

Mémoire

L'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Présenté par

Beloukrif Nawel

Cherguia Chagra

Pour obtenir le diplôme de

Master en Mathématique.

Analyse Fonctionnelle.

Etude des équations elliptiques avec des conditions aux
limites non locales généralisées dans les espaces UMD.

Soutenue le

//2016

Devant le jury :

Président

Examineur

Encadreur

Mr **Ahmed Medeghri**

M.A.B

Professeur

Université de Mostaganem

Université de Mostaganem

Université de Mostaganem

Table des matières

Résumé	3
Dédicace	4
Dédicace	5
Remerciements	6
Introduction	7
1 Rappels	9
1.1 les opérateurs	9
1.1.1 Opérateurs linéaires bornés	10
1.1.2 Opérateurs linéaires fermés	10
1.2 Les semi groupes d'opérateurs linéaires	11
1.2.1 Semi-groupe fortement continu	11
1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe	12
1.2.3 Semi -groupes analytiques	13
1.3 Quelque espaces fonctionnels	13
1.3.1 Espace d'interpolation	13
1.3.2 Les espaces de Sobolev et Besov	15
1.3.3 Les espaces UMD	16
1.4 Calcul fonctionnel	17
1.5 Les puissances complexes d'opérateurs, classe $BIP(\theta, E)$	17
1.6 Sommes de Dore et Venni	18
2 Position du problème	19
2.1 Hypothèses	19
2.2 Représentation de la solution	20
3 Régularité de la solution	23
3.1 Résultat principal	25
4 Problème avec un paramètre spectral	26
4.1 Lemme technique	27
4.2 Résultat principal	28

5 Exemples	29
Bibliographie	31

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de la régularité maximale de la solution stricte d'une équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique avec des conditions aux limites non locales à coefficients opérateurs dans l'espace UMD. Les techniques utilisées reposent sur la théorie du semi-groupe et principalement sur les travaux de Dore et Venni.

Dédicace

Enfin après toute cette longue étude pleine de souffrance et de beaux souvenirs .voici le moment de réfléchir un peu pour donner à chaque personne sa valeur :
A cette occasion ,je dédie ce modeste travail à :

Ma chère mère, la plus belle et la patiente ,la plus généreuse de tous le monde. et je profite de l'occasion pour lui dire :tu restes toujours la première avant tout dans mon cœur que Dieu le tout Puissant te protège.

Mon père l' homme qui fait tous ses efforts pour notre éducation , l'homme qui n'est jamais fatigué.

A mon frère et mes sœurs :Imane ,Fatima Zohra,Djahida.Hayat,Amina.et Mohamed, Mohamed Islem,Yahya,Hadjar,Botayna et Alla

A meilleurs amis ; Hasna,Chagra,Samia,Hanane , Saliha.Nadjat...

A toute ma promotion de Mathématique et Informatique de l'année 2015-2016.

Merci à vous tous.

Nawel

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, a toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur maman que j'adore.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à mes frères, et mes sœurs, mes petits Walid et Amina.

Et à toute ma famille.

A mon binôme Nawel et à toute sa famille.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, sur le chemin des études supérieures, mes aimables amis, et frères de cœur, vous : Abd Elhad, Souad, Rachida, Ghazalia, Saada, Naima, khadidja, Aicha, Abir . Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail, je vous dis merci.

Chagra

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu , notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur Pr A.Medeghri qui a proposé le thème de ce mémoire, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel.

Pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre Préparation de ce mémoire.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Nos remerciement s'adressent également à tout nos professeurs et les enseignants qui ont contribué à notre formation et pour leurs générosités.

Finalement , nos profonds remerciements vont également à toutes les personnes qui nous ont aidés et soutenue de près ou de loin pour réaliser ce mémoire.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse sur le travail de Aissa, Aibeche, Nasreddine Amroune et Stephane Maingot, Medit.J.Math .2015 concernant l'étude des équations elliptiques avec des conditions aux limites non locales généralisées dans les espaces UMD :

$$u''(x) + Au(x) = f(x) , x \in (0, 1) \quad (1)$$

avec les conditions au limites :

$$u(1) = d_1 \quad (2)$$

$$u'(1) - Hu(0) = d_0 \quad (3)$$

où d_0, d_1, f sont données $f \in L^p((0, 1); E)$, $1 < p < +\infty$, E espace de Banach où A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans E .

Notre objectif est de trouver une solution stricte de (1),(2), (3) c'est à dire une solution u telle que :

$$u \in W^{2,p}(0, 1; E) \cap L^p(0, 1; D(A))$$

u satisfait : $u(0) \in D(H)$ et (1).(2).(3), puis d'étudier la régularité maximale de la solution stricte u .

De nombreux auteurs ont traités les équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites non locales. Tout d'abord, Carleman [14] dans les années trente, a utilisé les techniques d'intégrales singulières pour résoudre une équation elliptique où les conditions aux limites des fonctions inconnues sur deux points différents sont considérées.

Ce fut le point de départ de nombreuses études voir par exemple [4.6.9.27]. L'étape suivante était l'article de Bitsadze et Sarmarski [7] en 1969. Où les auteurs ont considéré une équation elliptique aux limites connectée avec des valeurs en des points intérieurs du domaine.

L'article [7] a donné lieu à de nombreux travaux sur les problèmes aux limites non locaux en utilisant différentes techniques. Citons une étude systématique effectuée par Skubachevski [25] et Gurevich [20] et les références citées dans leurs travaux. Yakubov [28] et quelques autres [1.3.18] utilisent les équations différentielles à coefficient opérateurs pour étudier certaines classes d'équations elliptiques aux dérivées partielles avec des conditions aux limites non locales.

Ils étaient en mesure d'écrire des conditions algébriques suffisantes qui garantissent la solvabilité coercitive du problème. Comme cas particulier de problèmes conduisant aux limites non-locaux, nous avons des problèmes provenant du phénomène de la modélisation de diffusion par exemple de la masse ou l'énergie, voir Cannon et al [11.13]. Ces problèmes peuvent être écrits comme des problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles avec une intégrale dans les conditions aux limites.

Ils sont l'objet de nombreuses études [8.29]. Cannon et Yaping Lin [12] considèrent un problème aux limites avec une condition intégrale. En utilisant une manipulation simple ils transforment leur problème en un nouveau problème de conditions aux limites où la dérivée de la fonction inconnue dans certains points est égale à un opérateur linéaire appliqué à la

fonction inconnue sur d'autres points. Il est exactement le type de problème que nous traitons dans le document présenté .

Des problèmes aux limites similaires ont été étudié dans [21] dans le cadre des espaces de Hölder.

Ce mémoire comporte 05 chapitres et est organisé comme suit :

le chapitre 01 est consacré à quelques rappels sur les outils mathématiques nécessaires pour la suite de ce travail : les opérateurs linéaires fermés, les semi-groupes, les espaces d'interpolation, les sommes de DORE-VENNI.

Dans le 2^{ème} chapitre on se propose d'étudier le problème donné sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} & A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E \\ & [0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} < \infty \end{aligned} \quad (4)$$

(4) implique que $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique dans E .

Nous allons supposer d'ailleurs :

$$\begin{aligned} & \forall s \in \mathbb{R}, (-A)^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \exists \theta_A \in]0, \pi] \\ & \text{tq } \sup_{s \in \mathbb{R}} \| e^{-\theta_A |s|} (-A^{is}) \|_{\mathcal{L}(E)} < \infty \end{aligned} \quad (5)$$

et H satisfait

$$0 \in \rho(H) \quad (6)$$

avec la condition de commutativité

$$A^{-1}H^{-1} = H^{-1}A^{-1} \quad (7)$$

Notons $Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$, on définit Λ par :

$$\begin{aligned} D(A) &= D(H) \\ \Lambda &= 2Qe^Q - H(I - e^{2Q}) \end{aligned}$$

On suppose que

$$\Lambda \text{ est fermé et inversible} \quad (8)$$

le chapitre 03 concerne la régularité de la solution on fait l'analyse des termes en utilisant le résultat de DORE-VENNI et les espaces d'interpolation .

Le premier théorème principal est le suivant :

Théorème 0.1 : On suppose (4) $\sim$ (8) le problème (1), (2), (3) admet une unique solution stricte si et seulement si

$$d_1 \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p} \text{ et } H^{-1} \left(d_0 + Qd_1 - \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p}$$

Dans le chapitre 04 on traite un problème avec paramètre spectral. Il s'agit ici de supprimer l'hypothèse d'inversibilité de l'opérateur Λ .

Enfin dans le chapitre 05 nous appliquons les résultats obtenus précédemment à des problèmes concrets d'EDP.

Chapitre 1

Rappels

Soient $(X, \|\cdot\|_x), (Y, \|\cdot\|_y), (Z, \|\cdot\|_z)$ trois espaces vectoriels normés complexes.

1.1 les opérateurs

Définition 1.1 *Un opérateur linéaire de X dans Y est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans Y , pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

$$i) A(x + y) = Ax + Ay.$$

$$ii) A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

On appelle domaine de A , et on le note $D(A)$ le sous espace vectoriel des éléments x de X tels que Ax ait un sens .

On appelle image de A notée $R(A)$, le sous espace vectoriel $A(D(A))$.

Remarque 1.1 *On écrit $A(x) = Ax$ pour tout $x \in D(A)$*

Définition 1.2 *Soient $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ et $B : D(B) \rightarrow Z$ deux opérateurs linéaires.*

On peut définir l'opérateur BA par :

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A), Ax \in D(B)\} \\ (BA)x = B(Ax), x \in D(BA) \end{cases}$$

Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A , noté A^{-1} , par :

$$\begin{aligned} A^{-1} &: A(D(A)) \rightarrow D(A) \\ y &\rightarrow A^{-1}y = x \end{aligned}$$

Définition 1.3 *Soient $(A, D(A)), (B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y . On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ \forall x \in D(A), Ax = Bx \end{cases}$$

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.4 On dit qu'un opérateur A défini de X dans Y est borné si

$$D(A) = X \text{ et } \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < \infty$$

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de l'espace vectoriel normé X vers Y .

$\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y, \quad \forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$$

On note $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$

Proposition 1.1 Si Y est un espace de Banach. Alors, $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.2 Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\| < 1$. Alors, $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.5 Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in D(A)$ telle que :

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases} \quad \text{on a} \quad \begin{cases} x \in D(A) \\ \text{et } Ax = y. \end{cases}$$

Définition 1.6 On dit qu'un opérateur A est fermé si et seulement si son graphe

$$G(A) = \{(\varphi, A\varphi) \mid \varphi \in D(A)\}$$

est un fermé de $X \times X$.

Définition 1.7 On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A .

1—Si $\lambda \in \rho(A)$. On définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

2— $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A .

Proposition 1.3 Soit A un opérateur linéaire fermé sur X . Alors l'application

$$R_\lambda : \lambda \in \rho(A) \rightarrow R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

est analytique sur $\rho(A)$.

Proposition 1.4 Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire.

1—Si A est un opérateur fermé. Alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ l'opérateur

$$A + B : D(A) \subset X \rightarrow Y$$

est fermé.

2—Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.

3—Si A est un opérateur fermé à valeur dans X et $D(A)$ est fermé dans X , alors A est continu de $D(A)$ dans X .

4—Si A est un opérateur continu de $D(A) \subset X$ alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.

5—Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.

Définition 1.8 (Opérateurs sectoriels)

Soit $0 < \omega \leq \pi$. On définit le secteur suivant :

$$S_\omega = \{Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \pi - \omega\}.$$

Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si :

$$\rho(A) \supset S_\omega,$$

et

$$\sup_{\lambda \in S_\omega} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_X < \infty.$$

Remarque 1.2 Si $(A, D(A))$ est un opérateur fermé et $(B, D(B))$ est A - borné, alors $(A + B, D(A))$

est un opérateur fermé.

1.2 Les semi groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.9 Soit $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateur linéaire dans X . On dit que cette famille forme un semi-groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$1-G(0) = I = I_X$$

$$2-\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t+s) = G(t)G(s).$$

Lorsque la famille $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout s, t de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.10 On dit qu'un semi groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continue si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \rightarrow G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continue, c'est-à-dire pour tout $x \in X$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)x - x\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Définition 1.11 Un semi groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est semi-groupe uniformément continu

d'opérateurs linéaires bornés si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

Proposition 1.5 Si $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.12 On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$,

l'opérateur A définit par :

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \text{ existe} \} \\ A\varphi = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \quad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est bien un sous espace vectoriel de X .

A est linéaire de $D(A)$ dans X .

Corollary 1.1 Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semi -groupe $(G(t))_{t \geq 0}$.

Alors, $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.

Proposition 1.6 Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi -groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$.

Alors :

1 - A linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X .

2 - $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\forall \lambda \in]\omega, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^{-n}}$$

où $M > 1$ et $\omega \geq 0$.

1.2.3 Semi -groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in C \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}$$

Définition 1.13 Soit $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, une famille $\{G(z)\}_{z \in \Sigma_\alpha}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ forme un semi-groupe holomorphe de type α dans X si elle vérifie les conditions suivantes :

$$1-G(0) = I,$$

$$2-\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha, \text{ tel que } z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha,$$

$$G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2),$$

$$3-\forall x \in X,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Sigma_\alpha}} G(z)x = x,$$

$$4-L'application \ z \rightarrow G(z) \text{ est holomorphe sur } \Sigma_\alpha.$$

1.3 Quelques espaces fonctionnels

1.3.1 Espace d'interpolation

Soient $(X_0, \|\cdot\|_0)$ et $(X_1, \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace vectoriel topologique séparé F .

En posant

$$\begin{aligned} \|x\|_{X_0 \cap X_1} &:= \max \{ \|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1} \} & \text{si } x \in X_0 \cap X_1 \\ \|x\|_{X_0 + X_1} &:= \sup_{\substack{x_0 \in X_1, x_1 \in X_1 \\ x_0 + x_1 = x}} (\|x_0\|_{X_0}, \|x_1\|_{X_1}) & \text{si } x \in X_0 + X_1. \end{aligned}$$

Il est connu que les espaces $(X_0 \cap X_1, \|\cdot\|_{X_0 \cap X_1})$ et $(X_0 + X_1, \|\cdot\|_{X_0 + X_1})$ sont des espaces de Banach. De plus on a $X_0 \cap X_1 \subset X_0, X_1 \subset X_0 + X_1$ avec des injections continues.

Définition 1.14 Pour $p \in [1, +\infty[$ et $\theta \in]0, 1[$, on définit l'espace intermédiaire noté $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ entre $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ par

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta, p} \iff \begin{cases} \forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 \\ \text{tel que} \\ x = u_0(t) + u_1(t) \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1) \end{cases}$$

où $L_*^p(\mathbb{R}_+, X_i)$ avec $p \in [1, +\infty[$ est l'espace des fonctions fortement mesurables $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow X_i$ telles que

$$\| u_i \|_{L^p_*(\mathbb{R}_+, X_1)} = \left(\int_0^{+\infty} \| u_i(t) \|_{X_i}^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Si $p = \infty$, on définit $\| u_i \|_{L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X_i)}$ par :

$$\| u_i \|_{L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X_i)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ess} \| u_i(t) \|_{X_i}.$$

Alors, $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\| x \|_{\theta, p} = \inf_{\substack{u_i \in x_i, i=0,1 \\ X = U_0(t) + U_1(x), \forall t > 0}} \left(\| t^{-\theta} u_0 \|_{L^p_*(\mathbb{R}_+, X_0)} + \| t^{1-\theta} u_1 \|_{L^p_*(\mathbb{R}_+, X_1)} \right)$$

De plus, on a

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta, p} \subset X_0 + X_1$$

avec des injections continues .

Remarque 1.3 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. On note

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta, p}$$

où $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$. De plus, on a

$$(X, D(A))_{1+\theta, \infty} = \left\{ \varphi \in D(A) : A\varphi \in (X, D(A))_{\theta, \infty} \right\}$$

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on peut caractériser explicitement l'espace $D_A(\theta, p)$, par exemple :

• Supposons que $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \| (A - \lambda I)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\lambda}$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \{ \varphi \in X : t^\theta A (A - tI)^{-1} \varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X) \}$$

• Si $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ et si $p = \infty$, On a

$$D_A(\theta, \infty) = \{ x \in X : \sup_{t > 0} \| t^\theta A (A - tI)^{-1} x \|_X < \infty \}$$

• Si A génère un semi-groupe fortement continu borné dans X . Alors

$$D_A(\theta, p) = \{ \varphi \in X : t^{-\theta} (e^{tA} - I) \varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X) \}$$

• Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X . Alors

$$D_A(\theta, p) = \{ \varphi \in X : t^{1-\theta} A e^{tA} \varphi \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X) \}$$

1.3.2 Les espaces de Sobolev et Besov

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un multi -indice, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \mapsto E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. C'est un espace de Banach avec la norme :

$$\|f\|_{W^{p,m}(\Omega, E)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega, E)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega, E)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leq p \leq \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy < \infty \right\}$$

On est amené à définir les espaces de Besov $B_{p,q}^m(\Omega, E)$. Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leq p, q \leq \infty$, on définit :

$$B_{p,q}^s(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E^p}{|x - y|^{sp+n}} \right)^{\frac{q}{p}} dx dy < \infty \right\}$$

avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$

Dans le cas où $p = q$ on a :

$$B_{p,q}^s(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E)$$

Soit A g.i d'un $C_0 - SG \{G(t)_{t \geq 0}\}$.

Theorème 1.1 (de Lions) : Soient $0 \leq \theta \leq 1, 1 \leq p \leq \infty$

$$x \in (D_A, E)_{\theta,p} \iff \begin{cases} i/ x \in E \\ ii/ \frac{G(t)x - x}{t^{1-\theta}} \in L_*^p(E) \end{cases}$$

avec la norme :

$$\|x\|_{\theta,p} = \|x\|_E + \left[\int_0^{+\infty} \frac{\|G(t)x - x\|_E^p}{t^{1-\theta}} dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

L'application du theoreme du Lions :

$E = L^p(\mathbb{R})$, $D_A = W^{1,p}(\mathbb{R})$ si $f \in D_A$, $Af = f'$, $(G(t)f)(x) = f(t+x)$

$$(D_A, E)_{\theta, p} = (W^{1, p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))_{\theta, p}$$

$$\begin{aligned} & \Longleftrightarrow \begin{cases} i/ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ ii/ \frac{G(t)f - f}{t^{1-\theta}} \in L^p_*(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R})) \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} i/ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ ii/ \int_0^\infty \left\| \frac{G(t)f - f}{t^{1-\theta}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \frac{dt}{t} < \infty \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} i/ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ ii/ \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t^{1-\theta}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} < \infty \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} i/ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ ii/ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t^{1-\theta}} \right|^p dx \frac{dt}{t} < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

On pose $t + x = y$

$$\begin{aligned} & \Longleftrightarrow \begin{cases} i/ f \in L^p(\mathbb{R}) \\ ii/ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(y) - f(x)}{(y-x)^{1+p(1-\theta)}} \right| dx dy < \infty \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow f \in W^{1-\theta, p}(\mathbb{R}) \\ & \Longleftrightarrow (W^{1, p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))_{\theta, p} = W^{1-\theta, p}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

1.3.3 Les espaces UMD

Définition 1.15 On dit que E est UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, E)$, $1 \leq p \leq \infty$ par

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon \leq |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$$

est bornée.

Définition 1.16 E est ξ -convexe s'il existe une fonction $\xi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que

$$\begin{aligned} i- \xi(0, 0) &> 0 \\ ii- \xi(x, y) &\leq \|x + y\| \text{ avec} \end{aligned}$$

$$\|x\| = \|y\| = 1, \forall x, y \in E.$$

Theorème 1.2 Soit E un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes

i- E est UMD .

ii- Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0, 0) > 0$ et

$$\xi(x, y) \leq \|x + y\|,$$

tel que $\|x\| \leq 1 \leq \|y\|, \forall x, y \in E$.

Exemples d'espaces UMD

- Les espaces de Hilbert (on choisit $\xi(x, y) = 1 + \langle x, y \rangle$ où le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indique le produit scalaire)
- Les sous espaces fermés d'un espace UMD .
- Les espaces construits sur $L^p(\Omega, E)$, $1 < p < \infty$ telque E est UMD .
- Les espaces $C^\alpha(\Omega, E)$ ne sont pas UMD .

1.4 Calcul fonctionnel

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe, pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

Définition 1.17 (formule intégrale de Cauchy) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathbb{k}$ un compact de U de bord γ orienté positivement soient $f \in H(U)$ et $z_0 \in \mathbb{k}$ on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Définition 1.18 (Intégrale de Dunford) Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathbb{k}$ un compact

de U contenant $\sigma(A)$, γ le bord de $\mathbb{k}$ orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A) et $f \in H(U)$.

Alors :

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) (zI - A)^{-1} dz,$$

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$

et ne dépend pas du choix de γ .

1.5 Les puissances complexes d'opérateurs, classe $BIP(\theta, E)$

Si $A : E \rightarrow E$ est un opérateur borné positif définie par

$$A^z x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t^z (tI - A)^{-1} x dt,$$

où z est un nombre complexe arbitraire.

A est dit $Bip(\theta, E)$ si :

$$i - \rho(A) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_A > 0 \quad \|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{1+t} \quad \forall t \geq 0.$$

$$ii - \forall s \in \mathbb{R} \quad A^{is} \in L(x) \text{ et } K_A \geq 1, \forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leq K_A e^{\theta_A |s|}.$$

1.6 Sommes de Dore et Venni

Soit E un espace UMD , A, B deux opérateurs linéaires fermés de domaine D_A, D_B denses dans E ($D_A = D_B = E$) vérifiant :

$$DV_1 \begin{cases} \rho(A) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_A > 0 : \|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{1+t} & , \quad \forall t \geq 0 \\ \rho(B) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_B > 0 : \|(B + tI)^{-1}\| \leq \frac{M_B}{1+t} & , \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$DV_2 \begin{cases} \forall \lambda \in \rho(A), \mu \in \rho(B), \\ (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - B)^{-1} = (\mu I - B)^{-1} (\lambda I - A)^{-1}. \end{cases}$$

$$DV_3 \begin{cases} i/\forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(x) \text{ et } \exists K_A \geq 1, \theta_A > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leq K_A e^{\theta_A |s|}, \\ ii/\forall s \in \mathbb{R} : B^{is} \in \mathcal{L}(x) \text{ et } \exists K_B \geq 1, \theta_B > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|B^{is}\| \leq K_B e^{\theta_B |s|}, \\ iii/\theta_A + \theta_B < \pi \end{cases}$$

Alors la somme $A + B$ est fermé, inversible et son inverse est défini par :

$$(A + B)^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{A^{-z} B^{z-1}}{\sin \pi z} dz$$

où γ est une courbe verticale continue dans la bande $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ est orientée de $\infty e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vers $\infty e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Exemple 1.1 Soit $f \in L^p(0, T, E)$ avec $1 < p < \infty$, le problème de Cauchy

$$(p) \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t); & 0 < t < T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

lorsque

$$E \text{ est un espace } UMD \quad (*)$$

A est un opérateur linéaire fermé vérifie

$$\rho(A) \supset]-\infty, 0], \text{ et } \exists M > 0 : \|(A + t)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+t}, \forall t \geq 0 \quad (**)$$

et

$$\exists K \geq 1, \theta > 0, \forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leq K e^{\theta |s|}. \quad (***)$$

Le résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.3 Sous les hypothèse $(*)$, $(**)$, $(***)$ et pour $f \in L^p(0, T, E)$, $1 < p < \infty$ le problème (p) admet une unique stricte

$$t \rightarrow u(t) = \int_0^t e^{(s-t)A} f(s) ds \in L^p(0, T, E),$$

de plus

$$t \rightarrow Au(t) = A \int_0^t e^{(s-t)A} f(s) ds \in L^p(0, T, E).$$

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Hypothèses

On considère le problème abstrait suivant :

$$u''(x) + Au(x) = f(x) \text{ , } x \in (0, 1) \quad (2.1)$$

avec les conditions au limites :

$$u(1) = d_1 \quad (2.2)$$

$$u'(1) - Hu(0) = d_0 \quad (2.3)$$

d_0, d_1, f sont des donnés , $f \in L^p(]0, 1[, E)$ $1 < p < \infty$.

E espace de Banach(UMD). Si A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans E vérifient les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} &A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } E \\ &[0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

Remarque 2.1 (2.4) implique $(-A)^{\frac{1}{2}}$ est bien définie et $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique dans E .

Nous allons supposer aussi :

$$\begin{aligned} &\forall s \in \mathbb{R} \text{ , } (-A)^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \exists \theta_A \in]0, \pi] \\ &\sup_{s \in \mathbb{R}} \|e^{-\theta_A |s|} (-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

et H satisfait

$$0 \in \rho(H) \quad (2.6)$$

et la condition de commutativité

$$A^{-1}H^{-1} = H^{-1}A^{-1} \quad (2.7)$$

$Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$ et Λ défini par :

$$\begin{cases} D(A) = D(H) \\ \Lambda = 2Qe^Q - H(I - e^{2Q}) \end{cases}$$

et

$$\Lambda \text{ est fermé et inversible} \quad (2.8)$$

2.2 Représentation de la solution

Pour résoudre le problème (2.1), (2.2), (2.3) nous utilisons la méthode de réduction l'ordre de Krein. Sous les hypothèses (2.4) – (2.8). Supposons que le problème a une solution u stricte autrement dit

$$u \in W^{2,p}(0, 1; E) \cap L^p(0, 1; D(A))$$

$u(0) \in D(H)$ et (2.1) – (2.2) – (2.3) est satisfaite.

Pour $x \in (0, 1)$, on définit :

$$v = -Q^{-1}u'(x), \quad y = (u(x) - v(x))/2, \quad z = (u(x) + v(x))/2$$

puis :

$$y'(x) = (u'(x) - v'(x))/2 = (-Qv(x) + Q^{-1}u''(x))/2$$

Utilisation de (1) et $Q^2 = -A$, on obtient :

$$\begin{cases} y'(x) = Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x), & x \in (0, 1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où :

$$y_0 = \frac{1}{2}(u(0) - v(0)) = \frac{1}{2}(u(0) + Q^{-1}u'(0))$$

De même, nous avons :

$$\begin{cases} z'(x) = -Qz(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x), & x \in (0, 1) \\ z(1) = z_1 \end{cases}$$

où :

$$z_1 = \frac{1}{2}(u(1) - Q^{-1}u'(1))$$

Par conséquent, il en résulte que pour tout $x \in (0, 1)$

$$\begin{cases} y(x) = e^{xQ}y_0 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}f(s)ds \\ z(x) = e^{(1-x)Q}z_1 + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}f(s)ds \end{cases} \quad (2.9)$$

et

$$u(x) = y(x) + z(x) = e^{xQ}y_0 + e^{(1-x)Q}z_1 + I_x + J_x \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{cases} I_x = \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}f(s)ds \\ J_x = \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}f(s)ds \end{cases}$$

En effet (2.9) et (2.10) sont valables pour tout $x \in (0, 1)$ car $u \in C^1((0, 1); E)$.

Par conséquent, pour obtenir la représentation finale de u , il suffit de calculer y_0 et z_1 par rapport à d_0 et d_1 , f , H et A .

De plus pour tout $x \in (0, 1)$, on a :

$$u'(x) = Qe^{xQ}y_0 - Qe^{(1-x)Q}z_1 + QI_x - QJ_x. \quad (2.11)$$

ainsi :

$$\begin{cases} u(0) = y_0 + e^Q z_1 + J_0 \\ u(1) = e^Q y_0 + z_1 + I_1 \\ u'(1) = Qe^Q y_0 - Qz_1 + QI_1 \end{cases}$$

À partir de (2.2) et (2.3) on obtient :

$$\begin{cases} Qe^Q y_0 - Qz_1 + QI_1 - H(y_0 - e^Q z_1 - J_0) = d_0 \\ e^Q y_0 + z_1 + I_1 = d_1 \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} (H^{-1}Qe^Q - I)y_0 - (H^{-1}Q - e^Q)z_1 = H^{-1}d_0 - H^{-1}QI_1 - J_0 \\ e^Q y_0 + z_1 = d_1 - I_1 \end{cases}$$

On déduit que :

$$\begin{cases} (H^{-1}Qe^Q - I)y_0 - (H^{-1}Q - e^Q)z_1 = H^{-1}d_0 - H^{-1}QI_1 - J_0 \\ (H^{-1}Q - e^Q)e^Q y_0 + (H^{-1}Q - e^Q)z_1 = (H^{-1}Q - e^Q)(d_1 - I_1) \end{cases}$$

Par addition des deux équations, on obtient :

$$(2H^{-1}Qe^Q - I - e^{2Q})y_0 = H^{-1}d_0 - H^{-1}QI_1 - J_0 + H^{-1}Qd_1 - e^Q d_1 - H^{-1}QI_1 + e^Q I_1$$

Maintenant (2.7) implique que :

$$He^{2Q}\xi = e^{2Q}H\xi \text{ tq } \xi \in D(H) \text{ et } H^{-1}Qe^{2Q} = Qe^{2Q}H^{-1}$$

Ainsi

$$\Lambda H^{-1}y_0 = H^{-1}d_0 - H^{-1}QI_1 - J_0 + H^{-1}Qd_1 - e^Q d_1 - H^{-1}QI_1 + e^Q I_1$$

Finalement :

$$\begin{cases} y_0 = \Lambda^{-1}d_0 + \Lambda^{-1}Qd_1 - H\Lambda^{-1}e^Q d_1 - 2\Lambda^{-1}QI_1 + H\Lambda^{-1}J_0 + H\Lambda^{-1}e^Q I_1 \\ z_1 = d_1 - I_1 - e^Q y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

La formule (2.10) avec (2.12) donne :

$$\begin{aligned} u(x) &= \Lambda^{-1}e^{xQ}d_0 + \Lambda^{-1}Qe^{xQ}d_1 - H\Lambda^{-1}e^{xQ}e^Q d_1 - 2\Lambda^{-1}Qe^{xQ}I_1 \\ &\quad + H\Lambda^{-1}e^{xQ}J_0 + H\Lambda^{-1}e^{xQ}e^Q I_1 + e^{(1-x)Q}(d_1 - I_1) - e^{(1-x)Q}e^Q y_0 + I_x + J_x \end{aligned}$$

et u peut être représenté par la formule suivante :

$$u(x) = S(x, d_0, d_1, f) + DV(x, f) + R(x, d_0, d_1, f) \quad (2.13)$$

où

$$S(x, d_0, d_1, f) = \Lambda^{-1} Q e^{xQ} \left(Q^{-1} d_0 + d_1 - Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) + e^{(1-x)Q} d_1 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} DV(x, f) &= \frac{1}{2} H \Lambda^{-1} Q^{-1} e^{sQ} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds - \frac{1}{2} Q^{-1} e^{(1-x)Q} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds + Q^{-1} \int_0^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds \end{aligned}$$

$$R(x, d_0, d_1, f) = H \Lambda^{-1} e^{xQ} e^Q (d_1 - I_1) - e^{(1-x)Q} e^Q y_0$$

avec y_0 donné dans (2.12).

Chapitre 3

Régularité de la solution

Dans cette section, nous allons supposer les hypothèses (2.4) – (2.8) .

Proposition 3.1 Soit $d_0, d_1 \in E, f \in L_p((0, 1); E), 1 < P < \infty$ alors :

$$x \mapsto AR(x, d_0, d_1, f) \in L^p(0, 1; X)$$

Preuve. Pour tout $\Psi \in E, x \in \mathbb{N}$, nous avons $e^Q \Psi \in D(Q^n)$, de sorte

$$Ae^Q e^Q \Psi = -e^Q Q^2 e^Q \Psi$$

et par conséquent dans $L_p((0, 1); E)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $AR(., d_0, d_1, f)$ peut être écrit comme une somme de termes

$$TAe^Q e^Q \Psi, TAe^{(1-\cdot)Q} e^Q \Psi$$

où $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\Psi \in E$. ■

Proposition 3.2 Si $f \in L_p(0, 1; E), 1 < p < +\infty$. Alors : $ADV(., f) \in L^p(0, 1; E)$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} ADV(x, f) = & -\frac{1}{2}\Lambda^{-1}HQe^{xQ} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds + \frac{1}{2}Qe^{(s-x)Q} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \\ & -\frac{1}{2}Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds - \frac{1}{2}Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds \end{aligned}$$

et grâce à DORE-VENNI (voir le chapitre 01), nous obtenons :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds$$

et

$$x \mapsto \frac{1}{2} \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds$$

appartiennent à $L_p(0, 1; E)$. Par conséquent, $ADV(x, f) \in L_p((0, 1); E)$. ■

Remarque 3.1 De $0 \in \rho(A)$, nous avons que $0 \in \rho(I - e^{2Q})$, (Voir Lunardi [23 corollaire, 2.3.7, P.62]).

On écrit :

$$\Lambda^{-1} = - (I - e^{2Q})^{-1} \left(I - 2H^{-1}Qe^Q (I - e^{2Q})^{-1} \right)^{-1} H^{-1}$$

Pour analyser le terme S nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 3.1 Λ^{-1} peut être écrit comme :

$$\Lambda^{-1} = -H^{-1} - H^{-1}W$$

avec

$$W \in \mathcal{L}(E), H^{-1}W = WH^{-1} \text{ et } W(E) \subset \cap_{k=1}^{\infty} D(Q^k) \quad (3.1)$$

Preuve. On pose :

$$T = -2H^{-1}Qe^Q (I - e^{2Q})^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

$$S = -e^{2Q} \in \mathcal{L}(E)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} -\Lambda^{-1} &= (I + S)^{-1} (I + T)^{-1} H^{-1} \\ u &= -T(I + S)^{-1} \in \mathcal{L}(E), v = -S(I + S)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \end{aligned}$$

Puis :

$$(I + T)^{-1} = I + u \quad \text{et} \quad (I + S)^{-1} = I + v$$

On obtient :

$$-\Lambda^{-1} = (I + u)(I + v)H^{-1} = (I + v + u + uv)H^{-1}$$

Par conséquent : ■

$$\Lambda^{-1} = -H^{-1} - H^{-1}W$$

Avec :

$$W = v + u + uv = e^{\frac{1}{2}Q}M$$

Où

$$M = (I + S)^{-1} \left[e^{\frac{3}{2}Q} + 2H^{-1}Qe^{\frac{1}{2}Q} (I + T)^{-1} (I - S(I + S)^{-1}) \right] \in \mathcal{L}(E)$$

Ce qui donne (3.1).

Remarque 3.2 A partir de (2.14), on a :

$$\begin{aligned} S(x, d_0, d_1, f) &= -H^{-1}Qe^{xQ} \left(Q^{-1}d_0 + d_1 - Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) \\ &\quad + e^{(1-x)Q} d_1 + H^{-1}e^{xQ} \xi \end{aligned}$$

où

$$\xi = -H^{-1}QW \left(Q^{-1}d_0 + d_1 - Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) \in \cap_{k=1}^{\infty} D(Q^k)$$

3.1 Résultat principal

Theorème 3.1 *Supposons (2.4) – (2.8). Soit $f \in L_p((0, 1); E)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$1-d_1 \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p} \text{ et } H^{-1} \left(d_0 + Qd_1 - \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

2- u donnée par (2.13) est la solution unique stricte de (2.1) – (2.2) – (2.3).

Preuve. Rappelons que :

$$u(x) = S(x, d_0, d_1, f) + DV(x, f) + R(x, d_0, d_1, f)$$

l'utilisation des propositions précédentes 3.1 et 3.2 entraîne qu'il suffit d'étudier le terme S . De la remarque 3.2, nous avons :

$$\begin{aligned} S(x, d_0, d_1, f) &= -H^{-1}Qe^{xQ} \left(Q^{-1}d_0 + d_1 - Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) + e^{(1-x)Q}d_1 + H^{-1}e^{xQ}\xi \\ &= J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) \end{aligned}$$

En raison de $\xi \in \cap_{k=1}^{\infty} D(Q^k)$, $J_3(\cdot)$ est régulière, de sorte que la régularité de S est celle de $J_1 + J_2$. Mais J_1 est régulière près de 1 et J_2 près de 0, donc

$$(J_1 + J_2)(\cdot) \in L^p(0, 1; E)$$

si et seulement si $J_1(\cdot), J_2(\cdot) \in L^p(0, 1; E)$. Plus précisément, $J_2(\cdot) \in L^p(0, 1; E)$ ssi $d_1 \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p} \in D(Q)$. (Voir Triebel [26] $e^{Q\varphi} \in L^p \iff \varphi \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p}$). De même $J_1(\cdot) \in L^p(0, 1; E)$ si et seulement si

$$H^{-1}Q \left(Q^{-1}d_0 + d_1 - Q^{-1} \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p}$$

qui peut être écrit, en tenant compte $d_1 \in D(Q)$

$$H^{-1} \left(d_0 + Qd_1 - \int_0^1 e^{(1-s)Q} f(s) ds \right) \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2p}, p}$$

■

Chapitre 4

Problème avec un paramètre spectral

Notre résultat précédemment concernant le problème (2.1)–(2.2)–(2.3) exige l'inversibilité (2.8) qui peut être difficile à vérifier dans les applications.

On considère un certain nombre ω positif et soit le nouveau problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x) \\ u'(1) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = d_1 \end{cases} \quad x \in (0, 1) \quad (4.1)$$

Notons

$$A_\omega = A - \omega I$$

Ici, les hypothèses sont les suivantes :

Il existe $\omega_0 \geq 0$ fixé telque :

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est opérateur linéaire dans } E \\ [0, +\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}) \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, (-A_{\omega_0})^{is} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \exists \theta_{A_{\omega_0}} \in]0, \pi[\\ \text{telque } \sup_{s \in \mathbb{R}} \|e^{-\theta_{A_{\omega_0}}|s|} (-A_{\omega_0})^{is}\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty \end{cases} \quad (4.3)$$

$$0 \in \rho(H) \quad (4.4)$$

et la condition de commutativité suivante.

$$A_{\omega_0}^{-1} H^{-1} = H^{-1} A_{\omega_0}^{-1} \quad (4.5)$$

Remarque 4.1 Si les hypothèses (4.2)–(4.3) et (4.5) sont vérifiées alors elles restent valides lorsque nous remplaçons ω_0 par $\omega \geq \omega_0$.

C'est évident pour les hypothèses (4.2) et (4.5), mais pour (4.3) nous utilisons

[24, Prüss, Sohr théorème 3, $P437 (A \text{ Bip} \implies A - \omega I \text{ Bip})$], pour $\omega \geq \omega_0$,

$Q_\omega = -(-A_\omega)^{\frac{1}{2}}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur E , voir [5 Balakrishnam], nous définissons aussi l'opérateur linéaire :

$$\Lambda_\omega = 2Q_\omega e^{Q_\omega} - H(I - e^{2Q_\omega}) \text{ avec } D(\Lambda_\omega) = D(H)$$

4.1 Lemme technique

Lemme 4.1 *Supposons (4.2) – (4.5). Alors, il existe $\omega^* \geq \omega_0$ telque pour $\omega \geq \omega^*$, Λ_ω est inversible et borné et*

$$\Lambda_\omega^{-1} = - \left(I - e^{2Q_\omega} \right)^{-1} \left(I - 2 \left(I - e^{2Q_\omega} \right)^{-1} Q_\omega e^{Q_\omega} H^{-1} \right)^{-1} H^{-1} \quad (4.6)$$

Preuve. Par le même argument que dans le chapitre (3), $I - e^{2Q_\omega}$ est borné et inversible et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega &= 2Q_\omega e^{Q_\omega} - H \left(I - e^{2Q_\omega} \right) \\ &= \left[2Q_\omega e^{Q_\omega} \left(I - e^{2Q_\omega} \right)^{-1} - H \right] \left(I - e^{2Q_\omega} \right) \\ &= -H \left[I - 2H^{-1}Q_\omega e^{Q_\omega} \left(I - e^{2Q_\omega} \right)^{-1} \right] \left(I - e^{2Q_\omega} \right) \end{aligned}$$

puis

$$\Lambda_\omega = -H \left[I - L_\omega \right] \left(I - e^{2Q_\omega} \right)$$

avec

$$L_\omega = 2H^{-1}Q_\omega e^{Q_\omega} \left(I - e^{2Q_\omega} \right)^{-1}$$

$H, I - e^{2Q_\omega}$ sont inversibles afin de prouver l'inversibilité de Λ_ω . Il reste à montrer l'inversibilité de $I - L_\omega$. Pour cela $I - L_\omega$, il suffit de prouver $\|L_\omega\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. ■

On a :

$$\|L_\omega\| = \|2H^{-1}Q_\omega e^{Q_\omega} \left(I - e^{2Q_\omega} \right)^{-1}\| \leq \|H^{-1}\| \frac{2\|Q_\omega e^{Q_\omega}\|}{1 - \|e^{2Q_\omega}\|}$$

Maintenant, en utilisant Dore et Yakubov [17 Dore, Yakubov lemme 2.6.P103], il existe les constantes $c, k > 0$ (qui ne dépend pas de ω) de telle sorte que, pour tout $x \geq 1$:

$$\|(-A + \omega I)^\alpha e^{-x(-A + \omega I)^{\frac{1}{2}}}\| \leq ce^{-kx\sqrt{\omega}}$$

en particulier :

$$\|Q_\omega e^{Q_\omega}\| \leq ce^{-k\sqrt{\omega}} \text{ et } \|e^{2Q_\omega}\| \leq ce^{-2k\sqrt{\omega}}$$

donc

$$\|L_\omega\| \leq \|H^{-1}\| \frac{2ce^{-k\sqrt{\omega}}}{1 - ce^{-2k\sqrt{\omega}}}$$

ce qui implique l'existence de $\omega^* > \omega_0$ telque pour tout $\omega \geq \omega^*$, nous avons

$$\frac{2ce^{-k\sqrt{\omega}}}{1 - ce^{-2k\sqrt{\omega}}} < \frac{1}{\|H^{-1}\|}$$

Par conséquent :

$$\|L_\omega\| < 1$$

4.2 Résultat principal

En appliquant le théorème (3.1) avec le lemme (4.1) on obtient :

Théorème 4.1 *Supposons (4.2) – (4.3). Soit $f \in L^p(0, 1; E)$, $1 < P < \infty$ et $\omega \geq \omega^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$1 - d_1 \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2P}, p} \text{ et } H^{-1} \left(d_0 + Q_\omega d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)Q_\omega} f(s) ds \right) \in (D(Q^2), E)_{\frac{1}{2P}, p}.$$

2—Il existe une solution unique stricte de (4.1).

De plus, dans ce cas, la solution est donnée par (2.13), où A est remplacé par A_ω .

Chapitre 5

Exemples

Exemple 5.1 Soit $E = L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, on définit les opérateurs A et H par

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}), Au = au'' \\ D(H) = W^{1,p}(\mathbb{R}), Hu = bu' \end{cases}$$

où $a > 0, b \in \mathbb{C}$

Soit $\omega_0 > 0$, un calcul simple montre que (2.4), (2.5), (2.6) sont vérifiées. De plus, A satisfait (2.7), voir Pruss-Sohr[24],

$$\theta_A = E_1$$

avec toute : $E_1 \in]0, \pi[$, en appliquant le théorème (4.1), nous obtenons

Proposition 5.1 Soit $p \in]1, \infty[$, $f \in L^p(0, 1, X)$ et

$$d_1, H^{-1} \left(d_0 + \theta_\omega d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\theta_\omega} f(s) ds \right) \in (W^{2,p}(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}$$

Alors, il existe $\omega^* > 0$ tel que pour $\omega \geq \omega^*$ le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - \omega u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) - b \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = d_0(y), & y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) = d_1(y), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.1)$$

a une solution unique, u stricte, qui est

$$u \in W^{2,p}(0, 1; L^p(\mathbb{R})) \cap L^p(0, 1; W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

et qui vérifie (5.1).

On notera que, l'espace d'interpolation $(W^{2,p}(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}$ coïncide avec l'espace de Besov bien connu

$$B_{p,p}^{2(1-\frac{1}{2p})}(\mathbb{R}) = B_{p,p}^{2-\frac{1}{p}}(\mathbb{R})$$

Qui sont complètement décrits dans Grisvard [19, p, 680]

Exemple 5.2 Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, avec une frontière régulière $\partial\Omega$ désigner $E = L^p(\Omega), 1 < p < \infty$. On définit les opérateurs A, H par

$$D(A) = \{u \in W^{4,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}; \quad Au = b\Delta^2 u.$$

$$\text{où } b < 0 \text{ et } D(H) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \quad Hu = \Delta u.$$

Le théorème (4.1) permet de traiter le problème de la valeur limite

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + b\Delta^2 u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times \Omega \\ u(1, y) = d_0(y), \quad y \in \Omega \\ u(1, y) - \Delta_y u(0, y) = d_1(y), \quad y \in \Omega \\ u(x, \xi) = \Delta_y u(x, \xi) = 0, \quad (x, \xi) \in [0, 1] \times \partial\Omega. \end{array} \right.$$

à condition que

$$f \in L^p(0, 1; L^p(\Omega)) \text{ et } H^{-1} \left(d_0 + \theta_\omega d_1 - \int_0^1 e^{(1-s)\theta_\omega} f(s) ds \right),$$

$$d_1 \in (D(A), L^p(\Omega))_{\frac{1}{2p}, p}$$

Bibliographie

- [1] Aibeche, A. : Coerciveness estimates for a class of nonlocal elliptic problems. *Differ. Equ. Dynam.*, 1 (4), 351 (1993).
- [2] Aibeche, A. : Fold-completeness of generalized eigenvectors of a class of elliptic problems. *Results Math.* 33(1), 1 – 8 (1998).
- [3] Aliev, B.A., Yakubov, Y. : Second order elliptic differential-operator equations with unbounded operator boundary conditions in UMD Banach spaces. *Integral Equ. Oper. Theory* 69(2), 269 – 300 (2011).
- [4] Bade, W.G., Freeman, R.S. : Closed extensions of Laplace operator determined by a general class of boundary conditions. *Pac. J. Math.* 12 (2), 395 – 410 (1962).
- [5] Balakrishnan, A.V. : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pac. J. Math.* 10, 419 – 437 (1960).
- [6] Beals, R. : Nonlocal elliptic boundary-value problems. *Bull. Am. Math. Soc.* 70 (5), 693 – 696 (1964).
- [7] Bitsadze, A.V., Samarskii, A.A. : On some general of linear elliptic boundary value problems. *Soviet Math. Doklady*, 10, 419 – 437 (1960).
- [8] Bouziani, A. : On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems. *EJDE* 21, 1 – 16 (2001).
- [9] Browder, F. : Nonlocal elliptic boundary value problems. *Am. J. Math.* 86 (4), 735 – 750 (1964).
- [10] Burkholder, D.L : A geometrical characterization of Banach space in which martingale difference sequences are unconditional. *Ann. Probab.* 9, 997 – 1011 (1981).
- [11] Cannon, J.R. : The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.* 21, 155 – 160 (1963).
- [12] Cannon, J.R., Yanping, L. : A Galerkin procedure for diffusion equations with boundary integral conditions. *Int. J. Eng. Sci.* 23, 579 – 587 (1990).
- [13] Cannon, J.R., Perez-Esteva, S., Van Der Hoek, J. : A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass. *SIAM Numer. Anal.* 24, 499 – 515 (1987).
- [14] Carleman T. : Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. *Verhändlungen des Internet. Math. Kongr. Zurich I*, 138 – 151 (1932).
- [15] Cheggag, M., Favini, A., Labbas, R., Maingot, S., Medeghri, A. : Sturm-Liouville problems for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces. *Differ. Integral Equ.* 21 (9 – 10), 981 – 1000 (2008).
- [16] Dore, G., Venni, A. : On the closedness of the sum of two closed operators. *Mathematische Zeitschrift* 196, 270 – 286 (2000).

-
- [17] Dore ,S.,Yakubov,S. :Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems .Semigroup Forum 60, 93 – 121 (2000) .
 - [18] Favini, A., Yakubov, S. :Irregular boundary value problems for second order elliptic differential operator in UMD Banach spaces. Math. Ann.348, 600 – 632 (2010) .
 - [19] Grisvard, P. : Spazi di tracce e applicazioni. Rendiconti di Matematica 5 (4) , 657 – 729 (1972) .
 - [20] Gurevich, P.L. : Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semi-groups. J. Math. Sci.186 (3) , 255 – 440 (2012) .
 - [21] Hammou,H.,Labbas,R.,Maignot,S.,Medeghri,A. :On some elliptic problems with nonlocal coefficient -operator conditions in the framework of Hölderian spaces .EJQTDDE 36, 1 – 32 (2013) .
 - [22] Krein., S.G. : Linear Differential Equqtions in Banach Spaces, Moscou (1967) .
 - [23] Lunardi, A. : Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems. Birkhäuser, Basel (1995) .
 - [24] Prüss,J.,Sohr,H. :On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces.Math.Zeitschrift204, 452 (1990) .
 - [25] Skubachevskii, A.L. : Nonclassical boundary value problems I.J. Math.Sci.155 (2) , 199 – 334 (2008) .
 - [26] Triebel., H. : Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.Amsterdam, North Holland (1978) .
 - [27] Vishik, M.J. : On general boundary value problems for elliptic differential equations.Tr. Mosk.I,187 – 246 (1952) .
 - [28] Yakubov, S., Yakubov, Y. : Differential Equations. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2000) .
 - [29] Yurchuk, N.I. : Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations.Differ. Uravn.22 (12) , 2117 – 2126 (1986)