

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM



FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA  
NATURE ET DE LA VIE  
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

**MEMOIRE**

Présenté par

**ELOSMANI AISSA OMAR**

Pour Obtenir

**LE DIPLOME DE MAGISTER**

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse des Systèmes, Contrôle et Optimisation Numérique

*Intitulé*

"Contribution à la Stabilité des Modèles Bidimensionnels"

Composition du jury de soutenance

|                    |                                |                  |                   |
|--------------------|--------------------------------|------------------|-------------------|
| <b>B.BENDOUKHA</b> | <b>Professeur</b>              | <b>Président</b> | <b>U.M.A.B</b>    |
| <b>B.BENAHMED</b>  | <b>Maître de conférences A</b> | <b>Examineur</b> | <b>ENSET ORAN</b> |
| <b>M.OULD ALI</b>  | <b>Maître de conférences A</b> | <b>Examineur</b> | <b>U.M.A.B</b>    |
| <b>D.BOUAGADA</b>  | <b>Maître de conférences A</b> | <b>Encadreur</b> | <b>U.M.A.B</b>    |

**Année universitaire 2011-2012**

A mes parents et à ma soeur pour leur patience et leurs encouragements affectueux.

Contributions à la Stabilité des Modèles  
Bidimensionnels

Elosmani Aissa Omar

10 Novembre 2011



# Table des matières

|          |                                                             |           |
|----------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Notions de bases</b>                                     | <b>10</b> |
| <b>2</b> | <b>Extension des fonctions de transformations</b>           |           |
|          | <b>Formes bidimensionnelles</b>                             | <b>14</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                      | 14        |
| 2.2      | Transformée de Laplace à deux dimensions . . . . .          | 15        |
| 2.2.1    | Propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions      | 19        |
| 2.2.2    | Inversion de l'intégrale de Laplace à deux dimensions .     | 20        |
| 2.3      | Transformée en $Z$ à deux dimensions . . . . .              | 20        |
| 2.3.1    | Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle .      | 21        |
| 2.3.2    | La transformée inverse . . . . .                            | 22        |
| 2.3.3    | Propriétés de la transformée en $Z$ bidimensionnelle . .    | 22        |
| 2.4      | 2-D Laplace- $Z$ Transformation . . . . .                   | 24        |
| 2.4.1    | Définitions et propriétés de la 2-D s- $Z$ transformation . | 24        |
| <b>3</b> | <b>Systèmes Bidimensionnels</b>                             | <b>28</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                      | 28        |

|       |                                                                                         |    |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2   | Modèles d'espaces d'état classiques bidimensionnels à temps discret . . . . .           | 29 |
| 3.2.1 | Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser . . . . .                                       | 29 |
| 3.2.2 | Modèle bidimensionnel de Attasi . . . . .                                               | 31 |
| 3.2.3 | Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini . . . . .                                 | 31 |
| 3.3   | Singularité et régularité des modèles bidimensionnels . . . . .                         | 32 |
| 3.3.1 | Extension du modèle bidimensionnel de Roesser . . . . .                                 | 33 |
| 3.4   | Solution du modèle de Roesser . . . . .                                                 | 34 |
| 3.5   | Solution du modèle étendu de Roesser . . . . .                                          | 42 |
| 3.6   | Modèle à espace d'état bidimensionnel à temps continu-discret                           | 54 |
| 3.6.1 | Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser à temps continu-discret . . . . .               | 55 |
| 3.6.2 | Modèle bidimensionnel de Attasi . . . . .                                               | 56 |
| 3.6.3 | Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini . . . . .                                 | 56 |
| 3.6.4 | Modèle bidimensionnel général à temps continu-discret                                   | 57 |
| 3.6.5 | Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret . . . . .                    | 59 |
| 3.6.6 | Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret . . . . .                    | 69 |
| 3.7   | Modèle d'espaces d'état bidimensionnel continu . . . . .                                | 71 |
| 3.7.1 | Modèle d'état bidimensionnel de Roesser . . . . .                                       | 71 |
| 3.7.2 | Résolution d'une EDP linéaire à coefficients constants .                                | 72 |
| 3.8   | Identification entre les modèles de Givone-Roesser et de Fornasini-Marchesini . . . . . | 74 |

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.8.1    | Mise en forme de Givone-Roesser en Fornasini-Marchesini           |           |
|          | 75                                                                |           |
| 3.8.2    | Mise en forme de Fornasini-Marchesini en Givone-Roesser           | 78        |
| <b>4</b> | <b>Inégalités Matricielles linéaires</b>                          | <b>81</b> |
| <b>5</b> | <b>Conditions De Stabilité Des Modèles D'état Bidimensionnels</b> |           |
|          | <b>Par Les LMIs</b>                                               | <b>88</b> |
| 5.1      | Formulation et position du problème . . . . .                     | 88        |
| 5.1.1    | Système discret bidimensionnel général . . . . .                  | 89        |
| 5.1.2    | Système à temps continu-discret bidimensionnel . . . . .          | 90        |
| 5.1.3    | Système bidimensionnel à temps continu . . . . .                  | 91        |
| 5.2      | Test de stabilité . . . . .                                       | 91        |
| 5.3      | Conditions LMIs pour les tests de stabilité . . . . .             | 93        |
| 5.4      | Extension Du Système Bidimensionnel à L'ordre n . . . . .         | 96        |
| 5.4.1    | Extension Des Conditions LMIs pour les tests de stabilité         | 99        |
| 5.4.2    | Système multidimensionnel continu . . . . .                       | 102       |

# Résumé

Nous introduisons dans notre thématique un sujet qui a connu un grand développement et qui est la théorie des systèmes bidimensionnels. Il a été introduit par T.Kaczorek, Fornasini-Marchesini, J.Klamka, J.Kurek, Galkowski, ainsi que d'autres auteurs versés dans le même domaine. Ces systèmes trouvent leurs applications en biomathématique, en économie, et en électronique. Dans notre travail, on s'intéresse à la classe des systèmes bidimensionnels plus particulièrement à l'étude de résolution, d'équivalence et de stabilité.

Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un modèle  $2D$  soit stable seront établis. Des tests de stabilité en termes de polynômes caractéristiques seront mis en évidence pour enfin réduire tout cela à des formes LMI. Pour ce faire, on se base sur de nombreuses et récentes références qui seront nommément citées et utilisées tout au long de l'élaboration de notre mémoire.

# Remerciements

Je voudrais porter ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères, à mon encadreur le Docteur BOUAGADA Djillali pour son effort constant, sa disponibilité, sa grande générosité humaine et scientifique, et pour tous les longs entretiens fructueux que nous avons partagés. Mes remerciements vont également au professeur BENDOUKHA Berrabah, de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, pour l'honneur, et l'amabilité qu'il me fait, à accepter de présider la soutenance de cette thèse. Je remercie également le Docteur OULD ALI Mohand d'avoir si aimablement accepté d'examiner le contenu de ce mémoire. Je porte mon grand remerciement au Docteur BENAHMED Boubakeur de L'Enset d'Oran, pour l'examen de mon mémoire de thèse. Mes remerciements les plus amicaux vont également aux membres du département de mathématiques de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem. Une grande gratitude à mes parents et à ma soeur, pour leurs indéfectibles encouragements qui ont été une source de motivation durant toute la période de préparation de ce travail.

# Notation

|                             |                                                         |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\oplus$                    | Somme Directe                                           |
| $Z_+$                       | Corps des nombres entiers non-négatifs                  |
| $R$                         | Corps des nombres réels                                 |
| $R_+$                       | Corps des nombres réels non-négatifs                    |
| $R^n$                       | Espace des vecteurs à $n$ nombres réels                 |
| $H = R^{m \times n}$        | Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$   |
| $C$                         | Corps des nombres complexes                             |
| $R_+^n := R_+^{n \times 1}$ | Espace des vecteurs à $n$ nombres réels non-négatifs    |
| $R_+^{m \times n}$          | Espace des matrices à composantes réelles non-négatives |
| $A^T$                       | Transposée de matrice                                   |
| $T^*$                       | Transposée de la matrice conjuguée de $T$               |
| $A^{-1}$                    | Matrice inverse de $A$                                  |
| $I_n$                       | Matrice identité d'ordre $n$                            |
| $\rho(A)$                   | Rayon spectral de $A$                                   |
| $F(Z_x, Z_y)$               | La transformée en $Z$ bidimensionnelle                  |
| $X(s, n)$                   | La $s - z$ transformée                                  |
| $F(p, q)$                   | La transformée de Laplace bidimensionnelle              |

# Introduction

L'analyse de la stabilité des systèmes linéaires bidimensionnels est un sujet qui est étudié depuis plus de deux décennies. Il s'inscrit dans un vaste champ de recherches qui est l'analyse de la robustesse, et qui englobe plusieurs domaines relatifs aux sciences expérimentales tel le traitement d'images, la biotechnologie, la géophysique ainsi que l'économie.

Néanmoins, la stabilité trouve ses principales applications dans la théorie de la commande et l'automatique. Ainsi, en automatique, la synthèse d'une loi de commande se fait généralement sur un modèle nominal simplifié qui ne prend pas en compte toute la complexité du système. Des dynamiques sont négligées, comme celles qui se trouvent en dehors de la bande passante du système asservi.

Du fait de ces approximations, il est généralement nécessaire de recourir à l'analyse de la robustesse ou à l'analyse de la stabilité du modèle, qui consiste à établir si le système demeure stable malgré les variations attendues des paramètres. Comme préalable par rapport à l'étude des différentes méthodes d'analyse de la stabilité qui sont développées dans notre travail, il convient d'explicitier les outils nécessaires à sa réalisation, ainsi, nous consacrerons la première partie (constituée des quatre premiers chapitres) du présent mé-

moire à l'exposé de ces derniers. Les notions de bases fondamentales et nécessaires à notre étude illustrant le chapitre 1, ont porté sur l'outil algébrique et matriciel (pour plus de détail voir [14], [15], [28] et [4]) et qui apparaîtra tout au long de notre mémoire, comme un intervenant utile et indispensable. Dans le chapitre 2, nous exposons une série de résultats fondamentaux (définitions principales, propriétés essentielles, et, notamment, théorèmes d'existence et d'unicité) [7], [27] et [30] concernant la transformées en  $Z$  bidimensionnelle, la transformée de Laplace bidimensionnelle ainsi que la  $Z$  Laplace transformée, qui sont des éléments indispensables pour le chapitre 3. Dans ce chapitre 3, nous abordons trois modèles (Givone-Roesser, S. At-tasi, Fornasini-Marchesini) (étudié dans [2], [12] [13], [16] et [26]) de systèmes bidimensionnels linéaires, sous la forme de deux représentations, l'une par la formulation d'espace d'état, l'autre par la fonction de transfert. Cette méthodologie est appliquée par rapport à trois dynamiques : discret-discret, continu-discret et continu-continu. Par ailleurs, nous nous sommes intéressés à la formulation générale du modèle bidimensionnel linéaire, qui nous a permis de faire apparaître, les cas standard, régulier et singulier. Nous nous sommes penchés aussi, sur la résolution de ces différents modèles, par utilisation des différentes techniques exposées dans le chapitre 2. Enfin, concernant les systèmes bidimensionnels, nous terminons ce troisième chapitre par une présentation d'équivalence entre les modèles de Givone-Roesser et Fornasini-Marchesini ([1] et [11]), et une mise en adaptation de ces deux derniers systèmes dans le sens discret-discret, car nous devons observer que les calculs ne mettent en jeu que les coefficients.

Le chapitre 4 sera consacré à l'étude des LMIs (Inégalités Matricielles Li-

néaires), lesquelles ont été développées, notamment par A. Lyapunov, dans un esprit de recherche de stabilité d' équations différentielles. Puis nous notons que sur la base de décomposition, partitionnement (Schur), et de réduction d'une LMI à contraintes multiples en une LMI à une seule contrainte, une approche unifiée est présentée pour l' analyse de problèmes de commande, tout en préservant l'esprit d' efficacité et de réalisabilité de la résolution de problèmes. Sur les dernières années, des recherches ont porté sur la reformulation d' une LMI en un problème d' optimisation convexe, donnant la possibilité d' une résolution numérique, si l' approche analytique n'est pas réalisable. Nous apportons aussi, les outils nécessaires, pour situer tout l' environnement où peut se développer le concept des LMI, pour ce faire nous nous basons sur les références suivantes [6], [8], [17], [18], [23] et [29]. Le chapitre 5, illustrant la deuxième partie de notre travail, annonce des conditions de stabilité des modèles bidimensionnels, par la définition essentielle précisant les hypothèses initiales conduisant à la convergence du vecteur d' état vers zéro. Le second résultat établi, concernant les tests de stabilité, donne les conditions nécessaires et suffisantes associées aux polynômes caractéristiques [9] et [5]. Nous donnons par ailleurs des conditions suffisantes de stabilité asymptotique par rapport à la faisabilité de systèmes de LMIs liées à l' existence d' ensemble de matrices hermitiennes. Nous avons étendu enfin, les notions de stabilité asymptotique, au cas de systèmes multidimensionnels.

# Chapitre 1

## Notions de bases

Nous présentons dans ce premier chapitre les notions concernant la théorie des matrices. Il existe un grand nombre de références; nous nous basons principalement sur [14], [15] et [28].

**Définition 1.** (*Matrice définie positive*) Une matrice symétrique  $A$  dont les éléments sont des nombres réels, est définie positive si pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  non nul on a  $x^T A x > 0$ .

**Définition 2.** Une matrice bloc est une matrice pouvant être divisée en matrices rectangulaires de dimensions inférieures appelées blocs

**Exemple 1.** Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$P$  peut être partitionnée en quatre blocs  $2 \times 2$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On peut alors écrire la matrice par bloc comme,

$$P_{\text{partitionnee}} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

**Proposition 1. (Complément de Schur)** Soit  $F : \mathfrak{X} \rightarrow H$  ( $\mathfrak{X}$  espace vectoriel normé de dimension finie), une fonction affine qui est partitionnée comme suit,

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix} \quad (1.0.1)$$

où,  $F_{11}$  est une matrice carrée. Alors  $F(x) \prec 0$  (i.e. définie négative) si et seulement si,

$$\begin{cases} F_{11}(x) \prec 0 \\ F_{22}(x) - F_{21}(x)[F_{11}(x)]^{-1}F_{12}(x) \prec 0. \end{cases} \quad (1.0.2)$$

ou,

$$\begin{cases} F_{22}(x) \prec 0 \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)[F_{22}(x)]^{-1}F_{21}(x) \prec 0. \end{cases} \quad (1.0.3)$$

**Remarque 1.** Les secondes inégalités dans (1.0.2) et (1.0.3) sont non linéaires en  $x$ .

Ce résultat permet de convertir des inégalités matricielles non linéaires de la forme (1.0.2) et (1.0.3) en inégalités matricielles linéaires.

**Preuve**

Soit  $F(x) \in R^{n \times n}$  s'écrivant sous la forme  $F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix}$  avec

$F_{11}(x)$  matrice carrée. On peut écrire,

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix}^T F(x) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{11}(x) + G^T F_{21}(x) + F_{12}(x)G + G^T F_{22}(x)G & F_{12}(x) + G^T F_{22}(x) \\ F_{21}(x) + F_{22}(x)G & F_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice  $F(x)$  est définie positive si et seulement si, le 2<sup>e</sup> terme de la dernière équation est défini positif. Si  $F(x)$  est définie positive, alors  $F_{22}(x)$  est inversible, et avec  $G = -F_{22}(x)^{-1}F_{21}(x)$ , on a,

$$F(x) \prec 0 \iff \begin{bmatrix} F_{11}(x) - F_{12}(x)[F_{22}(x)]^{-1}F_{12}(x)^T & 0 \\ 0 & F_{22}(x) \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\text{d'où, } F(x) \prec 0 \iff \begin{cases} F_{22}(x) \prec 0 \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)[F_{22}(x)]^{-1}F_{21}(x) \prec 0 \end{cases}$$

□

**Définition 3. (Normes vectorielles) et (Normes matricielles subordonnées)**

On note  $\|\bullet\|_1$ ,  $\|\bullet\|_2$  et  $\|\bullet\|_\infty$  les trois normes usuelles sur  $K^n = R^n$  ou  $C^n$ , rappelées ci-dessous, et  $\|\|\bullet\|\|_1$ ,  $\|\|\bullet\|\|_2$  et  $\|\|\bullet\|\|_\infty$  les normes matricielles subordonnées associées. Soit  $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ , et  $A = \begin{pmatrix} a_{i,j} \end{pmatrix}_{1 \leq i,j \leq n}$ .

Alors ces normes sont données par les formules suivantes,

$$\|v\|_1 = \sum_i |\alpha_i|, \|v\|_2 = \sqrt{\sum_i |\alpha_i|^2}, \|v\|_p = \left( \sum_i |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \|v\|_\infty = \max_i |\alpha_i|$$

$$\|A\|_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right), \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* \cdot A)} = \|A^*\|_2, \|A\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

# Chapitre 2

## Extension des fonctions de transformations Formes bidimensionnelles

### 2.1 Introduction

Les méthodes présentées dans ce chapitre à savoir, la transformée de Laplace à deux dimensions, la transformée en  $Z$  bidimensionnelle et la  $2D$  Laplace- $Z$  transformée s'utilisent surtout dans les problèmes de traitement des signaux bidimensionnels et des images, où l'interprétation fréquentielle est importante : filtrage et prétraitement des images préalables à leur interprétation, problèmes de propagation d'ondes. Elles ne sont que des extensions des techniques monodimensionnelles. Nous nous basons essentiellement sur [7], [30] et [27].

## 2.2 Transformée de Laplace à deux dimensions

Les propriétés fondamentales de l'intégrale de Laplace à deux dimensions présentent de nombreux points communs avec celles de l'intégrale à une dimension. D'autre part, l'intégrale de Laplace à deux dimensions, autant que le calcul opérationnel à deux variables, possèdent de nombreux traits spécifiques que l'on ne retrouve pas dans le cas unidimensionnel. Dans cette section, nous allons considérer une intégrale de Laplace à deux dimensions et énoncer ses propriétés fondamentales.

**Définition 4.** *On définit la transformée de Laplace à deux dimensions comme suit,*

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} f(x, y) dx dy, \quad (2.2.1)$$

où  $p = \sigma + i\mu$ ,  $q = \tau + i\nu$  sont des paramètres complexes.

**Définition 5.** [7] *L'intégrale (2.2.1) est absolument convergente si existe la limite,*

$$\lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b |e^{-px-xy} f(x, y)| dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} |f(x, y)| dx dy; \quad (2.2.2)$$

où  $\text{Re } p = \sigma$ ,  $\text{Re } q = \tau$

**Remarque 2.** *Par analogie avec le cas unidimensionnel, on peut penser que si l'intégrale (2.2.1) est convergente pour un certain couple de valeurs  $p_0$  et  $q_0$ , elle le sera pour tous les  $\text{Re } p > \sigma_0$ ,  $\text{Re } q > \tau_0$ . Mais ceci n'a pas lieu pour une intégrale de Laplace à deux dimensions comme le montre l'exemple*

suivant,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, 2], y \in [0, 2] \text{ et pour } x \geq 2, y \geq 2, \\ e^{x^2} & \text{pour } x \in [0, \infty[, y \in [0, 1[, \\ -e^{x^2} & \text{pour } x \in ]2, \infty[, y \in [1, 2[, \\ e^{y^2} & \text{pour } x \in [0, 1[, y \in ]2, \infty[, \\ -e^{y^2} & \text{pour } x \in [1, 2[, y \in ]2, \infty[. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Pour  $a \geq 2, b \geq 2$ , on a

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy = 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy = 0,$$

i.e. qu'il existe  $F(0, 0) = 0$ . D'autre part, pour  $a \geq 2, b \geq 2$ , on a,

$$\begin{aligned} F(p, q; a, b) &= \int_0^a \int_0^b e^{-px-ay} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_2^a e^{-px} dx [e^{x^2} \int_0^1 e^{-ay} dy - e^{x^2} \int_1^2 e^{-ay} dy] + \\ &+ \int_2^b e^{-ay} [e^{y^2} \int_0^1 e^{-px} dx - e^{y^2} \int_1^2 e^{-px} dx] = \\ &= \frac{1}{q}(1 - e^{-q})^2 \int_2^a e^{-px+x^2} dx + \frac{1}{p}(1 - e^{-p})^2 \int_2^b e^{-ay+y^2} dy, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

D'où il suit que si  $p$  et  $q$  ne sont pas simultanément nuls,  $\lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} F(p, q; a, b)$  n'existe pas. La propriété d'existence de l'intégrale de Laplace en tous les points pour lesquels  $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$ , i.e. l'intégrale est convergente dans le domaine  $\operatorname{Re}(z) > z_0$  du plan complexe  $z$ , ne se généralise pas au cas bidimensionnel, car la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

entraîne que les intégrales partielles  $\int_0^T e^{-pt} f(t) dt$  sont bornées quel que soit  $T \geq 0$ , alors que la convergence ordinaire de l'intégrale bidimensionnelle

n'implique pas la limitation des intégrales partielles.

$$F(p, q; a, b) = \int_0^a \int_0^b e^{-px-xy} f(x, y) dx dy, \quad (2.2.5)$$

Quels que soient  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , pour que les propriétés de la transformation de Laplace à une dimension se transposent au cas bidimensionnel, il est nécessaire d'exiger que pour un couple au moins de valeurs des paramètres  $p$  et  $q$ , soient réalisées les conditions suivantes,

1) l'intégrale (2.2.5) est bornée au point  $(p, q)$  par rapport aux variables  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , c-à-d

$$|F(p, q; a, b)| < M(p, q)$$

pour tous les  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , où  $M(p, q)$  est une constante positive ne dépendant ni de  $a$  ni de  $b$ ;

2) au point  $(p, q)$  existe la

$$\lim_{a \rightarrow \infty; b \rightarrow \infty} F(p, q; a, b) = F(p, q).$$

Si les conditions 1) et 2) sont remplies simultanément, on dit que l'intégrale de Laplace (2.2.1) est à convergence bornée au point  $(p, q)$ . Si l'on admet la convergence absolue de l'intégrale (2.2.1), il n'est pas indispensable d'introduire la notion de convergence bornée puisque la première inclut automatiquement la seconde.

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a \int_0^b e^{-px-xy} f(x, y) dx dy \right| &\leq \int_0^a \int_0^b |e^{-px-xy} f(x, y)| dx dy \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-px-xy} f(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

**Théorème 3.** [7] Si l'intégrale (2.2.1) est absolument convergente au point  $(p_0, q_0)$ , elle le sera en tous les points  $(p, q)$  tels que  $\text{Re}(p - p_0) \geq 0$ ,  $\text{Re}(q - q_0) \geq 0$ .

### Preuve

Par hypothèse, l'intégrale (2.2.1) converge absolument pour  $p = p_0$  et  $q = q_0$ , donc, l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-p_0x - q_0y} f(x, y)| dx dy < \infty,$$

ou

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p_0x - q_0y} |f(x, y)| dx dy < \infty,$$

Supposons que

$$\operatorname{Re}(p - p_0) = (\sigma - \sigma_0) \geq 0 \text{ et } \operatorname{Re}(q - q_0) = (\tau - \tau_0) \geq 0.$$

il vient

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b |e^{-px - qy} f(x, y)| dx dy &= \int_0^a \int_0^b e^{-\sigma x - \tau y} |f(x, y)| dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^b e^{-(\sigma\sigma_0)x - (\tau - \tau_0)y} e^{-\sigma_0x - \tau_0y} |f(x, y)| dx dy \\ &\leq \int_0^a \int_0^b |e^{-\sigma_0x - \tau_0y} f(x, y)| dx dy \leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma_0x - \tau_0y} |f(x, y)| dx dy < \infty. \end{aligned}$$

D'où suit la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-px - qy} f(x, y)| dx dy \leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma_0x - \tau_0y} |f(x, y)| dx dy \quad \square$$

**Théorème 4.** *Si une fonction  $f(x, y)$  est telle que,*

$$|f(x, y)| \leq M e^{hx + ky}$$

*quels que soient  $x \geq 0$  et  $y \leq 0$ , où  $M, h$  et  $k$  sont des constantes positives, l'intégrale de Laplace (2.2.1) est absolument convergente, en tous les points  $(p, q)$  tels que  $\operatorname{Re} p > h$ ,  $\operatorname{Re} q > k$  et l'on a*

$$|F(p, q)| \leq \frac{M}{(\sigma - h)(\tau - k)},$$

où  $\operatorname{Re} p = \sigma$ ,  $\operatorname{Re} q = \tau$ . En effet,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-ky} f(x, y) dx dy \right| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-(\sigma+i\mu)x-(\tau+i\nu)y} f(x, y)| dx dy \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty M e^{-\sigma x-\tau y} e^{hx-ky} dx dy = \frac{M}{(\sigma-h)(\tau-k)}. \end{aligned}$$

### 2.2.1 Propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions

1. La définition de l'intégrale (2.2.1) entraîne aussitôt les propriétés suivantes :

$$L_{p,q} f(\alpha x, \beta y) = \frac{1}{\alpha\beta} F\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right), \quad (2.2.6)$$

$$L_{p,q} e^{-\alpha x-\beta y} f(x, y) = F(p + \alpha, q + \beta), \quad (2.2.7)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres complexes quelconques. Dans les deux cas  $p$  et  $q$  sont choisis tels que l'intégrale de Laplace converge.

2. Le produit de convolution de deux fonctions se définit comme suit

$$f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_1(\xi, \eta) f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (2.2.8)$$

3. Si l'intégrale (2.2.1) est absolument convergente, la propriété fondamentale du produit de convolution a lieu, i.e.,

$$L_{p,q} f_1(x, y) L_{p,q} f_2(x, y) = L_{p,q} f(x, y) \quad (2.2.9)$$

## 2.2.2 Inversion de l'intégrale de Laplace à deux dimensions

**Théorème 5.** *Supposons qu'une fonction  $f(x, y)$  possède des dérivées partielles premières  $f'_x(x, y)$  et  $f'_y(x, y)$  et une dérivée partielle seconde mixte  $f''_{xy}(x, y)$  et qu'existent des constantes positives  $Q$ ,  $k_1$  et  $k_2$  telles que pour tous les  $x \in ]0, +\infty[$  et  $y \in ]0, +\infty[$  l'on ait,*

$$|f(x, y)| < Qe^{k_1x+k_2y}, \quad |f''_{xy}(x, y)| < Qe^{k_1x+k_2y}. \quad (2.2.10)$$

si,

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} f(x, y) dx dy, \quad (2.2.11)$$

alors,

$$f(x, y) = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty; \omega_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_1} \int_{\tau-i\omega_2}^{\tau+i\omega_2} e^{px+qy} F(x, y) dp dq, \quad (2.2.12)$$

ou,

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{px+qy} F(x, y) dp dq, \quad (2.2.13)$$

où,  $\sigma > k_1$ ,  $\tau > k_2$ .

## 2.3 Transformée en $Z$ à deux dimensions

**Définition 6.** [27] *On considère les deux variables  $Z_x$  et  $Z_y$ . La valeur de la transformée en  $Z$  d'un échantillon d'amplitude  $f(m, n)$  situé en un point de coordonnées  $m$  et  $n$  est alors,*

$$F(Z_x, Z_y) = f(m, n) Z_x^{-m} Z_y^{-n} \quad (2.3.1)$$

Dans le cas d'une fonction échantillonnée définie sur tout le plan, la transformée s'obtient par sommation

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) Z_x^{-m} Z_y^{-n} \quad (2.3.2)$$

elle est définie dans un domaine où la somme converge, en général une couronne contenant le tore "produit"

**Remarque 6.** Si  $Z_x = Z_y = 1$  de rayon un. Sur ce domaine, elle prend la forme d'une transformée de Fourier

$$F(e^{iu}, e^{iv}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) Z_x^{-m} Z_y^{-n} \quad (2.3.3)$$

**Remarque 7.** Si la fonction  $f(x, y)$  peut s'écrire sous la forme d'un produit

$$f(x, y) = h(x)g(y) \quad (2.3.4)$$

la transformée  $F(Z_x, Z_y)$  est séparable

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(x) Z_x^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(y) Z_y^{-n} = H(Z_x)G(Z_y) \quad (2.3.5)$$

où  $H(Z_x)$  et  $G(Z_y)$  sont les transformées de  $h(x)$  et  $g(y)$ . C'est le produit de deux transformées en  $z$  monodimensionnelles. Notons qu'il peut être pratique d'utiliser des fonctions séparables pour lesquelles le calcul des propriétés est facilité.

### 2.3.1 Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle

Si on pose

$$Z_x = e^{iu} \quad (2.3.6)$$

$$Z_y = e^{iv} \quad (2.3.7)$$

La transformée en  $Z$  s'écrit,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) e^{-i(mu+nv)} \quad (2.3.8)$$

C'est la transformée de Fourier du signal échantillonné.

### 2.3.2 La transformée inverse

C'est la généralisation de la transformée de Fourier inverse.

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{C_x} \left[ \oint_{C_y} F(Z_x, Z_y) Z_y \frac{dZ_y}{Z_y} \right] Z_x^x \frac{dZ_x}{Z_x} \quad (2.3.9)$$

L'intégration se faisant sur un contour fermé autour de l'origine intérieur au domaine de définition de la transformée. On vérifie la validité de cette expression en la reportant dans la définition de la transformée en  $Z$  monodimensionnelle.

### 2.3.3 Propriétés de la transformée en $Z$ bidimensionnelle

#### Transformée du produit de convolution

On remarque que l'extension au cas bidimensionnel de la propriété de convolution reste valide, soit la convolution bidimensionnelle,

$$f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) \quad (2.3.10)$$

et sa transformée en  $Z$ ,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) Z_x^{-x} Z_y^{-y} \quad (2.3.11)$$

En introduisant artificiellement,

$$Z_x^{-x} Z_y^{-y} = Z_x^{-x+s} Z_y^{-y+t} Z_x^{-s} Z_y^{-t} \quad (2.3.12)$$

l'équation (2.3.11) devient,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x-s, y-t) Z_x^{-x+s} Z_y^{-y+t} Z_x^{-s} Z_y^{-t} \quad (2.3.13)$$

le changement de variables

$$x' = x - sy' = y - t \quad (2.3.14)$$

appliqué à l'équation (2.3.11), cela donne,

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{y'=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x', y') Z_x^{-x'} Z_y^{-y'} Z_x^{-s} Z_y^{-t} \quad (2.3.15)$$

équation qui se décompose en un produit,

$$F(Z_x, Z_y) = \left[ \sum_{x'=-\infty}^{\infty} \sum_{y'=-\infty}^{\infty} f_1(x', y') Z_x^{-x'} Z_y^{-y'} \right] \left[ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_2(s, t) Z_x^{-s} Z_y^{-t} \right] \quad (2.3.16)$$

$$F(Z_x, Z_y) = F_1(Z_x, Z_y) F_2(Z_x, Z_y) \quad (2.3.17)$$

où  $F_1(Z_x, Z_y)$  et  $F_2(Z_x, Z_y)$  sont les transformées en  $Z$  de  $f_1(Z_x, Z_y)$  et  $f_2(Z_x, Z_y)$ .

### Transformée d'un produit

Soit la donnée d'une fonction qui se décompose en produit de deux fonctions

$$f(x, y) = g(x, y) h(x, y) \quad (2.3.18)$$

a pour transformée

$$F(Z_x, Z_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x, y)h(x, y)Z_x^{-x}Z_y^{-y} \quad (2.3.19)$$

## 2.4 2-D Laplace-Z Transformation

### 2.4.1 Définitions et propriétés de la 2-D s-Z transformation

Pour les signaux et systèmes 2-D continus-discrets, on établit les définitions suivantes.

**Définition 7.** [30] On définit la transformée de Laplace 1-D d'un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$  de la première variable comme suit,

$$X(s, n) = \int_0^{\infty} x(t, n)e^{-st}dt \quad (2.4.1)$$

et on note,

$$X(s, n) = L_t[x(t, n)] \quad (2.4.2)$$

**Définition 8.** Pour un signal hybride 2-D  $X(s, n)$ , sa transformée de Laplace 1-D partielle inverse est définie comme suit,

$$x(t, n) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s, n)e^{st}ds \quad (2.4.3)$$

où  $\sigma > 0$  est un nombre réel qui est plus grand que la partie réelle de n'importe quelle singularité de  $X(s, n)$ .

On note la transformée de Laplace 1-D partielle inverse de  $X(s, n)$  de la première variable

$$x(t, n) = L_t^{-1}[X(s, n)] \quad (2.4.4)$$

**Définition 9.** La transformée en  $Z$  pour un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$  de la second variable est définie comme suit,

$$X(t, Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t, n)Z^{-n} \quad (2.4.5)$$

On note la transformation en  $Z$  1-D de  $x(t, n)$

$$X(t, Z) = Z_n[x(t, n)] \quad (2.4.6)$$

**Définition 10.** La transformée en  $Z$  1-D inverse est définie comme suit,

$$x(t, n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_r X(t, z)z^{n-1}dz \quad (2.4.7)$$

On note la transformée en  $Z$  1-D inverse de  $X(t, z)$ ,

$$x(t, n) = Z_n^{-1}[X(t, z)] \quad (2.4.8)$$

**Définition 11.** La 2-D Laplace- $Z$  transformée d'un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$  est définie par,

$$X(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x(n, t)e^{-st}dtz^{-n} \quad (2.4.9)$$

On note la 2-D Laplace- $Z$  transformée d'un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$

$$X(s, z) = L_t Z_n[x(t, n)] \quad (2.4.10)$$

**Définition 12.** La 2-D Laplace- $Z$  transformée inverse d'un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$  est,

$$x(t, n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_r \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x(n, t)e^{-st}z^{n-1}dsdz \quad (2.4.11)$$

et on la note,

$$x(t, n) = (L_t Z_n)^{-1}[X(s, z)] \quad (2.4.12)$$

Les propriétés suivantes apparaissent dans [30].

**Propriétés 1.** Soient  $X_1(s, z)$  et  $X_2(s, z)$  les 2-D Laplace-Z transformée des signaux bidimensionnels  $x_1(t, n)$  et  $x_2(t, n)$  respectivement, alors,

$$L_t Z_n [ax_1(t, n) + bx_2(t, n)] = aX_1(s, z) + bX_2(s, z) \quad (2.4.13)$$

**Propriétés 2.** Soit  $X(s, z)$  la 2-D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel  $x(t, n)$ , et donc,

$$L_t Z_n [x(t, n)] = Z_n L_t [x(t, n)] \quad (2.4.14)$$

**Propriétés 3.** Soit  $X(s, z)$  la 2-D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel  $x(t, n)$ , alors,

$$(L_t Z_n)^{-1} [x(t, n)] = (Z_n L_t)^{-1} [x(t, n)] \quad (2.4.15)$$

**Propriétés 4.** Soit  $X(s, z)$  la 2-D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel  $x(t, n)$ , ainsi,

$$L_t Z_n \left[ \frac{\partial x(t, n)}{\partial t} \right] = sX(s, z) - X(0, z) \quad (2.4.16)$$

### Preuve

En utilisant l'intégration par parties, nous obtenons,

$$\begin{aligned} L_t \left[ \frac{\partial x(t, n)}{\partial t} \right] &= \int_0^\infty \frac{\partial x(t, n)}{\partial t} e^{-st} dt = x(t, n) e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty x(t, n) e^{-st} dt \\ &= sX(s, n) - x(0, n) \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Puis on applique la transformée en  $Z$  à (2.4.17), l'expression devient,

$$Z_n [sX(s, n) - x(0, n)] = sX(s, n) - x(0, Z)$$

□

**Propriétés 5.** Soit  $X(s, z)$  la 2-D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel  $x(t, n)$ , et  $x(t, 0) \neq 0$ , alors,

$$L_t Z_n[x(t, n + 1)] = zX(s, z)X(s, 0) \quad (2.4.18)$$

**Preuve**

Nous avons,

$$Z_n[x(t, n + 1)] = \oint_r x(t, n + 1)z^{n-1}dz = zX(t, z) - x(t, 0) \quad (2.4.19)$$

Puis nous appliquons la transformée de Laplace à (2.4.19), et on a,

$$L_t[zX(t, z) - x(t, 0)] = zX(s, z) - X(s, 0)$$

□

**Propriétés 6.** Soit  $X(s, z)$  la 2-D Laplace-Z transformée du signal bidimensionnel  $x(t, n)$ , alors,

$$L_t Z_n[\partial \frac{x(t, n + 1)}{\partial t}] = szX(s, z) - sX(s, 0) - zX(0, z) + x(0, 0) \quad (2.4.20)$$

**Preuve**

On utilise une approche par integration par parties, nous avons,

$$\begin{aligned} L_t[\frac{\partial x(t, n + 1)}{\partial t}] &= \int_0^\infty \frac{\partial x(t, n + 1)}{\partial t} dt = x(t + n + 1)e^{-st}|_0^\infty + s \int_0^\infty x(t, n + 1)e^{-st} dt \\ &= sX(s, n + 1) - x(0, n + 1) \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Puis on applique la transformée en  $Z$  à (2.4.21), on a,

$$Z_n[sX(s, n + 1) - x(0, n + 1)] = szX(s, z) - sX(s, 0) - zX(0, z) + x(0, 0)$$

□

# Chapitre 3

## Systèmes Bidimensionnels

### 3.1 Introduction

Récemment les systèmes bidimensionnels discrets ont fait l'objet de nombreuses recherches, cela vient du fait que plusieurs phénomènes liés à la technologie digitale, le traitement de l'image, la géophysique, la robotique, peuvent être représentés à travers la théorie des systèmes bidimensionnels. La propriété fondamentale de ces systèmes est qu'ils propagent l'information dans deux directions indépendantes ou par deux éléments  $z_1^{-1}$ ,  $z_2^{-1}$  dans la théorie des circuits. L'une des méthodes d'analyse s'inscrit dans l'extension des techniques qui existent dans le cas 1-D. L'analyse des systèmes peut être étudiée à travers les espaces d'état ou par les fonctions de transfert. Nous considérons ici les systèmes à temps discret, à temps continu-discret et à temps continu, respectivement. Il existe trois modèles d'espace d'état classiques 2-D à temps discret, citons,

1. Le modèle de Givone-Roesser [16]
2. Modèle d'Attasi [2]
3. Modèle de Fornasini-Marchesini [12] et [13]

que nous tenterons d'adapter aux cas continu-discret et continu-continu. Givone-Roesser, S.Attasi, et Fornasini-Marchesini sont considérés comme les précurseurs de la théorie des systèmes bidimensionnels. Dans les années 1970, ils ont introduit une description de ces systèmes par des modèles d'état linéaires qui ont permis la conception de tests de contrôlabilité, d'observabilité, d'atteignabilité et de stabilité de phénomènes décrits par de tels systèmes. Plus particulièrement, le modèle de Roesser a été adapté au cas bidimensionnel continu-discret et au cas bidimensionnel continu.

## 3.2 Modèles d'espaces d'état classiques bidimensionnels à temps discret

### 3.2.1 Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser

En 1972, Givone et Roesser ont introduit le premier système d'état pour la théorie des circuits linéaires itératifs [16], [26]. Un circuit itératif est une combinaison de cellules individuelles, Les équations d'entrée et de sortie sont,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1 + 1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(i, j) \\ y(i, j) = \begin{pmatrix} C'_1 & C'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2) \end{pmatrix} + Du(i_1, i_2) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où,

- $x^h(i, j) \in R^{n_1}$  vecteur d'état Horizontal
- $x^v(i, j) \in R^{n_2}$  vecteur d'état Vertical
- $y(i, j) \in R^p$  vecteur de sortie
- $u(i, j) \in R^m$  vecteur d'entrée

L'espace d'état du modèle (3.2.1) peut être écrit sous sa forme compacte,

$$\begin{aligned} \dot{x}(i_1, i_2) &= Ax(i_1, i_2) + Bu(i_1, i_2) \\ y(i, j) &= C'x(i_1, i_2) + Du(i_1, i_2) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

où,

$$\dot{x}(i_1, i_2) = \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1 + 1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2 + 1) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

et

$$x(i_1, i_2) = \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(i_1, i_2) \\ x_{n_2}^v(i_1, i_2) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2$ , sont des matrices réelles de dimension appropriée et  $d$  un scalaire.

En appliquant la 2D  $Z$ -transformée à (3.2.2), avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfert prend la forme suivante,

$$H_{gr}(z_1, z_2) = C'[Z - A]^{-1}B + D \quad (3.2.3)$$

avec,  $Z = z_1 I_{n_1} \oplus z_2 I_{n_2}$ ,  $\oplus$  désigne la somme directe.

### 3.2.2 Modèle bidimensionnel de Attasi

En 1972, S.Attasi propose le modèle bidimensionnel [2] et [26]

$$\begin{cases} x(i_1 + 1, i_2 + 1) = A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + A_0x(i_1, i_2) + Bu(i_1, i_2) \\ y(i_1, i_2) = C'x(i_1, i_2) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

En ayant la 2D  $Z$ -transformée, la fonction de transfert prend la forme,

$$H_a(z_1, z_2) = C'[z_1z_2I - z_1A_1 - z_2A_2 - A_0]^{-1}B \quad (3.2.5)$$

### 3.2.3 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini

Fornasini-Marchesini proposent les modèles 2D suivants [12], [13] et [26].

Le premier modèle d'état 2D a été introduit en 1976,

$$\begin{cases} x(i_1 + 1, i_2 + 1) = A_0x(i_1, i_2) + A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + Bu(i_1, i_2) \\ y(i_1, i_2) = C'x(i_1, i_2) \end{cases} \quad (3.2.6)$$

dont la fonction de transfert est,

$$H_{fm1}(z_1, z_2) = C'[z_1z_2I - z_1A_1 - z_2A_2 - A_0]^{-1}B \quad (3.2.7)$$

Le second modèle 2D,

$$\begin{cases} x(i_1 + 1, i_2 + 1) = A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + B_1u(i_1 + 1, i_2) + B_2u(i_1, i_2 + 1) \\ y(i_1, i_2) = C'x(i_1, i_2) \end{cases} \quad (3.2.8)$$

ayant pour fonction de transfert,

$$H_{fm2}(z_1, z_2) = C'[z_1z_2I - z_1A_1 - z_2A_2]^{-1}B_1z_1 + B_2z_2 \quad (3.2.9)$$

### 3.3 Singularité et régularité des modèles bidimensionnels

Soit  $R^{n \times m}$  l'ensemble des matrices réelles. L'ensemble des entiers relatifs non-négatifs est noté  $Z_+$ .

On considère dans [21] le système décrit par les équations suivantes,

$$\begin{cases} Ex_{i+1,j+1} = A_0x_{ij} + A_1x_{i,j+1} + A_2x_{i,j+1} + Bu_{ij} \\ y_{ij} = Cx_{ij} + Du_{ij} \quad i, j \in Z_+ \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où  $x_{ij} \in R^n$  est le vecteur d'état au point  $(i, j)$ ,  $u_{i,j} \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y_{ij}$  est le vecteur de sortie et  $E \in R^{n \times n}$ ,  $A_k \in R^{n \times n}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times m}$ .

Les conditions initiales pour (3.3.1) sont données par,

$$x_{i0} \text{ pour } i \in Z_+ \text{ et } x_{0j} \text{ pour } j \in Z_+ \quad (3.3.2)$$

**Définition 13.** *le modèle (3.3.1) est appelé standard si  $E = I_n$  (la matrice identité) et il est appelé singulier si  $\det E = 0$ .*

Si

$$\det[Ex_1z_2 - A_0 - A_1z_1A_2z_2] \neq 0 \quad z_1, z_2 \in C \quad (3.3.3)$$

le modèle (3.3.1) est appelé régulier.

### 3.3.1 Extension du modèle bidimensionnel de Roesser

En se référant à [16] et [21], nous pourrions étendre le modèle 2D de Roesser à la forme suivante,

$$\begin{cases} E \begin{pmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j+1}^h \\ x_{i+1,j}^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u_{ij} \\ y_{ij} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix} + Du_{ij} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

où  $x_{ij}^h \in R^{n_1}$  est le vecteur d'état horizontal,  $x_{ij}^v \in R^{n_2}$  est le vecteur d'état vertical,  $u_{ij} \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y_{ij} \in R^p$  est le vecteur de sortie,  $A_{11}, F_1 \in R^{n_1 \times n_1}$ ,  $A_{22}, F_2 \in R^{n_2 \times n_2}$ ,  $E \in R^{n \times n}$ ,  $n = n_1 + n_2$ ,  $B_1 \in R^{n_1 \times m}$ ,  $B_2 \in R^{n_2 \times m}$ ,  $C_1 \in R^{p \times n_1}$ ,  $C_2 \in R^{p \times n_2}$ ,  $D \in R^{p \times m}$ .

**Définition 14.** Le modèle (3.3.4) est appelé standard si  $E = I_n$  et appelé singulier si  $\det E = 0$ .

Si

$$\begin{vmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} - F_1z_2 & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} - F_2z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.3.5)$$

Pour tout  $z_1, z_2 \in C$

alors le modèle (3.3.4) est appelé régulier.

**Remarque 8.** Quand  $F_1 = 0$   $F_2 = 0$  dans (3.3.4), nous obtenons le modèle de Roesser (3.3.1).

**Théorème 9. (Modèle Réduit)**

Le modèle (3.3.1) peut être réduit à la forme,

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 \tilde{x}_{ij} + \tilde{A}_1 \tilde{x}_{i+1,j} + \tilde{A}_2 \tilde{x}_{i,j+1} + \tilde{B} u_{ij} = 0 \\ y_{ij} = \tilde{C} \tilde{x}_{ij} + D u_{ij} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

ou bien

$$\begin{cases} \tilde{A}'_0 \tilde{x}'_{ij} + \tilde{A}'_1 \tilde{x}'_{i+1,j} + \tilde{A}'_2 \tilde{x}'_{i,j+1} + \tilde{B}' u_{ij} = 0 \\ y_{ij} = \tilde{C}' \tilde{x}'_{ij} + D u_{ij} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &:= \begin{pmatrix} x_{i+1,j} \\ x_{ij} \end{pmatrix}, & \tilde{A}_0 &:= \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{A}_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_2 &:= \begin{pmatrix} -E & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{B} &:= \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{C} &:= \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix} \\ \tilde{x}'_{ij} &:= \begin{pmatrix} x_{i,j+1} \\ x_{ij} \end{pmatrix}, & \tilde{A}'_0 &:= \begin{pmatrix} A_2 & A_0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{A}'_1 &:= \begin{pmatrix} -E & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}'_2 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, & \tilde{B}' &:= \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, & \tilde{C}' &:= \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.4 Solution du modèle de Roesser

Cette section, joue un rôle clé, puisque la recherche de la solution est une information capitale en elle-même, ainsi elle peut aussi être exploitée de façon à répondre à d'autres aspects telle, notamment, la stabilité. On considère le

modèle bidimensionnel [19],

$$\begin{cases} E \begin{bmatrix} x^h(i_1 + 1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2 + 1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} + Bu(i_1, i_2) \\ \begin{bmatrix} y^h(i_1, i_2) \\ y^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où,

- $x^h(i_1, i_2) \in R^{n_1}$  vecteur d'état horizontal
- $x^v(i_1, i_2) \in R^{n_2}$  vecteur d'état vertical
- $y^h(i_1, i_2) \in R^p$  vecteur de sortie horizontal
- $y^v(i_1, i_2) \in R^p$  vecteur de sortie vertical
- $u(i_1, i_2) \in R^m$  vecteur d'entrée

et  $E$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices réelles de dimension appropriée. On partitionne ces matrices comme suit,

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$E_{i_1 i_2} \in R^{n_{i_1} \times n_{i_2}}$ ,  $A_{i_1 i_2} \in R^{n_{i_1} \times n_{i_2}}$  et  $C_{i_1 i_2} \in R^{p_{i_1} \times n_{i_2}}$  pour  $i_1, i_2 = \overline{1, 2}$  et on suppose que le modèle (3.4.1) est régulier, d'où,

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} \quad (3.4.2)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les indices de nilpotence et  $T_{i_1, i_2}$  sont des matrices de transition définies par les relations suivantes,

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \end{bmatrix} T_{i_1, i_2-1} + \begin{bmatrix} 0 & E_2 \end{bmatrix} T_{i_1-1, i_2} + AT_{i_1-1, i_2-1} = \begin{cases} I_n & \text{pour } i_1 = i_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } i_1 \neq 0 \text{ et / ou } i_2 \neq 0. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

$$T_{i_1-1, i_2} = 0 \quad \text{pour } i_1 < -\mu_1 \text{ et/ou } i_2 < -\mu_2$$

Nous allons dans ce qui suit caractériser la solution du modèle (3.4.1).

**Théorème 10.** *La solution du modèle (3.4.1) avec des conditions initiales est de la forme,*

$$\begin{aligned} x(n, m) &= \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} Bu(i_1, i_2) \\ &+ \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) + \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

et sa sortie s'exprime comme suit,

$$\begin{bmatrix} y^h(n, m) \\ y^v(n, m) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} Bu(i_1, i_2) \\ + \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) \\ + \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

### Preuve

l'équation (3.4.1) peut s'exprimer comme suit,

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i_1 + 1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i_1, i_2) \quad (3.4.6)$$

ou bien,

$$\begin{cases} E_{11}x^h(i_1 + 1, i_2) + E_{12}x^v(i_1, i_2 + 1) = A_{11}x^h(i_1, i_2) + A_{12}x^v(i_1, i_2) + B_1u(i_1, i_2) \\ E_{21}x^h(i_1 + 1, i_2) + E_{22}x^v(i_1, i_2 + 1) = A_{21}x^h(i_1, i_2) + A_{22}x^v(i_1, i_2) + B_2u(i_1, i_2) \end{cases}$$

En appliquant la transformée en  $Z$  bidimensionnelle à l'équation (3.4.1), nous obtenons,

$$\begin{cases} E_{11}z_1X^h(z_1, z_2) - A_{12}X^v(z_1, z_2) + E_{12}z_2X^v(z_1, z_2) - A_{11}X^h(z_1, z_2) = \\ = E_{11}z_1X^h(0, z_2) + E_{12}z_2X^v(z_1, 0) + B_1U(z_1, z_2) \\ E_{21}z_1X^h(z_1, z_2) - A_{22}X^v(z_1, z_2) + E_{22}z_2X^v(z_1, z_2) - A_{21}X^h(z_1, z_2) = \\ = E_{21}z_1X^h(0, z_2) + E_{22}z_2X^v(z_1, 0) + B_2U(z_1, z_2) \end{cases}$$

ou dans une forme plus compacte,

$$\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} + BU(z_1, z_2)$$

Puisque  $\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1}$  existe pour un certain couple de nombres  $(z_1, z_2) \in C \times C$ , alors,

$$\begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left[ \begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} + BU(z_1, z_2) \right]$$

En utilisant (3.4.2), nous obtenons,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} &= \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} \\ &\quad \left[ \begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} + BU(z_1, z_2) \right] \\ &= \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} \begin{bmatrix} E_{11}z_1 & E_{12}z_2 \\ E_{21}z_1 & E_{22}z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^h(0, z_2) \\ X^h(z_1, 0) \end{bmatrix} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} \\ &\quad + \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} BU(z_1, z_2) \\ &= \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} z_1 E_1 X^h(0, z_2) \\ &\quad + \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} z_2 E_2 X^v(z_1, 0) \\ &\quad + \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} BU(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Moyennant la transformée en  $Z$  bidimensionnelle inverse, il s'ensuit le résultat suivant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \begin{bmatrix} X^h(z_1, z_2) \\ X^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} z_1^{n-1} dz_1 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{-(i_1+1)} z_2^{-(i_2+1)} z_1 E_1 X^h(0, z_2) \\ &+ \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{n-i_1-1} z_2^{-(i_2+1)} z_2 E_2 X^v(z_1, 0) \\ &+ \sum_{i_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_1^{n-i_1-1} z_2^{-(i_2+1)} BU(z_1, z_2) \end{aligned}$$

soit donc,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X^h(n, z_2) \\ X^v(n, z_2) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} z_2^{-(i_2+1)} Bu(i_1, z_2) \\ &+ \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} E_2 z_2^{-i_2} x^v(i_1, 0) \\ &+ \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n, i_2} E_1 z_2^{-(i_2+1)} X^h(0, z_2) \end{aligned}$$

Puis on applique la transformée en  $Z$  bidimensionnelle au deuxième composant, nous aurons,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint \begin{bmatrix} X^h(n, z_2) \\ X^v(n, z_2) \end{bmatrix} z_2^{n-1} dz_2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} z_2^{n-i_2-1-1} Bu(i_1, z_2) dz_2 \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=-\mu_2}^{\infty} T_{n-i_1-1, i_2} z_2^{n-i_2-1} E_2 x^v(i_1, 0) dz_2 \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i_2=\mu_2}^{\infty} T_{i_1, i_2} z_2^{n-i_2-1-1} E_1 x^h(0, z_2) dz_2 \end{aligned}$$

d'où la solution de (3.4.1) est,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X^h(n, m) \\ X^v(n, m) \end{bmatrix} &= \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} Bu(i_1, i_2) + \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) \\ &+ \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{aligned}$$

et l'équation de la sortie sera donc,

$$\begin{bmatrix} X^h(n, m) \\ X^v(n, m) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \sum_{i_1=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{i_2=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i_1-1, m-i_2-1} Bu(i_1, i_2) \\ + \sum_{i_1=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i_1-1, m} E_2 x^v(i_1, 0) \\ + \sum_{i_2=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-i_2-1} E_1 x^h(0, i_2) \end{bmatrix}$$

□

Pour plus de clarté nous illustrons ceci par un exemple.

$$\mathbf{Exemple\ 2.} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$D = 1$  On obtient,

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(z_1, z_2) &= \det \begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} z_1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & z_1 - 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & z_2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -z_1 z_2 \end{aligned}$$

Ainsi le système est régulier et nous avons.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{-z_1z_2} \begin{bmatrix} -z_2 & -z_2 & 0 & -z_1z_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_1z_2 \\ 1 & z_1 + 1 & -z_1 & -2z_1 + z_1^2 \\ 0 & z_1z_2 & 0 & -z_1z_2 + z_1^2z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z_1^{-1} & z_1^{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -z_1^{-1}z_2^{-1} & -z_2^{-1} - z_1^{-1}z_2^{-1} & -z_2^{-1} & 2z_2^{-1} - z_1z_2^{-1} \\ 0 & -1 & 0 & 1 + z_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Les indices de nilpotence  $\mu_1, \mu_2$  sont,

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$$

d'après 3.4.2 on a,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} E_{11}z_1 - A_{11} & E_{12}z_2 - A_{12} \\ E_{21}z_1 - A_{21} & E_{22}z_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} &= \sum_{i=-2}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} T_{i,k} z_1^{-(i+1)} z_2^{-(k+1)} \\
&= T_{-2,-1}z_1 + T_{-2,0}z_1z_2^{-1} + T_{-1,-1} + T_{-1,0}z_2^{-1} \\
&\quad + T_{0,-1}z_1^{-1} + T_{0,0}z_1^{-1}z_2^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi les matrices de transitions sont,

$$\begin{aligned}
T_{-2,-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{-2,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{-1,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T_{-1,0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nous obtenons une première formulation de la solution,

$$\begin{aligned}
x(n, m) &= \sum_{i=0}^{n+\mu_1-1} \sum_{k=0}^{m+\mu_2-1} T_{n-i-1, m-k-1} Bu(i, k) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m+\mu_1-1} T_{n-i-1, m} E_2 x^v(i, 0) + \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{n, m-k-1} E_1 x^h(0, k) \\
&= T_{-2, -1} Bu(n+1, m) + T_{-2, 0} Bu(n+1, m-1) \\
&\quad + T_{-1, -1} Bu(n, m) + T_{-1, 0} Bu(n, m-1) \\
&\quad + T_{0, -1} Bu(n-1, m) + T_{0, 0} Bu(n-1, m-1).
\end{aligned}$$

Plus explicitement, la solution du système est,

$$\begin{aligned}
x(n, m) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n+1, m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n+1, m-1) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n, m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n, m-1) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n-1, m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n-1, m-1).
\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$x(n, m) = \begin{bmatrix} -u(n, m) + u(n-1, m) \\ -u(n, m) \\ -u(n+1, m-1) + u(n, m-1) - u(n-1, m-1) \\ -u(n+1, m) + u(n, m) \end{bmatrix}$$

et la sortie devient,

$$y(n, m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u(n, m) + u(n-1, m) \\ -u(n, m) \\ -u(n+1, m-1) + u(n, m-1) - u(n-1, m-1) \\ -u(n+1, m) + u(n, m) \end{bmatrix} + u(n, m) .$$

$$= u(n, m) - u(n+1, m).$$

### 3.5 Solution du modèle étendu de Roesser

Nous nous basons essentiellement sur [21]. Nous considérons dans un premier temps le cas particulier de (3.3.1) où  $E = 0$ , i.e.

$$A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + B u_{ij} = 0 \quad (3.5.1)$$

sous l'hypothèse suivante

$$\det[A_1 z + A_2] \neq 0 \quad \text{pour tout } z \in C \quad (3.5.2)$$

**Théorème 11.** *Si la condition (3.5.2) est satisfaite alors l'équation peut être réduite à la forme*

$$\begin{pmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j+1}^h \\ x_{i+1,j}^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u_{ij} \quad (3.5.3)$$

où  $x_{ij}^h, x_{ij}^v, u_{ij}$  et les sous-matrices  $A_{ij}, B_i, F_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) sont bien définies

**Remarque 12.** *Pour trouver la solution  $\begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix}$  de (3.5.3), il est nécessaire de connaître les conditions initiales,*

$$x_{0j}^h \text{ pour } j \in Z_+ \text{ et } x_{i0}^v \text{ pour } i \in Z_+ \quad (3.5.4)$$

et  $u_{ij}$  pour  $i, j \in Z_+$ .

Nous avons, cependant la caractérisation suivante,

**Théorème 13.** *La solution de l'équation (3.5.3) avec conditions initiales (3.5.4), est donnée par,*

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^{i+j-1} (T_{ij}^1(k)x_{0,k+1} + T_{ij}^2(k)x_{k+1,0}) + \sum_{p,q=0}^{p+q < i+j} W_{ij}(p, q)u_{pq} \quad (3.5.5)$$

où

$$\begin{aligned} x_{ij} &:= \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix}, \quad T_{11}^1(0) := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{11}^1(1) := \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T_{11}^2(0) &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad T_{11}^2(1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}, \\ T_{ij}^1(k) &= T_{ij}^{1h}(k) + T_{ij}^{1v}(k) \quad i, j \geq 1, \quad k \geq 0, \\ T_{ij}^2(k) &= T_{ij}^{2h}(k) + T_{ij}^{2v}(k) \quad i, j \geq 1, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

$$T_{ij}^{1h}(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i = 1, k < j - 1 \\ T_{11}^1(0) & \text{pour } i = 1, k = j - 1 \\ T_{11}^1(1) & \text{pour } i = 1, k = j \\ T_{11}^1(0)T_{i-1,j}^1(k) + T_{11}^1(1)T_{i-1,j+1}^1(k) & \text{pour } i > 1, 0 \leq k < i + j \\ 0 & \text{pour } i \leq 0 \text{ et ou } j \leq 0 \\ & \text{et ou } 0 \leq k \geq i + j \end{cases} \quad (3.5.6)$$

$$T_{ij}^{1v}(k) = \begin{cases} T_{11}^2(0)T_{i-1,j}^1(k) + T_{11}^2(1)T_{i-1,j+1}^1(k) & \text{pour } 0 \leq k < i + 1 \\ 0 & \text{pour } i \leq 0 \text{ et ou } j \leq 0 \\ & \text{et ou } k \geq i + j \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T_{ij}^{2h}(k) &= \begin{cases} T_{11}^1(0)T_{i-1,j}^2(k) + T_{11}^1(1)T_{i-1,j+1}^{2h}(k) & \text{pour } 0 \leq k < i + 1 \\ 0 & \text{pour } i \leq 0 \text{ et ou } j \leq 0 \\ & \text{et ou } k \geq i + j \end{cases} \\
T_{ij}^{2v}(k) &= \begin{cases} 0 & \text{pour } j = 1, k < j - 1 \\ T_{11}^1(0) & \text{pour } i = 1, k = j - 1 \\ T_{11}^1(1) & \text{pour } i = 1, k = i \\ T_{11}^1(0)T_{i-1,j}^2(k) + T_{11}^1(1)T_{i-1,j+1}^{1h}(k) & \text{pour } j > 1, 0 \leq k < i + j \\ 0 & \text{pour } i \leq 0 \text{ et ou } j \leq 0 \\ & \text{et ou } k \geq i + j \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

et

$$\begin{aligned}
W_{11}(0, 1) &:= \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, & W_{11}(1, 0) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}, \\
W_{ij}(p, q) &= W_{ij}^h(p, q) + W_{ij}^v(p, q) & \text{pour } i, j \geq 1, p, q \geq 0, \\
W_{ij}^h(p, q) &:= \begin{cases} 0 & \text{pour } i = 1 \text{ et } (p \neq 0 \text{ ou } q \neq j) \\ W_{11}(0, 1) & \text{pour } p = i - 1, q = j \\ T_{11}^1(0)W_{i-1,j}(p, q) \\ + T_{11}^1(1)W_{i-1,j+1}^h(p, q) & \text{pour } i > 1, 1 < p + q < i + j \\ 0 & \text{pour } p \leq 0 \text{ et ou } q \leq 0 \\ & \text{et ou } p + q \geq i + j \end{cases}
\end{aligned}$$

$$W_{ij}^h(p, q) := \begin{cases} 0 & \text{pour } j = 1 \text{ et } (p \neq i \text{ ou } q \neq 0) \\ W_{11}(0, 1) & \text{pour } p = i, q = j - 1 \\ T_{11}^1(0)W_{i,j-1}(p, q) \\ + T_{11}^1(1)W_{i+1,j-1}^h(p, q) & \text{pour } i > 1, 1 < p + q < i + j \\ 0 & \text{pour } p \leq 0 \text{ et ou } q \leq 0 \\ & \text{et ou } p + q \geq i + j \end{cases} \quad (3.5.8)$$

### Preuve

On remarque qu'on peut écrire l'équation (3.4.3) en utilisant (3.5.6)-(3.5.8) comme

$$\begin{aligned} x_{ij} = & T_{11}^1(0)x_{i-1,j} + T_{11}^1(1)x_{i-1,j+1} + W_{11}(0, 1)u_{i-1,j} + T_{11}^2(0)x_{i,j-1} + T_{11}^1(2)x_{i+1,j-1} \\ & + W_{11}(1, 0)u_{i,j-1} \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

On substitue (3.5.5) à la partie droite de l'équation (3.5.9) et en réutilisant (3.5.6)-(3.5.8), alors,

$$\begin{aligned}
& T_{11}^1(0) [\sum_{k=0}^{i+j-2} T_{i-1,j}^1(k) x_{0,k+1} + T_{i-1,j}^2(k) x_{k+1,0}] \\
& + \sum_{p,q=0}^{p+q < i+j-1} W_{i-1,j}(p,q) u_{pq}] \\
& + T_{11}^1(1) + [\sum_{k=0}^{i+j-1} T_{i-1,j+1}^1(k) x_{0,k+1} + T_{i-1,j+1}^2(k) x_{k+1,0}] \\
& + \sum_{p,q=0}^{p+q < i+j} W_{i-1,j+1}(p,q) u_{pq}] \\
& + T_{11}^2(0) + [\sum_{k=0}^{i+j-2} T_{i,j+1}^1(k) x_{0,k+1} + T_{i,j-1}^2(k) x_{k+1,0}] \\
& + \sum_{p,q=0}^{p+q < i+j-1} W_{i,j-1}(p,q) u_{pq}] \\
& + T_{11}^2(1) + [\sum_{k=0}^{i+j-1} T_{i+1,j+1}^1(k) x_{0,k+1} + T_{i+1,j-1}^2(k) x_{k+1,0}] \\
& + \sum_{p,q=0}^{p+q < i+j} W_{i+1,j-1}(p,q) u_{pq}] \\
& + W_{11}(0,1) u_{i-1,j} + W_{11}(1,0) u_{i,j-1} \\
& = \sum_{k=0}^{i+j-1} (T_{ij}^1(k) x_{0,k+1} + T_{ij}^2(k) x_{k+1,0}) + \sum_{p,q=0}^{p+q < i+j} W_{ij}(p,q) u_{pq} = x_{ij}
\end{aligned}$$

Ainsi, (3.5.5) satisfait l'équation (3.5.3).  $\square$

Le résultat suivant portant sur la transformation du modèle (3.5.3) servira à une nouvelle caractérisation de la solution,

**Théorème 14.** *Si  $\det F_1 \neq 0$  alors le modèle (3.5.3) peut être transformé en un modèle standard,*

$$x_{i,j+1} = F x_{ij} + G x_{i+1,j} + H u_{ij} \quad (3.5.10)$$

où

$$\begin{aligned}
x_{ij} & := \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix}, F := \begin{pmatrix} -F_1^{-1} A_{11} & -F_1^{-1} A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \\
G & := \begin{pmatrix} -F_1^{-1} & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}, H := \begin{pmatrix} -F_1^{-1} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (3.5.11)$$

et si  $\det F_2 \neq 0$ , alors le modèle (3.5.3) peut être aussi transformé en un

modèle standard

$$\begin{aligned}
x_{i,j+1} &= F'x_{ij} + G'x_{i+1,j} + H'u_{ij} \\
x_{ij} &:= \begin{pmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{pmatrix}, F' := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -F_2^{-1}A_{21} & -F_2^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \\
G' &:= \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2^{-1} \end{pmatrix}, H' := \begin{pmatrix} B_1 \\ -F_2^{-1}B_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

Nous présentons ici deux résultats concernant la résolution des équations,

**Théorème 15.** *La solution de l'équation (3.5.12) avec les conditions initiales  $x_{i0}$ ,  $i \in Z_+$  est donnée par,*

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^j T_{kj} x_{i+k,0} + \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-l} T_{k,j-1} H u_{i+k,l-1} + H u_{i,j-1} \tag{3.5.13}$$

où la matrice de transition est définie comme suit,

$$T_{kj} = \begin{cases} I_n & \text{pour } k = j = 0 \\ FT_{k,j-1} + GT_{k-1,j-1} & \text{pour } k \leq j \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{3.5.14}$$

D'une manière analogue la solution de l'équation (3.5.12) avec des conditions initiales  $x_{0j}$ ,  $j \in Z_+$  est donnée par,

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^j T_{ik} x_{0,j+k} + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{i-l} T_{i-l,k} H' u_{l-1,j+k} + H' u_{i-1,j} \tag{3.5.15}$$

et sa matrice de transition est,

$$T_{ik} = \begin{cases} I_n & \text{pour } i = k = 0 \\ F'T_{i-1,k} + G'T_{i-1,k-1} & \text{pour } k \leq i \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{3.5.16}$$

### Preuve

la substitution de (3.5.13) dans (3.5.10) et l'utilisation de (3.5.14) donnent,

$$\begin{aligned}
& Fx_{ij} + Gx_{i+1,j} + Hu_{ij} \\
&= F\left(\sum_{k=0}^j T_{kj}x_{i+k,0} + \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-l} T_{k,j-l}Hu_{i+k,l-1} + Hu_{i,j-1}\right) \\
&+ G\left(\sum_{k=0}^j T_{kj}x_{i+k+1,0} + \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-l} T_{k,j-l}Hu_{i+k,l-1} + Hu_{i+1,j-1}\right) + Hu_{ij} = x_{i,j+1}.
\end{aligned}$$

d'où, (3.5.13) satisfait l'équation (3.5.10).

On démontre la seconde partie de la preuve d'une façon similaire.  $\square$

**Remarque 16.** Dans le cas général, c'est-à-dire le cas du système (3.3.1), on suppose que  $\det A_1 \neq 0$  et ou  $\det A_2 \neq 0$ .

Si le rang de  $E = r < n$ , alors il existe des matrices non singulières  $T_1, T_2 \in R^{n \times n}$  telles que,

$$T_1 E T_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.17)$$

On multiplie (3.3.1) par  $T_1$  et on définit le nouveau sous-vecteur  $x_{ij}^1 \in R^{n-r}$ ,

$$x_{ij}^2 \in R^r \text{ par } \begin{pmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{pmatrix} = T_2^{-1} x_{ij}, \text{ nous obtenons,}$$

$$\begin{aligned}
x_{i+1,j+1}^2 &= A_{11}^0 x_{ij}^1 + A_{12}^0 x_{ij}^2 + A_{11}^1 x_{i+1,j}^1 \\
&\quad + A_{12}^1 x_{i+1,j}^2 + A_{11}^2 x_{i,j+1}^1 + A_{12}^2 x_{i,j+1}^2 + B_1 u_{ij} \\
0 &= A_{21}^0 x_{ij}^1 + A_{22}^0 x_{ij}^2 + A_{21}^1 x_{i+1,j}^1 \\
&\quad + A_{22}^1 x_{i+1,j}^2 + A_{21}^2 x_{i,j+1}^1 + A_{22}^2 x_{i,j+1}^2 + B_2 u_{ij}
\end{aligned} \quad (3.5.18)$$

et on pose,

$$\begin{aligned}\bar{A}_k &:= T_1 A_k T_2 = \begin{pmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \\ T_1 B &= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ A_{11}^k &\in R^{r \times (n-r)}, \quad B_1 \in R^{r \times m} \\ A_{22}^k &\in R^{(n-r) \times r}, \quad B_2 \in R^{(n-r) \times m}.\end{aligned}\tag{3.5.19}$$

On note que si  $\det A_1 \neq 1$ , cela implique que

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}\tag{3.5.20}$$

et l'inverse à droite de la matrice  $(\tilde{A}_1 \tilde{A}_1^r = I_{n-r})$  existe et est de la forme

$$\tilde{A}_1^r = \tilde{A}_1^T [\tilde{A}_1 \quad \tilde{A}_1^T]^{-1}\tag{3.5.21}$$

En utilisant (3.5.21) et (3.5.18) on aura,

$$x_{i+1,j}^2 = -\tilde{A}_{21}(A_{21}^0 x_{ij}^1 + A_{22}^0 x_{ij}^2 + A_{21}^2 x_{i,j+1}^1 + A_{22}^2 x_{i,j+1}^2 + B_2 u_{ij})\tag{3.5.22}$$

où  $\tilde{A}_{21} := A_{22}^{1T} [\tilde{A}_1 \quad \tilde{A}_1^T]^{-1}$ .

de (3.5.18) et (3.5.22), on obtient,

$$\begin{aligned}0 &= A_{11}^0 x_{ij}^1 + A_{12}^0 x_{ij}^2 + A_{11}^1 x_{i+1,j}^1 + A_{12}^1 x_{i+1,j}^2 \\ &\quad + (A_{11}^2 + \tilde{A}_{21} + A_{21}^0) x_{i,1+j}^1 + (A_{12}^2 + \tilde{A}_{21} + A_{22}^0) x_{i,j+1}^2 \\ &\quad + \tilde{A}_{21} (A_{21}^2 x_{i,j+2}^1 + A_{22}^2 x_{i,j+2}^2 + B_2 u_{i,j+}) + B_1 u_{ij}.\end{aligned}\tag{3.5.23}$$

Les équations (3.5.18) et (3.5.23) peuvent être écrites sous la forme suivante,

$$\bar{A}_0 x_{ij} + \bar{A}_1 x_{i+1,j} + \bar{A}_2 x_{i,j+1} + \bar{A}_3 x_{i,j+2} + \bar{B}_0 u_{ij} + \bar{B}_1 u_{i,j+1} = 0\tag{3.5.24}$$

où  $\bar{A}_0$  et  $\bar{A}_1$  sont définis par (3.5.18) et

$$\begin{aligned} \bar{A}'_2 &= \begin{pmatrix} A_{11}^2 + \tilde{A}_{21}A_{21}^0 & A_{12}^2 + \tilde{A}_{21}A_{22}^0 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}, & \bar{A}'_3 &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21}A_{21}^2 & \tilde{A}_{21}A_{22}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{B}_0 &:= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, & \bar{B}_1 &:= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21}B_2 \\ 0 \end{pmatrix}, & x_{ij} &= \begin{pmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

de (3.5.18), on déduit que  $\det A_1 \neq 0$  ce qui implique que  $\det \bar{A}_1 \neq 0$  et de (3.5.24) on a,

$$x_{i+1,j} = \hat{A}_0 x_{ij} + \hat{A}_2 x_{i,j+1} + \hat{A}_3 x_{i,j+2} + \hat{B}_0 u_{ij} + \hat{B}_1 u_{i,j+1} \quad (3.5.25)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &:= -\bar{A}_1^{-1} \bar{A}_0, & \hat{A}_2 &:= -\bar{A}_1^{-1} \bar{A}'_2, & \hat{A}_3 &:= -\bar{A}_1^{-1} \bar{A}'_3, \\ \hat{B}_0 &:= -\bar{A}_1^{-1} \bar{B}_0, & \hat{B}_1 &:= -\bar{A}_1^{-1} \bar{B}_1 \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

D'une façon similaire, si  $\det A_2 \neq 0$  alors la matrice

$$\tilde{A}_2 := [A_{21}^2 \quad A_{22}^2] \quad (3.5.27)$$

et son inverse à droite existe.

$$\tilde{A}_2^r = \tilde{A}_2^T [\tilde{A}_2 \quad \tilde{A}_2^T]^{-1} \quad (3.5.28)$$

Nous obtenons alors,

$$x_{i,j+1} = \hat{A}'_0 x_{ij} + \hat{A}'_1 x_{i+1,j} + \hat{A}'_3 x_{i+2,j} + \hat{B}'_0 u_{ij} + \hat{B}'_1 u_{i+1,j} \quad (3.5.29)$$

où

$$\begin{aligned}
\hat{A}'_0 &= -\bar{A}_2^{-1}\bar{A}_0, & \hat{A}'_1 &= -\bar{A}_2^{-1}\bar{A}'_1, & \hat{A}'_3 &= -\bar{A}_2^{-1}\bar{A}'_3, \\
\hat{B}'_0 &:= -\bar{A}_2^{-1}\bar{B}'_0, & \hat{B}'_1 &:= -\bar{A}_2^{-1}\bar{B}'_1, \\
\bar{A}'_1 &:= \begin{pmatrix} A_{11}^1 + \tilde{A}_{22}A_{21}^0 & A_{12}^1 + \tilde{A}_{22}A_{22}^0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}, & \bar{A}'_3 &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{22}A_{21}^1 & \tilde{A}_{22}A_{22}^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\bar{B}'_0 &:= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, & \bar{B}'_1 &:= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{22}B_2 \\ 0 \end{pmatrix}, & x_{ij} &= \begin{pmatrix} x_{ij}^1 \\ x_{ij}^2 \end{pmatrix}, \\
\tilde{A}_{22} &:= A_{22}^{2T}[\tilde{A}_2 \quad \tilde{A}_2^T].
\end{aligned}$$

**Théorème 17.** [21] Si  $\det A_1 \neq 0$  alors le modèle (3.3.1) peut-être réduit au modèle standard (3.5.25) et si  $\det A_2 \neq 0$  alors (3.3.1) peut-être réduit au modèle (3.5.29).

Notons que pour trouver la solution de  $x_{ij}$  pour  $i, j \in Z_+$  de l'équation (3.5.25) nous utiliserons juste  $x_{0j}$  pour  $j \in Z_+$  et  $u_{ij}$  pour  $i, j \in Z_+$ .

D'une façon semblable, pour trouver la solution de  $x_{ij}$  pour  $i, j \in Z_+$  de l'équation (3.5.29), nous utiliserons juste  $x_{i0}$  pour  $i \in Z_+$  et  $u_{ij}$  pour  $i, j \in Z_+$ .

**Théorème 18.** La solution (3.5.25) sous les conditions initiales  $x_{0j}$ ,  $j \in Z_+$  est donnée par

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^{2i} T_{ik} x_{0,j+k} + \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{2(i-l)-1} S_{i-l-1,k} u_{l,k+j} \quad (3.5.30)$$

où

$$T_{ik} := \begin{cases} I_n & \text{pour } i = k = 0 \\ \hat{A}_0 T_{i-1,k} + \hat{A}_2 T_{i-1,k-1} + \hat{A}_3 T_{i-1,k-2} & \text{pour } 0 \leq k \leq 2i \\ 0 & \text{pour } i < 0 \text{ et ou } k < 0 \\ & \text{et ou } k > 2i \end{cases} \quad (3.5.31)$$

$$S_{ik} := \begin{cases} B_0 & \text{pour } i = k = 0 \\ B_1 & \text{pour } i = 0, k = 1 \\ \hat{A}_0 S_{i-1,k} + \hat{A}_2 S_{i-1,k-1} + \hat{A}_3 S_{i-1,k-2} & \text{pour } i \geq 0, k \geq 0 (i+k) > 0 \\ 0 & \text{pour } i < 0 \text{ et ou } k < 0. \end{cases} \quad (3.5.32)$$

La solution de l'équation (3.5.29) avec les conditions initiales  $x_{i0}$ ,  $i \in Z_+$  est donnée par

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^{2j} T'_{kj} x_{i+k,0} + \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2(j-l)-1} S'_{k,j-l-1} u_{i+k,l} \quad (3.5.33)$$

où

$$T'_{kj} := \begin{cases} I_n & \text{pour } k = j = 0 \\ \hat{A}'_0 T'_{k,j-1} + \hat{A}'_2 T'_{k-1,j-1} \\ + \hat{A}'_3 T'_{k-2,j-1} & \text{pour } 0 \leq k \leq 2j \\ 0 & \text{pour } k < 0 \text{ et ou } j < 0 \\ & \text{et ou } k > 2j \end{cases} \quad (3.5.34)$$

et

$$S'_{kj} := \begin{cases} B_0 & \text{pour } k = j = 0 \\ B_1 & \text{pour } k = 1 \text{ } j = 0 \\ \hat{A}'_0 S'_{k,j-1} + \hat{A}'_2 S'_{k-1,j-1} & \\ + \hat{A}'_3 S'_{k-2,j-1} & \text{pour } i \geq 0, k \geq 0 \text{ } (k+j) > 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \text{ et ou } j < 0. \end{cases} \quad (3.5.35)$$

### Preuve

On substitue (3.5.30) dans (3.5.25) et moyennant (3.5.31) et (3.5.32), on a,

$$\begin{aligned} & \hat{A}_0 x_{ij} + \hat{A}_2 x_{i,j+1} + \hat{A}_3 x_{i,j+2} + \hat{B}_0 u_{ij} + \hat{B}_1 u_{i,j+1} \\ &= \hat{A}_0 (\sum_{k=0}^{2i} T_{ik} x_{0,j+k} + \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{2(j-l)-1} S_{i-l-1,k} u_{l,j+k}) \\ &+ \hat{A}_2 (\sum_{k=0}^{2i} T_{ik} x_{0,j+k+1} + \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{2(j-l)-1} S_{i-l-1,k} u_{l,j-k+1}) \\ &+ \hat{A}_3 (\sum_{k=0}^{2i} T_{ik} x_{0,j+k+2} + \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{2(j-l)-1} S_{i-l-1,k} u_{l,j-k+2}) \\ &+ \hat{B}_0 u_{ij} + \hat{B}_1 u_{i,j+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2i+1} T_{i+1,k} x_{0,j+k} + \sum_{l=0}^i \sum_{k=0}^{2(i-l)+1} S_{i-l,k} u_{l,j+k} = x_{i+1,j} \end{aligned}$$

d'où, la relation (3.5.30) satisfait l'équation (3.5.25). La preuve de la seconde partie est analogue à la première.  $\square$

La solution de l'équation (3.5.10) avec les conditions initiales  $x_{i0}$ ,  $i \in Z_+$  est donnée par,

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^j T_{kj} x_{i+k,0} + \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-l} S_{k,j-l-1} u_{i+k,l} \quad (3.5.36)$$

$$T_{kj} := \begin{cases} I_n & \text{pour } k = j = 0 \\ FT_{k,j-1} + GT_{k-1,j-1} & \text{pour } 0 \leq k \leq j \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.5.37)$$

$$S_{kj} := \begin{cases} H & \text{pour } k = j = 0 \\ FS_{k,j-1} + GS_{k-1,j-1} & \text{pour } 0 \leq k \leq j + 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.5.38)$$

La solution de l'équation 3.5.12 avec les conditions initiales  $x_{i0}$ ,  $i \in Z_+$  est donnée par,

$$x_{ij} = \sum_{k=0}^j T'_{ik} x_{0,j+k} + \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-l} S'_{i-l-1,k} u_{l,j+k} \quad (3.5.39)$$

où,

$$T'_{ik} := \begin{cases} I_n & \text{pour } i = k = 0 \\ F'T'_{k,j-1} + GT_{k-1,j-1} & \text{pour } 0 \leq k \leq i \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.5.40)$$

$$S'_{ik} := \begin{cases} H' & \text{pour } i = k = 0 \\ F'S'_{i-1,k} + G'S'_{i-1,k-1} & \text{pour } 0 \leq k \leq i + 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.5.41)$$

### 3.6 Modèle à espace d'état bidimensionnel à temps continu-discret

Dans un même élan nous explicitons les modèles bidimensionnels étudiés plus haut sur un domaine à temps continu-discret. Nous adapterons les trois modèles classiques au cas continu- discret.

### 3.6.1 Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser à temps continu-discret

Nous proposons, une écriture du système de Givone-Roesser dans le nouveau contexte, et nous obtenons,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t, i) \\ y(t, i) &= \begin{pmatrix} C'_1 & C'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i) \end{pmatrix} + du(t, i) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

où,

- $x^h(t, i) \in R^{n_1}$  vecteur d'état Horizontal
- $x^v(t, i) \in R^{n_2}$  vecteur d'état Vertical
- $y(t, i) \in R^p$  vecteur de sortie
- $u(t, i) \in R^m$  vecteur d'entrée

Tout comme le cas discret, il peut-être mis sous sa forme compacte,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i+1) &= Ax(t, i) + Bu(t, i) \\ y(t, i) &= C'x(t, i) + du(t, i) \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

où,

$$\dot{x}(t, i) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

et

$$x(t, i+1) = \begin{pmatrix} x_{n_1}^h(t, i) \\ x_{n_2}^v(t, i+1) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2$ , sont des matrices réelles de dimension appropriée et  $d$  un scalaire.

Le fait que le système se compose d'une variable entière et d'une variable continue, et dans un souci d'obtention de la fonction de transfert, nous utiliserons la 2D  $sZ$ -transformée à (3.6.2), avec conditions initiales nulles,

$$H_{gr}(s, z) = C'[sz - A]^{-1}B + d \quad (3.6.3)$$

### 3.6.2 Modèle bidimensionnel de Attasi

Le suivant modèle est adapté au cas continu-discret,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i + 1) &= A_1\dot{x}(t, i) + A_2x(t, i + 1) + A_0x(t, i) + Bu(t, i) \\ y(t, i) &= C'x(t, i) \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Ainsi, en appliquant la 2D  $sZ$ -transformée, la fonction de transfert prend la forme suivante,

$$H_a(s, z) = C'[szI - sA_1 - zA_2 - A_0]^{-1}B \quad (3.6.5)$$

### 3.6.3 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini

Nous proposons une formulation du modèle de Fornasini-Marchesini par rapport au cas continu-discret,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i + 1) &= A_0x(t, i) + A_1\dot{x}(t, i) + A_2x(t, i + 1) + Bu(t, i) \\ y(t, i) &= C'x(t, i) \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Le premier modèle 2D de Fornasini-Marchesini à temps continu-discret a pour fonction de transfert,

$$H_{fm1}(s, z) = C'[szI - sA_1 - zA_2 - A_0]^{-1}B \quad (3.6.7)$$

Le second modèle 2D de Fornasini-Marchesini,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, i+1) &= A_1\dot{x}(t, i+1) + A_2x(t, i+1) + B_1\dot{u}(t, i) + B_2u(t, i+1) \\ y(t, i) &= C'x(t, i) \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Le second modèle bidimensionnel Fornasini-Marchesini à temps continu-discret a pour fonction de transfert,

$$H_{fm2}(s, z) = C'[szI - sA_1 - zA_2]^{-1}B_1s + B_2z \quad (3.6.9)$$

### 3.6.4 Modèle bidimensionnel général à temps continu-discret

Le modèle ci-dessous, est l'expression générale qu'on retrouve dans les systèmes linéaires [20], sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t, k+1) &= Ax(t, k+1) + Bx(t, k) + C\dot{x}(t, k) \\ &\quad + D_0u(t, k) + D_1\dot{u}(t, k) + D_2u(t, k+1) \\ y(t, k) &= Fx(t, k) + Gu(t, k) \end{aligned} \quad t \in R_+, k \in Z_+ \quad (3.6.10)$$

où  $\dot{x}(t, k) = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$ ,  $x(t, k) \in R^n$ , est le vecteur d'état,  $u(t, k) \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t, k) \in R^p$  est le vecteur de sortie,  $E \in R^{q \times n}$ ,  $A \in R^{q \times n}$ ,  $B \in R^{q \times n}$ ,  $C \in R^{q \times n}$ ,  $D_i \in R^{q \times n}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $F \in R^{p \times n}$ ,  $G \in R^{p \times m}$ ,

$R^{q \times n}$  est l'ensemble des matrices réelles de dimension  $q \times n$ ,  $R_+$  (respectivement  $Z_+$ ) sont les ensembles des nombres réels non négatifs, (respectivement des nombres entiers relatifs non négatifs).

**Remarque 19.** Si  $q \neq n$  ou  $\det E = 0$  quant  $q = n$ , alors le modèle (3.6.10) est appelé singulier. Si  $n = q$  et  $\det E = 0$  mais

$$\det[Es z - Az - B - Cs] \neq 0 \quad \text{pour } s \in \mathbf{C} \text{ (l'ensemble des nombres complexe)} \quad (3.6.11)$$

alors le modèle (3.6.10) est appelé régulier.

Si  $q = n$  et  $\det E \neq 0$  alors en multipliant (3.6.10) par  $E^{-1}$ , nous obtenons le modèle standard avec  $E = I_n$  (la matrice identité).

Les conditions initiales de (3.6.10) sont données par,

$$x(t, 0) = x_1(t), c \quad t \in R_+ \quad \text{et} \quad x(0, k) = x_2(k), \quad k \in Z_+ \quad (3.6.12)$$

avec  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont connues.

Le modèle bidimensionnel continu discret de Roesser est décrit par les équations,

$$\bar{E} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t, k) \\ \dot{\bar{x}}_2(t, k+1) \end{pmatrix} = \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t, k) \\ \bar{x}_2(t, k) \end{pmatrix} + \bar{B}u(t, k) \quad (3.6.13)$$

$$y(t, k) = \bar{C} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t, k) \\ \bar{x}_2(t, k) \end{pmatrix} + \bar{D}u(t, k) \quad t \in R_+, k \in Z_+ \quad (3.6.14)$$

où  $\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{x}_1(t, k)}{\partial t}$ ,  $\bar{x}_1(t, k) \in R^{n_1}$  et  $\bar{x}_2(t, k) \in R^{n_2}$  sont les vecteurs d'état,  $u(t, k)$  et  $y(t, k)$  sont les mêmes pour (3.6.10),  $\bar{E} \in R^{q \times n}$ ,  $n = n_1 + n_2$ ,  $\bar{A} \in R^{q \times n}$ ,  $\bar{B} \in R^{q \times m}$ ,  $\bar{C} \in R^{p \times n}$  et  $\bar{D} \in R^{p \times m}$ .

Si  $q = n$  et  $\det \bar{E} \neq 0$  alors en multipliant (3.6.13) par  $\bar{E}^{-1}$  on a le modèle standard tel que  $\bar{E} = I_n$ .

$$\bar{x}_1(0, k) = \bar{x}_1(k), \quad k \in Z_+ \quad \text{et} \quad \bar{x}_2(t, 0) = \bar{x}_2(t), \quad t \in R_+ \quad (3.6.15)$$

où  $\bar{x}_1(k)$  et  $\bar{x}_2(t)$  sont connus.

### 3.6.5 Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret

Dans un premier temps nous allons donner la solution d'un cas particulier du modèle général (3.6.10) [20].

On considère le modèle suivant,

$$\begin{cases} E\dot{x}(t, k+1) = A_0x(t, k) + A_1\dot{x}(t, k) + A_2x(t, k+1) + Bu(t, k) \\ y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k) \end{cases} \quad (3.6.16)$$

On suppose que le système (3.6.16) est régulier, i.e.,  $\det[Es z - A_0 - A_1s - A_2z] \neq 0$  pour  $(s, z) \in C \times C$

d'où,

$$[Es z - A_0 - A_1s - A_2z]^{-1} = \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} \quad (3.6.17)$$

tout en sachant que,

$$\det[Es z - A_0 - A_1s - A_2z] = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} d_{i,k} s^i z^k \quad (3.6.18)$$

où  $\mu_1$   $\mu_2$  sont les indices de nilpotence,  $T_{i,k}$  sont des matrices de transition définies par,

$$ET_{i,k} = \begin{cases} A_0T_{-1,-1} + A_1T_{-1,-1} + A_2T_{-1,-1} & \text{pour } i = k = 0 \\ A_0T_{i,k} + A_1T_{i,k} + A_2T_{i,k} & \text{pour } i \neq 0 \text{ et/ou } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.6.19)$$

avec,

$$T_{i,k} = 0 \text{ pour } i < -\mu_1 \text{ et/ou } k < -\mu_2$$

**Théorème 20.** *La solution du modèle (3.6.16) avec conditions initiales est donnée par,*

$$\begin{aligned} x(t, n) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} B \int_0^t \left[ \frac{t^i}{i!} u(t-\tau, k) \right] + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} B u(t, k) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x^i(t, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\ &+ \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} E x(0, k) \delta^{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,k} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x(0, 0) \delta^{(i-1)} \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} A_2 \int_{i=0}^t \left[ \frac{t^i}{i!} x(t-\tau, 0) \right] d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)} \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

et sa sortie est,

$$\begin{aligned}
 y(t, n) = C & \left[ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} B \int_0^t \left[ \frac{t^i}{i!} u(t-\tau, k) \right] \\
 & + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} B u(t, k) \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) \\
 & + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x^i(t, 0) \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
 & + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} E x(0, k) \delta^{i+1} \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,k} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} \\
 & - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x(0, 0) \delta^{(i-1)} \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
 & - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} A_2 \int_{i=0}^t \left[ \frac{t^i}{i!} x(t-\tau, 0) \right] d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)}
 \end{aligned} \right] + Du(t, n) \\
 & \tag{3.6.21}
 \end{aligned}$$

### Preuve

On applique la transformée de Laplace à l'équation (3.6.16) on a,

$$EsX(s, k+1) - EX(0, k+1) = A_0X(s, k) + A_1sX(s, k) - A_1X(0, k) + A_2X(s, k+1) + BU(s, k)$$

Puis on applique la transformée en  $Z$ ,

$$EsZ X(s, z) - EsZ X(s, 0) - EzX(0, z) + Ezx(0, 0) = A_0X(s, z) + A_1sZ X(s, z) - A_1X(0, z) + A_2zX(s, z) - A_2zX(s, 0) + BU(s, z)$$

$$\begin{aligned} [EsZ - A_0 - A_1s - A_2z]X(s, z) &= BU(s, z) + EsZ X(s, 0) + EzX(0, z) \\ &\quad - Ezx(0, 0) - A_1X(0, z) - A_2zX(s, 0) \end{aligned}$$

Etant donnée que  $[EsZ - A_0 - A_1s - A_2z]^{-1}$  existe pour  $(s, z) \in C \times C$  alors,

$$\begin{aligned} X(s, z) &= [EsZ - A_0 - A_1s - A_2z]^{-1} [BU(s, z) + EsZ X(s, 0) + EzX(0, z) - Ezx(0, 0) \\ &\quad - A_1X(0, z) - A_2zX(s, 0)] \end{aligned}$$

Par suite on remplace  $[EsZ - A_0 - A_1s - A_2z]^{-1}$  par sa définition,

$$\begin{aligned} X(s, z) &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} [BU(s, z) + EsZ X(s, 0) + EzX(0, z) \\ &\quad - Ezx(0, 0) - A_1X(0, z) - A_2zX(s, 0)] \\ &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} BU(z, s) + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-i} z^{-k} EX(s, 0) \\ &\quad + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} EX(0, z) - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} EX(0, 0) \\ &\quad - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} A_1X(0, z) - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} A_2X(s, 0) \end{aligned}$$

L'inverse de la transformée en  $Z$  donne,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi j} \oint [X(s, z)z^{n-1}]dz = \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1-1} BU(s, z)]dz \\
& + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-i} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} EX(s, 0)]dz \\
& + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} EX(0, z)]dz \\
& - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} EX(0, 0)]dz \\
& - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1-1} A_1 X(0, z)]dz \\
& - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint [z^{n-k-1} A_2 X(s, 0)]dz
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
X(s, n) &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} BU(s, k) + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} T_{i,n} s^{-i} EX(s, 0) \\
& + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} s^{-(i+1)} EX(0, k) - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} T_{i,n} s^{-i+1} EX(0, 0) \\
& - \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} A_1 x(0, k) + \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} T_{i,n} s^{-i} A_2 X(s, 0)
\end{aligned}$$

Par la transformée de Laplace inverse, il vient,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{-1}[X(s, n)] &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)} BU(s, k)\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^i EX(s, 0)\right] \\
&+ \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} s^{-i} EX(s, 0)\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^{i-1} BU(s, k)\right] \\
&+ \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} s^{-(i+1)} EX(0, k)\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} s^{i-1} EX(0, k)\right] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty} T_{i, n} s^{-(i+1)} EX(0, 0)\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)} A_1 X(0, k)\right] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^{i-1} EX(0, 0)\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^{i-1} A_1 X(0, k)\right] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty} T_{i, n} s^{-(i+1)} A_2 X(s, 0)\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^{i-1} A_2 X(s, 0)\right]
\end{aligned}$$

par le théorème du produit de convolution, on a,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{-1}[X(s, n)] &= \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)})BU(s, k)] + \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^i)EX(s, 0)] \\
&+ \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\infty} T_{i, n} s^{-i})EX(s, 0)] + \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} [\mathfrak{L}^{-1}(T_{-i, n-k-1} \sum_{i=0}^{\mu_1})BU(s, k)] \\
&+ \sum_{k=0}^{n+\mu_2} [\mathfrak{L}^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n-k} s^{-(i+1)})Ex(0, k)] \\
&+ \sum_{k=0}^{n+\mu_2} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-k} s^{i-1})Ex(0, k)] - \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} s^{-(i+1)})Ex(0, 0)] \\
&- \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)})A_1x(0, k)] - \mathfrak{L}^{-1}[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^{i-1}]Ex(0, 0) \\
&- \sum_{i=0}^{\mu_1} \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^{i-1})A_1x(0, k)] \\
&- \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} s^{-(i+1)})A_2X(s, 0)] - \mathfrak{L}^{-1}[(\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} s^{i-1})A_2X(s, 0)]
\end{aligned}$$

D'où la solution,

$$\begin{aligned}
x(t, n) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B \int_0^t \left[ \frac{t^i}{i!} u(t - \tau, k) \right] + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} Bu(t, k) \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t - \tau, 0) + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} Ex^i(t, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} Ex(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
&+ \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} Ex(0, k) \delta^{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, k} Ex(0, 0) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} Ex(0, 0) \delta^{(i-1)} \\
&- \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\
&- \sum_{i=1}^{\infty} T_{i, n} A_2 \int_{i=0}^t \left[ \frac{t^i}{i!} x(t - \tau, 0) \right] d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)}
\end{aligned}$$

et la sortie est de la forme,

$$y(t, n) = C \left[ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} B \int_0^t \left[ \frac{t^i}{i!} u(t-\tau, k) \right] \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} B u(t, k) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} E \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x^i(t, 0) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} E x(0, k) \delta^{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,k} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} + D u(t, n) \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} E x(0, 0) \delta^{(i-1)} \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)} \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,n} A_2 \int_{i=0}^t \left[ \frac{t^i}{i!} x(t-\tau, 0) \right] d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i,n} A_2 x(t, 0) \delta^{(i-1)}
\end{aligned} \right]$$

□

**Exemple 3.**  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \ 0 \ 1]$ ,  $D = 1$

dans ce cas  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $p = 1$ .

On a,

$$\begin{aligned}
 [Esz - A_0 - A_1s - A_2z] &= \begin{bmatrix} sz & 0 & 0 \\ 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} sz & 1 & -z \\ 0 & sz & 0 \\ -s & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

d'où,

$$\det[Esz - A_0 - A_1s - A_2z] = \det \begin{bmatrix} sz & 1 & -z \\ 0 & sz & 0 \\ -s & 1 & 0 \end{bmatrix} = -s^2z^2$$

$$\text{adj}[Esz - A_0 - A_1s - A_2z] = \begin{bmatrix} 0 & -z & sz^2 \\ 0 & -sz & 0 \\ s^2z & -s - sz & s^2z^2 \end{bmatrix}$$

et,

$$\begin{aligned}
[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} &= \frac{1}{-s^2 z^2} \begin{bmatrix} 0 & -z & s z^2 \\ 0 & -s z & 0 \\ s^2 z & -s - s z & s^2 z^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & s^{-2} z^{-1} & -s^{-1} \\ 0 & s^{-1} z^{-1} & 0 \\ -z^{-1} & s^{-1} z^{-2} + s^{-1} z^{-1} & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Les indices de nilpotence sont  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_2 = 1$ .

En appliquant la relation (3.6.17), on obtient,

$$\begin{aligned}
[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} &= \sum_{i=-\mu_1}^{\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} \\
&= T_{-1,-1} + T_{-1,0} z^{-1} + T_{-1,1} z^{-2} + T_{0,-1} s^{-1} + T_{0,0} s^{-1} z^{-1} \\
&\quad + T_{0,1} s^{-1} z^{-2} + T_{1,-1} s^{-2} + T_{1,0} s^{-2} z^{-1} + T_{1,1} s^{-2} z^{-2}
\end{aligned}$$

Les matrices de transitions sont,

$$\begin{aligned}
T_{-1,-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{-1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
T_{0,0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi la solution du système est,

$$\begin{aligned}
x(t, n) &= \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{1,n-k-1} B \int_0^t [tu(t-\tau, k)] d\tau + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} B u^{i-1}(t, k) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i,n-k} E x(0, k) \delta^{(i+1)} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{(i)!} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i,n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{(i-1)}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x(t, n) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n)\delta^{(-1)} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n-1)\delta^{(-1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} tx(0, n)
\end{aligned}$$

et la sortie,

$$\begin{aligned}
y(t, n) &= C \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(-1)}(t, n-2) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n)\delta^{(-1)} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n-1)\delta^{(-1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} tx(0, n) \right] \\
&= u^{(-1)}(t, n-1) + u^{(-1)}(t, n-2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n)\delta^{(-1)} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0, n-1)\delta^{(-1)} \\
&+ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} tx(0, n)
\end{aligned}$$

### 3.6.6 Solution du modèle régulier bidimensionnel continu-discret

La solution  $x(t, k)$  du modèle régulier [20] (3.6.10) avec des conditions initiales (3.6.12)

Si (3.6.11) est vérifiée, alors,

$$[Es z - Az - B - Cs]^{-1} = \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{pq} s^{-p} z^{-q} \quad (3.6.22)$$

où les matrices  $T_{pq}$  sont définies par

$$ET_{p-1,q-1} - BT_{pq} - CT_{p-1,q} - AT_{p,q-1} = \begin{cases} I & \text{pour } p = q = 0 \\ 0 & \text{pour } p \neq 0 \text{ et } q \neq 0 \end{cases} \quad (3.6.23)$$

et  $T_{pq} = 0$  pour  $p < n_1$  et-ou  $q < n_2$ .

**Théorème 21.** *La solution  $x(t, k)$  de (3.6.10) avec les conditions initiales (3.6.12) est alors,*

$$\begin{aligned} x(t, k) = & \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{-p,k-q} D_0 u^{(p)}(t, q) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p,k-q} D_0 \int_0^t \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!} u(t-\tau, q) d\tau + \\ & \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{-p,k-q} D_1 u^{p+1}(t, q) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p,k-q} D_1 \int_0^t \frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!} u(t-\tau, q) d\tau + \\ & \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2+1} T_{-p,k-q+1} D_2 u^{(p)}(t, q) + \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2+1} T_{p,k-q+1} D_2 \int_0^t \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!} u(t-\tau, q) d\tau + \\ & \sum_{p=0}^{n_1} T_{-p,k} [A, D_2] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ u(t, 0) \end{pmatrix} + \\ & \sum_{p=1}^{\infty} T_{p,k} [A, D_2] \int_0^t \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!} \begin{pmatrix} x_1(t-\tau) \\ u(t-\tau, 0) \end{pmatrix} d\tau - \\ & \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p,k-q} \delta^{(p)}(t) [C, D_1] \begin{pmatrix} x_2(q) \\ u(0, q) \end{pmatrix} - \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{k+n_2} T_{p,k-q} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} [C, D_1] \begin{pmatrix} x_2(q) \\ u(0, q) \end{pmatrix} + \\
& \sum_{p=0}^{n_1} T_{-p,k} E x_1^{(p-1)}(t) + \sum_{p=1}^{\infty} T_{p,k} E \int_0^t \frac{\tau^{p-2}}{(p-2)!} x_1(t-\tau) d\tau + \\
& \sum_{p=0}^{n_1} \sum_{q=0}^{k+n_2+1} T_{-p,k-q+1} E \delta^{(p)}(t) x_2(q) + \sum_{p=0}^{n_1} T_{-p,k} E \delta^{(p)}(t) x(0,0) - \\
& \sum_{p=1}^{\infty} T_{p,k} E \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} x(0,0) \quad \text{Pour } t \in R_+, k \in Z_+
\end{aligned}$$

## 3.7 Modèle d'espaces d'état bidimensionnel continu

### 3.7.1 Modèle d'état bidimensionnel de Roesser

On considère dans cette section la forme continue du système bidimensionnel de Roesser qui est,

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t_1, t_2), \quad (3.7.1)$$

ou dans sa forme compacte,

$$E x'(t_1, t_2) = A x(t_1, t_2) + B u(t_1, t_2) \quad (3.7.2)$$

Comme exemple, on considère l'équation différentielle partielle généralisée de Darboux à deux variables [30],

$$E \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y \partial t} = F \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} + G \frac{\partial T(y, t)}{\partial t} + H T(y, t) + B u(y, t), \quad (3.7.3)$$

**Remarque 22.** *On rencontre de telles équations dans la description mathématique de la diffusion de la chaleur, réactions chimiques,...*

Nous notons que (3.7.3) est la description continue du système bidimensionnel discret.

On peut définir d'une manière auxiliaire, l'expression (3.7.3) dans la forme de Roesser (3.7.2). On définit les variables auxiliaires,

$$T_1 = \frac{E\partial T}{\partial t} - FT, \quad (3.7.4)$$

Nous obtenons alors,

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{E\partial^2 T}{\partial y\partial t} - \frac{F\partial T}{\partial y}, \quad (3.7.5)$$

Ainsi on peut écrire (3.7.3) comme,

$$\begin{pmatrix} I & -G \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ I & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (3.7.6)$$

ce n'est rien d'autre que l'équation (3.7.2).

Dans le cas particulier où  $E = 0$ , (3.7.3) devient l'équation hyperbolique qui décrit plusieurs phénomènes physiques, dans ce cas (3.7.6) est évidemment singulière.

**Remarque 23.** *Concernant la résolution d'une équation différentielle partielle linéaire à coefficients constants, elle peut être vue comme un cas particulier d'une EDP linéaire à coefficients variables, ainsi nous pouvons appliquer la méthode des courbes caractéristiques.*

### 3.7.2 Résolution d'une EDP linéaire à coefficients constants

Nous considérons l'équation suivante,

$$\sum_{j=1}^n a_j D_j x(t) + b(x) = 0 \quad (3.7.7)$$

où  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  représentent les variables réelles indépendantes,  $a_j \in R$  et  $x(t)$  est la fonction inconnue de  $t$  à déterminer. L'équation (3.7.7) est linéaire si  $b(x) = cx(t) + d$ . Par une solution (classique) de (3.7.7), on entend une fonction réelle  $x$  de classe  $C^1$  définie dans une partie ouverte  $V$  de  $R^n$  telle que  $u$  vérifie (3.7.7) en chaque point  $t \in V$ .

### Méthode des courbes caractéristiques

Etant donné l'équation (3.7.7), on considère le système d'équations différentielles ordinaires

$$y' = a = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (3.7.8)$$

Les solutions  $t \mapsto y(t)$ ,  $t$  dans un intervalle de  $R$ , de (3.7.8) s'appellent les courbes caractéristiques pour l'équation (3.7.7).

Soit  $t \mapsto \xi(t, \alpha)$ ,  $t \in I_0$ ,  $I_0$  un intervalle ouvert contenant  $t = 0$ , une solution de (3.7.8) telle que  $\xi(0, \alpha) = \alpha$ ; on dit que  $\xi$  est une courbe caractéristique de (3.7.7) passant par le point  $\alpha \in R^n$ . Posons

$$v(t) = x(\xi(t, \alpha))$$

où  $x$  est une solution de (3.7.7) définie dans un voisinage ouvert  $V$  de  $\alpha \in R^n$ ; par définition,  $x$  est défini et est de classe  $C^1$  dans  $V$  un voisinage ouvert de  $\alpha$ , vérifiant (3.7.7) en chaque point de ce voisinage; on suppose que  $\xi(t, \alpha) \in V$  pour  $t \in I_0$ , est une fonction de classe  $C^1$ . Puisque

$$\xi'(t, \alpha) = a(\xi(t, \alpha)), \quad \xi(0, \alpha) = \alpha, \quad t \in I_0,$$

on a  $v'(t) = x'(\xi(t, \alpha))\xi'(t, \alpha)$  d'où

$$v'(t) = \sum_{j=1}^n a_j D_j x(\xi(t, \alpha)), \quad t \in I_0,$$

ce qui veut dire, compte tenu du fait que  $x$  vérifie (3.7.7), que  $v$  est une solution de l'équation

$$v'(t) + b(\xi(t, \alpha)) = 0 \quad (3.7.9)$$

avec  $v(0) = x(\alpha)$ . Si  $b$  est de classe  $C^1$  dans une partie ouverte appropriée, la solution  $v$  est déterminée uniquement par (3.7.9) dès que  $v(0) = x(\alpha)$  est fixée.

En définitive, on voit que, pour une solution  $x$  de (3.7.7) dans un voisinage ouvert  $V$  de  $\alpha$ , la connaissance de  $x(\alpha)$  au point  $\alpha \in R^n$  détermine  $x$  sur la courbe caractéristique  $t \mapsto \xi(t, \alpha)$  passant par  $\alpha$ .

### 3.8 Identification entre les modèles de Givone-Roesser et de Fornasini-Marchesini

Dans cette section, nous nous sommes intéressés à la relation qu'il y a entre le modèle de Givone-Roesser et le modèle de Fornasini-Marchesini. Aussi nous énoncerons des conditions de telle manière à ce que ces deux modèles soient équivalents, dans le sens où l'un pourra être mis sous la forme de l'autre, et vice-versa, sans pour autant élever la dimension de l'espace d'état. En fait, la mise en forme du modèle de Givone-Roesser au modèle Fornasini-Marchesini préserve naturellement la dimension de l'espace d'état, puisque chaque état local est la somme directe des  $d$  composantes orthogonales. Dans l'autre sens, exprimer le modèle de Fornasini-Marchesini sous la forme du modèle de Givone-Roesser ; d'une façon générale, ne peut être fait sans agrandir la dimension de l'espace d'état, du fait que l'espace d'état doit être décomposé en  $d$  sous-espaces, lesquels pourront ou non recouvrir le dit

espace. Nous remarquerons que, sous certaines conditions, la mise en forme du modèle Fornasini-Marchesini au modèle de Givone-Roesser pourra être possible, tout en préservant la dimension de l'espace d'état.

### 3.8.1 Mise en forme de Givone-Roesser en Fornasini-Marchesini

On considère le modèle  $2D$  de Givone-Roesser [11], [25] qui est donné par,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(n_1 + 1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2 + 1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ B_2^{GR} \end{pmatrix} u(n_1, n_2) \\ y(n_1, n_2) &= \begin{pmatrix} C_1^{GR} & C_2^{GR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} + D^{GR}u(n_1, n_2). \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

Nous pouvons écrire l'équation 3.8.1 comme suit,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1 - 1, n_2) \\ x_1(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2 - 1) \\ x_1(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^{GR} \end{pmatrix} u(n_1, n_2 - 1), \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

ou,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(n_1, n_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\left\{ \begin{pmatrix} x_1(n_1 - 1, n_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \right\} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix} \\
&\left\{ \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2 - 1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix} \right\} \\
&+ \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^{GR} \end{pmatrix} u(n_1, n_2 - 1).
\end{aligned} \tag{3.8.3}$$

Par décomposition de l'espace d'état on a,  $x(n_1, n_2) := \begin{pmatrix} x_1(n_1, n_2 - 1) \\ 0 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2(n_1, n_2 - 1) \end{pmatrix}$ , et

$$A_1^{FM} = \begin{pmatrix} A_{11}^{GR} & A_{12}^{GR} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2^{FM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{GR} & A_{22}^{GR} \end{pmatrix}, \quad B_1^{FM} = \begin{pmatrix} B_1^{GR} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2^{FM} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^{GR} \end{pmatrix},$$

$$C^{FM} = C^{GR} = \begin{pmatrix} C_1^{GR} & C_2^{GR} \end{pmatrix}, \quad D^{FM} = D^{GR}.$$

Nous obtenons,

$$x(n_1, n_2) = A_1^{FM} x(n_1 - 1, n_2) + A_2^{FM} x(n_1, n_2 - 1) + B_1^{FM} u(n_1 - 1, n_2) + B_2^{FM} u(n_1, n_2 - 1)$$

$$y(n_1, n_2) = C^{FM} x(n_1, n_2) + D^{FM} x(n_1, n_2)$$

(3.8.4)

qui est exactement le modèle de Fornasini-Marchesini (2D).

**Remarque 24.** *Il existe deux opérateurs linéaires qui transforment l'équation (3.8.1) en (3.8.3)*

1. la projection orthogonale  $P_k : \mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{H}_i \mapsto \mathcal{H}_k$  où l'image de la projection est égale à  $\mathcal{H}_k$ ,
2. En considérant l'application suivante  $l_k : \mathcal{H}_k \mapsto \mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{H}_i$ .

On suppose,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_1, \quad \text{et} \quad l_1 P_1 A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H},$$

$$P_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_2, \quad \text{et} \quad l_2 P_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}.$$

En utilisant cet opérateur, nous pouvons écrire (3.8.3) dans une forme plus compacte,

$$\begin{aligned} l_1 x_1(n_1, n_2) + l_2 x_2(n_1, n_2) &= l_1 P_1 A^{GR} \{l_1 x_1(n_1 - 1, n_2) + l_2 x_2(n_1 - 1, n_2)\} \\ &\quad + l_2 P_2 A^{GR} \{l_1 x_1(n_1, n_2 - 1) + l_2 x_2(n_1, n_2 - 1)\} \\ &\quad + l_1 P_1 B^{GR} u(n_1 - 1, n_2) + l_2 P_2 B^{GR} u(n_1, n_2 - 1) \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

En posant  $x(\cdot) = \sum_{k=1}^2 l_k x_k(\cdot)$ , et  $A_k^{FM} = l_k P_k A^{GR}$ ,  $B_k^{FM} = l_k P_k B^{GR}$ ,  $k = 1, 2$ , on obtient le même résultat que (3.8.4).

### 3.8.2 Mise en forme de Fornasini-Marchesini en Givone-Roesser

Le modèle de Fornasini-Marchesini 2D [11], [25] est décrit par,

$$x(n) = \sum_{k=1}^2 A_k^{FM} x(n - e_k) + \sum_{k=1}^2 B_k^{FM} u(n - e_k) \quad (3.8.6)$$

$$y(n) = C^{FM} x(n) + D^{FM} u(n) \quad (3.8.7)$$

Nous pouvons représenter le système comme suit,

$$U^{FM} = \begin{pmatrix} A^{FM} & B^{FM} \\ C^{FM} & D^{FM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{FM} & B_1^{FM} \\ A_2^{FM} & B_2^{FM} \\ A^{FM} & B^{FM} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bigoplus_1^2 \mathcal{H} \\ \mathcal{Y} \end{pmatrix}. \quad (3.8.8)$$

On peut aussi écrire l'équation (3.8.6) comme,

$$x(n) = \sum_{k=1}^2 [A_k^{FM} x(n - e_k) + B_k^{FM} u(n - e_k)] = \sum_{k=1}^2 x_k(n). \quad (3.8.9)$$

**Remarque 25.** *Pour écrire le modèle de Fornasini-Marchesini sous la forme du modèle de Givone-Roesser, nous devons construire les espaces,  $\mathcal{H}_k$  pour  $k = 1, 2$  tels que la somme directe  $\bigoplus_{k=1}^2 \mathcal{H}_k = \mathcal{H}$ . Pour ce faire, supposant que,*

$$Im[A_j^{FM} \ B_j^{FM}] \cap Im[A_j^{FM} \ B_j^{FM}] = \{0\} \quad k \neq j, \quad (3.8.10)$$

et on définit,  $\mathcal{H}_k$  tel que,  $im[A_j^{FM} \ B_j^{FM}] \subset \mathcal{H}_k$ . Alors,

$$\begin{aligned} A_{i,j}^{GR} &= P_i A_i^{FM}|_{\mathcal{H}_j} : \mathcal{H}_j \mapsto \mathcal{H}_i, & B_i^{FM} &= P_i B_i^{FM} : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{H}_i, \\ C_j^{GR} &= C^{FM}|_{\mathcal{H}_j} : \mathcal{H}_j \mapsto \mathcal{Y}, & D^{GR} &= D^{FM} : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

d'où, pour  $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} x_k(n) &= P_k x(n) = P_k \sum_{l=1}^2 [A_l^{FM} x(n - e_l) + B_l^{FM} u(n - e_l)] \\ &= P_k A_k^{FM} x(n - e_k) + P_k B_k^{FM} u(n - e_k) \\ &= \sum_{j=1}^2 P_k A_k^{FM}|_{\mathcal{H}_j} x_j(n - e_k) + P_k B_k^{FM} u(n - e_k) \\ &= \sum_{j=1}^2 A_{k,j}^{GR} x_j(n - e_k) + B_k^{GR} u(n - e_k) \end{aligned}$$

qui est équivalent à,

$$x_k(n + e_k) = \sum_{j=1}^2 A_{k,j}^{GR} x_j(n) + B_k^{GR} u(n). \quad (3.8.11)$$

Analogiquement, pour l'équation de sortie, nous avons,

$$\begin{aligned} y(n) &= C^{FM} x(n) + D^{FM} u(n) \\ &= \sum_{j=1}^2 C^{FM}|_{\mathcal{H}_j} x_j(n) + D^{FM} u(n) \\ &= \sum_{j=1}^2 C_j^{GR} x_j(n) + D^{GR} u(n). \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

**Remarque 26.** *On aurait pu aussi caractériser le modèle de Fornasini-Marchesini 2D comme suit,*

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2) \quad (3.8.13)$$

$$y(n_1, n_2) = [C_1 \ C_2] x(n_1, n_2) + Du(n_1, n_2) \quad (3.8.14)$$

où,

$$\begin{aligned} x_1(n_1, n_2) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) \in im[A_1^{FM} \ B_1^{FM}] \subset \mathcal{H}_1 \\ x_2(n_1, n_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} x(n_1, n_2 - 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} u(n_1, n_2 - 1) \in im[A_2^{FM} \ B_2^{FM}] \subset \mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
P_1x(n_1, n_2) &= P_1[x_1(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2)] = P_1x_1(n_1, n_2) = x_1(n_1, n_2) \\
&= P_1 \left[ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(n_1 - 1, n_2) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(n_1 - 1, n_2) \right] \\
&= [A_{11} \quad A_{12}]x(n_1 - 1, n_2) + B_1u(n_1 - 1, n_2) \\
&= [A_{11} \quad A_{12}]|_{\mathcal{H}_1}x_1(n_1 - 1, n_2) + [A_{11} \quad A_{12}]|_{\mathcal{H}_2}x_2(n_1 - 1, n_2) + [A_{11} \quad A_{12}]|_{\mathcal{H}_2} \\
&\quad + B_1u(n_1 - 1, n_2) \\
&= A_{11}x_1(n_1 - 1, n_2) + A_{12}x_2(n_1 - 1, n_2) + B_1u(n_1 - 1, n_2).
\end{aligned}$$

De la même façon on calcule  $P_2x(n_1, n_2)$

$$\begin{aligned}
P_2x(n_1, n_2) &= x_2(n_1, n_2) \\
&= A_{21}x_1(n_1, n_2 - 1) + A_{22}x_2(n_1, n_2 - 1) + B_2u(n_1, n_2 - 1).
\end{aligned}$$

et l'équation de sortie  $y(n_1, n_2)$  est,

$$\begin{aligned}
y(n_1, n_2) &= [C_1 \quad C_2]|_{\mathcal{H}_1}x_1(n_1, n_2) + [C_1 \quad C_2]|_{\mathcal{H}_2}x_2(n_1, n_2) + Du(n_1, n_2) \\
&= C_1x_1(n_1, n_2) + C_2x_2(n_1, n_2) + Du(n_1, n_2).
\end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Inégalités Matricielles linéaires

L'étude des inégalités matricielles affines (Linear matrix inequalities) dans le contexte des systèmes dynamiques et du contrôle est apparue, probablement, avec le début des travaux fondamentaux d'Aleksander Lyapunov, concernant la stabilité du mouvement. Autour des années 1890, Lyapunov a mis au point une méthode d'analyse des propriétés du mouvement de certains systèmes dynamiques autour d'un point d'attraction. Il étudia la stabilité d'équations différentielles de la forme,  $\dot{x} = Ax$ , et montre que celle-ci est stable si et seulement s'il existe une matrice  $P$  définie positive qui vérifie  $A^T P + PA < 0$ , aussi connue sous le nom d'inégalité de Lyapunov et qui est une LMI particulière. A. Lyapunov a aussi montré que cette inégalité peut être résolue analytiquement.

Dans les années 40-50, Lur'e, Postnikov et d'autres chercheurs en union soviétique appliquèrent la méthode de Lyapunov à de véritables problèmes de commande, et résolurent les LMIs qui se posèrent à eux, "à la main". Dans les années 60, Yakubovic, Popov, Kalman et d'autres réussirent à ob-

tenir un critère graphique permettant de résoudre certaines familles de LMI. Plus tard dans les années 80 les travaux des mathématiciens Pyatnitskii et Skorodinskii montrent qu'il est possible de reformuler un problème LMI en un problème d'optimisation convexe, que l'on peut résoudre numériquement si celui-ci ne peut être résolu analytiquement. L'algorithme Ellipsoïde, qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation convexe en temps polynomial est alors utilisé. Clairement, une formulation LMI n'a de sens que si elle permet une résolution efficace et réalisable. Les progrès réalisés dans le domaine algorithmique ont permis le développement d'outils de résolutions numériques (LMIToolBox, LMITool, SeDuMi,...). Actuellement, un effort important s'attache à formuler, notamment, des problèmes de commande avec un formalisme LMI de telle manière à avoir une approche unifiée pour l'analyse et la commande de problèmes appartenant à des classes distinctes.

**Définition 15.** [18] *Une LMI peut être décomposée en somme d'une forme symétrique est d'une transformation linéaire,*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{i=n} x_i F_i < 0 \quad (4.0.1)$$

où,

1.  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  est un vecteur de dimension  $n$  appelé variable de décision.
2.  $F_0, \dots, F_n$  sont des matrices symétriques de  $R^{n \times n}$ .

L'inégalité  $<$  veut dire "définie négative". On peut aussi avoir une LMI non stricte si l'équation n'est pas stricte ( $F(x)$  semi-définie négative).

**Définition 16.** Soit une forme affine,

$$F : X \longrightarrow S; F(x) = F_0 + T(x)$$

où,

$$F_0 \in S$$

avec,

$$S =: \{M \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}.$$

**Remarque 27.** On rappelle qu'une forme affine  $F : \mathfrak{X} \rightarrow S$  prend nécessairement la forme  $F(x) = F_0 + T(x)$  où  $F_0 \in S$  (i.e.,  $F_0$  symétrique) et  $T : \mathfrak{X} \rightarrow S$  est une transformation linéaire. Ainsi si  $\mathfrak{X}$  est de dimension finie, i.e. de dimension  $n$ , et où  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  constituent une base pour  $\mathfrak{X}$ . Ainsi tout  $x \in X$  peut être représenté comme  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  et écrire,

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j F_j \quad (4.0.2)$$

où,  $F_j = T(e_j) \in S$ , de la, nous obtenons (4.0.1) comme cas particulier.

**Remarque 28.** Dans certains cas, les LMIs sont exprimées en fonction de matrices variables plutôt que variables de décisions.

Un exemple, est L'inégalité de Lyapunov

$$F(x) = A^T X + X A < 0$$

où

$$A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$$

avec  $m_1 = m_2 = m$  donnée.  $X$  est la matrice inconnue de dimension  $m \times m$ .

**Définition 17. (système LMI)[17]** Soit un système de LMI  $F_1(x) < 0, \dots, F_p(x) < 0$ . Il est possible de regrouper le système ci-dessus en une seule LMI,

$$F(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & F_p(x) \end{pmatrix} < 0$$

**Remarque 29.** 1. Une LMI multiples contraintes peut toujours être convertie en une LMI à une seule contrainte .

2. L'écriture d'une LMI diagonale bloc a comme propriété que ses valeurs propres sont une simple réunion des valeurs propres des matrices qui la forment.

**Proposition 2.** Soit  $M$  une matrice carrée  $n \times n$  et  $T$  une matrice régulière, alors  $T^*MT$  est appelée transformation congruente.

Le nombre de vecteurs propres positifs respectivement (négatifs) ne changent pas en effet; Si les vecteurs  $u$  et  $v$  sont exprimés comme suit  $u = Tv$  avec  $\det T \neq 0$ , alors  $u^*Mu < 0$  pour tout  $u \neq 0_{R^n}$ . C'est équivalent à dire que  $v^*T^*MTv < 0$  pour tout  $v \neq 0_{R^n}$ . D'où  $M < 0 \Leftrightarrow T^*MT < 0$ .

**Exemple 4.** Soit une matrice hermitienne partitionnée,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Avec, } M_{11} \in R^{n \times n} \text{ et } \det M_{11} \neq 0.$$

On calcule la transformation congruente  $T^*MT$ . D'après la proposition ci-

dessus, ceci donne,

$$M < 0 \Leftrightarrow T^*MT < 0$$

On remarque que c'est une matrice diagonale bloc. Alors,  $M_{11} < 0$  et  $S < 0$  où,  $S := M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$

Nous proposons une série de résultats et d'exemples qui mettent en évidence l'importance de l'outil LMI dans la résolution de divers problèmes liés à la réduction, stabilité.

**Lemme 1.** *Soit le problème LMI suivant,*

*Trouver  $x \in R^n$  tel que  $F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0$ , on suppose que l'on a  $F_m \leq 0$  et que  $F_m$  est de rang  $r \leq n$ . Nous montrons que ce problème est équivalent à un problème LMI avec  $m - 1$  variables.*

### Preuve

Soit  $F_m$  est semi définie, donc il existe une matrice  $U$  de rang plein vérifiant  $F_m = UU^T$ .

Nous avons  $F(x) < 0$  si et seulement si,

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}^T \\ U^T \end{pmatrix} F(x) \begin{pmatrix} \tilde{U} & U \end{pmatrix} < 0$$

On définit

$$\hat{x} = (x_1, \dots, x_{m-1})^T \in R^{m-1}$$

et

$$\hat{F}(\hat{x}) =: F_0 + \sum_{i=1}^{m-1} x_i F_i$$

On a alors  $F(x) = \hat{F}(\hat{x}) + x_m U U^T$ , donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}^T \\ U^T \end{pmatrix} F(x) \begin{pmatrix} \tilde{U} & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} & \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) U \\ U^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} & U^T \hat{F}(\hat{x}) U + x_m (U^T U)^2 \end{pmatrix}$$

car  $U^T \tilde{U} = 0$

En appliquant le lemme de Schur, on a  $F(x) < 0$  si et seulement si,

$$\begin{cases} \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} > 0 \\ U^T \hat{F}(\hat{x}) U + x_m (U^T U)^2 - U^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} (\tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U})^{-1} \tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) U > 0 \end{cases}$$

or on peut choisir  $x_m$  suffisamment grand pour avoir la 2<sup>e</sup> inégalité satisfaite.

Ainsi, le problème posé ci-dessus est équivalent à,

trouver  $\hat{x} \in R^{m-1}$  tel que  $\tilde{U}^T \hat{F}(\hat{x}) \tilde{U} < 0$

on a donc pu éliminer une variable du problème LMI grâce au terme semi défini.  $\square$

**Lemme 2.** Soit la LMI suivante,

$$A(x) + B(x) X c^T(x) + c(x) X^T B^T(x) < 0$$

Il est possible d'éliminer  $X$  si  $x$  et  $X$  sont indépendants. La LMI est alors équivalente à,

$$\tilde{B}^T(x) A(x) \tilde{B}(x) > 0$$

$$\tilde{c}^T(x) A(x) \tilde{c}(x) > 0$$

où  $\tilde{B}$  et  $\tilde{c}$  sont les complémentaires orthogonaux de  $B$  et  $c$  respectivement.

**Exemple 5.** On considère le problème de stabilité exponentielle du système linéaire,

$$\dot{x} = Ax$$

où  $A \in R^{n \times n}$ , la stabilité du système assure l'existence d'une constante  $M$  et  $\alpha$  tel que pour toute condition initiale  $x_0$  la solution  $x(t)$  avec  $x(t_0) = 0$  satisfait,

$$\|x(x)\| \leq \|x(t_0)\| M e^{-\alpha(t-t_0)}$$

Selon Lyapunov le système est exponentiellement stable si et seulement s'il existe une matrice  $X = X^T$  tel que  $X > 0$  et  $A^T X + X A < 0$ , en effet dans ce cas la fonction  $V(x) := x^T X x$ , qualifiée de fonction de Lyapunov est positive pour tout vecteur non nul et strictement décroissante le long de la solution  $x$  du système linéaire autonome.

Nous pouvons aussi montrer  $\|x(x)\| \leq \|x(t_0)\| M e^{-\alpha(t-t_0)}$  avec  $M^2 = \lambda_{\max}(x)/\lambda_{\min}$  et  $\alpha > 0$  tel que  $A^T X + X A + \alpha X < 0$ , alors la stabilité exponentielle est équivalente à la faisabilité de la LMI,

$$\begin{pmatrix} -X & 0 \\ 0 & A^T X + X A \end{pmatrix} < 0$$

**Exemple 6.** On considère  $k$  systèmes linéaires de la forme,

$$\dot{x} = A_i x + B_i u$$

où  $A_i \in R^{n \times n}$  et  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . La question de la stabilité simultanée est de trouver une loi de retour d'état  $u = Fx$  avec  $F \in R^{m \times n}$  tel que tous les systèmes autonomes,  $\dot{x} = (A_i + B_i F)x$   $i = 1, \dots, k$  soient asymptotiquement stables. En utilisant l'exemple précédent, ce problème sera résolu quand nous pourrons trouver une matrice  $F$  et  $X_i$   $i = 1, \dots, k$  telle que pour tout  $i$

$$X_i > 0 \text{ et } (A_i + B_i F)^T X_i + X_i (A_i + B_i F) < 0$$

# Chapitre 5

## Conditions De Stabilité Des Modèles D'état Bidimensionnels Par Les LMIs

### 5.1 Formulation et position du problème

Nous abordons dans ce dernier chapitre les résultats de stabilité, trois formulations sont apportées, la première étant la définition de la stabilité asymptotique qui fait intervenir la solution du système, la seconde qui correspond à une condition nécessaire et suffisante par rapport au polynôme caractéristique du dit système, et la troisième est une condition suffisante sur la faisabilité de LMIs bien définies.

On note par  $R^{m \times n}$  respectivement  $C^{m \times n}$ , l'ensemble des matrices réelles respectivement complexes à  $m$  lignes et  $n$  colonnes et par  $R^m$  respectivement  $C^m$  l'ensemble des vecteurs réels respectivement complexes. Aussi  $Z_+$  est

l'ensemble des entiers relatifs et  $R_+$  la droite réelles positifs et  $j$  la racine carrée de  $-1$ .

### 5.1.1 Système discret bidimensionnel général

On considère le système discret bidimensionnel général

$$\begin{cases} Ex(i+1, k+1) = A_1x(i+1, k) + A_2x(i, k+1) + A_0x(i, k) + B_0u(i, k) \\ \quad + B_1u(i+1, k) + B_2u(i, k+1) \\ y(i, k) = Cx(i, k) + Du(i, k) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où  $x(i, k) \in R^n$  est le vecteur d'état du système (5.1.1),  $u(i, k) \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(i, k) \in R^p$  le vecteur de sortie du système,  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times m}$ . Les conditions initiales de (5.1.1) sont données par les fonctions connues  $x(0, k)$ ,  $k \in Z_+$  et  $x(i, 0)$ ,  $i \in Z_+$ .

**Remarque 30.** Pour  $B_1 = B_2 = 0$  l'équation (5.1.1) est réduite au premier modèle de Fornasini-Marchesini et pour  $A_0 = 0$  et  $B_0 = 0$  elle (l'équation (5.1.1)) est réduite au second modèle de Fornasini-Marchesini. Ces modèles peuvent être mis sous forme de modèles de Roesser et de Givone-Roesser.

**Remarque 31.** Le polynôme caractéristique du système (5.1.1) est donné par

$$B(z_1, z_2) = \det[z_1z_2E - z_1A_1 - z_2A_2 - A_0] \quad (5.1.2)$$

et est obtenu en appliquant la  $z$ -transformée bidimensionnelle à l'équation (5.1.1).

**Définition 18.** *Le système bidimensionnel (5.1.1) est asymptotiquement stable si la réponse impulsionnelle initiale (i.e.  $u(i, k) = 0$  pour  $i \geq 0, k \geq 0$ ) avec des conditions initiales qui satisfont  $\sup_{i \in Z_+} \|x(i, 0)\| < \infty, \sup_{k \in Z_+} \|x(0, k)\| < \infty$  converges vers zéro, i.e.  $\lim_{i, k \rightarrow \infty} \|x(i, k)\| = 0$ .*

### 5.1.2 Système à temps continu-discret bidimensionnel

On considère le système bidimensionnel à temps continu discret décrit par

$$\begin{cases} E\dot{x}(t, k+1) = A_1\dot{x}(t, k) + A_2x(t, k+1) + A_0x(t, k) + B_0u(t, k) \\ \quad + B_1\dot{u}(t, k) + B_2u(t, k+1) \\ y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k) \end{cases} \quad (5.1.3)$$

où,  $\dot{x} = \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$ ,  $x(t, k) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t, k) \in R^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t, k) \in R^p$  est le vecteur de sortie du système, et où  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times m}$ . Les conditions initiales de (4) sont données par les fonctions  $x(0, k)$ ,  $k \in Z_+$  et  $x(t, 0)$ ,  $k \in Z_+$ . Le polynôme caractéristique du système (4) est défini comme suit

$$B(s, z) = \det[szE - sA_1 - zA_2 - A_0] \quad (5.1.4)$$

et est obtenu par application de la  $sz$ -transformée au système (5.1.3)

**Définition 19.** *Le système bidimensionnel continu discret (5.1.3) est asymptotiquement stable si la réponse d'entrée initiale (i.e.  $u(t, k) = 0$  pour  $t \geq 0, k \geq 0$ ) avec des conditions initiales qui satisfont à  $\sup_{t \in R_+} \|x(t, 0)\| < \infty, \sup_{k \in Z_+} \|x(0, k)\| < \infty$  converges vers zéro, i.e.  $\lim_{t, k \rightarrow \infty} \|x(t, k)\| = 0$ .*

### 5.1.3 Système bidimensionnel à temps continu

En dernier lieu nous considérons un système bidimensionnel à temps continu,

$$E \frac{\partial^2 x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = A_1 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + A_0 x(t_1, t_2) + B_0 u(t_1, t_2) + B_1 \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_1} + B_2 \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_2} \quad (5.1.5)$$

$$y(t_1, t_2) = Cx(t_1, t_2) + Du(t_1, t_2) \quad (5.1.6)$$

où  $x(t_1, t_2) \in R^n$  est le vecteur d'état,  $u(t_1, t_2) \in R^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t_1, t_2) \in R^p$  est le vecteur de sortie,  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times m}$ . les conditions initiales de (5.1.5) sont données par les fonctions  $x(0, t_2)$ ,  $t_2 \in R_+$  et  $x(t_1, 0)$ ,  $t_1 \in R_+$ . Le polynôme caractéristique du système bidimensionnel à temps continu est donné comme suit

$$B(s_1, s_2) = \det[s_1 s_2 E - s_1 A_1 - s_2 A_2 - A_0] \quad (5.1.7)$$

et est obtenu par l'application de la transformée de Laplace bidimensionnelle.

**Définition 20.** *Le système bidimensionnel à temps continu est asymptotiquement stable si la réponse d'entrée initiale (i.e.  $u(t_1, t_2) = 0$  pour  $t_1 \geq 0$ ,  $t_2 \geq 0$  avec des conditions initiales qui satisfont  $\sup_{t_1 \in R_+} \|x(t_1, 0)\| < \infty$ ,  $\sup_{t_2 \in R_+} \|x(0, t_2)\| < \infty$  qui converges vers zéro, i.e.  $\lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \|x(t_1, t_2)\| = 0$ .*

## 5.2 Test de stabilité

Dans cette section des conditions nécessaires et suffisantes concernant les polynômes caractéristiques pour la stabilité de tels systèmes seront énoncés.

**Théorème 32.** *Le système bidimensionnel discret (5.1.1) est asymptotiquement stable si et seulement si  $B(z_1, z_2) \neq 0$  pour chaque paire  $(z_1, z_2)$  tel que  $|z_1| \leq 1$  et  $|z_2| \leq 1$ .*

**Preuve**

Soit

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{mn} z_1^m z_2^n \quad (5.2.1)$$

Où les coefficients  $h_{m_1 m_2}$  représentent la réponse impulsionnelle du système (5.1.1). La fonction rationnelle  $H(z_1, z_2)$  est stable si et seulement si la réponse impulsionnelle converge vers zéro pour tout  $z = (z_1, z_2)$  dans le poly disque  $|z_i| \leq 1$  avec,  $i = 1, 2$ . En utilisant les propriétés de convergence des séries, (tels que le critère de Weierstrass), cela revient à montrer que  $H(z_1, z_2)$  est une série analytique pour tout  $z = (z_1, z_2)$  dans le poly disque  $|z_i| \leq 1$  avec,  $i = 1, 2$ .

Finalement, pour une fonction rationnelle, cela revient à montrer que  $B(z_1, z_2)$  n'admet pas de racines dans le poly disque.  $\square$

**Théorème 33.** *Le système bidimensionnel continu discret (5.1.3) est asymptotiquement stable si et seulement si  $B(s, z) \neq 0$  pour chaque paire  $(s, z)$  tel que  $\Re_s \geq 0$  et  $|z| \leq 1$ .*

**Théorème 34.** *Le système bidimensionnel continu (5.1.5) est asymptotiquement stable si et seulement si  $B(s_1, s_2) \neq 0$  pour chaque paire  $(s_1, s_2)$  tel que  $\Re_{s_1} \geq 0$  et  $\Re_{s_2} \geq 0$ .*

**Théorème 35.** *Le système bidimensionnel discret (5.1.1) est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$B(z_1, 0) \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1, \quad (5.2.2)$$

$$B(z_1, z_2) \neq 0 \text{ pour } \|z_1\| = 1 \text{ et } |z_2| \leq 1. \quad (5.2.3)$$

**Théorème 36.** *Le système bidimensionnel continu discret (5.1.3) est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$B(s, 0) \neq 0 \text{ pour } \Re_s \leq 0, \quad (5.2.4)$$

$$B(j\omega, z) \neq 0 \text{ pour } \omega \in \mathbb{R} \text{ et } |z| \leq 1. \quad (5.2.5)$$

**Théorème 37.** *Le système bidimensionnel continu (5.1.5) est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$B(s_1, 1) \neq 0 \text{ pour } \Re_{s_1} \geq 0, \quad (5.2.6)$$

$$B(j\omega, s_2) \neq 0 \text{ pour } \omega \in \mathbb{R} \text{ et } \Re_{s_2} \geq 0. \quad (5.2.7)$$

**Remarque 38.** *Dans la prochaine section nous énoncerons des conditions suffisantes sous forme d'inégalités matricielles affines pour la stabilité de tels systèmes.*

### 5.3 Conditions LMIs pour les tests de stabilité

**Théorème 39.** [10] *Une matrice polynomiale hermitienne  $P(\omega) = \sum_{i=0}^2 P_i \omega^i$  avec  $P_i = P_i^*$ , est définie positive au point  $\omega$  si et seulement si il existe une matrice hermitienne  $X$  tel que*

$$\begin{pmatrix} P_0 & (p_1 + jX)/2 \\ (P_1 - jX)/2 & P_2 \end{pmatrix} \succ 0, \quad X = X^*. \quad (5.3.1)$$

**Théorème 40.** [10] Une matrice polynômiale hermitienne  $P(z) = \sum_{i=0}^2 P_i z^i$  avec  $P_{-i} = P_i^*$ , est définie positive sur le cercle unité si et seulement si il existe une matrice hermitienne  $X$  tel que

$$\begin{pmatrix} P_0 + X & P_1 \\ P_1^* & -X \end{pmatrix} \succ 0, \quad X = X^*. \quad (5.3.2)$$

**Remarque 41.** En ce basant sur ces théorèmes nous proposons maintenant des conditions suffisantes sous forme d'LMI pour la stabilité asymptotique des systèmes (5.1.1), (5.1.3) et (5.1.5) respectivement.

**Théorème 42.** [5] Le système bidimensionnel à temps discret (5.1.1) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes  $X_0, X_1, X_2$  tel que les LMI's suivantes soient faisable,

$$X_1 \succ 0 \quad X_2 \succ 0, \quad (5.3.3)$$

$$A_1^T X_1 A_1 - A_0^T X_1 A_0 \succ 0, \quad (5.3.4)$$

$$\begin{pmatrix} A_2^T \\ -E^T \end{pmatrix} X_2 \begin{pmatrix} A_2 & -E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_0^T \\ A_1^T \end{pmatrix} X_2 \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -X_0 & 0 \\ 0 & X_0 \end{pmatrix} \succ 0. \quad (5.3.5)$$

### Preuve

La condition (5.2.2) qui est une réduction du polynôme caractéristique à,

$$B(z_1, 0) = \det[-z_1 A_1 - A_0] \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1 \quad (5.3.6)$$

qui est satisfaite si et seulement la LMI suivante est faisable,

$$A_1^T X_1 A_1 - A_0^T X_1 A_0 \succ 0, \quad X_1 \succ 0, \quad X_1 = X_1^*. \quad (5.3.7)$$

La condition (5.2.3) exprime le fait que pour tout  $\omega \in R$  et  $|z_2| \leq 1$ , nous avons

$$B(e^{j\omega}, z_2) = \det[e^{j\omega} z_2 E - e^{j\omega} A_1 - A_2 z_2 - A_0] = \det[z_2(e^{j\omega} E - A_2) - (e^{j\omega} A_1 + A_0)] \neq 0. \quad (5.3.8)$$

Ceci est équivalent à  $\det(z_2 M - N) \neq 0$  où  $M = e^{j\omega} E - A_2$ ;  $N = e^{j\omega} A_1 + A_0$ , qui est satisfait si et seulement si la LMI suivante est faisable,

$$M^* X_2 M - N^* X_2 N \succ 0, \quad X_2 \succ 0, \quad X_2^* = X_2. \quad (5.3.9)$$

où  $X_2$  dépend en général de  $\omega$ . Si on suppose que  $X_2$  est constant, alors la relation (5.3.9) est équivalente à

$$e^{j\omega} P_1 + e^{-j\omega} P_1^* + P_0 \succ 0 \quad (5.3.10)$$

où,

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} -A_2^T X_2 E - A_0^T X_2 A_1 \quad (5.3.11)$$

$$P_0 \stackrel{\text{def}}{=} E^T X_2 E + A_2^T X_2 A_2 - A_0^T X_2 A_0 - A_1^T X_2 A_1 \quad (5.3.12)$$

avec,  $P_j^* = P_j$  la relation (11) devient,

$$\begin{pmatrix} P_0 + X & P_1 \\ P_1^* & -X \end{pmatrix} \succ 0, \quad (5.3.13)$$

Pour une matrice hermitienne  $X$ , nous définissons une nouvelle matrice hermitienne  $X_0$  via l'identité,

$$X = X_0 - E^T X_2 E + A_1^T X_2 A_1 \quad (5.3.14)$$

nous obtenons,

$$\begin{pmatrix} A_2^T X_2 A_2 - A_0^T X_2 A_0 + X_0 & -A_2^T X_2 E - A_0^T X_2 A_1 \\ -E^T X_2 A_2 - A_1^T X_2 A_0 & E^T X_2 E - A_1^T X_2 A_1 - X_0 \end{pmatrix} \succ 0 \quad (5.3.15)$$

Puisque nous supposons que  $X_2$  est constante, nous obtenons des conditions suffisantes de stabilité.  $\square$

**Théorème 43.** [5] *Le système bidimensionnel à temps continu discret 5.1.3 est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes  $X_0, X_1, X_2$  tel que les LMIs suivantes soient faisables*

$$X_1 \succ 0, X_2 \succ 0, \quad (5.3.16)$$

$$A_1^T X_1 A_0 + A_0^T X_1 A_1 \succ 0, \quad (5.3.17)$$

$$\begin{pmatrix} A_2^T \\ E^T \end{pmatrix} X_2 \begin{pmatrix} A_2 & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_0^T \\ -A_1^T \end{pmatrix} X_2 \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & X_0 \\ X_0 & 0 \end{pmatrix} \succ 0. \quad (5.3.18)$$

**Théorème 44.** [5] *Le système bidimensionnel à temps continu (5.1.5) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes  $X_0, X_1, X_2$  tel que les LMIs suivantes soient faisables*

$$X_1 \succ 0, X_2 \succ 0, \quad (5.3.19)$$

$$(A_1 - E)^T X_1 (A_2 + A_0) + (A_2 + A_0)^T X_1 (A_1 - E) \succ 0, \quad (5.3.20)$$

$$\begin{pmatrix} A_2^T X_2 A_0 + A_0^T X_2 A_2 & -A_1^T X_2 A_2 - A_0^T X_2 E \\ -A_2^T X_2 A_1 - E^T X_2 A_0 & E^T X_2 A_1 + A_1^T X_2 E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & X_0 \\ X_0 & 0 \end{pmatrix} \succ 0. \quad (5.3.21)$$

## 5.4 Extension Du Système Bidimensionnel à L'ordre $n$

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la stabilité des systèmes multidimensionnels discrets et continus du premier ordre. Ainsi nous pro-



Ainsi, le polynôme caractéristique du système (5.4.1) est,

$$B(z_1, z_2, \dots, z_n) = \det[Iz_1z_2\dots z_n - \sum_{\lambda=1}^n A_\lambda z_\lambda - A_0] \quad (5.4.3)$$

**Définition 22.** *Le système multidimensionnel (5.4.1) est asymptotiquement*

*stable si la réponse impulsionnelle initiale (i.e.  $u(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n) = 0$  pour*

*$i_k \geq 0$ , avec  $k = 1, 2, \dots, n$ ), et avec les conditions initiales qui satisfont*

*$\sup_{i_1 \in \mathbb{Z}_+} \|x(i_1, 0, \dots, 0)\| < \infty$ ,  $\sup_{i_2 \in \mathbb{Z}_+} \|x(0, i_2, \dots, 0)\| < \infty, \dots$ ,  $\sup_{i_n \in \mathbb{Z}_+} \|x(0, 0, \dots, i_n)\| <$*

*$\infty$ , i.e. qui converge vers zéro ou d'une autre façon,*

*$\lim_{i_1, i_2, \dots, i_n \rightarrow \infty} \|x(i_1, i_2, \dots, i_n)\| = 0$ .*

**Remarque 45.** *Nous énoncerons des conditions nécessaires et suffisantes en terme de polynôme caractéristique pour la stabilité de tels systèmes.*

**Théorème 46.** *le système multidimensionnel (5.4.1) est asymptotiquement*

*stable si et seulement si  $B(z_1, z_2, \dots, z_n) \neq 0$  pour tout  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , tels*

*que  $|z_i| \leq 1$  avec,  $i = 1, \dots, n$ .*

### Preuve

Soit

$$H(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{A(z_1, z_2, \dots, z_n)}{B(z_1, z_2, \dots, z_n)} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n}^{\infty} h_{m_1 m_2 \dots m_n} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n} \quad (5.4.4)$$

Où les coefficients  $h_{m_1 m_2 \dots m_n}$  représentent la réponse impulsionnelle du sys-

tème (5.4.1). La fonction rationnelle  $H(z_1, z_2, \dots, z_n)$  est stable si et seulement

si la réponse impulsionnelle converge vers zéro pour tout  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

dans le poly disque  $|z_i| \leq 1$  avec,  $i = 1, \dots, n$ . En utilisant les propriétés de

convergence des séries, (tels que le critère de Weierstrass), cela revient à monter

que  $H(z_1, z_2, \dots, z_n)$  est une série analytique pour tout  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

dans le poly disque  $|z_i| \leq 1$  avec,  $i = 1, \dots, n$ .

Finalement, pour une fonction rationnelle, cela revient à montrer que  $B(z_1, z_2, \dots, z_n)$  n'admet pas de racines dans le poly disque.  $\square$

**Théorème 47.** *Le système multidimensionnel (5.4.1) est asymptotiquement stable si et seulement si,*

$$\left\{ \begin{array}{ll} B(z_1, 0, 0, \dots, 0) \neq 0 & \text{pour } |z_1| \leq 1 \\ B(0, z_2, 0, \dots, 0) \neq 0 & \text{pour } |z_2| \leq 1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ B(0, 0, 0, \dots, z_{n-1}, 0) \neq 0 & \text{pour } |z_{n-1}| \leq 1 \end{array} \right. \quad (5.4.5)$$

$$B(z_1, z_2, \dots, z_n) \neq 0 \text{ pour } |z_i| = 1 \text{ avec } i = 1, \dots, n \text{ et } |z_n| \leq 1 \quad (5.4.6)$$

### 5.4.1 Extension Des Conditions LMIs pour les tests de stabilité

**Théorème 48.** *Le modèle (5.4.1) est asymptotiquement stable s'il existe  $n$  matrices hermitiennes  $X_0, X_1, \dots, X_n$  telles que les LMI suivantes sont faisables,*

$$\begin{aligned} & X_i \succ 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\ & A_i^T X_i A_i - A_0^T X_i A_0 \succ 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ & \left( \begin{array}{cc} A_n^T X_n A_n - A_0^T X_n A_0 + X_0 & -A_n^T X_n E - A_0^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i \\ -E^T X_n A_n - (\sum_{i=1}^{n-1} A_i)^T X_n A_0 & E^T X_n E - (\sum_{i=1}^{n-1} A_i)^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i - x_0 \end{array} \right) \succ 0. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

### Preuve

La condition (5.4.5) qui est une réduction du polynôme caractéristique à,

$$\left\{ \begin{array}{l} B(z_1, 0, 0, \dots, 0) = \det[-z_1 A_1 - A_0] \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1 \\ B(0, z_2, 0, \dots, 0) = \det[-z_2 A_2 - A_0] \neq 0 \text{ pour } |z_2| \leq 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B(0, 0, \dots, z_{n-1}, 0) = \det[-z_{n-1} A_{n-1} - A_0] \neq 0 \text{ pour } |z_{n-1}| \leq 1 \end{array} \right. \quad (5.4.8)$$

qui sont satisfaits si et seulement si les LMIs suivantes sont faisables,

$$A_i^T X_i A_i - A_0^T X_i A_0 \succ 0, \quad X_i \succ 0, \quad X_i = X_i^* \text{ pour } i = 1, \dots, n-1. \quad (5.4.9)$$

La condition (5.4.6) exprime le fait que pour tout  $\omega_i \in \mathbb{R}$  avec  $i = 1, 2, \dots, n-1$  et  $|z_n| \leq 1$ , nous avons,

$$\begin{aligned} B(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_{n-1}}, z_n) &= \det[e^{j\omega_1} \cdot e^{j\omega_2} \cdot \dots \cdot e^{j\omega_{n-1}} z_n E - e^{j\omega_1} A_1 - e^{j\omega_2} A_2 - \dots \\ &\quad - e^{j\omega_{n-1}} A_{n-1} - A_n z_n - A_0] \\ &= \det[z_n e^{j \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i} E - \sum_{i=1}^{n-1} e^{j\omega_i} A_i - A_n z_n - A_0] \\ &= \det[z_n (e^{j \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i} E - A_n) - (\sum_{i=1}^{n-1} e^{j\omega_i} A_i + A_0)] \neq 0. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Ceci est équivalent à  $\det(z_n M - N) \neq 0$  où  $M = e^{j \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i} E - A_n$ ;  $N = \sum_{i=1}^{n-1} e^{j\omega_i} A_i + A_0$ , qui est satisfait si et seulement si la LMI suivante est faisable,

$$M^* X_n M - N^* X_n N \succ 0, \quad X_n \succ 0, \quad X_n^* = X_n. \quad (5.4.11)$$

où  $X_n$  dépend en général de  $\omega$ . Si on suppose que  $X_n$  est constant, alors la relation (5.4.10) est équivalente à,

$$e^{j \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i} P_1 + e^{-j \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i} P_1^* + P_0 \succ 0 \quad (5.4.12)$$

On pose  $\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i = w$  nous retrouvons l'écriture suivante,

$$e^{jw} P_1 + e^{-jw} P_1^* + P_0 \succ 0.$$

et où,

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} -A_n^T X_n E - A_0^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i \quad (5.4.13)$$

$$P_0 \stackrel{\text{def}}{=} E^T X_n E + A_n^T X_n A_n - A_0^T X_n A_0 - \left( \sum_{i=1}^{n-1} A_i \right)^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i \quad (5.4.14)$$

avec,  $P_j^* = P_j$  la relation (5.3.10) devient,

$$\begin{pmatrix} P_0 + X & P_1 \\ P_1^* & -X \end{pmatrix} \succ 0, \quad (5.4.15)$$

Pour une matrice hermitienne  $X$ , nous définissons une nouvelle matrice hermitienne  $X_0$  via l'identité,

$$X = X_0 - E^T X_n E + \left( \sum_{i=1}^{n-1} A_i \right)^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i \quad (5.4.16)$$

nous obtenons,

$$\begin{pmatrix} A_n^T X_n A_n - A_0^T X_n A_0 + X_0 & -A_n^T X_n E - A_0^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i \\ -E^T X_n A_n - \left( \sum_{i=1}^{n-1} A_i \right)^T X_n A_0 & E^T X_n E - \left( \sum_{i=1}^{n-1} A_i \right)^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i - x_0 \end{pmatrix} \succ 0 \quad (5.4.17)$$

Puisque nous supposons que  $X_n$  est constante, nous obtenons des conditions suffisantes pour la stabilité multidimensionnelle.  $\square$

## 5.4.2 Système multidimensionnel continu

**Définition 23.** *Un système différentiel multidimensionnel continu, est décrit par les équations,*

$$\begin{cases} \frac{\partial^n x(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} = A_0 x(t_1, t_2, \dots, t_n) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^i x(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial^i u(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_i} \\ y(t_1, t_2, \dots, t_n) = Cx(t_1, t_2, \dots, t_n) \end{cases} \quad (5.4.18)$$

où, le vecteur d'état  $x(t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^\gamma$ , l'entrée  $u(t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^m$ , le vecteur de sortie  $y(t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^p$ ,  $A_0, A_i, B_i, i = 1, \dots, n$  et  $C$ , sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Par application de la transformée de Laplace  $nD$  nous obtenons la fonction de transfert,

$$T(s_1, s_2, \dots, s_n) = C[Is_1s_2\dots s_n - \sum_{i=1}^n A_i s_i - A_0]^{-1} \cdot [\sum_{i=1}^n B_i s_i]. \quad (5.4.19)$$

Et le polynôme caractéristique de (5.4.18),

$$B(s_1, s_2, \dots, s_n) = \det[Is_1s_2\dots s_n - \sum_{i=1}^n A_i s_i - A_0] \quad (5.4.20)$$

**Définition 24.** *Le système multidimensionnel à temps continu (5.4.18), est asymptotiquement stable si et seulement si la réponse impulsionnelle initiale (i.e.  $u(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$  pour  $t_i \geq 0$ , avec  $i = 1, \dots, n$ ), et avec les conditions initiales qui satisfont  $\sup_{t_1 \in R_+} \|x(t_1, 0, \dots, 0)\| < \infty$ ,  $\sup_{t_2 \in R_+} \|x(0, t_2, \dots, 0)\| < \infty, \dots, \sup_{t_n \in R_+} \|x(0, 0, \dots, t_n)\| < \infty$ , i.e. qui converge vers zéro.*

*D'une autre façon,  $\lim_{t_1, t_2, \dots, t_n \rightarrow \infty} \|x(t_1, t_2, \dots, t_n)\| = 0$ .*

**Théorème 49.** *le système multidimensionnel continu (5.4.18), est asymptotiquement stable si et seulement si  $B(s_1, s_2, \dots, s_n) \neq 0$  pour tout  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , tel que  $\Re_i \geq 0$  avec  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

**Théorème 50.** *Le système multidimensionnel à temps continu (5.4.18), est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} B(s_1, 1, \dots, 1) = \det[(E - A_1)s_1 - \sum_{i=0; i \neq 1}^{i=n} A_i] \neq 0 \text{ pour } \Re_1 \geq 0, \\ B(1, s_2, \dots, 1) = \det[(E - A_2)s_2 - \sum_{i=0; i \neq 2}^{i=n} A_i] \neq 0 \text{ pour } \Re_2 \geq 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B(1, \dots, s_{n-1}, 1) = \det[(E - A_{n-1})s_{n-1} - \sum_{i=0; i \neq n-1}^{i=n} A_i] \neq 0 \text{ pour } \Re_{n-1} \geq 0, \end{array} \right. \quad (5.4.21)$$

$$B(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_{n-1}, s_n) \neq 0 \text{ pour } \omega_i \in R \text{ avec } i = 1, \dots, n-1 \text{ et } |\Re_n| \geq 0 \quad (5.4.22)$$

Le modèle (5.4.18) est asymptotiquement stable s'il existe trois matrices hermitiennes  $X_0, X_1, \dots, X_n$  tels que les LMIs suivantes sont faisables,

$$\begin{aligned} & X_i \succ 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\ & (A_i - E)^T X_i (\sum_{k=0; k \neq i}^n A_k) + (\sum_{k=0; k \neq i}^n A_k)^T X_i (A_i - E) \succ 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \\ & \left( \begin{array}{cc} A_n^T X_n A_0 + A_0^T X_n A_n & -(\sum_{i=1}^{n-1} A_i)^T X_n A_n - A_0^T X_n E + X_0 \\ -A_n^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i - E^T X_n A_0 + X_0 & E^T X_n \sum_{i=1}^{n-1} A_i + (\sum_{i=1}^{n-1} A_i)^T X_n E \end{array} \right) \succ 0. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

# Conclusion Générale

En se basant sur des publications récentes, nous avons présenté dans ce mémoire différentes méthodes et critères de stabilité asymptotique, ainsi que des résultats de résolution et d'équivalence. Certains de ces résultats ont d'ailleurs fait l'objet d'une communication aux journées scientifiques (2011) organisées par la faculté SESNV de l'université de Mostaganem, bien que d'autres sont soumis au MACS5(Tanger 2011).

Nous remarquons que les méthodes présentées dans ce mémoire sont adaptables et appropriées pour les systèmes bidimensionnels et multidimensionnels. Cependant les cas rapportés, ne sont que du premier ordre, aussi l'une des perspectives observées est l'extension des critères de stabilité énoncés au cas le plus général, à savoir, les systèmes linéaires multidimensionnels d'ordre  $k$ .

Par ailleurs, on note que nous pouvons aussi étendre nos recherches vers l'étude de la résolution et les équivalences concernant les systèmes linéaires multidimensionnels d'ordre  $k$ .

L'extrême difficulté de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires, et le fait que les LMI's ont permis le développement d'outils algorithmiques, nous encouragent à espérer adapter les résultats concernant la

stabilité à de tels modèles en utilisant l'outil numérique.

Enfin en utilisant les résultats classiques, obtenus dans notre analyse et développement, on peut s'intéresser à envisager des applications en automatique, ainsi qu' en analyse de la robustesse.

Une des perspectives les plus prometteuses qui est apparue durant l' étude de ce mémoire, et qui, nous l' espérons fera l' objet d' un travail futur, serait une étude comparative entre les différentes méthodes de stabilité, par rapport aux propriétés propres de chacune d' elles.

# Bibliographie

- [1] ANTONIOU, G.E. and MICHAEL, M.T. "Second-Order Two-Dimensional Systems : Computing The Transfer Function" Journal of Electrical Engineering, Vol. 55, No. 11-12, 2004, 296-300.
- [2] ATTASI, S., "Systèmes linéaires homogènes à deux indices," *IRIA RAPPORT Laroria*, Vol. 31, September 1973.
- [3] BOUAGADA, D., "Sur L'existence et L'unicité Des Solutions des Systèmes Implicites," Thèse de Magister.
- [4] BOUAGADA, D., "Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs," Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Oran, 19 décembre 2007.
- [5] BOUAGADA, D. and VAN DOOREN, P. "On the Stability of 2D State-Space Models," Numer. Linear Algebra Appl. 2010 ; 00 :1-9
- [6] BOYD, S., EL GHAOUI, L., FERON, E. and BALAKRISHNAN, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [7] DITKINE, V. ET PROUDNIKOV, A., "Calcul Opérationnel," Edition Mir 1979.

- [8] DULLERUD, G.E. and PAGANINI, F., "A Course in Robust Control Theory : A Convex Approach," Edition Springer-Verlag New York Inc 2010.
- [9] DUMITRESCU, B., "Multidimensional Stability Test Using Sum-Of-Squares Decomposition," Tampere International Center for Signal Processing, Tampere University of Technology, 2005.
- [10] DUMITRESCU, B., Positive Trigonometric Polynômes and Signal Processing Applications, Springer Verlag Berlin, 2007.
- [11] ELOSMANI, A.O., et BOUAGADA, D., "Sur L'équivalence et la réduction des modèles bidimensionnels," 2ème Journées scientifiques de la Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie, 25-26 Mai 2011.
- [12] FORNASINI, E. and MARCHESINI, G., "State-space realization theory of two-dimensional filters," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-21, pp. 484-491, 1976.
- [13] FORNASINI, E. and MARCHESINI, G., "Doubly-indexed dynamical system : state-space models and structural properties," *Math. Systems Theory*, Vol. 12, no. 1, pp.59-72, 1978/79.
- [14] GANTMACHER, F.R., "Théorie Des Matrices Tom 1," Edition Dunod Paris 1966.
- [15] GANTMACHER, F.R., "Théorie Des Matrices Tom 2," Edition Dunod Paris 1966.
- [16] GIVONE, D. D. and ROESSER, R. P., "Multidimensional linear iterative circuits general properties," *IEEE Trans. On Computers*, Vol.

C-21, no. 10, pp. 1067-1073, 1972.

- [17] HENRION, D., "Inégalités Matricielles Quadratiques et Stabilité des Polynômes," LAAS-CNRS, Toulouse, France, 20 Février 2006.
- [18] HILAIRE, T., "L'optimisation convexe pour la conception et l'analyse des lois de commande," sous la direction de Philippe CHEVREL, -ARMINES- 16 août 2003.
- [19] KACZOREK, T., "The singular general model of 2-D systems and its solution," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-33 (1988) 1060-1061.
- [20] KACZOREK, T., "Singular Tow-Dimensional Continuous-Discrete Linear Systems," *Advances in Systems Science and Applications*, Inauguration Issue 103-108, 1995.
- [21] KACZOREK, T., "Solutions of Standard Models Equivalent to Singular 2D Models," *BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES TECHNICAL SCIENCES*, Vol. 48, no. 1, pp.95-104, 2000.
- [22] KACZOREK, T., "Structure Decomposition of Normal 2D Transfer Matrices," *BULLETIN OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES TECHNICAL SCIENCES*, Vol. 52, no. 4, 2004.
- [23] LAROCHE, E., "Commande Robuste," Ecole Nationale Supérieure De Physique De Strasourg, 2010-2011.
- [24] LEWIS, F.L., "A Review of 2-D Implicit Systems" *Automatica*. Vol 28. No 2.pp. 345-354. 1992. Printed in Great Britain.

- [25] MALAKORN, T., "Multidimensional Linear Systems and Robust Control," Doctora of Philosophy in Electrical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, April 2003.
- [26] MICHAEL, T. M., "Multiorder multidimensional systems : Computation of the transfer function using the DFT," A Master's Thesis, Montclair State University, May 2006.
- [27] MORI, Y., "Filtrage numérique en traitement du signal," Edition Hermes Science Publication 2007.
- [28] PASTRE, D., "Normes vectorielles, Normes matricielles et Conditionnement," Méthodes numériques 2003/2004 Université René Descartes UFR de mathématiques et informatique.
- [29] SCHERER, C. and WEILAND, S., "Lecture Notes DISC Course on Linear Matrix Inequalities in Control," Version 2.0 : April, 1999.
- [30] Xiao, Y., "2-D Laplace-Z Transformation," *IEICE TRANS. FUNDAMENTALS*, VOL. E89-A, No. 5 May 2006.