

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUES



Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

Oscillation des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes

Présenté par

Mme BOUDRAF GAUAICH Nadjia

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury :

Mr BELAÏDI Benharrat	Président	Pr	U. MOSTAGANEM
Mr HAMOUDA Saâda	Examineur	M.C.A	U. MOSTAGANEM
Mme AZIZ HAMANI Karima	Encadreur	M.C.A	U. MOSTAGANEM

Table des matières

Introduction	i
1 Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna	v
1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna	v
1.2 Ordre d'une fonction méromorphe	vii
1.3 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe	ix
1.4 Mesure et densité	ix
2 Oscillation des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes	x
2.1 Introduction et résultats	x
2.2 Lemmes préliminaires	xii
2.3 Preuve du Théorème 2.1.1	xiv
2.4 Preuve du Théorème 2.1.2	xviii
2.5 Preuve du Théorème 2.1.3	xix
2.6 Quelques exemples pour la solution exceptionnelle	xxii
Conclusion	xxiv
Bibliographie	xxv

INTRODUCTION

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolf Nevanlinna joue un rôle très important dans l'étude de l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

En 1982, Steven B. Bank et Ilpo Laine [1] ont étudié la distribution des zéros des solutions de l'équation différentielle $f'' + A(z)f = 0$, où $A(z)$ est soit un polynôme, soit une fonction entière transcendante. Plus tard, différents résultats concernant cette étude dans le cas où $A(z)$ est une fonction entière transcendante ont été obtenus. Voir par exemple [10, 11]. Dans l'étude de l'équation différentielle $f'' + A(z)f' + B(z)f = 0$, où $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières, Gary G. Gundersen [8] a cherché des conditions sur les coefficients de telle façon que chaque solution soit d'ordre infini. On sait que si $A(z)$ est transcendante, alors au moins une de chaque deux solutions linéairement indépendantes est d'ordre infini.

Plusieurs chercheurs ont étudié l'oscillation des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + a_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + a_1(z)f' + a_0(z)f = F, \quad (0.1)$$

où $k \geq 2$ est un entier, $a_j(z)$ ($j = 0, \dots, k-1$), sont des polynômes et $F \not\equiv 0$ est une fonction entière. Shi-An Gao [6] s'est intéressé à l'étude de l'oscillation des solutions de l'équation (0.1) dans le cas où $F = P_1 e^{P_2}$, où P_1 et P_2 sont des polynômes. Chen et Gao ont étudié dans [2] l'oscillation des solutions de l'équation (0.1), où F est une fonction entière avec une infinité de zéros.

Le but de ce mémoire est d'étudier l'oscillations complexe des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_1f' + Af = F, \quad (0.2)$$

où $B_1, \dots, B_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières et A est une fonction entière transcendante.

le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de R. Nevanlinna nécessaires par la suite dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre, on démontrera quelques résultats dus à Chen et Gao [3]. On donnera également des exemples illustratifs concernant la solution exceptionnelle dans ces résultats.

Remerciements

A l'occasion de notre fin d'études et la réalisation de ce mémoire nous tenons à remercier tous ceux qui nous ont aidé à réaliser ce travail .

Je tiens en premier lieu à remercier sincèrement " *Mme AZIZ HAMANI Karima* " qui en tant qu'encadreur de ce mémoire s'est toujours montrée à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciement vont encore à " *Mr MrBELAÏDI Benharra* " qui a contribué à ma formation et ma beaucoup honoré en acceptant de participer au jury.

Je tiens aussi à remercier " *Mr HAMOUDA Saâda* " qui a accepté d'examiner ce mémoire.

Je remercie également l'ensemble des membres du département de mathématiques à l'université Abd el Hamid Ibn Badis de Mostaganem surtout mes enseignants.

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a , on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $\bar{n}(t, a, f)$ le nombre des racines distinctes de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$. On désigne par $n(t, \infty, f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par $\bar{n}(t, \infty, f)$ le nombre des pôles distincts de f dans le disque $|z| \leq t$.

Notons

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{[n(t, a, f) - n(0, a, f)]}{t} dt + n(0, a, f) \log r \quad (a \neq \infty), \quad (1.1.1)$$

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{[n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)]}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r, \quad (1.1.2)$$

$$\bar{N}(r, a, f) = \int_0^r \frac{[\bar{n}(t, a, f) - \bar{n}(0, a, f)]}{t} dt + \bar{n}(0, a, f) \log r \quad (a \neq \infty), \quad (1.1.3)$$

$$\bar{N}(r, \infty, f) = \bar{N}(r, f) = \int_0^r \frac{[\bar{n}(t, \infty, f) - \bar{n}(0, \infty, f)]}{t} dt + \bar{n}(0, \infty, f) \log r, \quad (1.1.4)$$

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad (a \neq \infty) \quad (1.1.5)$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad (1.1.6)$$

où $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$, $x > 0$ et $0 < r < +\infty$.

$N(r, a, f)$ (respectivement $\overline{N}(r, a, f)$) est appelée fonction a-points (respectivement a-points distinct) de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$ et $m(r, a, f)$ est dite fonction de proximité de la fonction f au point a . Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a .

Définition 1.1.1 [7] *Soit f une fonction méromorphe non constante. On appelle fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f la fonction notée $T(r, f)$ définie par*

$$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f), \quad (1.1.7)$$

où $0 < r < +\infty$.

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Lemme 1.1.1 [7] *Soient $f, f_1, \dots, f_n$ des fonctions méromorphes. Alors on a les propriétés suivantes :*

$$(a) \quad m(r, \sum_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \ln n \quad (1.1.8)$$

$$(b) \quad m(r, \prod_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) \quad (1.1.9)$$

$$(c) \quad N\left(r, \sum_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i) \quad (1.1.10)$$

$$(d) \quad N \left(r, \prod_{i=1}^n f_i \right) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i) \quad (1.1.11)$$

$$(e) \quad T(r, \sum_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \ln n, n \geq 1 \text{ un entier} \quad (1.1.12)$$

$$(f) \quad T(r, \prod_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i), n \geq 1 \text{ un entier} \quad (1.1.13)$$

Exemple 1.1.1 Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $m(r, f) = r/\pi$, $N(r, f) = 0$. D'où $T(r, f) = r/\pi$.

Théorème 1.1.1 [9] Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors

$$m(r, \frac{f'}{f}) = O(\log T(r, f) + \log r) \quad (1.1.14)$$

à l'extérieur d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini alors :

$$m(r, \frac{f'}{f}) = O(\log r). \quad (1.1.15)$$

Théorème 1.1.2 [9] Soit f une fonction méromorphe transcendante et $k \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = O(\log T(r, f) + \log r) \quad (1.1.16)$$

à l'extérieur d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini alors :

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = O(\log r). \quad (1.1.17)$$

1.2 Ordre d'une fonction méromorphe

Théorème 1.2.1 [9] Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre de f noté $\sigma(f)$ est défini par

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}. \quad (1.2.1)$$

Si

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty, \quad (1.2.2)$$

on dit que la fonction f est d'ordre infini.

Remarque 1.2.1 Si f est une fonction entière, alors l'ordre de f est défini par

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}, \quad (1.2.3)$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.2.1 Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $T(r, f) = r/\pi$. D'où $\sigma(f) = 1$.

Exemple 1.2.2 Pour la fonction $f(z) = e^{e^z}$, on a $T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}$, $r \rightarrow +\infty$. D'où $\sigma(f) = +\infty$.

Définition 1.2.1 [9] Si f est une fonction méromorphe telle que

$$\sigma(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \quad (1.2.4)$$

on dit que f a un ordre de croissance régulier.

(a) Si $g(z)$ est une fonction entière, alors l'ordre de croissance de la fonction $f(z) = \exp(g(z))$ est régulier. Si $g(z)$ est un polynôme, alors $\sigma(f) = \deg g(z)$ et si $g(z)$ est une fonction entière transcendante, alors $\sigma(f) = +\infty$.

(b) Soient $f(z)$ et $\phi(z)$ des fonctions méromorphes. Si l'ordre de croissance de $f(z)$ est régulier et $\sigma(\phi) < \sigma(f)$, alors

(i) $T(r, \phi) = o\{T(r, f)\}$.

(ii) Pour les fonctions $f(z) \pm \phi(z)$, $f(z) \cdot \phi(z)$, $f(z)/\phi(z)$, $\phi(z)/f(z)$, alors l'ordre de croissance est régulier et il est égal à l'ordre de f .

1.3 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 [1, 10, 11] *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros de la fonction f noté $\lambda(f)$ est défini par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N(r, 1/f)}{\log r} \quad (1.3.1)$$

Exemple 1.3.1 *Pour la fonction $f(z) = e^z + b$, où $b \neq 0, \infty$, on a $\lambda(f) = 1$.*

Définition 1.3.2 *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f noté $\bar{\lambda}(f)$ est défini par*

$$\bar{\lambda}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}(r, 1/f)}{\log r}, \quad (1.3.2)$$

1.4 Mesure et densité

Définition 1.4.1 *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt, \quad (1.4.1)$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E .

Oscillation des solutions de certaines équations différentielles linéaires non homogènes

2.1 Introduction et résultats

Dans [1], S. Bank et I. Laine ont étudié l'oscillation complexe des solutions de l'équation homogène

$$f'' + Af = 0. \tag{2.1.1}$$

Ils ont démontré que si f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.1.1), où A est une fonction entière transcendante avec $\sigma(A) < \frac{1}{2}$, alors $\lambda(f_1, f_2) = \infty$.

S. Bank s'est posé la question suivante : si A est une fonction entière transcendante et $\sigma(A) = \sigma$ est ni un nombre entier positif ni ∞ alors $\lambda(f_1, f_2) = \infty$? Pour $\sigma(A) = \frac{1}{2}$, J. Rossi [10] et L.C. Shen [11] ont répondu à cette question.

Dans ce mémoire, on va étudier l'oscillation complexe des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes de la forme

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_1f' + Af = F, \tag{2.1.2}$$

où $k \geq 2$ est un entier, $B_1, \dots, B_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières et A est une fonction entière transcendante. On va démontrer les résultats de Chen et Gao [3] suivants :

Théorème 2.1.1 [3] *Soient $A, B_1, \dots, B_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ des fonctions entières d'ordre fini, où $k \geq 2$ un entier. Supposons que soit (i) ou (ii) ci-dessous soit vérifiée :*

(i) $\sigma(B_j) < \sigma(A)$ ($j = 1, \dots, k-1$).

(ii) $B_1, \dots, B_{k-1}$ sont des polynômes et A est une fonction entière transcendante . Alors on a

(a) Toutes les solutions de (2.1.2) vérifient $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$.

(b) S'il existe une solution exceptionnelle f_0 dans le cas (a), alors f_0 satisfait :

$$\sigma(f_0) \leq \max(\sigma(A), \sigma(F), \bar{\lambda}(f_0)) < \infty. \quad (2.1.3)$$

De plus , si $\sigma(A) \neq \sigma(F)$ et $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0)$, alors $\sigma(f_0) = \max(\sigma(A), \sigma(F))$.

Théorème 2.1.2 [3] *Soient $A, B_1, \dots, B_{k-1}$ des fonctions entières et F est une fonction entière d'ordre infini tels que $F = Q \exp(E(z))$, où Q est une fonction entière avec $\sigma(Q) < \infty$ et $E(z)$ est une fonction entière transcendante , $k \geq 2$ un entier. Si*

$$\max\{\sigma(B_1), \dots, \sigma(B_{k-1}), \sigma(E)\} < \sigma(A) < \infty, \quad (2.1.4)$$

alors pour l'équation différentielle

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_1f' + Af = Q \exp(E(z)) \quad (2.1.5)$$

(a) toutes les solutions de (2.1.5) vérifient (2.1.3) avec au plus une solution exceptionnelle f_0

(b) S'il existe une solution exceptionnelle f_0 dans le cas (a), alors f_0 satisfait $\lambda(f_0) < \sigma(f_0) = \infty$ et elle s'écrit sous la forme $f_0 = Q_0 \exp(E(z) + P(z))$, où Q_0 est le produit canonique formé des zéros de f_0 et $P(z)$ est un polynôme de degré

$$\deg P(z) \leq \max\left\{\bar{\lambda}(f_0), \sigma(A), \sigma(Q)\right\}. \quad (2.1.6)$$

Théorème 2.1.3 [3] *Soit A une fonction entière d'ordre infini telle que*

$$\sigma(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, A)}{\log r} = \infty, \quad (2.1.7)$$

où $B_1, \dots, B_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre fini, $k \geq 2$ un entier. Alors toutes les solutions de (2.1.2) vérifient (2.1.3) avec au plus une solution exceptionnelle f_0 avec $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0) = \infty$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 [3] Soient $A, B_1, \dots, B_{K-1}$ des fonctions entières avec $\sigma(B_j) < \sigma(A) < \infty$ ($j = 1, \dots, k-1$), $k \geq 2$ un entier. Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + B_{K-1}f^{(k-1)} + \dots + B_1f' + Af = 0 \quad (2.2.1)$$

Satisfait $\sigma(f) = \infty$.

Preuve. posons $\max_{1 \leq j \leq k-1} \{\sigma(B_j)\} = b < \sigma(A)$. Alors pour un ε donné $0 < \varepsilon < \sigma(A) - b$, on a

$$m(r, B_j) < r^{b+\varepsilon} \quad (j = 1, \dots, k-1)$$

□

Posons $\max_{1 \leq j \leq k-1} \{\sigma(B_j)\} = b < \sigma(A)$. Alors pour un ε donné $0 < \varepsilon < \sigma(A) - b$, on a

$$m(r, B_j) < r^{b+\varepsilon} \quad (j = 1, \dots, k-1) \quad (2.2.2)$$

pour r suffisamment grand.

On peut écrire (2.2.1) sous la forme

$$A = -\left(\frac{f^{(k)}}{f} + B_{K-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + B_1\frac{f'}{f}\right). \quad (2.2.3)$$

Ainsi

$$m(r, A) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_j) + \sum_{j=1}^k m(r, \frac{f^{(j)}}{f}). \quad (2.2.4)$$

Si $\sigma(f) < \infty$, alors $m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = O(\log r)$. D'où

$$m(r, A) \leq (k-1)r^{b+\varepsilon} + O(\log r). \quad (2.2.5)$$

donc

$$\sigma(A) \leq b + \varepsilon < \sigma(A). \quad (2.2.6)$$

C'est un contradictoire.

D'après un résultat de M. Frei [4] ou en utilisant un raisonnement analogue à celui utilisé dans le lemme 1, on obtient directement le lemme suivante :

Lemme 2.2.2 [3] *Soit A une fonction entière transcendante avec $\sigma(A) < \infty$ et soient $B_1, \dots, B_{k-1}$ des polynômes, $k \geq 2$ un entier. Alors toute solution de l'équation linéaire homogène (2.2.1) satisfait : $\sigma(f) = \infty$.*

Lemme 2.2.3 [3] *Soit A une fonction entière d'ordre infini telle que*

$$\sigma(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, A)}{\log r} = \infty, \quad (2.2.7)$$

où $B_1, \dots, B_{k-1}$ des fonctions entières d'ordre fini. Si $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.2.1), alors :

$$T(r, A) = O \{ \log T(r, f) + \log r \} \quad (2.2.8)$$

pour tout $r = |z|$ à l'extérieur d'un ensemble E de mesure linéaire finie.

Preuve. De (2.2.1), toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.2.1) satisfait $\sigma(f) = \infty$. □

De (2.2.1), toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.2.1) satisfait $\sigma(f) = \infty$.

Ainsi

$$m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) = O \{ \log T(r, f) + \log r \}, j = 1, \dots, k, r \notin E, \quad (2.2.9)$$

où E est un ensemble en r de mesure linéaire finie. D'après (2.2.1),

$$A = -(\frac{f^{(k)}}{f} + B_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + B_1 \frac{f'}{f}). \quad (2.2.10)$$

D'où

$$\begin{aligned} m(r, A) &\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_{k-j}) + \sum_{j=1}^k m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_{k-j}) + O \{ \log T(r, f) + \log r \}, r \notin E. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Puisque $B_1, \dots, B_{k-1}$ sont toutes des fonctions entières d'ordre fini, il existe N ($N > 0$) tel que

$$m(r, B_{k-1}) \leq r^N, j = 1, \dots, k-1, \quad (2.2.12)$$

pour r suffisamment grand .D'autre part , d'après

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, A)}{\log r} = \infty, \quad (2.2.13)$$

$T(r, A) \geq r^{N+1}$ pour r suffisamment grand . Ainsi

$$\sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_{k-j}) \leq \frac{1}{2} m(r, A) \quad (2.2.14)$$

pour r suffisamment grand . Alors (2.2.11) et (2.2.14) donnent

$$m(r, A) = O \{ \log T(r, f) + \log r \}, r \notin E. \quad (2.2.15)$$

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

Supposons en premier que $\sigma(B_j) < \sigma(A)$ ($j = 1, \dots, k-1$).

Partie (a) . Maintenant supposons que f_0 est une solution de (2.1.2) avec $\sigma(f_0) < \infty$.

Supposons que f^* est une deuxième solution de (2.1.2) vérifiant $\sigma(f^*) < \infty$.

Alors $\sigma(f^* - f_0) < \infty$. Mais $f^* - f_0$ est une solution de l'équation homogène (2.2.1) correspondante l'équation (2.1.2). D'après lemme 1 on a $\sigma(f^* - f_0) = \infty$.

Ainsi, l'équation (2.1.2) peut avoir seulement au plus une solution exceptionnelle f_0 avec $\sigma(f_0) < \infty$.

Maintenant supposons que f est une solution de (2.1.2) avec $\sigma(f) = \infty$. On peut écrire l'équation (2.1.2) sous la forme :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left(\frac{f^{(k)}}{f} + B_{K-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + B_1 \frac{f'}{f} + A \right). \quad (2.3.1)$$

si f a un zéro en z_0 d'ordre $\alpha (> k)$, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre $\alpha - k$. Ainsi

$$n(r, \frac{1}{f}) \leq k \bar{n}(r, \frac{1}{f}) + n(r, \frac{1}{F}), \quad (2.3.2)$$

et

$$N(r, \frac{1}{f}) \leq k \bar{N}(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{F}) \quad (2.3.3)$$

En appliquant le lemme de la dérivée logarithmique , on a

$$m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) = O \{ \log T(r, f) + \log r \} \quad (j = 1, \dots, k) \quad (2.3.4)$$

pour tout r à l'extérieur d'un ensemble E de mesure linéaire finie .D'après (2.3.1), on obtient

$$m(r, \frac{1}{f}) \leq m(r, \frac{1}{F}) + m(r, A) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_j) + O \{ \log T(r, f) + \log r \}, r \notin E \quad (2.3.5)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T(r, \frac{1}{f}) + O(1) \\ &\leq k\bar{N}(r, \frac{1}{f}) + T(r, \frac{1}{F}) + T(r, A) + \sum_{j=1}^{k-1} T(r, B_j) + O \{ \log T(r, f) + \log r \} \\ &= k\bar{N}(r, \frac{1}{f}) + T(r, F) + T(r, A) + \sum_{j=1}^{k-1} T(r, B_j) + O \{ \log T(r, f) + \log r \}, r \notin E \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

puisque $\sigma(f) = \infty$, il existe $\{r'_n\}$ ($r'_n \rightarrow \infty$) telle que

$$\lim_{r'_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r'_n, f)}{\log r'_n} = \infty. \quad (2.3.7)$$

Posons la mesure de E , $m(E) = \delta < \infty$. Alors il existe un point $r_n \in [r'_n, r'_n + \delta + 1] - E$.

De

$$\frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} \geq \frac{\log T(r'_n, f)}{\log(r'_n + \delta + 1)} = \frac{\log T(r'_n, f)}{\log r'_n + \log(1 + (\delta + 1)/r'_n)} \quad (2.3.8)$$

On a

$$\liminf_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} \geq \lim_{r'_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r'_n, f)}{\log r'_n + \log(1 + (\delta + 1)/r'_n)} = \infty \quad (2.3.9)$$

pour un β donné arbitrairement grand ($\beta > \sigma(A) + \sigma(F)$),

$$T(r_n, f) \geq r_n^\beta \quad (2.3.10)$$

est vérifiée pour r_n suffisamment grand.

D'autre part , pour un ε donné ($0 < \varepsilon < \beta - (\sigma(A) + \sigma(F))$), on a

$$\begin{aligned} T(r_n, A) &\leq r_n^{\sigma(A)+\varepsilon}, T(r_n, F) \leq r_n^{\sigma(F)+\varepsilon} \\ T(r_n, B_j) &\leq r_n^{\sigma(A)+\varepsilon}, j = 1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

pour r_n suffisamment grand. Ainsi,

$$\frac{T(r_n, A)}{T(r_n, f)} \leq r_n^{\sigma(A)+\varepsilon-\beta} \rightarrow 0, \quad (2.3.12)$$

$$\frac{T(r_n, F)}{T(r_n, f)} \leq r_n^{\sigma(F)+\varepsilon-\beta} \rightarrow 0, \quad (2.3.13)$$

$$\frac{T(r_n, B_j)}{T(r_n, f)} \leq r_n^{\sigma(A)+\varepsilon-\beta} \rightarrow 0, (j = 1, \dots, k-1), \quad (2.3.14)$$

quand $r_n \rightarrow \infty$. Donc

$$T(r_n, A) \leq \frac{1}{k+3} T(r_n, f), \quad (2.3.15)$$

$$T(r_n, F) \leq \frac{1}{k+3} T(r_n, f), \quad (2.3.16)$$

$$T(r_n, B_j) \leq \frac{1}{k+3} T(r_n, f), (j = 1, \dots, k-1) \quad (2.3.17)$$

pour r_n suffisamment grand. De $O\{\log T(r_n, f) + \log r_n\} = o\{T(r_n, f)\}$, on obtient

$$O\{\log T(r_n, f) + \log r_n\} \leq \frac{1}{k+3} T(r_n, f) \quad (2.3.18)$$

pour r_n suffisamment grand. De (2.3.6) et (2.3.15) – (2.3.18), on obtient

$$T(r_n, f) \leq k\bar{N}(r_n, \frac{1}{f}) + \frac{k+2}{k+3} T(r_n, f), \quad (2.3.19)$$

et

$$T(r_n, f) \leq (k+3)k\bar{N}(r_n, \frac{1}{f}). \quad (2.3.20)$$

Ainsi

$$\infty = \lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} \leq \limsup_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{N}(r_n, \frac{1}{f})}{\log r_n} \leq \bar{\lambda}(f) \quad (2.3.21)$$

Donc $\sigma(f) = \lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \infty$.

Partie (b) . Supposons que f_0 est une solution exceptionnelle de (2.1.2) avec $\sigma(f_0) < \infty$. En utilisant une preuve analogue à celle utilisée et puisque $\sigma(f_0) < \infty$, on a

$$T(r, f_0) \leq k\bar{N}(r, \frac{1}{f_0}) + T(r, F) + T(r, A) + \sum_{j=1}^{k-1} T(r, B_j) + O\{\log r\} \quad (2.3.22)$$

pour tout r .

Posons $\max\{\sigma(A), \sigma(F)\} = \alpha_1$, pour r suffisamment grand ,on a

$$T(r, F) < r^{\alpha_1 + \varepsilon}, \quad T(r, A) < r^{\alpha_1 + \varepsilon}, \quad \sum_{j=1}^{k-1} T(r, B_j) < (k-1)r^{\alpha_1 + \varepsilon}. \quad (2.3.23)$$

Ainsi

$$T(r, f_0) < k\bar{N}(r, \frac{1}{f_0}) + (k+1)r^{\alpha_1 + \varepsilon} + O(\log r). \quad (2.3.24)$$

Donc

$$\sigma(f_0) \leq \max\left\{\bar{\lambda}(f_0), \alpha_1\right\} = \max\left\{\bar{\lambda}(f_0), \sigma(A), \sigma(F)\right\}. \quad (2.3.25)$$

Si $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0)$, alors $\sigma(f_0) \leq \max\{\sigma(A), \sigma(F)\}$.

Si $\sigma(A) \neq \sigma(F)$, $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0)$, alors d'après (2.1.2), on a

$$\sigma(f_0) \geq \max\{\sigma(A), \sigma(F)\}. \quad (2.3.26)$$

Donc

$$\sigma(f_0) = \max\{\sigma(A), \sigma(F)\} \quad (2.3.27)$$

Maintenant supposons que $B_1, \dots, B_{k-1}$ sont des polynômes et A est une fonction entière transcendante .

D'après le lemme 2.2.2, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation homogène (2.2.1), où A est une fonction entière transcendante avec $\sigma(A) < \infty$ et $B_1, \dots, B_{k-1}$ sont des polynômes, satisfait $\sigma(f) = \infty$. Alors en utilisant une preuve analogue à celle utilisée ci-dessus, on peut prouver le théorème 2.1.1.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.2

Il est facile de voir que toute solution f de l'équation (2.1.5) satisfait $\sigma(f) = \infty$.

Posons $f = ge^{E(z)}$. Alors $\bar{\lambda}(f) = \bar{\lambda}(g)$, $\lambda(f) = \lambda(g)$. En remplaçant $f = ge^{E(z)}$ dans (2.1.5), on a

$$g^{(k)} + D_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + D_1g' + D_0g = Q \quad (2.4.1)$$

où $D_0, \dots, D_{k-1}$ sont des polynômes différentielles en $E, B_1, \dots, B_{k-1}$, et $D_0 = A + D^*$, D^* est un polynôme différentiel en $E, B_1, \dots, B_{k-1}$, il est clair que $\sigma(D_0) = \sigma(A)$, et

$$\max \{ \sigma(D_{k-1}), \dots, \sigma(D_1) \} < \sigma(A) = \sigma(D_0). \quad (2.4.2)$$

Ainsi d'après le Théorème 2.1.1, toutes les solutions g de (2.4.1) vérifient $\sigma(g) = \lambda(g) = \bar{\lambda}(g) = \infty$ avec au plus une solution exceptionnelle g_0 avec $\sigma(g_0) < \infty$. Donc l'équation (2.1.5) peut avoir au plus une solution exceptionnelle $f_0 = g_0e^{E(z)}$ avec $\lambda(f_0) = \lambda(g_0) \leq \sigma(g_0) < \infty$, et toutes les autres solutions $f = ge^{E(z)}$ de (2.1.5) vérifient $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \bar{\lambda}(g) = \sigma(f) = \infty$. Maintenant supposons la solution exceptionnelle $f_0 = Q_0e^{E_0(z)}$, où Q_0 est le produit canonique formé des zéros de f_0 , $E_0(z)$ est une fonction entière. Puisque $\sigma(f_0) = \infty$ et $\sigma(Q_0) = \lambda(f_0) < \infty$, $E_0(z)$ est une fonction entière transcendante.

De $g_0 = f_0e^{-E} = Q_0e^{E_0-E}$ et $\sigma(g_0) < \infty$, $E_0 - E$ doit être un polynôme. Posons $E_0 - E = P(z)$, alors $f_0 = Q_0e^{E+P(z)}$. De l'équation (2.4.1) et le théorème 2.1.1 (b), on a

$$\sigma(g_0) \leq \max \left\{ \sigma(D_0), \sigma(Q), \bar{\lambda}(Q_0) \right\}. \quad (2.4.3)$$

Donc

$$\deg P(z) \leq \sigma(g_0) \leq \max \left\{ \sigma(A), \sigma(Q), \bar{\lambda}(f_0) \right\}. \quad (2.4.5)$$

2.5 Preuve du Théorème 2.1.3

Il est facile de voir que toute solution f de l'équation (2.1.2) satisfait $\sigma(f) = \infty$.

En utilisant une preuve analogue à celle utilisée dans le Théorème 2.1.1, on peut avoir

$$T(r, f) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + T(r, A) + \sum_{j=1}^{k-1} T(r, B_j) + O\{\log T(r, f) + \log r\}, r \notin E_1 \quad (2.5.1)$$

où E_1 est un ensemble en r de mesure linéaire finie.

Puisque F et B_{k-j} ($j = 1, \dots, k-1$) sont des fonctions entières d'ordre fini et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log T(r, A) / \log r) = \infty,$$

on a

$$T(r, F) \leq T(r, A), \quad T(r, B_{k-j}) \leq T(r, A) \quad (j = 1, \dots, k-1) \quad (2.5.2)$$

pour r suffisamment grand. Ainsi d'après (2.5.1),

$$T(r, f) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+1)T(r, A) + O\{\log T(r, f) + \log r\}, \quad r \notin E_1. \quad (2.5.3)$$

Maintenant, on divise la démonstration en deux cas.

Premier cas. Si toute solution de (2.1.2) satisfait :

$$T(r, A) = O\{\log T(r, f) + \log r\} \quad (2.5.4)$$

pour tous r à l'extérieur d'un ensemble E_2 de r de mesure linéaire finie (E_2 est relié à f). En utilisant la même preuve que celle dans le Théorème 2.1.1, il existe $\{r_n\}$, $r_n \notin E_1 \cup E_2$, $r_n \rightarrow \infty$, telle que

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} = \infty \quad (2.5.5)$$

et

$$T(r_n, A) = O \{ \log T(r_n, f) + \log r_n \}. \quad (2.5.6)$$

En remplaçant (2.5.5) dans (2.5.3), on obtient :

$$T(r_n, f) \leq k \bar{N}(r_n, \frac{1}{f}) + O \{ \log T(r_n, f) + \log r_n \}. \quad (2.5.7)$$

D'autre part, de $O \{ \log T(r_n, f) + \log r_n \} = o \{ T(r_n, f) \}$,

on a

$$O \{ \log T(r_n, f) + \log r_n \} \leq \frac{1}{2} T(r_n, f) \quad (2.5.8)$$

pour r_n suffisamment grand .Ainsi (2.5.7) et (2.5.8) donnent

$$T(r_n, f) \leq 2k \bar{N}(r_n, \frac{1}{f}) \quad (2.5.9)$$

De (2.5.5) et (2.5.9), on obtient

$$\infty = \lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} \leq \limsup_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{N}(r_n, \frac{1}{f})}{\log r_n} \leq \bar{\lambda}(f). \quad (2.5.10)$$

Donc

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty. \quad (2.5.11)$$

Deuxième cas. Si l'équation (2.1.2) admet une solution f_0 qui ne vérifie pas la condition du premier cas. Supposons que $f(\neq f_0)$ est une deuxième solution de (2.1.2). Alors $f - f_0$ est une solution de l'équation homogène associée à (2.2.1). d'après lemme 2.2.3 , il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\begin{aligned} m(r, A) &\leq M \{ \log T(r, f - f_0) + \log r \} \\ &= M \{ \log r T(r, f - f_0) \} \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

pour tout r à l'extérieure d'un ensemble E_3 de r de mesure linéaire finie . Ainsi

$$rT(r, f - f_0) \geq e^{(1/M)m(r,A)}, \quad r \notin E_3. \quad (2.5.13)$$

D'autre part, puisque f_0 ne vérifie pas le condition du premier cas, il existe E_4 un ensemble en r de mesure linéaire infinie , tel que

$$\log T(r, f_0) + \log r < \frac{1}{2M}m(r, A), \quad r \in E_4.$$

Ainsi

$$rT(r, f_0) < e^{(1/2M)m(r,A)}, \quad r \in E_4 \quad (2.5.14)$$

D'après (2.5.8) et (2.5.9) ,pour $r \in E_4 - E_3$, on a

$$\begin{aligned} rT(r, f) &\geq rT(r, f - f_0) - rT(r, f_0) \\ &\geq e^{(1/M)m(r,A)} - e^{(1/2M)m(r,A)} \\ &\geq e^{(1/2M)m(r,A)}. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

D'où

$$m(r, A) \leq 2M \{ \log T(r, f) + \log r \}, \quad r \in E_4 - E_3 \quad (2.5.16)$$

D'après (2.5.3) et (2.5.16) .

$$T(r, f) \leq k\bar{N}(r, \frac{1}{f}) + O \{ \log T(r, f) + \log r \} \quad (2.5.17)$$

est vérifiée pour $r \in E_4 - (E_3 \cup E_1)$. Puisque l'ensemble $E_4 - (E_3 \cup E_1)$ est de mesure linéaire infinie , il s'ensuit de (2.5.16) qu'il existe $\{r_n\}, r_n \in E_4 - (E_3 \cup E_1), r_n \rightarrow \infty$ telle que

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} = \infty. \quad (2.5.18)$$

Finalement, en utilisant le même raisonnement que celui utilisé dans le premier cas, on a $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$.

Donc toutes les solutions f de (2.1.2) vérifient $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 avec $\bar{\lambda}(f_0) < \sigma(f_0) = \infty$

2.6 Quelques exemples pour la solution exceptionnelle

(a) Les exemples 2.6.1-2.6.3 suivants concernent la solution exceptionnelle dans le Théorème 2.1.1 :

Exemple 2.6.1 $f_0 = e^{z^2}$ est une solution de l'équation

$$f'' - 2zf' + (\sin z - 2)f = e^{z^2} \sin z, \quad (2.6.1)$$

où $\sigma(A) \neq \sigma(F)$, $\bar{\lambda}(f_0) = 0$, $\sigma(f_0) = 2 = \max \{\sigma(A), \sigma(F)\}$.

Exemple 2.6.2 $f_0 = e^z$ est une solution de l'équation

$$f'' + \sin z f' + (e^{z^2} - \sin z - 1)f = e^{z^2+z}, \quad (2.6.2)$$

où $\sigma(A) = \sigma(F) = 2$, $\bar{\lambda}(f_0) = 0$, $\sigma(f_0) = 1 < \max \{\sigma(A), \sigma(F)\}$.

Exemple 2.6.3 Soit G une fonction entière transcendante donnée d'ordre fini arbitraire. Alors $f_0 = e^{z^2}$ est une solution de l'équation

$$f'' - 2zf' + Gf = (G + 2)e^{z^2}. \quad (2.6.3)$$

(b) L'exemple 2.6.4 suivant concerne la solution exceptionnelle dans le Théorème 2.1.2 :

Exemple 2.6.4 $f_0 = e^{\sin z}$ est une solution de l'équation

$$f'' - \cos z f' + (\sin z + e^{z^2})f = e^{\sin z + z^2}, \quad (2.6.4)$$

où $\bar{\lambda}(f_0) = 0$, $\sigma(A) = 2 > \max \{\sigma(E), \sigma(B_1)\}$, $f_0 = e^{E+P(z)}$, $P(z) = -z^2$, $\deg P = 2 = \sigma(A)$.

(c) L'exemple 2.6.5 suivant concerne la solution exceptionnelle dans le Théorème 2.1.3 :

Exemple 2.6.5 $f_0 = e^{-e^z}$ est une solution de l'équation

$$f'' + (e^z - 1)f' + \sin z e^z f = \sin z, \quad (2.6.5)$$

où $\bar{\lambda}(f_0) = 0$, $\sigma(A) = \infty$, et $\lim_{r \rightarrow \infty} (\log T(r, A) / \log r) = \infty$.

CONCLUSION

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières.

Dans ce mémoire, on a étudié quelques résultats dus à Chen et Gao [3] concernant l'oscillation complexe des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + B_1f' + Af = F,$$

où $B_1, \dots, B_{k-1}, F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières et A est une fonction entière transcendante. On a aussi présenté quelques exemples concernant la solution exceptionnelle dans ces résultats.

Bibliographie

- [1] S. Bank and I. Laine, *On the oscillation theory of $f'' + Af = 0$, where A is entire* trans. Amer. Math. Soc., 273(1982),351-363.
- [2] Z. X. Chen and Z. S. Gao, *On the complex oscillation of solutions of non homogeneous linear differential equations*, Acta. Math. Sinica, 35, No.2 (1992), 196-203.
- [3] Z. X. Chen and S. A. Gao, *The complex oscilation theory of certain non homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients*, J. Math. Ana. App., 179(1993), 403-416.
- [4] M. Frei , *Sur l'ordre des solutions entières d'un équationdifférentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), 38-40.
- [5] Shi-AN Gao, *On complex oscillation of solutions of non homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients*, Comment. Math. Univ. st. paul 38, No.1 (1989), 11-20.
- [6] Shi-An Gao, *Two theorems on the complex oscillation theory of non homogeneous linear differential equations*, J. Math. anal. Appl., 162 (1991), 381-391.
- [7] G. Gundersen, *On the question of whether $f'' + e^{-z}f' + Bf = 0$ can admit a solution $f \not\equiv 0$ of finite order*, Proc. Roy. Soc. EdinbueghSect. A 102 (1986), 9-17.
- [8] G. Gundersen, *finite Order solutions of second ordre linear differential equations*, Tran. Amer.Soc.305 .No.1 (1988),415-429.
- [9] W. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford ,1964.

-
- [10] J. Rossi, *Second order differential equations with transcendental coefficients* Proc. Amer. Math. Soc. 97, No.1 (1986), 61-66.
- [11] L.-C. Shen, *Solution to a problem of S. Bank regarding exponent of convergence of zeros of the solution of equation $f'' + Af = 0$* , Kexue Tongbao (Chinese) 30 (1985), 1579-1585.