



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم  
Université Abdelhamid Ben Badais – Mostaganem  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie mécanique



N° d'ordre : M 133/GM/2019

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDES DE MASTER ACADEMIQUE

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité : CONSTRUCTION**

## *Thème*

**Calcul en Fatigue des structures sollicitées sous  
chargements multiaxiaux d'amplitude constante**

**Présenté par :**

1. ABDELSADOK Seyyid Ahmed
2. GHALEM Mohammed

**Soutenu le 25/09/2019 devant le jury composé de :**

Présidente : Pr ZENASNI Ramdane UMAB-Mostaganem  
Examinatrice : Dr KHAIT Mohammed Amine UMAB-Mostaganem  
Encadreur : Dr BENKABOUCH Salah Eddine UMAB-Mostaganem

**Année Universitaire:2018/2019**

## ملخص

في هذا العمل, قمنا بحساب هياكل التعب ، والتي تتعرض للتحميل الأحادي الثابت والسعة الدورية . يستخدم معيار التعب كروسلاندي لتحويل هذه الضغوط إلى الإجهاد يعادل، والتي سيتم التحقق منها مع حد التحمل في التواء التناوب . يتم تحديد موتر التواتر في كل نقطة من الهيكل المدروس عبر برنامج Ansys لقد استخدمنا سبائك فولاذية منخفضة ، ومن المعروف أن منحنيات Wöhler للتواء وأثناء الانحناء. لقد حددنا المناطق ذات التركيز العالي للإجهاد (منطقة بدء الشقوق)، وقمنا بتقييم عمر كل إجهاد، للهياكل ذات العيوب في الشكل.

## Résumé :

Dans ce travail nous avons calculé des structures en fatigue, qui sont sollicitées par des chargements monotones et cycliques à amplitude constante. Le critère de fatigue de Crossland est exploité pour convertir ces sollicitations en une contrainte équivalente, qui sera par la suite vérifiée avec la limite d'endurance en torsion alternée. Les tenseurs de contraintes en chaque point de la structure étudiée, sont déterminés via le code Ansys.

Nous avons utilisé un acier faiblement allié, dont les courbes de Wöhler de torsion et flexion alternée, sont connues. Nous avons localisé les zones de forte concentration de contrainte (zone d'initiation de fissures), et évalué les durées de vie à chaque sollicitation, des structures présentant des défauts de forme.

*Mots clés : Chargement, Critère, Endurance, Invariant, Cycle.*

## Abstract

In this work we have calculated fatigue structures, which are subjected to the constant amplitude monotonic and cyclic loadings. The Crossland fatigue criterion is used to convert these stresses into an equivalent stress, which will be verified with the endurance limit in alternating torsion. The stress tensors at each point of the studied structure are determined via the Ansys code.

We used a low alloy steel, whose Wöhler curves of torsion and alternating flexion, are known. We have located the areas of high concentration of stress (crack initiation zone), and evaluated the lifetimes at each stress, of structures with defects in shape.

*Keywords: Loading, Criterion, Endurance, Invariant, Cycle.*

## NOTATIONS

$R$	Rapport de chargement
$\Delta\sigma$	Etendue de la contrainte
$\sigma_a$	Amplitude de la contrainte
$\varepsilon(t)$	Déformation en fonction du temps
$E$	Fonction de fatigue
$\sigma_{\min}$	Contrainte minimale à la traction
$\sigma_{\max}$	Contrainte maximale à la traction
$N$	Nombre de cycles à la rupture
$\sigma(t)$	Contrainte en fonction du temps
$\sigma, \varepsilon$	Contrainte, déformation
$K_t$	Coefficient théorique de concentration de contraintes
$E$	Module d'Young
$\nu$	Coefficient de poisson.
$\Delta\sigma_N$	Etendue de la contrainte nominale
$\Delta\varepsilon_N$	Etendue de la déformation nominale
$\Delta\varepsilon$	Etendue de la déformation totale
$\Delta\varepsilon^e$	Etendue de la déformation élastique
$\Delta\varepsilon^p$	Etendue de la déformation plastique
$N_a$	Nombre de cycle à l'amorçage
$b$	Exposant de Basquin
$a$	Exposant de ductilité en fatigue
$\sigma_e$	Limite d'élasticité
$\mathbf{P}$	Contrainte de compression
$T$	Période
$\sigma_u$	Contrainte ultime à la traction
$t$	Temps
$s$	Seconde
$\sigma_m$	Contrainte moyenne
$R_m$	Résistance maximale à la traction monotone
$\sigma_D$	Limite d'endurance en traction

$\sigma_{eq}$	Contrainte équivalente de Von Mises
$\sigma_{eqa}$	Amplitude de $\sigma_{eq}$
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Contraintes principales
$\sigma_{-1}$	Limite d'endurance en traction alternée symétrique
$\sigma_0$	Limite d'endurance en traction répétée
$f_0$	Limite d'endurance en flexion répétée
$f_{-1}$	Limite d'endurance en flexion alternée symétrique.
$\tau_0$	Limite d'endurance en torsion répétée
$\tau_{-1}$	Limite d'endurance en torsion alternée symétrique
$P_m$	Pression hydrostatique moyenne
$\tau_a$	Amplitude de la contrainte de cisaillement
$f_a$	Amplitude de la contrainte de flexion
$\tau_m$	Contrainte moyenne de cisaillement
$\tau_u$	Contrainte ultime de cisaillement
$\sigma_n$	Contrainte moyenne normale
$\sigma_n^{\max}$	Contrainte normale maximale
$P_{\max}$	Pression hydrostatique maximale
$J_2$	Deuxième invariant du tenseur déviateur de contraintes
$J_{2a}$	Deuxième invariant du tenseur déviateur des amplitudes de contraintes
$\xi_m$	Contrainte moyenne de $\sqrt{J_2}$
$P_H$	Pression hydrostatique
$\xi_a$	Amplitude de la racine carrée du deuxième invariant de déviateur de contraintes
$\tau(t)$	Contrainte de cisaillement en fonction du temps
$\sigma_{EQ}$	Contrainte équivalente de Crossland
$D$	Domage total
$n_i$	Nombre de blocs
$N_{i,f}$	Nombre de cycles à la rupture correspondant
$\sigma_{ai}$	Amplitude de la contrainte correspondante

$F_a$	Amplitude de la force de flexion alternée
$F_{at}$	Amplitude de la force de torsion alternée
$F(t)$	Force en fonction du temps
$\sigma_{ij}(t)$	Composantes du tenseur de contrainte à l'instant $t$
$\vec{S}_n$	Vecteur contrainte
$\overline{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\sigma_n^{\max}$	Contrainte normale maximale
$f_{-1}(N)$	Limite de fatigue en flexion alternée symétrique à $N$ Cycles
$\tau_{-1}(N)$	Limite de fatigue en torsion alternée symétrique à $N$ Cycles
$a(N), b(N)$	Paramètres de fatigue à $N$ Cycles
$A, B, C, m$	Paramètres statistiques liés aux modèles des courbes de Wöhler
$a, b, c, \alpha, \beta$	Paramètres de fatigue liés aux critères de fatigue.
H.D.	Hors Domaine.
CL	Conditions aux Limites
S	Symétrie
$M$	Moment de flexion

## Liste Des Tableaux

Tableau II.1. Caractéristiques mécaniques du matériau (35NCD16).....	22
Tableau II.2. Détermination de la zone critique.....	28
Tableau II.3. Résultats du Raffinement du maillage.....	29
Tableau II.4. Chargements appliqués et résultats obtenus.....	30
Tableau II.5. Détermination de la zone critique.....	34
Tableau II.6. Résultats du Raffinement du maillage de la structure2.....	36
Tableau II.7. Chargements appliqués et résultats obtenus.....	36

## Liste des figures

Figure I.1. Courbe de Wöhler.....	4
Figure I.2.(a):charges appliquées (traction-compression/torsion/flexion)(b) :paramètres de la sollicitation.....	5
Figure I.3. Accommodation.....	6
Figure I.4. Rochet.....	6
Figure I.5. Adaptation.....	7
Figure I.6. Amorçage et propagation des fissures.....	11
Figure II.1. Position de composants ( $P_{max}$ , $\zeta_a$ ) dans le diagramme de Crossland.....	20
Figure II.2. Organigramme de calcul de durée de vie.....	21
Figure II.3. Courbes d'endurance en torsion alternées de 35NCD16.....	23
Figure II.4. Courbes d'endurance en flexion alternées de 35NCD16.....	23
Figure II.5. Droites limites du domaine du critère de Crossland.....	25
Figure II.6. Géométrie de la structure 1.....	26
Figure II.7. Le chargement et les conditions aux limites.....	26
Figure II.8. Présentation un quart de la structure1 avec maillage ordonné (Maillage grossier)..	27
Figure II.9. Position de l'élément 3801.....	27
Figure II.10. zone critique due au chargement en traction monotone.....	28
Figure II.11. Position d'élément 3801 plus claire.....	29
Figure II.12.14. Diagramme de Crossland présentant.....	31
Figure II.15. Géométrie de la structure 2.....	33
Figure II.16. Le chargement et les conditions aux limites.....	33
Figure II.17. Maillage de la structure2.....	34
Figure II.18. Zone critique due à la contrainte moyenne de traction.....	35
Figure II.19. Position de l'élément «5110».....	35
Figure II.20.22. Diagramme de Crossland présentant.....	38

# Sommaire

## INTRODUCTION GENERALE

### Chapitre I :

#### Généralités sur la fatigue

I.1.Introduction.....	1
I.2.Phénomène de la fatigue .....	1
I.3. Historique sur la fatigue .....	2
I.4. Courbe de fatigue .....	3
I.4.1. Représentation de la courbe de Wöhler .....	4
I.5. Les 3 domaines de la courbe de Wöhler .....	5
I.6. Discussion sur la limite de fatigue .....	8
I.7. Paramètres d'influence sur la fatigue .....	9
I.8.Limite de fatigue .....	10
I.9. Amorçage des fissures de fatigue .....	10
I.10. Les critères de fatigue multiaxiaux.....	11
I.10.1. Critères de plasticité .....	11
I.10.1.a. Critère de Von Mises .....	11
I.10.1.b. Critère de Tresca .....	12
I.10.2. Formalisme d'un critère de fatigue .....	12
I.10.3. Les critères d'approche globale .....	13
I.10.3.a. Critère de Marin .....	13

I.10.3.b. Critère de Sines.....	14
I.10.4. Critères de type plan critique .....	14
I.10.4.a. Critère de Mataka.....	15
I.10.4.a. Critère de Dang-Van.....	15
I.10.5. Critères empiriques.....	16
I.10.5.a. Critère de Gough et Pollard :.....	16
I.10.5.b. Critère de Hohenemser et Prager :.....	17
I.10.5.c. Critère de Davies .....	17

## **Chapitre II :**

### **Calcul de durée de vie des structures**

II.1. Introduction.....	18
II.2. Présentation du critère de Crossland.....	18
II.2.1. Le critère de Crossland .....	18
II.3. Présentation de la méthode de travail.....	19
II.3.1. Les étapes de travail.....	22
II.4. Caractéristiques du matériau étudié.....	22
II.5. Courbes de fatigue du matériau étudié.....	23
II.6. calcul la durée de vie.....	24
II.7. Droites limites du critère.....	24
II.7.1. Droite limite du domaine de durée de vie illimitée.....	24
II.7.2. Droite limite du domaine de durée de vie limitée.....	24
II.7.3. Calcul des durées de vie des structures.....	25
II.8. Structure sollicitée à une traction statique superposé à une traction alternée.....	25
II.8.1. La structure 1.....	25

<b>II.8.2. Chargement et conditions aux limites.....</b>	<b>26</b>
<b>II.8.3. Maillage de la structure1.....</b>	<b>27</b>
<b>II.8.4. Détermination de la zone critique.....</b>	<b>27</b>
<b>II.8.5. Raffinement du maillage de la structure1.....</b>	<b>29</b>
<b>II.8.6. Calcul la durée de vie.....</b>	<b>30</b>
<b>II.8.7. Présentation graphique des résultats.....</b>	<b>31</b>
<b>II.9. Structure sollicitée à une traction statique superposée à une traction alternée.....</b>	<b>34</b>
<b>II.9.1. la structure 2.....</b>	<b>34</b>
<b>II.9.2. Chargement et conditions aux limites.....</b>	<b>35</b>
<b>II.9.3. Maillage.....</b>	<b>35</b>
<b>II.9.4. Détermination de la zone critique .....</b>	<b>36</b>
<b>II.9.5. Raffinement du maillage de la structure2.....</b>	<b>37</b>
<b>II.9.6. Calcul de durée de vie.....</b>	<b>37</b>
<b>II.9.7. Présentation graphique des résultats.....</b>	<b>38</b>
<b>II.10. Conclusion.....</b>	<b>42</b>

## **Introduction générale**

La fiabilité des équipements mécaniques est l'une des caractéristiques recherchée, dans les études de dimensionnement des pièces de ces équipements, elle présente la continuité de fonctionnement sans risque d'avoir des anomalies, ou des ruptures de ces composants. Généralement les structures sont sollicitées à plusieurs types de chargements (traction-compression, flexion, torsion, ou combinaison de l'une avec l'autre), sous différentes formes : cycliques ou monotones, leurs réponses se traduisent soit par une résistance, chose recherchée, ou soit par un endommagement.

Les ingénieurs des bureaux d'études ont investis dans le domaine de la fatigue, des essais expérimentaux ont été réalisés, des formules sous les noms de critères de fatigues ont été établis aussi, afin de déterminer la durée de vie des structures. Cela dépend des caractéristiques des matériaux utilisés, la géométrie des structures, le type de chargement,...

L'étude envisagée dans ce mémoire, est une continuité d'un travail déjà réalisé au niveau du laboratoire de l'Elaboration et Caractérisation Physico-Mécanique et Métallurgie des Matériaux de notre université, il s'agit d'un modèle de prédiction des durées de vie des structures, basé sur le critère de fatigue de Crossland. Nous avons utilisé un matériau et structures différents, afin de prédire la durée de vie des structures utilisées..

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques généralités sur le phénomène de la fatigue, en développant les différents domaines de la courbe de Wöhler, les paramètres d'influences sur la tenue en fatigue des structures, suivi d'un aperçu sur quelques critères de fatigue multiaxiale, lesquels comptent parmi les outils incontournables des méthodes d'estimation de durée de vie.

Le second chapitre est réservé à l'application du modèle de prédiction de la durée de vie, basé sur le critère de fatigue de Crossland, ce dernier permet de transformer les contraintes appliquées en une contrainte équivalente via le code Ansys (version 12.1), sur des structures de forme rectangulaire présentant des défauts géométriques.

Une conclusion ainsi que quelques perspectives de ce travail seront présentées en fin de ce mémoire.



# Chapitre I : Généralités sur la fatigue

## I.1.Introduction

Les charges appliquées sur des pièces mécaniques, modifient progressivement les propriétés de leurs matériaux, la répétition cyclique des chargements provoque la formation, puis la propagation des microfissures qui entraînent l'endommagement de ces pièces ou la rupture se produit lorsque le matériau ne peut plus supporter ces chargements, ce phénomène est appelé la fatigue, qui se caractérise par la formation de «microfissures» dans les zones de fortes concentrations de contraintes dues aux effets géométriques (entailles) ou métallurgiques (inclusions). Ces microfissures donnent ensuite naissance progressivement à une fissure macroscopique qui se propage jusqu'à la ruine finale

Le dimensionnement d'une structure à la fatigue est plus difficile par rapport à l'application des charges monotones ou statiques, car la rupture par fatigue dépend de plusieurs paramètres : contraintes locales, géométries, forme du signal de la charge, la multiaxialité des sollicitations,...etc.

La multiaxialité des sollicitations provient de l'application de plusieurs chargements dans différentes directions. Une roue mal équilibrée d'une voiture roulant sur une route présentant des irrégularités, caractérise le phénomène de la fatigue multiaxiale, l'état de contraintes résultant au niveau des zones de forte concentration de contraintes est un état multiaxial [1].

## I.2.Phénomène de la fatigue [2]:

Habituellement, le phénomène de la fatigue est présenté comme un processus par lequel des dommages s'accroissent dans le matériau lors de l'application de charges variables.

Ces dégradations peuvent éventuellement provoquer une rupture, même si la charge maximale est bien inférieure à celle qui est requise pour atteindre la limite d'élasticité du matériau. En fait la fatigue est un phénomène qui produit localement une diminution de la résistance du matériau de construction. Ce matériau peut être un alliage métallique, un polymère ou un matériau composite comme le béton armé ou un plastique renforcé par des fibres.

Afin de préciser les différents aspects de la fatigue des métaux, nous donnons les définitions nécessaires du phénomène de fatigue des éprouvettes de petites dimensions, sollicitées dans des conditions simples, permettant de distinguer les différents domaines où la fatigue peut apparaître ou non. Nous décrirons ensuite les modifications des propriétés physiques et

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

structurales qui accompagnent la répétition des cycles d'efforts et qui conduisent à la fissuration du métal. Enfin, nous énumérerons brièvement les principaux facteurs dont dépend l'endurance d'une pièce, qu'ils soient d'ordre métallurgique, géométrique, liés aux conditions de sollicitation, ou dépendants des conditions d'environnement.

Cette dernière est aussi un phénomène qui provoque l'évolution des propriétés d'un matériau soumis à des sollicitations variables. La répétition des cycles d'efforts peut conduire à la rupture. Cette rupture se produit pour des contraintes le plus souvent inférieures à la limite d'élasticité du matériau. La vérification des projets de ponts métalliques ou mixtes en fatigue, la mise au point de règlements de calcul et les problèmes de maintenance et d'évaluation de la sécurité résiduelle des ouvrages en service font appel à des calculs de dommages en fatigue d'assemblages soudés. Il s'agit de modéliser par la mécanique de la rupture le phénomène de l'endommagement dans la zone critique d'un élément de poutre principale. En raison du caractère aléatoire des charges de trafic et des incertitudes importantes sur les résistances en fatigue de tels assemblages, les calculs déterministes de durées de vie sont insuffisants pour apprécier la sécurité réelle des ouvrages dans leur contexte. Les méthodes probabilistes, permettant de "chiffrer" le niveau de sécurité ou de fiabilité d'une structure, sont nécessaires. Des méthodes de calcul approché des probabilités de ruine vis-à-vis d'un état limite donné ont été développées dans les années 70, dont celle dite de premier ordre et deuxième moment (Rackwitz et Fiessler, 1978), en utilisant la notion de l'indice de fiabilité  $\beta$ . Les premières applications de cette méthode pour des états limites de fatigue ont été présentées lors du séminaire AIPC de Lausanne en mars 1990 (IABSE). Celles-ci avaient un aspect théorique et peu opérationnel à cause du manque de données sur les véritables grandeurs aléatoires comme le trafic ou les résultats d'essais de fatigue. Depuis cette vingtaine d'années, la connaissance des actions du trafic sur les ponts et de leurs lois de probabilité a beaucoup progressé grâce à l'acquisition de données abondantes (Bruis, Jacob et Sedlacek, 1989). Il en est même sur les lois de fatigue et les résistances en fatigue correspondantes, grâce à de très nombreux essais (Brozzetti, Ryan et Sedlacek, 1989).

### I.3. Historique sur la fatigue [3] :

August Wöhler, (1819-1914), a montré très tôt des capacités en mathématiques et a obtenu une bourse pour étudier à la Technicien Hochschule d'Hanovre, sous la direction de Karl Karmarsch. En 1840, il a été recruté dans l'entreprise Bersig à Berlin où il a travaillé à la fabrication des voies ferroviaires. En 1843, après un bref séjour à Hanovre, il a reçu une

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

formation dans la conduite des locomotives en Belgique. Il est ensuite retourné en tant qu'ingénieur à Hanovre sur la ligne de Lehrte. En 1847, Wöhler était surveillant en chef des matériels de transport sur le chemin de fer de la Silésie- Brandenburg. Sa réputation croissante l'a conduit à rencontrer en 1852 le ministre prussien du commerce pour étudier les causes de rupture des axes de chemin de fer, travail qui devait occuper Wöhler pendant les deux décennies suivantes.

Le chemin de fer a été nationalisé en 1854 en Allemagne. La reconnaissance de ses qualités d'administrateur et de ses Compétences techniques ont eu comme conséquence sa nomination comme directeur des chemins de fer impériaux nouvellement formés, dont le siège social était basé à Strasbourg, un poste qu'il a occupé jusqu'à sa retraite en 1889.

Wöhler a commencé ses investigations de recherche dans la théorie de l'élasticité et a proposé, en 1855, une méthode pour prévoir la flèche d'une poutre treillis, ceci avant le travail d'Emile Clapeyron. Il a également présenté une méthode de support des extrémités d'un pont sur roulements à rouleaux pour tenir compte de la dilatation thermique.

Son travail sur la fatigue des matériaux marque la première recherche systématique des courbes SN, également connues sous le nom de courbes de Wöhler, pour caractériser le comportement de fatigue des matériaux. La présentation de son travail à l'exposition de Paris en 1867 lui a conféré une large audience internationale. En son temps, Wöhler était un ardent avocat de la standardisation des essais et certification du fer et de l'acier.

### I.4. Courbe de fatigue :

Cette dernière consiste à soumettre chaque éprouvette de traction, compression, torsion ou de flexion (figure I.1.a) à des cycles d'efforts périodiques, la sollicitation de fatigue est caractérisée par l'étendue de contrainte  $\Delta\sigma$ , et par le rapport de chargement ( $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ ) [4], (figure I.1.b). Il est nécessaire de noter le nombre de cycles  $N$  au bout duquel la rupture se produit. On reporte ce nombre, en général sur une échelle logarithmique, en fonction de la contrainte appliquée. À chaque éprouvette correspond un point du plan  $(N, \sigma)$ . À partir d'un lot d'éprouvettes soumises à des contraintes maximales différentes, on obtient une courbe S-N : Stress – Nombre of cycles (voir figure 1). Les courbes dites de **Wöhler** donnent l'amplitude de contrainte  $\sigma_a = \Delta\sigma / 2$  en fonction du nombre de cycles à rupture, pour un rapport de chargement  $R = -1$  (contrainte alternée).

# Chapitre I : Généralités sur la fatigue

## I.4.1 .Représentation de la courbe de Wöhler [5] :

La courbe S-N peut faire apparaître l'existence d'une « limite d'endurance », définie comme le niveau de contrainte sous lequel un matériau résistera aux contraintes cycliques « indéfiniment » sans rompre. Évidemment, la connaissance d'un tel niveau de contrainte est importante pour un ingénieur puisqu'il lui donne une contrainte de référence réaliste sur lequel il peut baser sa conception. Cependant, pour beaucoup de matériaux, une telle limite n'est pas trouvée dans le temps pratique de l'expérience. Dans ces cas, le concepteur doit se référer directement à la courbe S-N pour la contrainte appropriée qui correspond à la vie attendue de ce qu'il conçoit. Cette courbe peut en général être décomposée en trois zones (fig.1.1) :

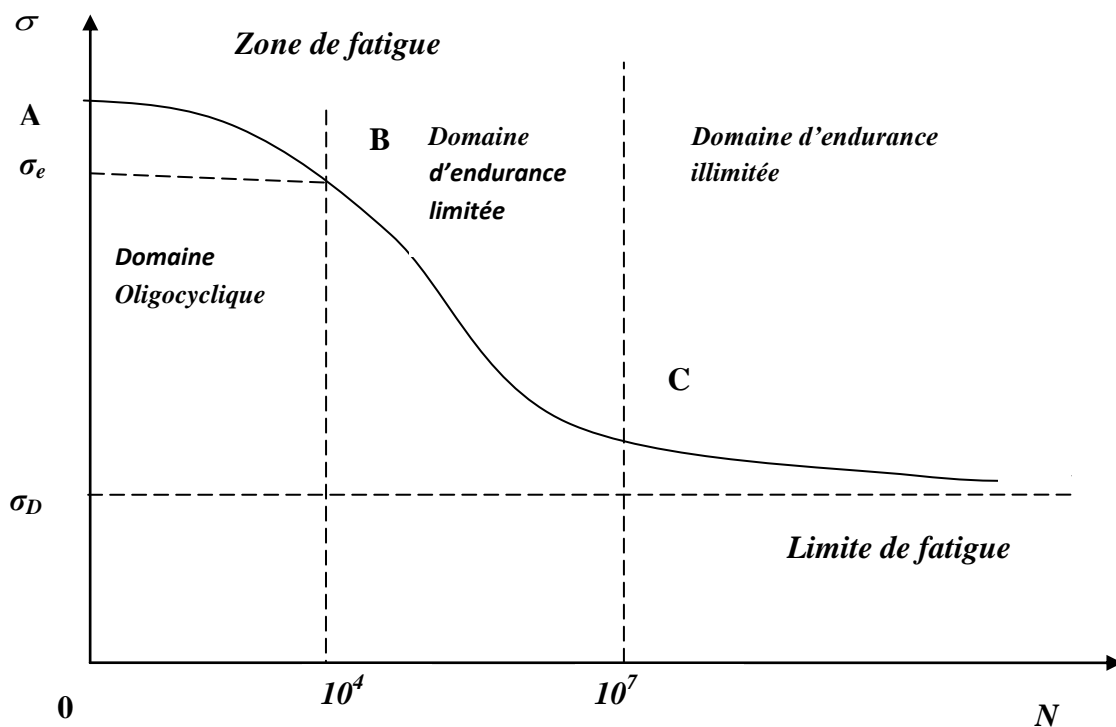
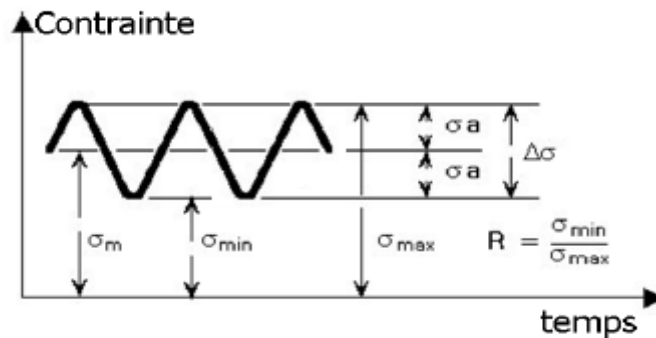
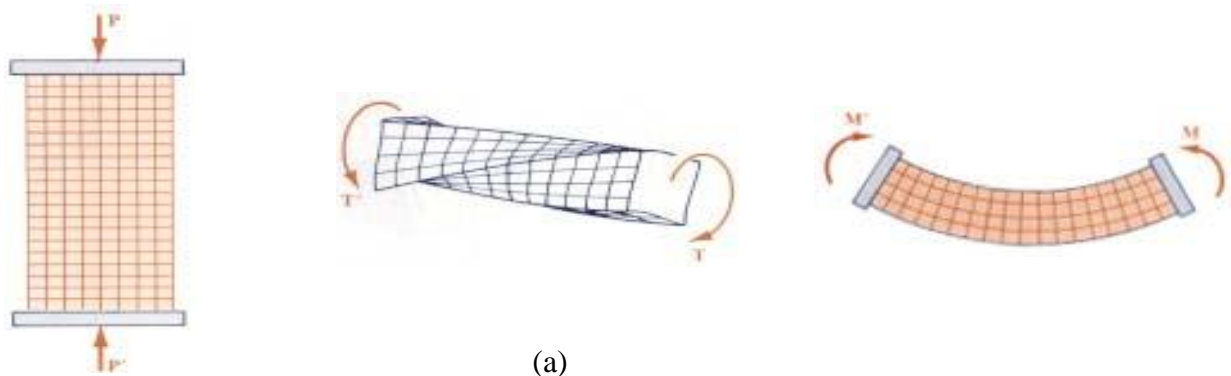


Figure I.1 Courbe de Wöhler.

Sur la courbe de Wöhler il y a une dispersion statistique de la durée de vie, pour une même sollicitation, cela est dû principalement à l'existence de défauts dans le matériau (tolérances d'usinage, défaut superficiels et surtout des facteurs métallurgiques), qui conduisent à l'amorçage et la propagation des fissures. Leurs formes, tailles et positions étant variables. Donc la durée de vie de la pièce est aussi variable. Le dimensionnement des structures, à partir des courbes de Wöhler, doit prévoir une certaine probabilité de rupture. La dispersion des durées de vie augmente lorsque la durée de vie moyenne augmente. Cela limite

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

l'application de courbe de Wöhler pour le dimensionnement des organes de sécurité des structures.



**Figure I. 2.** (a) : charges appliquées (traction - compression / torsion / flexion).  
(b) paramètres de la sollicitation.

### I.5. Les 3 domaines de la courbe de Wöhler [6] :

La zone **AB**, dite **oligocyclique**, qui correspond aux contraintes les plus grandes, supérieures à la limite d'élasticité macroscopique et où le nombre de cycles à la rupture s'étend de 0.5 jusqu'à  $10^4$  ou  $10^7$  (pour les aciers doux). L'éprouvette atteint généralement un état d'accommodation plastique ou un rochet élastoplastique :

**L'accommodation** plastique se produit lorsque la réponse de l'éprouvette devient périodique, c'est à dire la déformation plastique devient périodique, un cycle d'hystérésis élastoplastique se produit.

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

**Le rochet** se produit lorsque la réponse de l'éprouvette n'atteint jamais un état périodique, la déformation plastique croît sans cesse, ce qui va provoquer la ruine de la structure en un nombre de cycles relativement très faible comme la figure I.3.

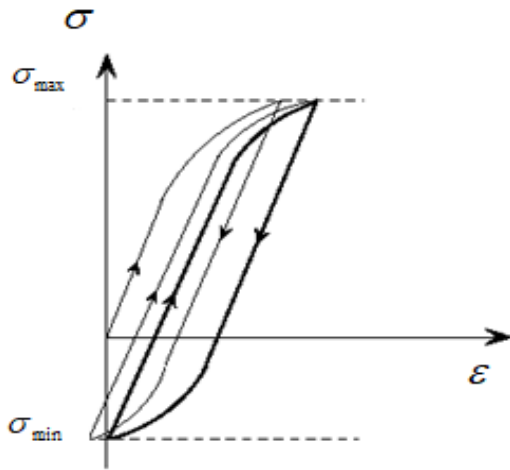


Figure I.2. Accommodation

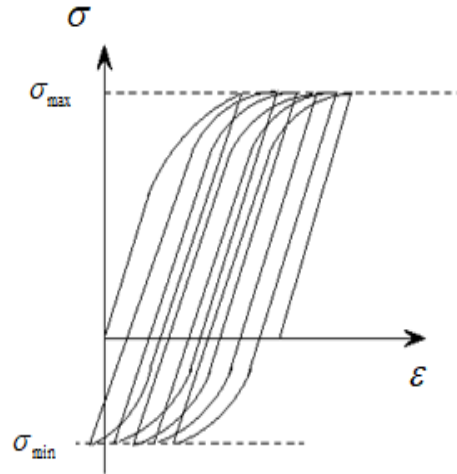


Figure I.3. Rochet

Dans cette zone, la rupture survient après un petit nombre d'alternances et est précédée d'une déformation plastique notable. Par suite de l'amplitude de la contrainte maximale, chaque cycle d'effort entraîne une déformation plastique d'ensemble accompagnée le plus souvent soit d'un durcissement notable, soit d'un adoucissement du métal. La déformation plastique  $E^p$  peut être souvent reliée au nombre de cycles à la rupture par une relation simple de la forme (loi de Manson-Coffin) :

$$N^k E^p = C$$

Où l'exposant  $k$  est voisin de 5 pour les métaux courants (aciers, alliages légers).

❖ **la zone BC, dite zone de fatigue ou d'endurance limitée**, où la rupture est atteinte après un nombre de cycles compris approximativement entre  $10^4$  et  $10^6$  à  $10^7$ . La rupture n'est pas accompagnée d'une déformation plastique d'ensemble, mesurable. La réponse de l'éprouvette atteint dans ce cas un régime adapté élastique. L'adaptation élastique est un état où la réponse de l'éprouvette devient purement élastique, il peut y avoir de la déformation plastique durant les premiers cycles, mais au bout d'un certain nombre de cycles, elle reste constante ; l'état final cependant dépend de l'état initial de la structure.

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

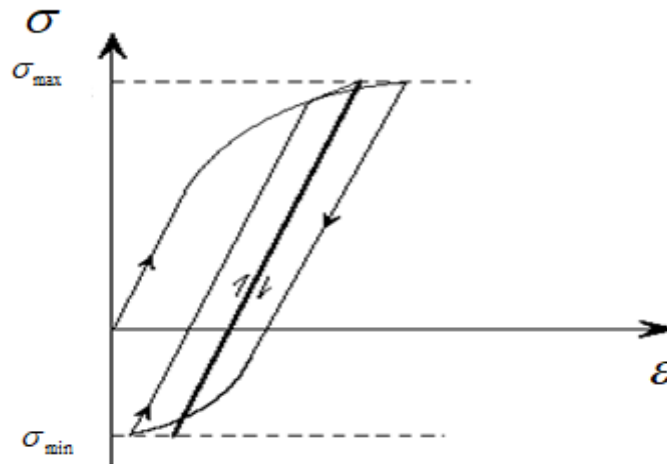


Figure I.4. Adaptation.

C'est le domaine dans lequel travaillent la plupart des structures qui pour diverses raisons, doivent avoir des masses et des volumes impérativement réduits (cas des structures aéronautiques ou automobiles ou nucléaires). Il existe de très nombreuses relations mathématiques reliant  $\sigma_D$  et  $N$  dans ce domaine.

❖ **la zone CD, dite zone d'endurance illimitée ou zone de sécurité**, où D est un point pour les métaux ferreux qui est à «l'infini». La courbe de Wöhler présente généralement une variation de pente plus ou moins marquée autour de

$10^6$  à  $10^7$  cycles, suivie d'une zone (CD) où la courbe tend vers une limite asymptotique parallèle à l'axe des  $N$ . En deçà de cette valeur limite notée  $\sigma_D$ , il n'y a jamais rupture par fatigue quel que soit le nombre de cycles appliqué.

$\sigma_D$  est nommée limite de fatigue ou limite d'endurance. Cette limite peut ne pas exister ou être mal définie pour certains matériaux (aciers à haute résistance, métaux non ferreux). Les grandes durées de vie concernent le domaine de la fatigue polycyclique.

- **Formule de Wöhler(1870)**

$$\sigma_a = a - b \log N \dots\dots\dots (I.1)$$

Avec  $a > 0$  et  $b > 0$

Cette relation ne décrit pas la totalité de la courbe de Wöhler puisque  $\sigma_a$  ne tend pas vers une limite  $\sigma_D$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Elle ne représente que la partie BC.

- **Formule de Basquin [6],[7]**

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

$$\log N = a - b \log \sigma_a \dots\dots\dots(\text{I.2})$$

Avec  $a > 0$  et  $b > 0$

Où

$$N \sigma_a^\beta = C \dots\dots\dots(\text{I.3})$$

En posant  $\beta = 1/b$  et  $\ln C = a/\beta$

$b$  est nommé index de la courbe de fatigue.

Dans l'expression de l'équation (I-3) : la contrainte tend vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini. Cette relation n'est donc représentative de la courbe de Wöhler que dans sa partie BC. Par ailleurs, elle représente des droites dans des axes logarithmiques et non dans des axes semi-logarithmiques.

### I.6 .Discussion sur la limite de fatigue [7]:

La courbe SN donne lieu à plusieurs règles de dimensionnement à la fatigue dont la justesse est contredite par les résultats obtenus en fatigue gigacyclique ( $10^9$  cycles). La normalisation internationale présente la courbe SN comme étant hyperbolique pour les aciers et quasi-hyperbolique pour les autres alliages. De cette hypothèse, il est admis que, au-delà de  $10^7$  cycles, la durée de vie en fatigue tend vers l'infini. Il est admis, de plus, que la valeur asymptotique de la contrainte cyclique correspondant à  $10^7$  cycles devient une limite de fatigue, cette dernière étant déterminée par une approche statistique fondée sur une répartition log-normale de la dispersion, seconde hypothèse peu crédible au regard des résultats de fatigue giga cyclique. Faute d'avoir pu exploiter correctement les très grandes durées de vie de l'ordre du milliard de cycles, des spéculations hasardeuses ont été utilisées à partir du calcul d'un écart type, sur une population de résultats trop restreinte.

D'un autre point de vue, on a souvent tenté de trouver une relation entre le seuil de non propagation de fissure ( $K_s$ ) et la limite de fatigue ( $\sigma_D$ ) de la courbe SN. Cette relation ne peut exister que si la limite de fatigue, ou la résistance à la fatigue, est correctement déterminée. Dans la relation  $\Delta K_s = \sigma_D \sqrt{\pi a}$ , l'erreur sur  $K_s$  est assez faible parce que la pente de la courbe de fissuration à ce niveau de vitesse est quasi verticale. En revanche, l'expérience montre qu'entre  $\sigma_D$  à  $10^6$  cycles et  $10^9$  cycles il peut exister une différence supérieure à 30 %.

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

Il a été montré que dans certains cas, la différence de résistance à la fatigue peut décroître de 100 MPa voire même de 200 MPa, entre  $10^6$  et  $10^9$  cycles à la rupture et que le concept de limite infinie de fatigue n'est donc pas correct. Sous ces conditions, une limite de fatigue définie grâce à une analyse statistique entre  $10^6$  et  $10^7$  cycles ne peut pas garantir une durée de vie à la fatigue infinie.

Compte tenu de l'allongement de la durée d'utilisation et de la sécurité des équipements tels que les automobiles, les rails de chemin de fer, les avions, les compresseurs, les turbines, qui sont soumis à des chargements cycliques ou à des vibrations, durant leur service, peuvent atteindre  $10^6$  cycles, il est très important de pouvoir déterminer une limite d'endurance sûre pour  $10^9$  cycles (Bathias, 1999)

### I.7. Paramètres d'influence sur la fatigue :

La durée de vie en fatigue des joints soudés est fortement affectée par la présence en pied du cordon d'une concentration de contrainte liée à la géométrie de la soudure. Les zones d'amorçage de la fissure sont en correspondance soit avec cet accident géométrique du cordon, soit avec un défaut interne (manque de pénétration, soufflures) ou externe (caniveaux, inclusions de laitier).

La résistance statique d'un assemblage soudé bout à bout est en général égale à celle du métal base par contre la résistance en fatigue est bien inférieure. Différents paramètres affectent la tenue en fatigue des joints soudés :

- facteurs géométriques : forme du cordon, mauvais alignement des tôles, épaisseur des tôles,
- facteurs métallurgiques : nature du métal base, procédé de soudage, défauts de soudage, niveau des contraintes résiduelles,
- facteurs liés à la sollicitation : mode de chargement (amplitude constante ou variable, rapport de charge), gradient de sollicitation, bi axialité des contraintes, environnement.
- Rapport de charge : La valeur du rapport de charge  $R = \min / \max$  a une grande influence sur l'endurance en fatigue pour le matériau de base.

### I.8.Limite de fatigue :

Pour une contrainte moyenne  $\sigma_m$  donnée, c'est la plus grande amplitude de contrainte pour laquelle il n'est pas observé de rupture après un nombre infini de cycle. Dans le cas

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

particulier des aciers, il est expérimentalement constaté que ce nombre infini peut être ramené à  $10^7$  cycles. En revanche, pour les aciers en présence de corrosion et pour certains alliages d'aluminium, de cuivre ou de titane, cette limite de fatigue reste théorique et sans intérêt puisque tous les mécanismes ont une durée de vie limitée par suite de l'usure, la corrosion ou d'autres causes inhérentes à leur service même; on est donc conduit à utiliser une autre grandeur appelée limite d'endurance

### I.9. Amorçage des fissures de fatigue [8]

Pour les structures soumises à des sollicitations variables au cours du temps, la ruine peut survenir au bout d'une durée finie. On définit souvent comme critère de ruine l'apparition d'une fissure d'une taille critique,  $a_{cr}$ . L'intervalle de temps, compris entre le début de la sollicitation et l'instant correspondant à la présence d'une fissure de d'une taille critique,  $a_{cr}$ , couvre en réalité plusieurs phénomènes physiques.

L'observation de la fissuration dans les structures soumises à la fatigue montre que le processus qui conduit à la ruine peut être décomposé en plusieurs stades. Tout d'abord, dans les zones où le matériau est le plus sollicité, des microfissures apparaissent. Puis, elles se développent et coalescent les unes avec les autres jusqu'à ce qu'elles forment une fissure de taille macroscopique. Enfin, cette fissure se propage jusqu'à la ruine de la structure.

Il est d'usage de diviser la durée de vie d'une structure en deux phases : la phase d'amorçage et la phase de propagation.

Cependant, le problème de base consiste à définir le stade où l'amorçage se termine, c'est à dire où la propagation d'une fissure peut être décrite. La période de propagation pourrait être définie, par le stade à partir duquel une fissure unique s'amorce ou le stade où les microfissures commencent à coalescer ? Ou encore celui qui correspond à la création de la « première » microfissure ?

Aujourd'hui encore, la définition de l'amorçage reste un problème ouvert. Pour dimensionner les structures soumises à la fatigue, l'ingénieur a besoin de modèles qui permettent d'estimer le nombre de cycles  $N$  et donc de calculer le nombre de cycles à l'amorçage  $N_a$  et le nombre de cycles à la propagation  $N_p$ . La mise en œuvre de tels modèles n'est pas facile puisque les durées respectives des phases d'amorçage et de propagation dépendent fortement de l'amplitude de la sollicitation, de la présence éventuelle de défauts initiaux dans le matériau, de l'état initial de la structure et de la définition que l'on a de l'amorçage.

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

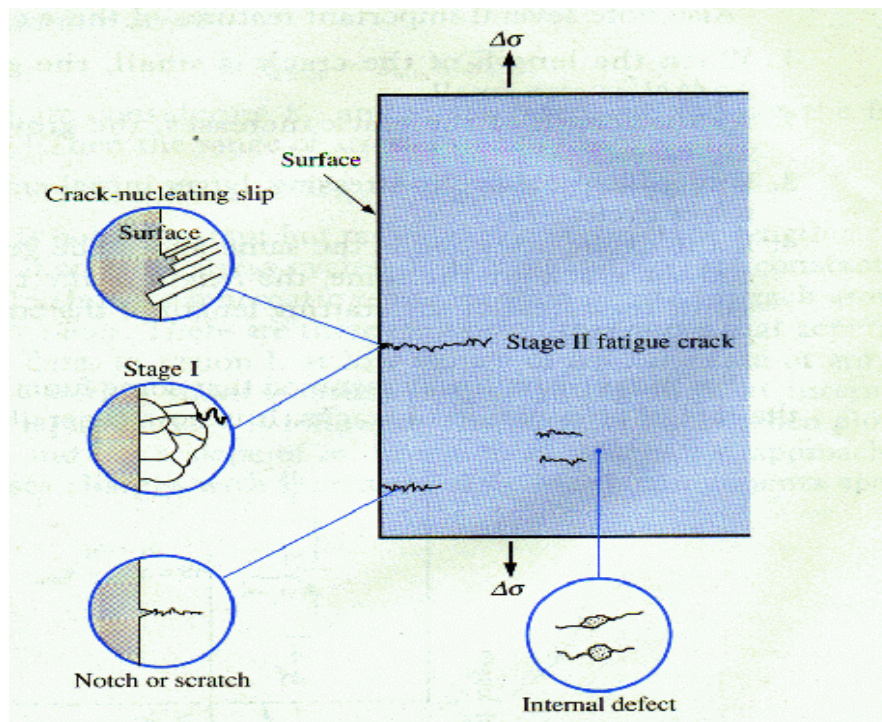


Figure I.5. Amorçage et propagation des fissures

### I.10. Les critères de fatigue multiaxiaux

#### I.10.1. Critères de plasticité

##### I.810.1.a. Critère de Von Mises

Ce critère permet de déterminer le seuil d'écoulement plastique d'un matériau métallique isotrope. C'est un critère énergétique. Le matériau est supposé entrer en plasticité lorsque son énergie de cisaillement atteint une valeur seuil.

Pour un tenseur de contraintes diagonales, le critère de Von Mises s'écrit:

$$\sigma \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \text{ Soit :}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Si  $\sigma_{eq} < \sigma_e$  le comportement est élastique

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

Si  $\sigma_{eq} > \sigma_e$  écoulement plastique

### I.10.1.b. Critère de Tresca

Le critère de Tresca est aussi employé pour les métaux isotropes, c'est un critère en contrainte. Dans ce cas la plasticité est supposée se produire lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur seuil.

Le critère de Tresca s'écrit:

$$\sigma \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \text{ Avec } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Si :  $|\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_e$  le comportement est élastique.

$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_e$  Écoulement plastique.

### I.10.2. Formalisme d'un critère de fatigue :

Dans le cas général, un critère de fatigue met en relation des grandeurs issus des cycles de contraintes (amplitude, valeur moyenne, valeur maximale,...) et des limites d'endurance suivant plusieurs modes de sollicitations simples (traction alternée symétrique  $\sigma_{-1}$ , flexion alternée symétrique  $f_{-1}$ , traction répétée  $\sigma_0$ , flexion répétée  $f_0$ , torsion alternée symétrique  $\tau_{-1}, \dots$ ). Un critère de fatigue peut donc être représenté à l'aide d'une fonction de fatigue, cette dernière est prise égale à l'unité lorsque la limite d'endurance ou la limite de fatigue du matériau est atteinte :

$$E = ( \left[ \sigma_{ij}(t) \right]_T, \sigma_{-1}, f_{-1}, f_0, \tau_{-1}, \dots ) = 1$$

Cette relation de fatigue traduite par la fonction  $E$ , le caractère plus ou moins endommageant du cycle de contrainte appliqué. Il existe trois cas que peut prendre la fonction

- $E < 1$  : le critère de fatigue prévoit l'amorçage d'une fissure au delà du nombre  $N$  cycles définissant l'endurance du matériau.

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

- $E > 1$  : le critère prévoit au contraire l'apparition d'une fissure avant l'application de  $N$  cycles au seuil d'endurance.
- $E = 1$  : la durée de vie de matériau soumis au cycle multiaxial considère coïncide avec la durée de vie du matériau correspondant aux limites d'endurance utilisées pour calculer  $E$ .

### I.10.3. Les critères d'approche globale

Cette catégorie de critère peut elle-même être scindée en trois groupes distincts :

- Les critères utilisant des invariants ( $I1, J2$ ) du tenseur des contraintes ou de son déviateur. Les principaux auteurs de critères d'approche globale de ce type sont Sines, Cross land.
- Les critères dont la fonction de fatigue est obtenue à l'aide d'une moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement  $F_h$  sur l'ensemble des plans possibles passant par le point matériel où l'analyse en fatigue est réalisée. Le caractère global de l'approche provient de la contribution de tous les plans à la fonction de fatigue du critère.
- Les critères basés sur une approche énergétique, où la fonction de fatigue combine les énergies de changement de volume et de changement de forme développées par les contraintes au cours du cycle.

#### I.10.3.a. Critère de Marin [9] :

C'est une généralisation de l'ellipse de Marin qui est une relation uniaxiale traduisant l'influence de la contrainte moyenne de traction sur la limite d'endurance en traction – compression asymétrique pour un état de contraintes multiaxiales. Marin reprend la même relation en remplaçant la contrainte de traction par la racine carrée du second invariant  $J2$  du déviateur des contraintes à un facteur multiplicateur près, on obtient le critère suivant :

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{f} \xi_a \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{R_m} \xi_m \right|^2 \leq 1 \dots\dots\dots \text{(I.4)}$$

$\xi_a$  et  $\xi_m$  Sont respectivement l'amplitude et la contrainte moyenne de  $\sqrt{J_2}$  .

Le facteur  $\sqrt{3}$  est nécessaire pour ce critère

#### I.10.3.b. Critère de Sines [10,15]:

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

Selon Sines la contrainte équivalente est une combinaison linéaire de  $\tau_a$ , amplitude de  $\sqrt{J_2}$  et de  $P_m$  qui est la valeur moyenne de la pression hydrostatique. Ce critère est représenté sur la figure II.11.

$$\tau_a + aP_m \leq b \dots\dots\dots(\text{I.5})$$

les constantes a, b sont identifiables par des essais en torsion alternée et en flexion répétée :

$$b = \tau_{-1} \dots\dots\dots(\text{I.6})$$

$$a = \frac{\tau_{-1} - \frac{f_0}{\sqrt{3}}}{\frac{f_0}{3}} \dots\dots\dots(\text{I.7})$$

La deuxième version du critère a pour objectif d'accélérer les calculs en évitant de balayer l'ensemble des plans critiques physique pour la détermination du plan critique, en introduisant la racine carrée du second invariant du déviateur de contraintes .

Cette version garde les mêmes formules pour déterminer les constantes  $\alpha, \beta$

### I.10.4. Critères de type plan critique :

Leurs auteurs considèrent que l'endommagement de la matière est localisé sur un plan dit critique, qui dépend du cycle multiaxial considéré. La définition du plan critique supposé voir apparaître la fissure est basé sur le choix des paramètres des contraintes s'exerçant sur ce plan et de paramètres issus des invariants de contraintes ou de son déviateur .

Les contraintes intervenant dans ce type de critère sont les contraintes normales et tangentielles agissant sur le plan critique  $P_c$  de normale  $\vec{n}$  (figure II.9). Cette normale est définie par les angles  $\theta$  et  $\phi$  par rapport à un repère fixe lié à la matière. Le vecteur contrainte  $\vec{S}_n$  en tout point (O) relativement à la direction  $\vec{n}$  se définit suivant la relation suivante :

$$S_n(\vec{0}) = \vec{\sigma}(\vec{0}) \cdot \vec{n}$$

La composante normale de  $\vec{\sigma}_n$  du vecteur contrainte  $\vec{S}_n$  s'écrit :

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

$$\vec{\sigma}_n = \left( \vec{n}' \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n}$$

### I.10.4.a. Critère de Mataka [10]:

Mataka a formulé son critère à la base de ceux de Stulen – Cummings et de Findly, la différence réside dans le choix du plan critique, celui où l'amplitude de cisaillement est maximale dans le plan normal ; la fonction de fatigue est donnée par :

$$\tau_a + \alpha \sigma_n^{\max} \leq \beta \dots\dots\dots(\mathbf{I.8})$$

Les constantes  $\alpha, \beta$  sont déterminés par :

$$\alpha = \frac{\tau_{-1} - \frac{f_{-1}}{2}}{\frac{f_{-1}}{2}} \dots\dots\dots(\mathbf{I.9})$$

$$\beta = \tau_{-1} \dots\dots\dots(\mathbf{I.10})$$

### I.10.4.b. Critère de Dang-Van [13,15]:

Il existe deux versions de ce critère, la première version utilise les grandeurs macroscopique des contraintes qui sont la partie alternée du cisaillement et la pression hydrostatique. La fonction de fatigue est une maximisation d'un indicateur de dommage par plan défini par :

$$\tau_a + \alpha P_H \leq \beta \dots\dots\dots(\mathbf{I.11})$$

Les constantes  $\alpha, \beta$  sont déterminées par :

$$\alpha = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots(\mathbf{I.12})$$

$$\beta = \tau_{-1} \dots\dots\dots(\mathbf{I.13})$$

La condition de validité de cette version du critère est :

$$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2} \dots\dots\dots(\mathbf{I.14})$$

## Chapitre I : Généralités sur la fatigue

La deuxième version du critère a pour objectif d'accélérer les calculs en évitant de balayer l'ensemble des plans critiques physique pour la détermination du plan critique, en introduisant la racine carrée du second invariant du déviateur de contraintes .

Cette version garde les mêmes formules pour déterminer les constantes  $\alpha, \beta$

### I.10.5. Critères empiriques :

Ces formalismes sont issus de résultats expérimentaux obtenus par l'application des sollicitations uniaxiales et parfois multiaxiales dans le domaine de l'endurance illimité, et pour un matériau donné, On cite les critères suivants

#### I.10.5.a. Critère de Gough et Pollard :

Les auteurs de ces critères inspirent leurs formules à partir des essais de flexion et torsion, ils présentent deux formulations sous formes d'ellipse, la première est destinée aux matériaux ductiles, tandis que la deuxième est destinée aux matériaux fragiles :

$$\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1 \dots\dots\dots \text{I (15)}$$

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right)\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(2 - \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}\right)\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right) = 1 \dots\dots\dots \text{(I.16)}$$

Gough et Pollard ont conclu que l'influence d'une traction statique superposée à une flexion alternée est négligeable du point de vue de résistance à la fatigue.

#### I.10.5.b. Critère de Hohenemser et Prager :

Ce critère est obtenu à partir des essais de traction, torsion ou le cisaillement qui est variable et la contrainte normale de traction  $\sigma_n$  est statique :

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \frac{\sigma_n}{R_m} \leq 1 \dots\dots\dots \text{(I.17)}$$

#### I.10.5.c. Critère de Davies :

# Chapitre I : Généralités sur la fatigue

L'auteur de ce critère adopte une formulation semblable à celle de Hohenemser – Prager. Il ne modélise plus l'évolution de l'amplitude du cisaillement admissible en fonction d'une contrainte normale statique  $\sigma_n$  mais l'inverse, il observe l'amplitude de la contrainte de cisaillement statique  $\tau_m$ . Il construit à partir de ses observations le modèle suivant :

$$\left( \frac{f_a}{f_{-1}} \right)^2 + \frac{\tau_m}{\tau_u} \leq 1 \dots\dots\dots(\mathbf{I.18})$$

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

### II.1. Introduction

Dans le domaine de la fatigue il est nécessaire d'utiliser les critères de fatigue pour la conception des structures. Par exemple le critère de Crossland utilisé pour estimer la durée de vie des structures sollicitées à des charges cycliques.

Le but de notre travail est de calculer la durée de vie des structures en se basant sur le critère de Crossland, qui nécessite la connaissance des caractéristiques du matériau utilisé, telles que les courbes de Wöhler en torsion et flexion purement alternée.

### II.2. Présentation du critère de Crossland :

#### II.2.1. Le critère de Crossland

Le critère de Crossland [1956] appartient à la famille de critère d'approche globale. Il est considéré parmi les critères les plus utilisés dans le domaine de fatigue à grand nombre de cycles.

Le critère de Crossland est basé sur une combinaison linéaire entre la pression hydrostatique maximale et la racine carrée de deuxième invariant du déviateur de contrainte alternée.

Le critère de Crossland s'écrit comme suit :

$$\xi_a + a \cdot P_{\max} \leq b \dots\dots\dots (\text{II.1})$$

Les constantes a et b sont identifiées à partir deux essais : de torsion et de flexion purement alternées.

Ces constantes sont déterminées par les relations suivantes :

$$b = \tau_{-1}(N) \dots\dots\dots (\text{II.2})$$

$$a = \frac{\tau_{-1}(N) - \frac{f_{-1}(N)}{\sqrt{3}}}{\frac{f_{-1}(N)}{3}} \dots\dots\dots (\text{II.3})$$

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

Le deuxième invariant du déviateur des amplitudes de contrainte  $\bar{\sigma}_a$  est exprimé par la relation suivante :

$$\xi_a = \frac{(\sigma_{VM})_a}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(\text{II.4})$$

La pression hydrostatique est définie par la relation suivante :

$$P_{\max} = 1/3[tr(\sigma_m) + tr(\sigma_a)] \dots\dots\dots(\text{II.5})$$

$(\sigma_{VM})_a$  : Contrainte de Von-Misés du tenseur des amplitudes de contrainte  $\bar{\sigma}_a$ .

Pour appliquer le critère de Crossland à des matériaux, il faut que le matériau vérifie la condition suivante :

$$\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} < \sqrt{3} \dots\dots\dots(\text{II.6})$$

La même condition doit être vérifiée pour intégrer l'effet des contraintes résiduelles.

L'équation (II.1) permet de tracer le diagramme de Crossland dans lequel on peut distinguer deux zones. La 1<sup>er</sup> zone est la zone de sécurité, pour laquelle la durée de vie est illimitée (au dessous de la droite) (figure II.1). La seconde zone est la zone d'endurance limitée pour laquelle la durée de vie est limitée (au dessus de la droite).

### II.3. Présentation de la méthode de travail [11]:

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

Pour pouvoir réaliser les calculs de la durée de vie, notre méthode de travail passe par plusieurs stades. Tout d'abord la connaissance du type du matériau. Ainsi les caractéristiques mécaniques et les modélisations des courbes de Wöhler pour de différentes sollicitations (torsion, flexion) sont la base prépondérante pour introduire toutes ces données, que ce soit pour la simulation, ou bien pour l'élaboration d'un programme de calcul avec le logiciel MATLAB. En second lieu, les géométries des structures et leurs décompositions en éléments finis (maillage par Ansys), sont les champs d'application des conditions aux limites, afin de déterminer l'état de contraintes maximales dans les zones dangereuses.

Le relevé des états de contraintes pour chaque type de chargement est directement exploité afin de pouvoir déterminer les composants  $(P_{\max}, \zeta_a)$  suivant les équations (II.2 et II.3). Ces composants peuvent être illustrés dans le diagramme de Crossland en réalisant l'équation (II.1), ses positions correspondent par rapport à ce diagramme aux durées de vie recherchées (en dessous du

Diagramme: durée de vie illimitée, en dessus du diagramme : durée de vie limitée à calculer). Les constantes  $a, b$  sont calculées à partir du type de matériau. La figure II.1 montre schématiquement les positions des points (images) de composants  $(P_{\max}, \zeta_a)$  par rapport au diagramme de Crossland.

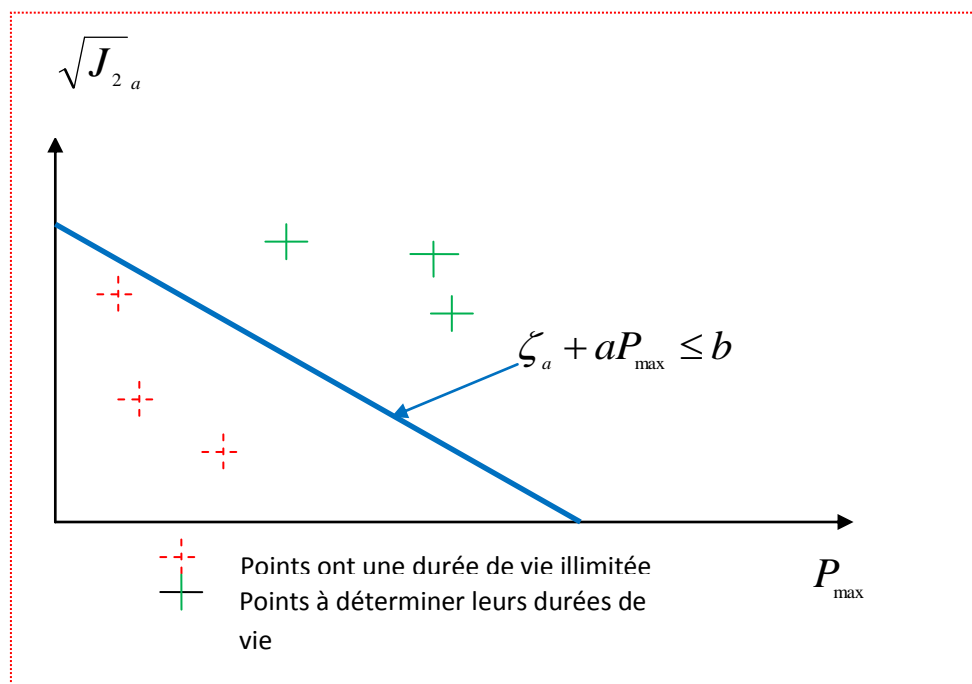


Figure II.1. Position de composants  $(P_{\max}, \zeta_a)$  dans le diagramme de Crossland

Les points situés au dessus de la droite limite de durée de vie illimitée, font l'objet d'un programme de calcul permettant de déterminer leurs durées de vie en nombre de cycles.

## **Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures**

Un organigramme est établi, montré sur la figure II.2 et qui résume la procédure de calcul de durée de vie, en déterminant à chaque boucle les constantes  $a$  et  $b$  en fonction du nombre de cycles incrémenté, jusqu'à l'obtention du  $N$  (cycles) recherché. Finalement on peut établir des équations des droites passant par les points de composants ( $P_{\max}, \zeta_a$ ) en fonction de  $a$  et  $b$ .

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

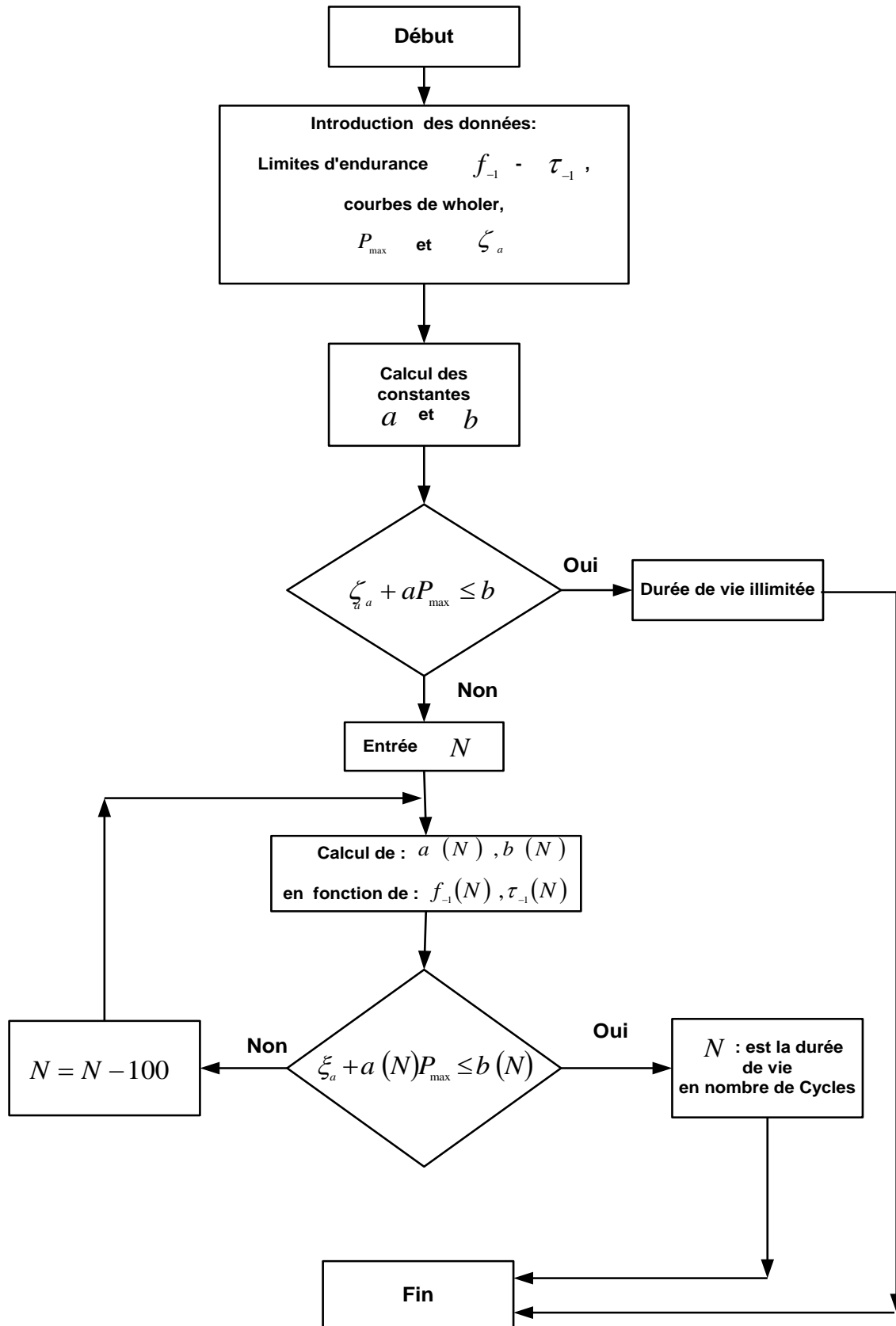


Figure II.2. Organigramme de calcul de durée de vie

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

### II.3.1. Les étapes de travail sont :

#### La 1<sup>ère</sup> étape :

Connaître les caractéristiques mécaniques, c'est-à-dire le module de Young, coefficient de poisson et les courbes de Wöhler en torsion et flexion alternées. Le calcul des constantes **a** et **b** pour tracer les droites de Crossland sont déterminées respectivement par les équations (II.3) et (II.2).

#### La 2<sup>ème</sup> étape :

Afin déterminer le champ de contraintes, nous avons procédé de la manière suivante :

1-utilisation des données de la 1<sup>ère</sup> étape module de Young et coefficient de poisson pour calculer les paramètres de Crossland (introduction de données dans Ansys),

2-création de la géométrie de structure et application des chargements et des conditions aux limites pour chaque type de sollicitation (traction+torsion),

3-discrétisation de structure en éléments finis (Maillage),

4-détermination du champ de contraintes dû au chargement appliqué et par conséquent localisation de la zone critique.

#### La 3<sup>ème</sup> étape :

Mise au point d'un programme sous Matlab, pour calculer la durée de vie en nombre de cycles. Dans cette étape on utilise les paramètres du critère Crossland en l'occurrence  $P_{max}$ ,  $\sigma_a$  et  $\sigma_{eq}$  lesquels ont été préalablement calculé par le code Ansys.

#### La 4<sup>ème</sup> étape :

La 4<sup>ème</sup> étape est consacrée pour tracer du diagramme de Crossland et du trajet de chargement.

### II.4. Caractéristiques du matériau étudié :

Le matériau étudié est l'acier (35NCD16). Les caractéristiques mécaniques de ce matériau sont présentées au tableau II.1:

#### Tableau II.1. Caractéristiques mécaniques du matériau (35NCD16).

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

Module d'Young $E$ (MPa)	213000
Coefficient de poisson $\nu$	0.3
Limite d'élasticité à $\sigma_e$ (MPa)	1000
Limite d'endurance en torsion alternée symétrique $\tau_{-1}$ (MPa)	310
Limite d'endurance en flexion alternée symétrique $f_{-1}$ (MPa)	525
Les limites d'endurance sont prises à $10^7$ cycles	

### II.5. Courbes de fatigue du matériau étudié :

Les courbes de Wöhler de l'acier 35NCD16 sont données par les équations suivantes :

$$\text{1-torsion alternée } \tau_{-1}(N) = \frac{34821495 + 308N^{0.92}}{54837N^{0.92}} \dots\dots\dots \text{II.7}$$

$$\text{2-flexion alternée } f_{-1}(N) = \frac{44614 \cdot 10^6 + 525N^{1.42}}{59697 \cdot 10^3 N^{1.42}} \dots\dots\dots \text{II.8}$$

Les courbes de Wöhler sont présentées par les figures :

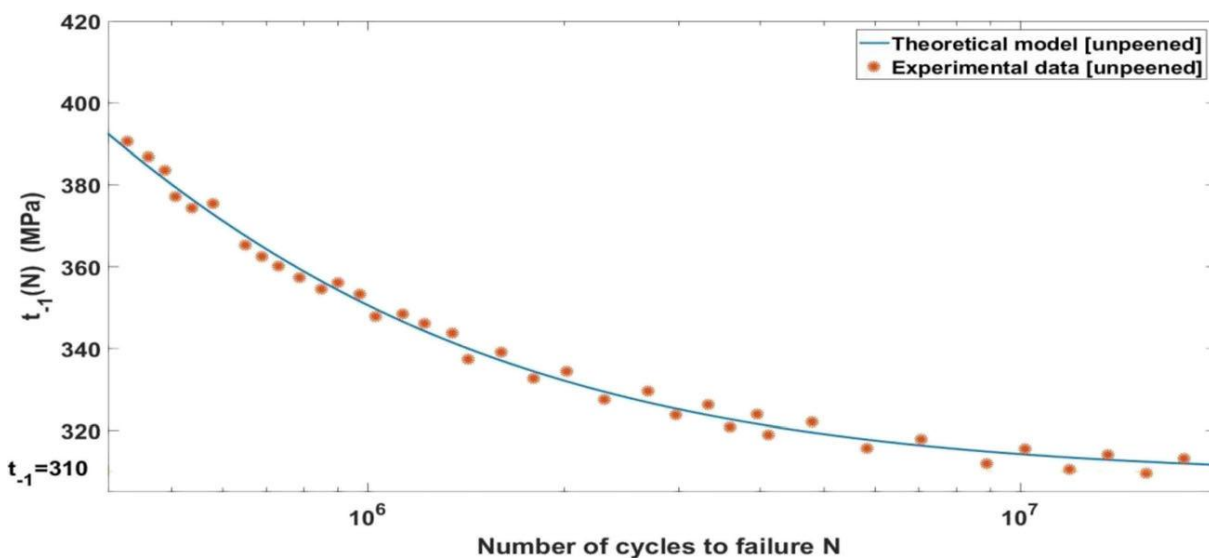


Figure II.3. Courbes d'endurance en torsion alternées de 35NCD16 .

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

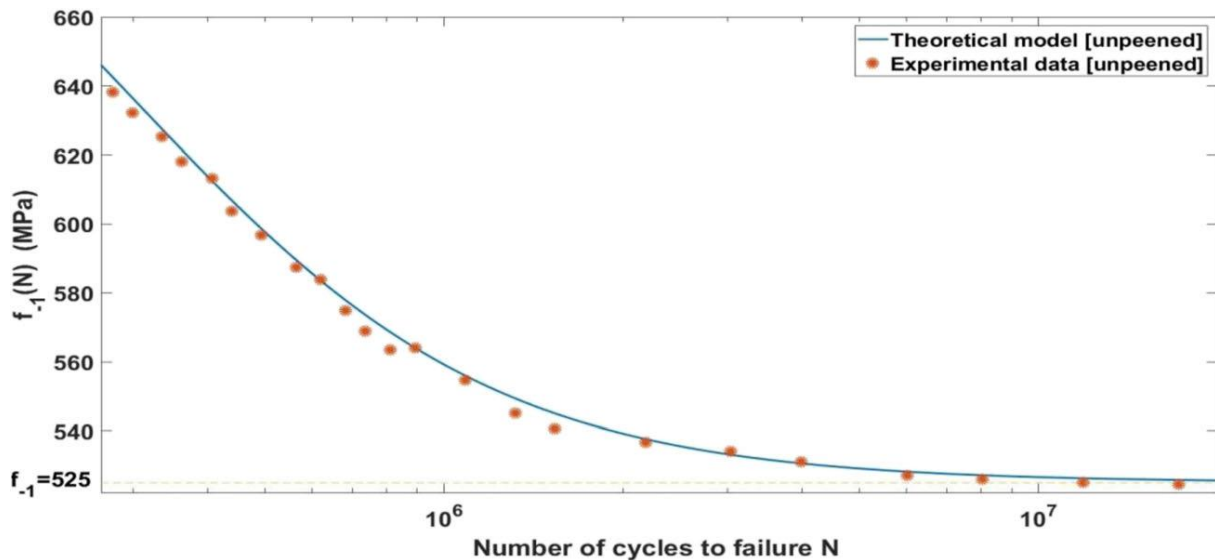


Figure II.4. Courbes d'endurance en flexion alternées de 35NCD16.

### II.6. calcul la durée de vie :

On utilise le critère de Crossland pour estimer la durée de vie des structures sollicitées à des chargements périodiques avec amplitudes constantes.

La méthode de calcul de la durée de vie est donnée par l'organigramme

### II.7. Droites limites du critère :

#### II.7.1. Droite limite du domaine de durée de vie illimitée :

L'utilisation des équations II.2 et II.3 à  $N=10^7$  cycles permet de calculer les constantes **a** et **b** pour déterminer la zone de sécurité (domaine illimité).

$$\mathbf{a=0.71}$$

$$\mathbf{b=310}$$

Le critère de Crossland s'écrit de la manière suivante :

$$\xi_a + 0.71 \cdot P_{\max} \leq 310$$

Cette inéquation est représentée par une droite séparant la zone de sécurité de celle de non sécurité.

#### II.7.2. Droite limite du domaine de durée de vie limitée :

Le calcul des constantes a et b pour une durée de vie N se fait respectivement par les équations en prenant pour nombre de cycles N. Ce calcul donne:

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

$$a = 0.71$$

$$b = 608.74$$

Par conséquent l'équation de la droite du domaine sécurité pour une durée de vie  $N$  est donnée par :

$$\zeta_a + 0.71 \cdot P_{\max} = 608.74$$

Le diagramme de crossland est représenté par la figure II.5.

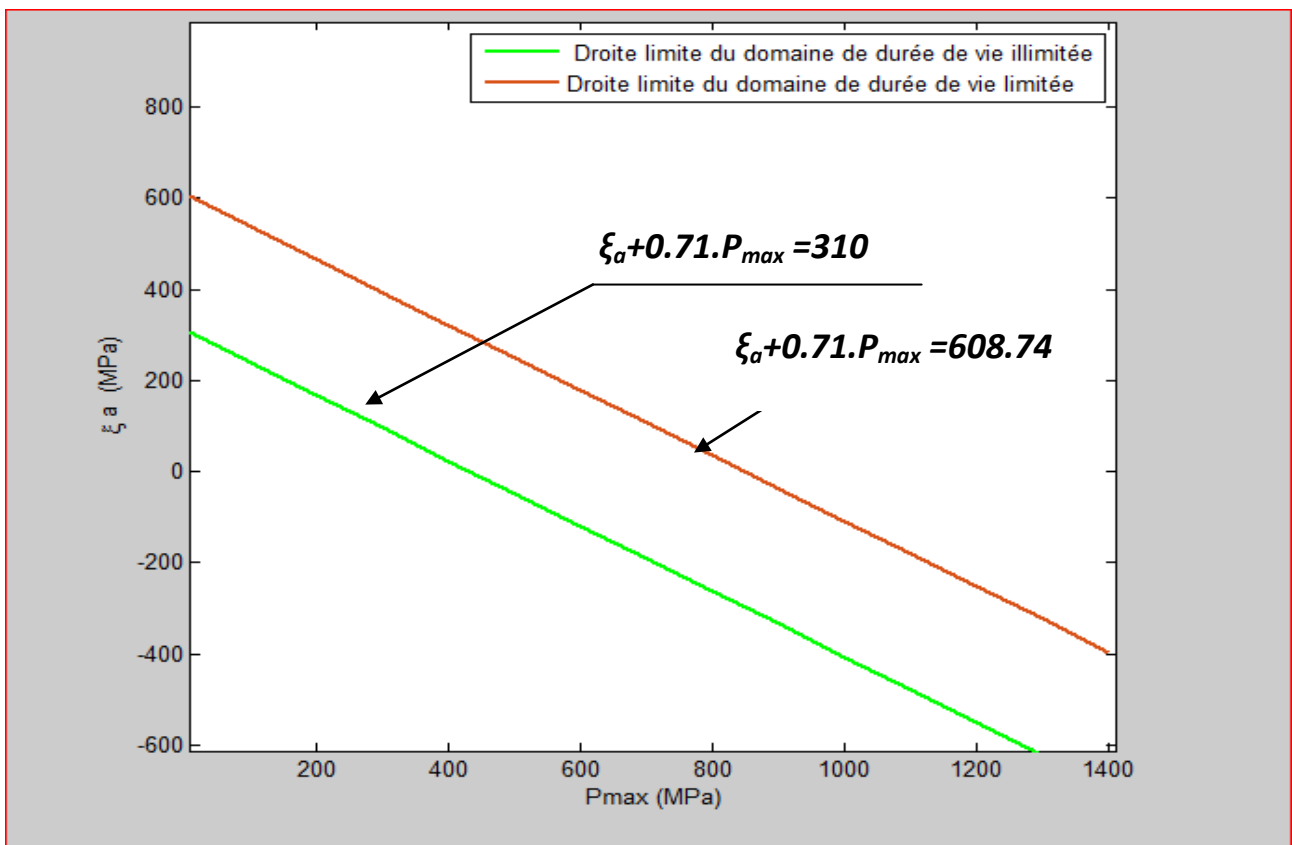


Figure II.5. Droites limites du domaine du critère de Crossland

### II.7.3. Calcul des durées de vie des structures :

Pour une structure sollicitée en fatigue il est nécessaire de calculer la durée de vie par l'intermédiaire du critère de Crossland. Pour se faire on calcule les contraintes de Crossland  $\sigma_{eq}$  définies par  $P_{\max}$ ,  $\zeta_a$ .

### II.8. Structure sollicitée à une traction statique superposée à une traction alternée :

#### II.8.1. La structure 1 :

La géométrie de la structure est représentée par la figure II.6.

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

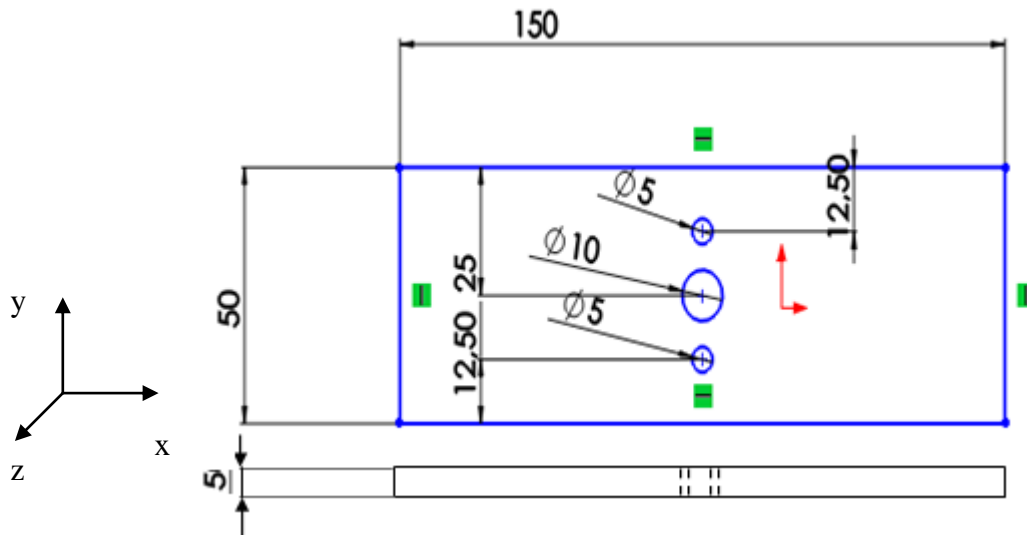


Figure II.6 Géométrie de la structure 1

### II.8.2. Chargement et conditions aux limites :

Le Chargement et les conditions aux limites de la structure sont montrés sur la figure II.7.

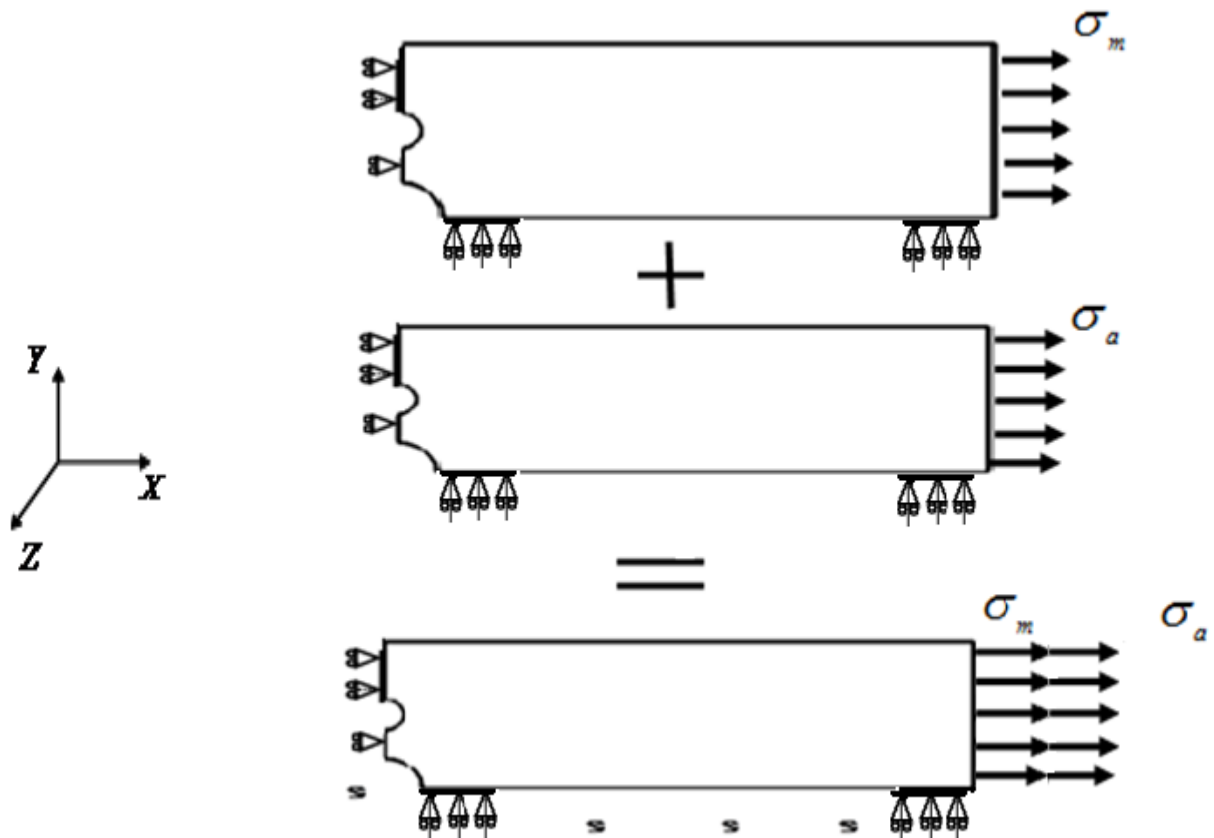


Figure II.7. Le chargement et les conditions aux limites

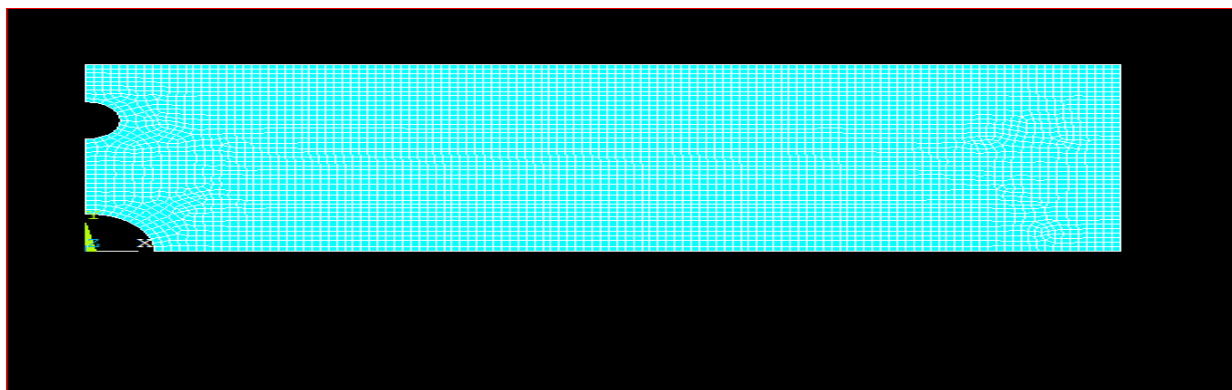
## **Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures**

L'existence d'une symétrie de la structure minimise le temps de calcul. Nous avons présenté seulement un quart (1/4) de la structure 1 avec le chargement et les conditions aux limites.

### **II.8.3. Maillage de la structure 1 :**

Afin de visualiser le champ de contrainte et déterminer les paramètres de Crossland, on utilise la méthode des éléments finis (code Ansys).

La figure II.8 représente un maillage ordonné (mapped mesh). Nous avons utilisé un type d'éléments finis sous forme de quadrilatérales. Ce type d'éléments est constitué de 8 nœuds (plane 82) et possède deux degrés de liberté : translation suivant les axes (x) et (y).



**Figure II.8. Présentation un quart de la structure 1 avec maillage ordonné.**

**(Maillage grossier)**

### **II.8.4. Détermination de la zone critique :**

La visualisation de la structure permet de localiser la zone critique laquelle correspond à l'élément 3801. La position de cet élément est montrée sur la figure II.9.

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

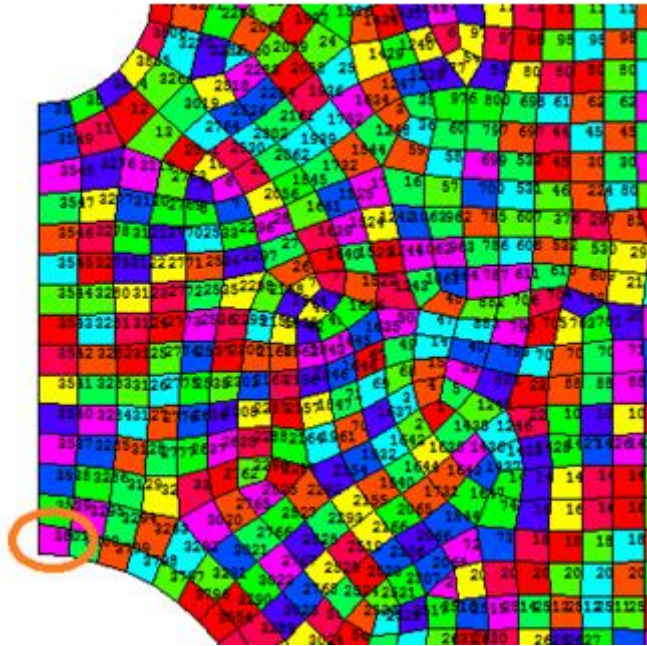


Figure II.9. Position de l'élément 3801

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau II.2.

Tableau II.2. Détermination de la zone critique

$\sigma_a$ (MPa)	$P_{\max}$ MPa	$\xi_a$ MPa	$\sigma_{EQ}$ (MPa)	Elément critique
$\sigma_m$ (MPa)				
100	157.16	156.36	162.17	3801
60				
150	245.56	156.36	165.45	3801
100				

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

La zone critique



Figure II.10: Zone critique due au chargement en traction monotone

D'après les résultats obtenus par application d'une série des chargements (tableau II.3), on constate que l'élément critique ne change pas de position quelle que soit l'intensité de chargement appliqué.

La figure II.11 montre plus clairement la position de l'élément critique en l'occurrence l'élément 3801

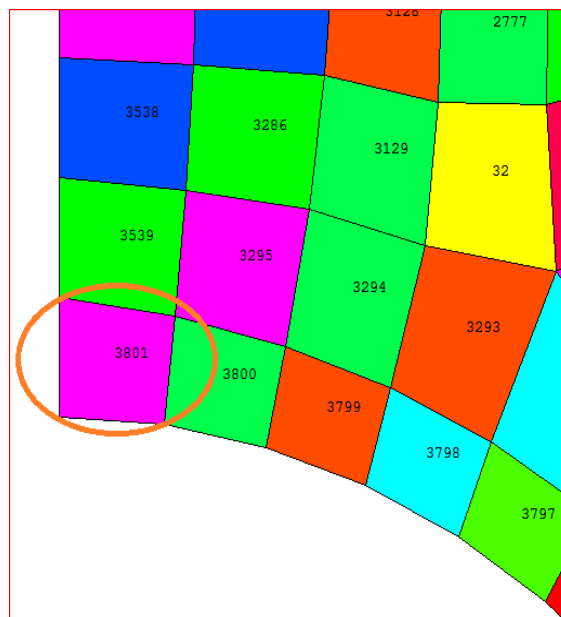


Figure II.11. Position d'élément 3801 plus claire

### II.8.5. Raffinement du maillage de la structure1 :

Un maillage est la discrétisation d'un milieu continu (structure) en éléments finis, pour déterminer le champ de contrainte.

Afin de raffiner et d'optimiser le maillage, nous procédons à la manière suivante:

1-Augmentation du nombre d'élément finis.

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

2-Détermination du champ de contraintes et des paramètres de Crossland pour chaque type de taille d'élément.

3-Recherche de la convergence des paramètres de Crossland.

Pour notre cas on choisi un chargement pour lequel  $\sigma_m=60$  MPa et  $\sigma_a=100$  MPa.

Le tableau II.3 présente les résultats obtenus.

**Tableau II.3. Résultats du Raffinement du maillage.**

Ordre	1	2	3	4	5
$P_{\max}(MPa)$	204.26	199.97	197.83	196.45	193.97
$\xi_a(MPa)$	165.36	161.77	158.40	156.36	152.79
$\sigma_{EQ}(MPa)$	172.84	169.17	165.72	163.63	159.96
Nombre d'éléments	11296	7154	4735	3801	2938

### II.8.6. Calcul la durée de vie

Dans le but de déterminer la durée de vie, nous avons élaboré un programme en langage MATLAB. L'organigramme de ce programme est montré sur la figure II.5.

Le tableau II.4 résume les valeurs de la durée de vie et des paramètres de Crossland pour chaque chargement appliqué.  $(\sigma_m, \sigma_a)$ . Les calculs sont pris suivant l'ordre 4 (tableau II.3).

**Tableau II.4. Chargements appliqués et résultats obtenus**

$\sigma_m(MPa)$	$\sigma_a(MPa)$	$P_{\max}(MPa)$	$\xi_a(MPa)$	$\sigma_{EQ}(MPa)$	Nombre de cycles (rupture)
<b>60</b>	300	353.61	469.08	482.16	111160
	250	304.49	390.90	402.17	340061
	200	255.38	312.72	322.17	3761407
	150	206.27	234.54	242.17	Illimitée
	100	157.16	156.36	162.17	Illimitée
<b>100</b>	300	392.90	469.08	483.62	109031

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

	250	343.78	390.90	403.62	332232
	200	294.67	312.72	323.62	3352613
	150	245.56	234.54	243.63	Illimitée
	100	196.45	156.36	163.63	Illimitée
<b>150</b>	300	442.01	469.08	485.43	106445
	250	392.90	390.90	405.44	322754
	200	343.78	312.72	325.44	2943292
	150	294.67	234.54	245.44	Illimitée
	100	245.56	156.36	165.45	Illimitée
<b>200</b>	300	491.12	469.08	487.25	103902
	250	442.01	390.90	407.25	313694
	200	392.90	312.72	327.26	2617124
	150	343.78	234.54	247.26	Illimitée
	100	294.67	156.36	167.26	Illimitée
<b>300</b>	300	589.34	469.08	490.88	98994
	250	540.23	390.90	410.89	296498
	200	491.12	312.72	330.89	2131858
	150	442.01	234.54	250.89	Illimitée
	100	392.90	156.36	170.90	Illimitée
<b>400</b>	300	687.57	469.08	494.52	94282
	250	638.45	390.90	414.52	280591
	200	589.34	312.72	334.52	1787744
	150	540.23	234.54	254.53	Illimitée
	100	491.12	156.36	174.53	Illimitée

D'après le tableau II.4, on constate que la durée de vie change de valeur selon l'application de la charge, par exemple pour une combinaison de charge de 60 MPa et 250 MPa, le modèle de calcul nous donne une durée de vie de 340 061 cycles parfois on trouve des durée de vie illimité, lorsque la contrainte équivalente de Crossland est inférieure à la limite d'endurance en torsion alternée.

### II.8.7. Présentation graphique des résultats :

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

La durée de vie dans le cas d'une sollicitation de traction statique superposée à une flexion alternée est présentée graphiquement dans les figures II.12 à II.14. Ces figures montrent les droites limites des domaines à durées limitée et illimitée ainsi que les trajets de chargement. Chaque trajet de chargement peut être représenté par un point critique indiquant la charge maximale au cours d'un cycle. Nous appelons ce point "image de chargement". Pour un chargement donné relatif à un couple  $(\sigma_m, \sigma_a)$ , on détermine dans un premier temps "l'image de chargement". Ensuite on cherche la droite du critère de Crossland qui passe par ce point. Enfin, on déduit la durée de vie correspondante à ce chargement par la relation II.15.

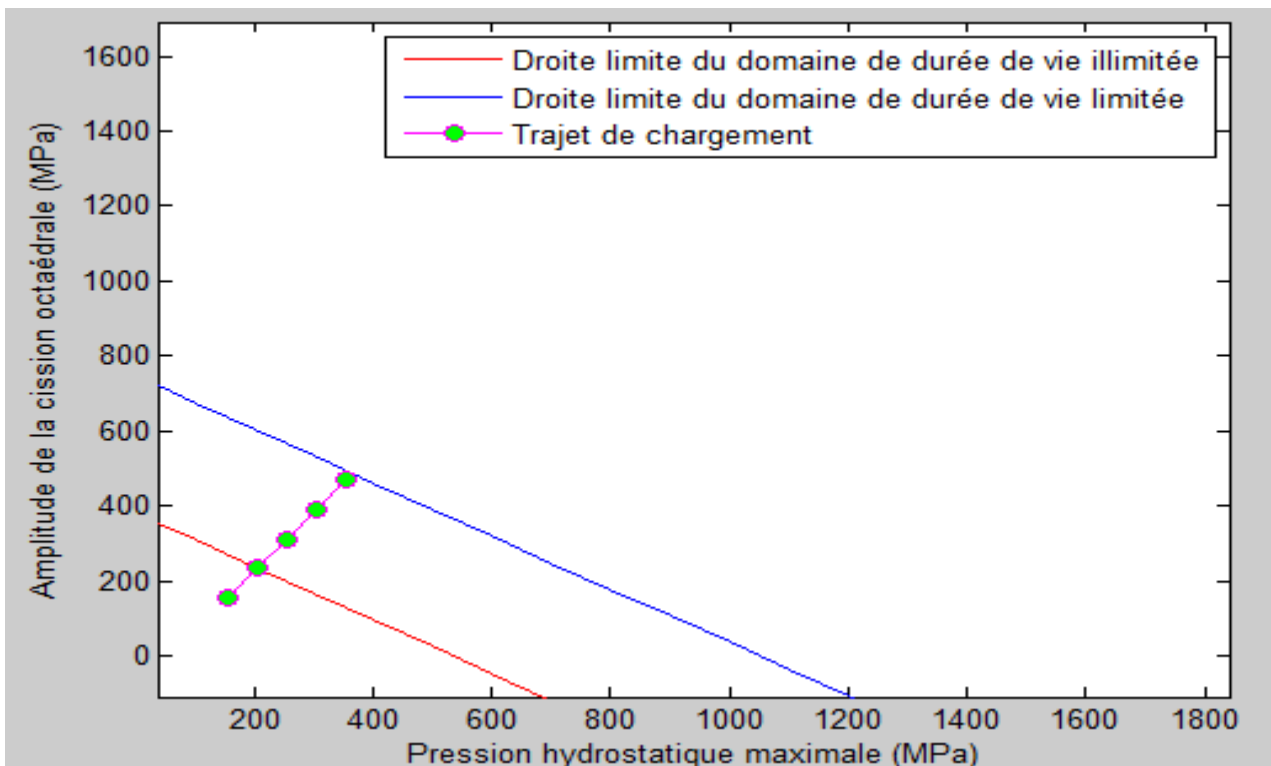


Figure II.12. Diagramme de Crossland présentant :

Trajet de chargement ( $\sigma_m = 60 \text{ MPa}$ )

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

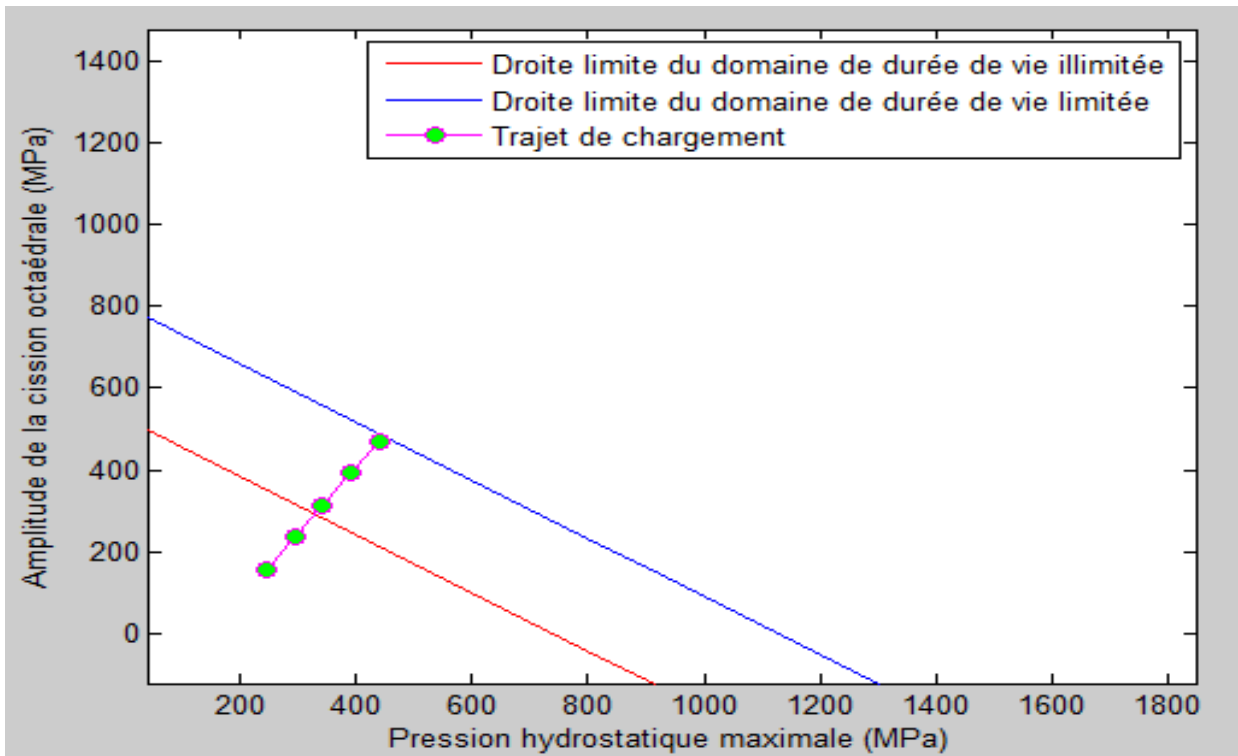


Figure II.13. Diagramme de Crossland Présentant :

Trajet de chargement ( $\sigma_m = 100 \text{ MPa}$ ),

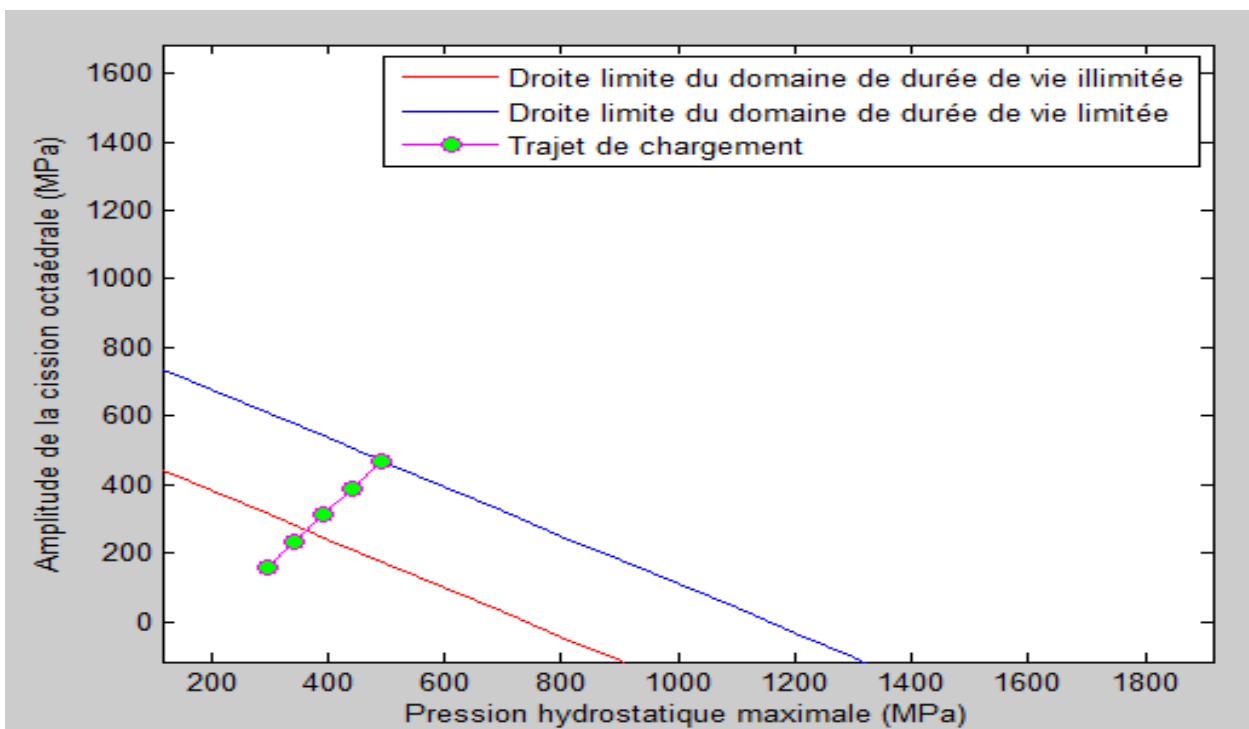


Figure II.14. Diagramme de Crossland présentant :

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

Trajet de chargement ( $\sigma_m = 150 \text{ MPa}$ ),

### II.9. Structure sollicitée à une traction statique superposée à une traction alternée

#### II.9.1: la structure 2

La géométrie et les dimensions de la structure sont montrées sur la figure II.15.

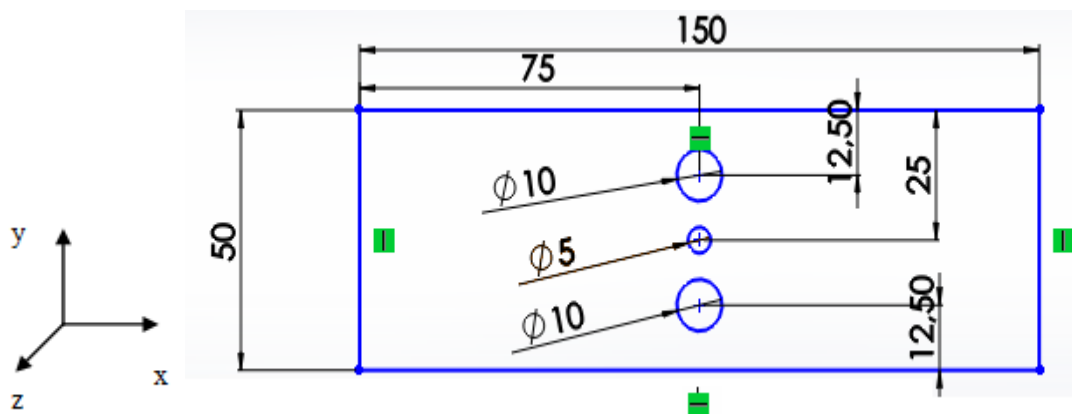
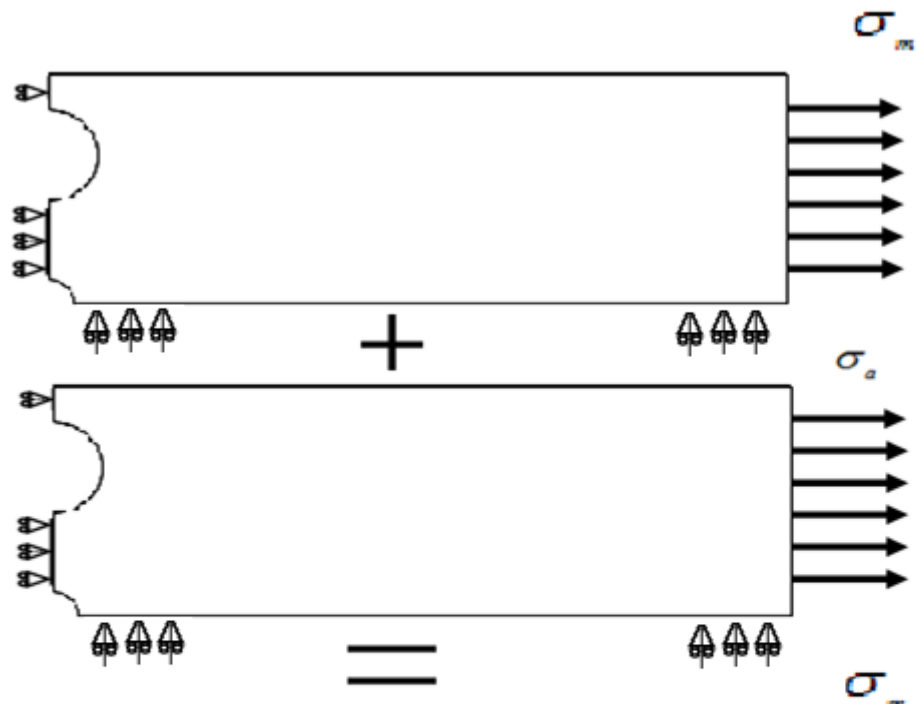


Figure II.15. Géométrie de la structure 2.

#### II.9.2. Chargement et conditions aux limites :



## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

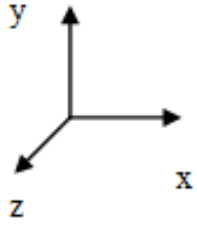


Figure II.16. Le chargement et les conditions aux limites

### II.9.3. Maillage :

Nous avons opté pour un maillage ordonné avec des éléments un type d'élément à 8 nœuds (plane82).

Le maillage de la structure 2 est montré par la figure II.17.

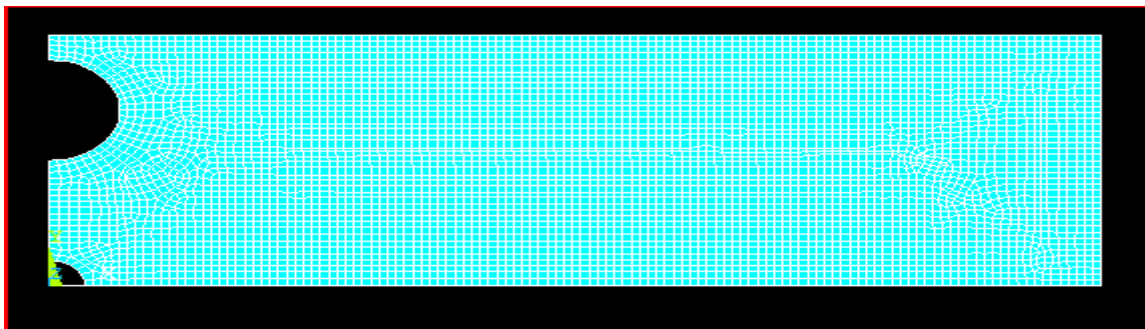


Figure II.17. Maillage de la structure 2.

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

### II.9.4. Détermination de la zone critique :

De la même façon que précédemment, on applique une série de chargement en variant la force alternée de torsion et en fixant la contrainte de monotone traction. La zone critique est colorée en rouge (figures II.18).

Le tableau II.5 résume la position de l'élément critique pour différents couples de chargement  $(\sigma_m, \sigma_a)$

**Tableau II.5. Détermination de la zone critique**

$\sigma_a$ (MPa)	$P_{\max}$ (MPa)	$\xi_a$ (MPa)	$\sigma_{EQ}$ (MPa)	Elément critique
$\sigma_m$ (MPa)				
100	220.94	225.67	233.84	5110
60				
150	345.22	338.50	351.28	5110
100				

### La zone critique

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures



Figure II.18. Zone critique due à la contrainte moyenne de traction

D'après le tableau II.6, la figures II.18, montrent que :

- quelque soit la valeur du chargement appliqué l'élément critique ne change pas de position,

La figure II.19 montre la position de l'élément critique (élément 5110).

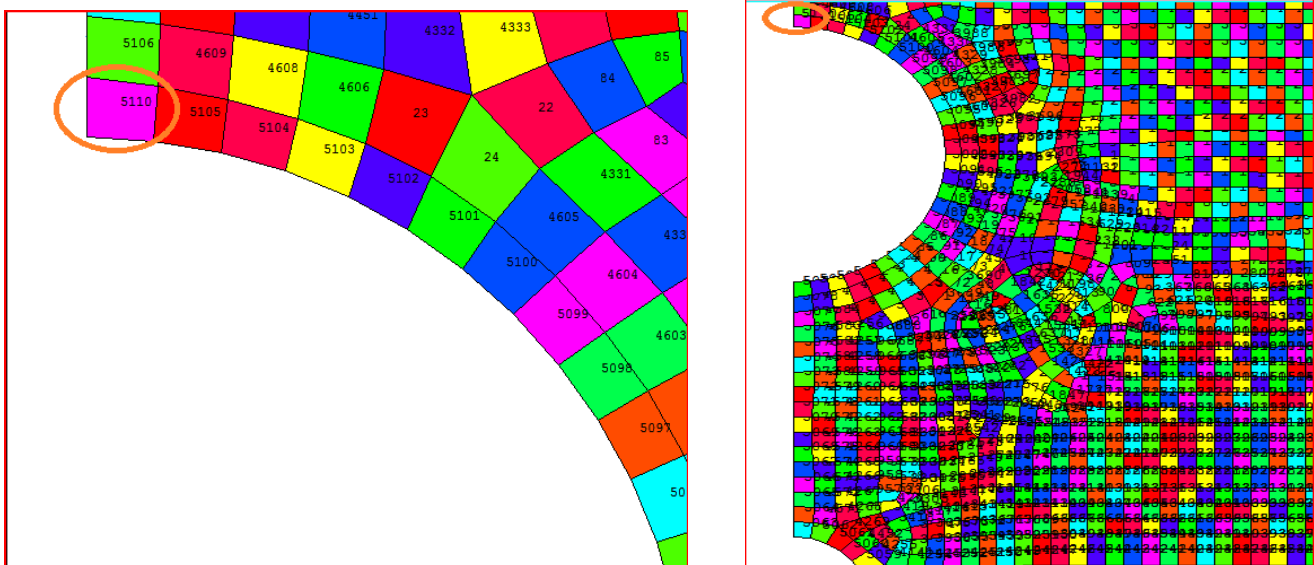


Figure II.19 Position de l'élément « 5110 »

### II.9.5. Raffinement du maillage de la structure2:

Nous procédons de la même manière que précédemment afin de déterminer le maillage optimale Pour ce faire on considère le chargement pour lequel,  $\sigma_a=100$  MPa et  $\sigma_m=60$  MPa, et on cherche la convergence des résultats. Le tableau II.6 montre les résultats pour différents maillages.

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

**Tableau II.6. Résultats du Raffinement du maillage de la structure2**

Ordre	1	2	3	4	5
$P_{\max}(MPa)$	229.71	221.34	220.94	213.33	211.74
$\xi_a(MPa)$	237.37	226.00	225.67	215.82	214.14
$\sigma_{EQ}(MPa)$	245.87	234.19	233.84	223.71	221.98
Nombre d'éléments	11530	7297	5110	3806	2930

### II.9.6. Calcul de durée de vie :

On applique la même procédure pour déterminer la durée de vie. On fixe la contrainte moyenne et on varie la force alternée. La durée de vie est calculée par l'équation (II.15). Le tableau II.7 résume les résultats obtenus.

**Tableau II.7. Chargements appliqués et résultats obtenus**

$\sigma_m(MPa)$	$\sigma_a(MPa)$	$P_{\max}(MPa)$	$\xi_a(MPa)$	$\sigma_{EQ}(MPa)$	Nombre de cycles (rupture)
<b>60</b>	300	497.12	677.01	695.40	H-D
	250	428.08	564.17	580.01	22957
	200	359.03	451.34	464.62	140116
	150	289.99	338.50	349.23	1042347
	100	220.94	225.67	233.84	Illimitée
<b>100</b>	300	552.36	677.01	697.45	H-D

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

	250	483.31	564.17	582.06	21869
	200	414.27	451.34	466.67	136374
	150	345.22	338.50	351.28	980788
	100	276.18	225.67	235.89	Illimitée
<b>200</b>	300	690.45	677.01	702.55	H-D
	250	621.40	564.17	587.17	19232
	200	552.36	451.34	471.78	127485
	150	483.31	338.50	356.39	851303
	100	414.27	225.67	241.00	Illimitée
<b>300</b>	300	828.54	677.01	707.66	H-D
	250	759.49	564.17	592.27	16722
	200	690.45	451.34	476.89	119177
	150	621.40	338.50	361.50	747887
	100	552.36	225.67	246.11	Illimitée
<b>400</b>	300	966.63	677.01	712.77	H-D
	250	897.58	564.17	597.38	14321
	200	828.54	451.34	481.99	111410
	150	795.49	338.50	366.61	663477
	100	690.45	225.67	251.22	Illimitée
<b>500</b>	300	1104.7	677.01	717.88	H-D
	250	1035.7	564.17	602.49	12031
	200	966.63	451.34	487.10	104110
	150	897.58	338.50	371.71	593463
	100	828.54	225.67	256.33	Illimitée

### II.9.7. Présentation graphique des résultats :

La durée de vie dans le cas d'une sollicitation de traction statique superposée à une torsion alternée est présentée graphiquement dans les figures II.20 à II.22. Ces figures montrent les droites

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

limites des domaines à durées limitée et illimitée ainsi que les trajets de chargement. De la même façon que précédemment le trajet de chargement peut être représenté par un point critique indiquant la charge maximale au cours d'un cycle. Pour un chargement donné par un couple  $(\sigma_m, \sigma_a)$ , on calcule d'abord "l'image de chargement". Par la suite on cherche la droite du critère de Crossland qui passe par cette image. Enfin, on détermine la durée de vie correspondante à ce chargement par le biais de la relation II.15.

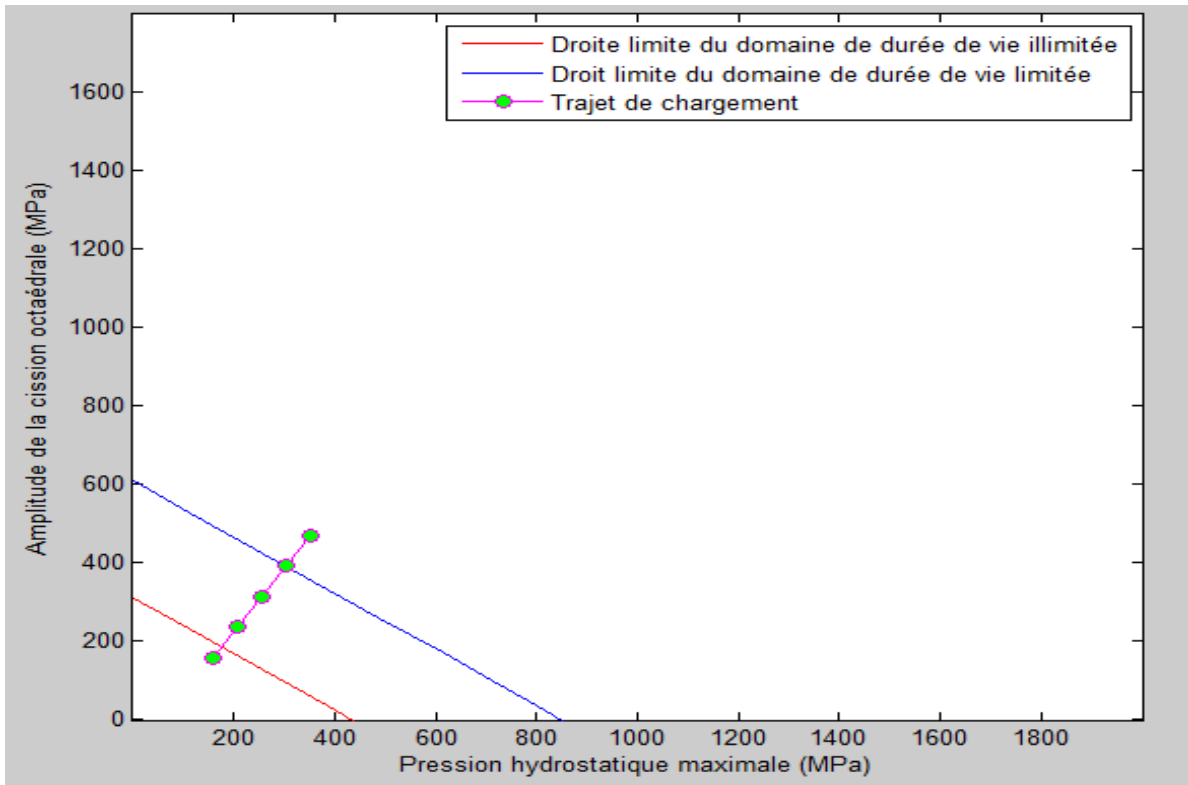


Figure II.20. Diagramme de Crossland présentant :

Trajet de chargement ( $\sigma_m = 60 \text{ MPa}$ )

## Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures

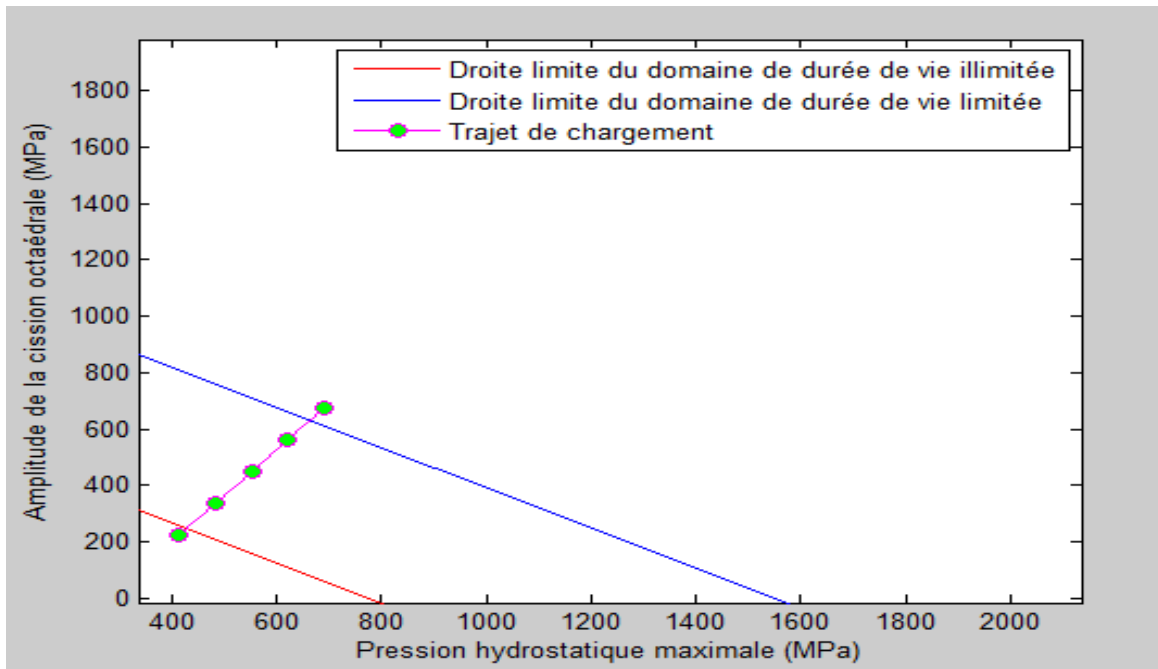


Figure II.21. Diagramme de Crossland présentant :

Trajet de chargement ( $\sigma_m=100$  MPa)

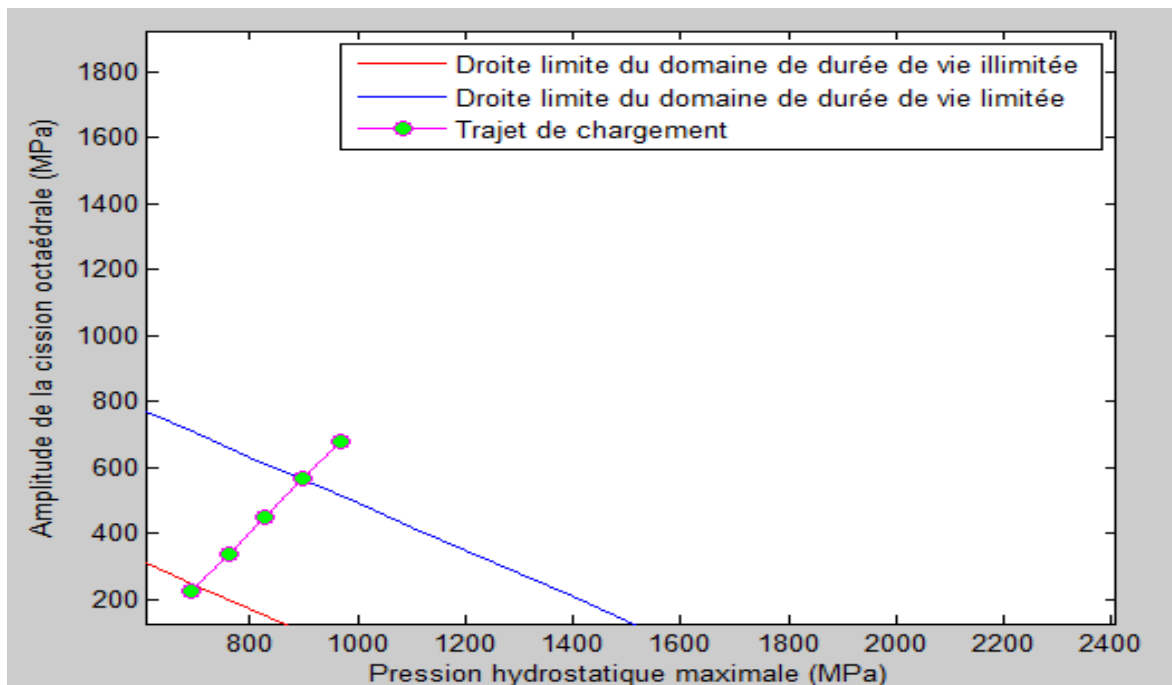


Figure II.22. Diagramme de Crossland présentant :

Trajet de chargement ( $\sigma_m=200$  MPa)

## **Chapitre II – Calcul de durée de vie des structures**

### **Conclusion :**

Les résultats obtenus sur les deux structures (1 et 2), on constate les remarques suivantes :

- 1- La durée de vie calculée dépend de l'intensité des charges appliquées.
- 2- La durée de vie dépend de la géométrie de la structure, si on change la position des perçages sur la même structure, avec les mêmes chargements, on trouve des valeurs différentes.
- 3- Le modèle permet de distinguer les charges qui provoquent des durées de vie illimitées, et celles qui engendrent des durées de vie limitées. Lorsque le chargement produit des déformations plastiques, le modèle nous le fait savoir : dépassement du trajet de chargement de la droite limite de durée de vie limitée. Dans ce cas le chargement est hors (H.D).
- 4- La zone critique est positionnée sur le cercle le plus grand, lorsqu'on change la position de ces cercles.

## Conclusion générale

Le but de ce travail est de prédire la durée de vie de deux structures rectangulaires qui se distinguent par la position des cercles, en se basant sur un modèle élaboré par le laboratoire (ECP3M) de l'université de Mostaganem, qui est basé sur le critère de fatigue de Crossland. Nous avons choisi le matériau (35NCD16), dont ses courbes de fatigue de torsion et de flexion alternées sont connues. La détermination des champs de contraintes, suite à l'application des sollicitations à amplitude constante, est établie par le code Ansys, ce dernier nous permet aussi de localiser la zone de concentration de contrainte (zone critique), qui compte le lieu d'initiation et, par la suite, la propagation des fissures. Le modèle nous a permis de déterminer les charges qui provoquent des durées de vie limitées, et qui engendrent des valeurs limitées.

En perspectives, il serait intéressant de continuer ce travail, lequel pourrait s'articuler sur les points suivants :

- 1- Appliquer ce modèle de prévision à des structures, de forme complexe, sollicitées à plusieurs types de chargements.
- 2- Etudier l'influence de l'angle de déphasage entre les différentes contraintes qui caractérisent le chargement.
- 3- Etudier l'endommagement, dans le cas des chargements à amplitude variable, en appliquant une règle de cumul du dommage.
- 4- Appliquer type de traitement superficiel pour améliorer les durées de vie calculées.

# Bibliographie

- [1] Fatigue-papier ; Fatigue des matériaux et des structures
- [2] Fatigue-papier ; fatigue des matériaux et des structures, Historique et importance du phénomène de fatigue
- [3] H. Karaouni. Nouveaux outils pour la conception fiable des structures. Thèse de doctorat. Ecole polytechnique- mécanique. Soutenu le 07/10/2001.
- [4] X. Pitoiset. Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux. Université libre de Bruxelles. Thèse de doctorat 30/03/2001
- [5] Y .Li Lee, J.P an, R.Hath away, M.Barkey. Fatigue testing and analysis. Elsevier inc. 2005
- [6] Fatigue-papier ; Aspects macroscopiques et microscopiques du phénomène de fatigue
- [7] Fatigue-papier ; Aspects macroscopiques et microscopiques du phénomène de fatigue
- [8] Fatigue-papier ; Fatigue des matériaux et des structures
- [9] A. Karolczuk, Y. Nadot, A. dragon. Non-local stress gradient approach for multiaxial fatigue of defective material. Elsevier 2007
- [10] R. Ben sghair, Ch. Bouraoui, R. Fathallah, T. Hassine, A. Dogui. Probabilistic high cycle fatigue behaviour prediction based on global approach criteria. Elsevier 2006
- [12] C.A. Gonçalves, J.A. Araújo. E.N. Mamiya. Multiaxial fatigue: a stress criterion for hard metals. Elsevier 2004.
- [13] D. Bellett, F.Morel, P. Burry. Influence des fortes contraintes hydrostatiques sur la résistance en fatigue multiaxiale. Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers France 2007
- [14] A.Carpinterie, M.de Freitas, A.Spagnol. Biaxial/Multiaxial fatigue and fracture. ESIS publication 31. Juin 2001
- [15] Y.Fares. Dimensionnement en fatigue des assemblages boulonnés à l'aide d'un critère de fatigue multiaxial. Thèse de doctorat d'institut national des sciences appliquées de Toulouse. Soutenu le 18/10/2006