. Probab. 40 (2003) 557–580.

- [15] **A. Pazy** : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983, p. 119.
- [16] **E. Sinestrari** : *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions*. J. Math. Anal. Appl. 66 (1985) 16–66.
- [17] **C.L. Zuily, H. Queff  lec** : *El  ments d’analyse pour l’agr  gation*. Masson, Paris, 1995.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم -

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية  
لإنجاز البحث

أنا الممضي أدناه،

الطالب (ة): جيلالي صولضي شرف الدين رقم التسجيل الجامعي: 202037070671

الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم: 120313940 والصادرة بتاريخ: 15.04.2021

عن بلدية واد رهيو - غليزان

المسجل بكلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي / قسم الرياضيات والإعلام الآلي

شعبة الرياضيات / التخصص التحليل العالي

والمكلف بإنجاز مذكرة ماستر بعنوان:

Application du Théorème de Kato: Semi-Groupes Analytiques Générées par un processus de Dispersion dans deux Habitats incorporant le comportement Individuel à L'interface.

أصرح بشرفي أنني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات العلمية والنزاهة الأكاديمية المطلوبة في إنجاز البحث ، وأتحمل المسؤولية الشخصية عن كل المحتوى المتضمن في البحث المذكور أعلاه .

التاريخ: 11.06.2025

إمضاء المعني

