

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Pour obtenir le diplôme de
Master en Mathématique



Option : Analyse Harmonique et EDP

Présenté par

M^{elle}. *Kheira Aberkane*

THEME

La Methode BKW .

Soutenu le 09 / 06 / 2014 devant le Jury

Sadek Gala.	Président	Prof.	U. MOSTAGANEM
Mohand Ould Ali.	Examineur	M.C	U. MOSTAGANEM
Amina Lahmar Benbernou.	Encadreur	Prof.	U. MOSTAGANEM

Dédicaces

Je dédie ce travail à

Mes très chers parents,

Ma famille, mes frères et mes sœurs,

Mes enseignants(es) de mathématiques

Mes amis de la promotion Master .

Remerciements

Je tiens a remercier

Amina LAHMAR-BENBERNOU professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté la direction de ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.

Monsieur Sadek Gala professeur à l'université de Mostaganem, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur de participer au jury.

Monsieur Mohand Ould Ali Maitre de Conférences à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Résumé :

Dans ce travail, nous décrivons la méthode BKW associée à l'opérateur de Schrödinger sur l'axe réel perturbé par un potentiel V .

Nous énonçons certaines caractéristiques de la méthode.

Nous finissons ce travail par une application numérique.

Table des matières

1	Rappels et définitions :	ii
1.1	L'approximation BKW [1] :	ii
1.1.1	Les intégrales oscillantes :	vi
2	La méthode BKW en dimension 1 [1] :	viii
2.1	L'ansatz BKW :	viii
2.2	Equation eiconale pour S [1] :	ix
2.3	Equation de transport [1] :	ix
	Bibliographie	xiv

INTRODUCTION GENERALE

La méthode BKW est une technique de l'expansion asymptotique pour trouver des solutions approximatives de quelques problèmes différentiels. Les lettres BKW représentent par les physiciens Brillouin, Kramers et Wentzel. Brillouin est un physicien franco-américain, il s'est intéressé par la mécanique quantique, la physique de solide et la théorie du quanta, Kramers est un physicien mathématicien néerlandais, il a développé la théorie du quanta et il est surtout connu par ces travaux en mécanique quantique, Wentzel est un physicien allemand qui a des recherches intéressantes en mécanique quantique. Ces trois chercheurs sont réunis autour d'une solution approximative de l'équation de Schrödinger qui est dérivée de l'équation de propagation des ondes, comme l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles qui muni d'un potentiel $V(x)$, dont les solutions changent avec le changement de potentiel. Ils ont modélisé une solution et défini une méthode pour résoudre ce problème, cette solution modèle est la solution de BKW. Cette approximation a été appliquée pour la première fois en 1926. La méthode a été développée pour étudier le régime semi classique d'un système quantique.

La méthode BKW est destinée au départ à trouver les solutions approchées de l'équation de Schrödinger. Elle est devenue le cadre théorique pour comprendre la limite classique de la mécanique quantique.

Cette méthode a des applications dans plusieurs disciplines ; notamment, sur les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, les problèmes de valeurs propres, les problèmes de valeurs initiales ou valeurs aux bords ainsi que pour l'estimation des intégrales des solutions des équations différentielles.

L'approximation de la solution de l'équation différentielle linéaire a une structure simple aussi si la solution exacte est connue, il s'agit d'une intégrale élémentaire des fonctions algébriques bien définies d'un ordre à un autre en puissance de $\hbar$, comme les fonctions d'Airy, fonctions de Bessel, et les fonctions paraboliques cylindriques [5].

Plan

Ce modeste travail est constitué de quatre chapitres et d'une conclusion. Dans le premier chapitre, on introduit un petit historique de la méthode BKW et passant par une problématique, illustrant notre travail par un exemple.

Dans le deuxième chapitre, nous avons énoncé quelques rappels et définitions. Dans le troisième chapitre on a expliqué la méthode BKW de dimension 1 qui nous permet de trouver des solutions approchées de l'équation de Schrödinger. Finalement, dans le quatrième chapitre, nous avons appliqué la méthode BKW à l'équation de Schrödinger perturbé par un potentiel ($v(x) = x^2$).

Rappels et définitions :

1.1 L'approximation BKW [1] :

L'approximation BKW est un calcul semi-classique en mécanique quantique de la fonction d'onde qui est supposé être une fonction exponentielle avec d'amplitude a et de fonction de phase φ qui varie lentement par rapport à la longueur d'onde $\lambda \rightarrow 0$. Bien que les physiciens de Bros-Kramers-Wentzel ont développé cette approximation en 1923. Harold Jeffreys plus tôt avait déjà développé une méthode plus générale dans le cas de l'équation linéaire différentiel de second ordre de la forme [4] :

$$y''(t) + A(t)y'(t) + B(t)y(t) + C(t) = 0,$$

où les fonctions A, B, C sont supposées définies continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La méthode utilisé de l'équation de Schrödinger à deux corps

$$P = -h^2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + V(x), \quad V \in C^\infty(\mathbb{R})$$

où $V(x)$ est un potentiel, est d'obtenir un développement BKW à l'infini de l'état résonant. Depuis 1927 cet évènement de la mécanique quantique a fait beaucoup progresser la méthode, à la fois sur le plan théorique que sur le plan pratique (numérique) ces deux aspects étant étroitement liés. On s'intéresse à **l'équation de Schrödinger**

$$\mathbf{P} = -\hbar^2 \Delta + \mathbf{V}(\mathbf{x}) \tag{1.1.1}$$

Nous avons décrit surtout la méthode d'approximation BKW et le développement asymptotique de l'état associé à l'énergie liés aux problèmes apparus en mécanique quantique et aux idées physiques.

Soit une particule quantique perturbée par un potentiel $V(x)$, Supposons la fonction Ψ solution de l'équation de Schrödinger tel que $\lambda = E$, E est l'énergie, t fixé, et m masse de la particule.

$$i \hbar \partial_t \Psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, x) + V \Psi = \lambda \Psi$$

tel que Ψ vérifie la condition de normalisation, pour chaque t fixé,

$$\|\Psi(t, x)\|_{L^2} = \int |\Psi(t, x)|^2 dx = 1$$

$\Psi(t, x)$ est la fonction d'onde de la particule, et la quantité $|\Psi(t, x)|^2$ est sa densité de probabilité de présence à l'instant t .

En régime stationnaire, $\Psi(t, x) = e^{-it/\hbar} a(x, \hbar)$, avec

$$P(x, \hbar D_x) \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = \lambda \Psi$$

Les énergies possibles de la particule sont les valeurs propres de P comme opérateur non-borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Soit P l'opérateur de Schrödinger définie par :

$$\mathbf{P} = -\hbar^2 \Delta \Psi + \mathbf{V}(\mathbf{x}) \Psi \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{1}{i} \frac{\partial^2}{\partial} . \quad (1.1.2)$$

Soit l'état résonnant Ψ sous la forme :

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \exp(i\varphi(\mathbf{x})/\hbar) \quad \text{où} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_j \mathbf{a}_j \hbar^j \quad (1.1.3)$$

Notre problème consiste à résoudre cette équation :

$$P\Psi = E\Psi$$

$$-\hbar^2 \Delta_x \Psi + (\mathbf{V} - \mathbf{E}) \Psi = 0 \quad (1.1.4)$$

On pose :

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = \nabla \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \exp(\mathbf{i}\varphi/\mathbf{h}) + \mathbf{i} \frac{\nabla \varphi}{h} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \exp(\mathbf{i}\varphi/\mathbf{h}) = [\nabla \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + \mathbf{i} \frac{\nabla \varphi}{h} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h})] \exp(\mathbf{i}\varphi/\mathbf{h})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial^2 x} = [\Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + \frac{i\Delta \varphi}{h} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + 2\mathbf{i} \nabla \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \frac{\nabla \varphi}{h} + (\frac{\nabla \varphi}{h})^2 \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{h})] \exp(\mathbf{i}\varphi/\mathbf{h})$$

On remplace dans l'équation (1.1.4), on obtient les équations suivantes :[4]

$$-h^2 [\Delta a(x, h) + i \frac{\Delta \varphi}{h} a(x, h) + 2i \nabla a(x, h) \frac{\nabla \varphi}{h} + (\frac{\nabla \varphi}{h})^2 a(x, h)] \exp(i\varphi/h) = (E - V) a(x, y) \exp(i\varphi(x)/h)$$

$$\implies -h^2 [\Delta a(x, h) + i \frac{\Delta \varphi}{h} a(x, h) + 2i \nabla a(x, h) \frac{\nabla \varphi}{h} + (\frac{\nabla \varphi}{h})^2 a(x, h)] + (V(x) - E) a(x, y) = 0$$

$$\implies -h^2 \Delta a(x, h) - ih \Delta \varphi a(x, h) - 2ih \nabla a(x, h) \nabla \varphi - (\nabla \varphi)^2 a(x, h) + (V(x) - E) a(x, y) = 0$$

et maintenant aussi on remplace le symbole $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ par

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_0 h^0 + a_1 h^1 + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots$$

En faisant une identification par rapport à h , on a :

$$-h^2(\Delta a_0 + \Delta a_1 h + \dots \Delta a_i) - ih \Delta \varphi (a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots) - 2ih \nabla \varphi (\nabla a_0 + \nabla a_1 h + \nabla a_2 h^2 \dots)$$

$$-i(\nabla \varphi)^2 (a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots) + (V(x) - E)(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots) = 0$$

On déduit alors :

1. L'équation eiconale [3] :

$$-\mathbf{i}(\nabla \varphi)^2 + \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{E} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \pm \int_{\delta} \sqrt{(E - V)} d\mathbf{x}, \text{ avec } \delta \text{ un schéma d'intervale.} \quad (1.1.5)$$

1. Les équations de transports [3] :

$$\begin{cases} -2\nabla\varphi\nabla a_0 - (\Delta\varphi)a_0 = E - V + (\nabla\varphi)^2 a_1 \\ -\nabla a_0 - 2\nabla\varphi a_1 - \Delta\varphi a_1 = E - V + (\nabla\varphi)^2 a_2 \\ -\Delta a_1 - 2\nabla\varphi a_1 - \Delta\varphi a_2 = E - V + (\nabla\varphi)^2 a_3 \\ \dots \end{cases} \quad (1.1.6)$$

On s'intéresse maintenant aux s'équation qui dépend du paramètre de Planck, cela revient à étudier :

$$\begin{cases} (a_0 \sqrt{\varphi'})' = 0, & (1) \\ (a_k \sqrt{\varphi'})' - i \frac{(\Delta a_{k-1})}{2\sqrt{\varphi'}} = 0, & (2) \end{cases} \quad (1.1.7)$$

avec $k \geq 1$.

Alors d'après (1) on trouve :

$$a_0(x) = \frac{\sqrt{\varphi'(x_0)}}{\sqrt{\varphi'(x)}} = \frac{(E - V(x_0))^{\frac{1}{4}}}{(E - V(x))^{\frac{1}{4}}}$$

et pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_k(x) &= \frac{i}{\sqrt{\varphi'(x)}} \int_{x_0}^x \frac{(a_{k-1})(t)}{\sqrt{\varphi'(t)}} dt \\ &= \frac{i}{(E - V(x))^{\frac{1}{4}}} \int_{x_0}^x \frac{(a_{k-1})(t)}{(E - V(t))^{\frac{1}{4}}} dt \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Définition 1.1.1 (la fonction de la phase) : On dit qu'une fonction

$$\varphi(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

est une fonction de phase si et seulement si :

1. $\text{Im}\varphi \geq 0$.

2. $\exists C > 0, \rho > 0$ tel que $|\nabla_{x,\xi}\varphi| \geq C^{-1} |\xi|^\rho$ pour $|\xi|$ est assez grand, tels que $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ est un vecteur gradient. L'intégrale oscillante associé à une fonction de phase φ .

Définition 1.1.2 (les symboles) : Soit

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

où $a_\alpha(x)$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}^n$.

On remplace D^α par ξ^α , on obtient

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Ce qu'on appelle le symbole de l'opérateur p .

Soit $n \in \mathbb{R}$ dans $S^n(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tels que :

$$\forall \alpha, \forall \beta; \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{n - |\beta|}.$$

1.1.1 Les intégrales oscillantes :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ une fonction φ est appelée une fonction de phase si :

1. $\varphi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$
2. φ est positivement homogène d'ordre 1 par rapport à ξ .

$$\forall \lambda > 0, \forall (x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R}^n), \varphi(x, \lambda \xi) = \lambda \varphi(x, \xi)$$

φ n'a pas des points critiques sur $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

identiquement équivalent (i.e) $\forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \right|^2 \neq 0.$$

Sauf point $(0, 0)$. On s'intéresse à des intégrales de la forme : $\int \int \exp(i\varphi(x, \xi)) p(x, \xi) u(x) dx d\xi$.

Elle n'est pas un intégrale.

Exemple 1 On considère $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$. Avec $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Bornée ainsi que tout ces dérivées, alors $a \in S^n$ on dit que a est un symbole différentiel.

Soit

$$\begin{cases} ih \frac{\partial}{\partial t} u = Pu \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

avec P est un opérateur différentiel. On trouve u , (c'est-à-dire) trouver un certain développement asymptotique donc on choisi :

$$\tilde{u}(x, y) = a(x, \xi) \exp\left(\frac{-i\varphi(x)}{h}\right)$$

telle que $\tilde{u}$ la solution approché de u de BKW.

Soit $\tilde{u}$ la solution approché de l'équation

$$Pu = 0 \Rightarrow P\tilde{u} = o(\exp(-i\delta/h)),$$

et pour résoudre il faut passer par $P(x, \nabla\varphi) = 0$, on prend $a(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j$ et $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ est un vecteur gradient.

$$\begin{aligned} Pu &= 0 \Rightarrow (-\Delta + v(x))u = 0 \Rightarrow -\Delta u + v(x)u = 0 \\ &\Rightarrow (\nabla\varphi)^2 + v(x) = 0 \\ &\Rightarrow p(x, \nabla\varphi) = 0, (\nabla\varphi)^2 = \xi^2, \end{aligned}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ opérateur de Laplacien.

La méthode BKW en dimension 1 [1] :

2.1 L'ansatz BKW :

L'Ansatz primitif est de chercher u sous la forme d'une fonction rapidement oscillante $u(x) = a(x)e^{iS(x)/h}$ mais on peut le perfectionner en prenant pour a une série formelle en h . Prenons par exemple ce qui est le plus adapté ici :

$$a_h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \left(\frac{h}{i}\right)^j.$$

On considère un nouveau opérateur de l'équation de Schrödinger sous la forme

$$\hat{H} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \text{ où } V_h(x) = V_0(x) + h^2 W(x),$$

avec V est C^∞ . V_0 , W appartiens à C^∞ des valeurs réelles ; Le cas $V_0 = 0$ correspond à l'asymptotique des grandes valeurs propres pour $-\frac{d^2}{dx^2} + W(x)$.

Dans la suite nous supposons $W = 0$ et $V = V_0$.

On cherche à résoudre l'équation de Schrödinger *dimension1* stationnaire

$$(\hat{H} - E)u = 0 \tag{2.1.1}$$

On obtient en appliquant $\hat{H} - E$ à l'Ansatz :

$$(\hat{H} - E)u = ((s'(x)^2 + V(x) - E)a_h(x) + \frac{h}{i}(2a'_h S' + a_h S'') - h^2 a''_h)e^{iS(x)/h}. \tag{2.1.2}$$

Soit $j \geq 0$,

$$a_j'' + (2a_{j+1}'S' + a_{j+1}S'') + a_{j+2}((S')^2 + V - E) = 0,$$

avec la convention $a_j = 0$ si $j < 0$.

2.2 Equation eiconale pour S [1] :

Le terme en h_0 dans $(\hat{H} - E)u$ est

$$(s'(x)^2 + V(x) - E)a_0(x)e^{iS(x)/h}.$$

L'annulation de ce premier terme s'appelle équation eiconale (eiconale pour image, icône) ou de Hamilton-Jacobi :

$$S'(x)^2 + V(x) - E = 0. \quad (2.2.1)$$

avec S lisse, cela signifie que le graphe de S' est contenu dans la couche d'énergie

$$C_E = \{\xi^2 + V(x) = E\}.$$

On doit donc éviter les caustiques (tangentes verticales de C_E). Dans tout intervalle où $V(x) < E$, il y a 2 solutions à une constante près, $\pm S$, avec

$$S' = \sqrt{E - V(x)}.$$

Si on regarde la phase sur C_E , on a $dS = \xi dx$.

2.3 Equation de transport [1] :

Si l'équation eiconale est satisfaite, on a :

$$\begin{aligned} (\hat{H} - E)u &= \frac{h}{i}(2a_0'S' + a_0S'')e^{iS(x)/h} + O(h^2) \\ &= Oh^2 - 2ihS'a_0'e^{i\frac{S}{h}x} - ihS''a_0e^{i\frac{S}{h}x} \end{aligned}$$

Donc a_0 doit satisfaire l'équation (t) dite de transport :

$$(t) \quad 2a'_0 S' + a_0 S'' = 0. \quad (2.3.1)$$

si $S' \neq 0$, on a :

$$a_0 = C |S'(x)|^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$W = a(x)^2 |dx| = |u(x)|^2 + O(h^\infty) \text{ et } V = 2S'(x) \partial_x$$

la projection du champ hamiltonien sur $\mathbb{R}_x$; nous donne :

$$L_V W = 0$$

car

$$L_V W = a_0 (2da_0(V) + a_0 \operatorname{div} V) |dx| \quad (2.3.2)$$

et on a :

$$2da_0(V) + a_0 \operatorname{div} = 2a'_0 S' + a_0 S''.$$

L'image réciproque de w sur C_E par la projection sur $\mathbb{R}_x$ est donc une densité invariante par la dynamique classique. Donc $a_0(x)e^{iS(x)/h}$ contient comme informations la variété C_E (la phase) et la densité invariante sur C_E .

1.3. Calcul des a_j pour $j \geq 1$. On a :

$$2S'a'_j + S''a_j + a''_{j-1} = 0,$$

et donc a_j est déterminé par sa valeur en x_0 . On peut ainsi choisir les a_j réels.

On peut aussi utiliser l'équivalent

$$u_h(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{h}{i}\right)^j S_j(x)\right).$$

Ici $S_{-1} = S$ sera donné par l'équation eiconale, $\exp(S_0) = a_0$ et ainsi de suite.

Dans ce cas, les S_j peuvent être choisis réels.

On déduit le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 [1] :

Pour tout intervalle où $V(x) < E$ (zone classiquement permise) soit x_0 donné, il existe une unique solution BKW (série formelle) dite normalisée en x_0 défini par :

$$u_+(x) = \exp\left(\frac{iS(x)}{h}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \left(\frac{h}{i}\right)^j\right). \quad (2.3.3)$$

telle que

$$S(x_0) = 0, \quad S'(x) > 0, \quad a_0(x_0) = 1,$$

et les $a_j(x_0)$ sont nuls pour $j \geq 1$.

Les a_j sont réels. Toute autre solution BKW (avec $S' > 0$) est de la forme

$$v_+ = \exp\left(\frac{iA}{h}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\frac{h}{i}\right)^j\right). \quad (2.3.4)$$

Les solutions BKW u_- avec $S' < 0$ sont les complexes conjuguées des précédentes solutions obtenues en changeant h en $-h$

Théorème 2.3.2 [1] :

Soit $Z_h \subset I$ défini comme l'ensemble des E tels que

$$A(E) = \int_0^T S'(x) dx \in 2\pi h \mathbb{Z}. \quad (2.3.5)$$

Il existe une série formelle

$$\xi_h(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(E) h^{2j}. \quad (2.3.6)$$

avec les $\xi_j \in C^\infty$ telle que si on choisit $\phi_h(E) \sim E + \xi_h(E)$ et qu'on pose $\tilde{Z}_h = \phi_h(Z_h)$. Alors pour tout N , $\hat{H}$ admet exactement 2 valeurs propres dans tout intervalle de taille h^N centré en un point de $\tilde{Z}_h$ et pas d'autres valeurs propres dans I .

Lemme 2.3.1 [1] :

On a :

$$\frac{dA}{dE} = T(E) \text{ où } T(E)$$

est la période de la trajectoire d'énergie E .

Preuve. :

On prend comme coordonnées dans un anneau $E_- \leq H(x, \xi) \leq E_+$ le couple (t, H) . Ce sont des coordonnées canoniques : $W(\partial_t, \partial_H) = -dH(\partial_H) = -1$. On en déduit que l'écart asymptotique de 2 points de Z_h situés près de E est $2\pi h/T(E)$.

-La série formelle ϵ .

Soit $u_+(x)$ le série BKW. Il est clair que $u_+(x + T) \exp(-iA(E)/h)$ est une autre série BKW et donc.

$$u_+(x + T) = \exp(iA(E)/h) \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\frac{h}{i}\right)^j \right] u_+(x).$$

Réalisant la série formelle précédent, donne pour la périodicité de u_+ une équation implicite en (E, h) de la forme :

$\exp([iA(E) - A(E_0)]/h)(1 + b(E, h)) = 1$ avec $E_0 \in Z_h$. On rénormalisé cette équation en posant $E = E_0 + \alpha h$ ce qui donne une équation implicite $\phi(\alpha, h, E_0) = 0$ avec $\phi(0, 0, E_0) = 0$ et la dérivée $\partial_\alpha \phi(0, 0, E_0) = T(E_0)$ qui est non nul. On obtient ainsi $\alpha = F(h, E_0) = O(h)$ et une série formelle $\xi = \alpha h = \sum_{j \geq 2} \xi_j(E_0) h^j$.

-Usage de la symétrie $\xi \longrightarrow -\xi$ et parité de ξ . Le caractère auto-adjoint de $\hat{H}$ implique facilement que les ξ_j sont réels. Il est clair que le passage de u_+ à u_- changement paires dans la série sont non nuls.

-Existence des valeurs propres. On a donc pour $E \in \tilde{Z}_h$, 2 solutions périodiques u_+ et u_- de $(\hat{H} - E) = O(h^\infty)$, d'autre part le produit scalaire L^2 de u_+ et u_- est $O(h^\infty)$ (phase stationnaire) et on déduit par le minimaux l'existence des 2 valeurs propres dans chaque intervalle de largeur $O(h^\infty)$ autour de $E \in \tilde{Z}_h$. $\square$

CONCLUSION

Dans ce projet nous avons présenté les avantages et les inconvénients de la méthode BKW, on s'est intéressé au

- Une bonne approche (faible) de la solution.
- Bonne pour un développement de la solution.
- Meilleur dans les systems semi-classique (n assez grand).
- Nous n'avons pas besoin de résoudre l'équation.

Mais malgré l'apport de cette méthode il-a aussi des inconvénients de BKW,

- Mais pour les fonctions d'onde qui changent rapidement.
- pour le développement asymptotique long n'est pas a proposé pour les états faibles (n assez petit) [2].

ANNEXES

Bibliographie

- [1] Colin de Verdière, Y :Une introduction à la mécanique classique. Enseign. Math. II. Ser. 44. N01-2,23-51(1998).
- [2] I. Lukacevic-The WKB approximation Quantum mechanics2-Lecture4. UJJS. Dept. Of physics. Osijek. 29. Listopada .(2012).
- [3] A.Martinez,An Introduction to Semiclassical Analysis, Università di Bologna.
- [4] Nicolas Burq, Équation de Schrödinger non-linéaire, Oana Ivanovici.
- [5] A. Zarzo, J.S. Dehesa, Spectral properties of solutions of hypergeometric-type differential equations, Mathematics (Leuven, Belgium, July 1992), J. Comput. Appl. Math. vol. 50 (1994) pp.613-623.