

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de master en mathématiques

intitulé

Sur Les équations Abstraites Du Second Ordres De
Type Mêlé Dans L' espaces De Hölder

Présenté par

BOUCHAKOUR Meriem

Soutenu le /05/2017

Devant le jury

Mr	Examineur	U. MOSTAGANEM.
----	-----------	----------------

Mr	H.Diala	Encadreur	U. MOSTAGANEM.
----	---------	-----------	----------------

Table des matières

Introduction	i
1 Rappels	2
1.1 Opérateurs linéaires	2
1.2 Les Semi-groupes	4
1.2.1 Semi-groupes fortement continus	4
1.2.2 Semi-groupes analytiques	5
1.2.3 Semi-groupes analytiques généralisés	6
1.3 Les espaces d'interpolation	6
1.4 Calcul et intégrale de Dunford	8
1.4.1 Formule de cauchy :	9
1.4.2 Intégrale de Dunford-Riesz :	9
1.4.3 Propriété de l'intégrale de Dunford	9
1.5 Espace de Hölder	9
1.6 Puissances fractionnaires d'opérateurs	10
2 Résolution du problème dans le cas où f est dans $C^\theta([0, 1]; X)$, $(0 < \theta < 1)$	11
2.1 Approche utilisant la racine carrée de $(-A)$	11
2.2 Hypothèses	11
2.3 Quelques résultats	12
2.4 Représentation de la solution	16

2.5	Existence, unicité et La régularité maximale de la solution	17
3	Application	27
3.1	Application dans le cas où f est dans $C^\theta([0, 1]; X)$	27
	Conclusion	31
	Bibliographie	31

INTRODUCTION

Ce travail est une synthèse des résultats obtenus dans l'article de FATIMA ZOHRA MEZEGHRANI "*Necessary And Sufficient Conditions For The Solvability And Maximal Regularity Of Abstract Differential Equations Of Mixed Type In Holder Spaces, 2011*".

Le but est d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale de l'équation différentielle abstraite du second ordre suivante

$$(p_A) \left\{ \begin{array}{l} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0, 1) \\ \text{les conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann} \\ u(0) = d_0, u'(1) = n_1. \end{array} \right.$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense, inclus dans un espace de Banach complexe X , $f \in C^\theta([0, 1], X)$ ($0 < \theta < 1$) et $d_0, u_1 \in X$.

Le présent travail est consacré à l'étude d'une équation abstraite de second ordre de type mêlé dans l'espace de Hölder.

Ce travail est basé plus précisément sur une représentation explicite de la solution utilisant la racine carrée de l'opérateur $-A$. Comme cite précédemment, la racine carrée de l'opérateur $-A$ apparaît absolument dans les équations de second ordre avec les différentes conditions aux limites de Dirichlet Neumann qui étudié par ([13]) avec des hypothèses de différentiabilité de la résolvants dans le cas où A est variable, en utilisant le calcul fonctionnel de Dunford.

Après avoir trouvé la représentation de la solution stricte, on cherche sous quelles conditions nécessaires et suffisantes cette dernière a la régularité maximale i.e quand u vérifié u'' , $Au \in C^\theta([0, 1], X)$.

L'objectif de ce travail est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, l'unicité et la régularité du problème (p_A) , on utilise les opérateurs linéaires fermés, l'espace d'interpolation, la théorie des semi-groupes, calcul fonctionnel de Dunford, les puissances fractionnaires d'opérateurs, et l'espace de Hölder.

Les résultats dans ce travail sont les suivantes :

Théorème 0.0.1 Soit $f \in C^\theta([0, 1], X)$ ($0 < \theta < 1$), et supposons (2.2.1) (voir chapitre 2).

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. Le problème (p_A) admet une unique solution stricte u , telle que

$$u \in C^2([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(A));$$

2. $d_0 \in D(A)$, $Ad_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$,

$$n_1 \in D(\sqrt{-A}) \text{ et } \sqrt{-A}n_1 \in \overline{D(A)}.$$

Ainsi que dans ce cas on dira qu'une solution stricte u à la régularité maximale si $u \in C^{2+\theta}([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(A))$.

Ce mémoire comporte de trois(3) chapitres et est organisé comme suit.

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur les outils mathématiques utilisés dans ce travail : on introduit les notions d'opérateurs linéaires fermés, les semi-groupes, l'intégral de Dunford, les espaces d'interpolation, les puissances fractionnaires d'opérateurs, et les espaces de Hölder.

Dans le deuxième chapitre il y'a deux parties, la première est basée sur la racine carrée de $(-A)$, quelques lemmes et la représentation de la solution celle qui est justifier par le calcul de Dunford. Dans la deuxième partie on étudié l'existence, l'unicité et la régularité de la solution obtenue dans la première partie où $f \in C^\theta([0, 1], X)$ ($0 < \theta < 1$).

Le troisième chapitre c'est une application de ce qu'on a traité dans les chapitres précédents sous forme d'exemple de problème concret dans l'espace de travail.

Le travail se termine par une bibliographie relative à l'ensemble des travaux présentés.

Rappels

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera particulièrement, les théories des opérateurs et des semi-groupes .

1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1.1 *A est un opérateur linéaire sur un espace de Banach X , si seulement si ,c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$, dit domaine de A , à valeurs dans X .*

On désigne par $L(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus définis sur X , est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|A\|_{L(X)} = \sup\{\|Ax\|_X : x \in X, \|x\|_X = 1\},$$

Définition 1.1.2 *Soient $(P, D(P)), (Q, D(Q))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y . On dit que Q est une **extension** où un prolongement de P et on note $P \subset Q$ si*

$$D(P) \subset D(Q) \text{ et } P = Q \text{ sur } D(P) .$$

Définition 1.1.3 *L'opérateur $A : D(A) \rightarrow X$ est dit **fermé** si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\},$$

est fermé dans $X \times X$.

Proposition 1.1.1 Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est **fermé** si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \text{ dans } X \\ Ax_n \rightarrow y \text{ dans } Y \end{cases} \implies \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}.$$

Définition 1.1.4 On dit que l'opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow X$ est **fermable** s'il admet une extension fermée.

Proposition 1.1.2 L'opérateur $A : D(A) \rightarrow X$ est fermable si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$,

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases} \implies y = 0.$$

Définition 1.1.5 On dit que l'opérateur $A : D(A) \rightarrow X$ est à **domaine dense**, si $\overline{D(A)} = X$, i.e si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$ telle que

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Définition 1.1.6 Soit A un opérateur linéaire fermé sur X . L'**ensemble résolvant** $\rho(A)$ de A est défini par

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } L(X)\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A .

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit la **résolvante** $R_\lambda(A)$ de A au point λ par :

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. Le **spectre** de A est noté $\sigma(A)$, et est défini par

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A .

Proposition 1.1.3 Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors A est fermé.

Définition 1.1.7 Soit $0 < \omega < \pi$. On définit le secteur suivant

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\}.$$

Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si

$$\sigma(A) \subset \overline{S_\omega},$$

et

$$\forall \omega' \in]\omega, \pi[, M(A, \omega') = \sup_{\lambda \notin \overline{S_{\omega'}}} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

On note $\text{sect}(\omega)$ l'ensemble des opérateurs linéaires sur X qui sont sectoriels d'angle ω .

1.2 Les Semi-groupes

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe.

Dans cette section, on considère $(T(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés définie sur X .

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 La famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est appelée **semi-groupe** si on a :

1. $T(0) = I = I_X$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}_+ : T(s+t) = T(s)T(t)$.

Lorsque la deuxième propriété est vérifiée pour t et s quelconques dans $\mathbb{R}$, $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est dit un groupe.

Définition 1.2.2 Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit **fortement continu**, et il est noté C_0 semi-groupe, si pour tout $x \in X$, l'application $t \rightarrow T(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue i.e si on a pour tout $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0.$$

Proposition 1.2.1 Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors il existe des constantes réelles $\omega \geq 0$, $M > 1$, telle que

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}.$$

Corollaire 1.2.1 Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors pour tout $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans X , i.e pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\|_X = 0.$$

Générateurs infinitésimaux

Définition 1.2.3 Le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe dans } X \right\} \\ Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}, x \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide et est bien un sous-espace vectoriel de X . A est clairement linéaire de $D(A)$ dans X .

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Après avoir étudié les C_0 semi-groupes il est nécessaire d'aborder les semi-groupes analytiques qui seront utilisés au cours de ce travail.

Dans cette section, on définit $\arg$ qui désigne la détermination principale de la fonction argument caractérisée par :

$$\arg(z) = \varphi \text{ si } z = re^{i\varphi}, r > 0, \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Définition 1.2.4 soit $\phi \in]0, \pi]$. on appelle semi-groupe analytique l'application T définie sur secteur $\overline{S_\phi}$ avec

$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \phi\}$$

et à valeurs dans $L(X)$ telle que :

1. $z \rightarrow T(z)$ est analytique sur S_ϕ
2. $T(0) = I$ et $\forall x \in X, \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \overline{S_\phi}}} \|T(z)x - x\|_X = 0.$
3. $\forall z_1, z_2 \in \overline{S_\phi}, T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2).$

si de plus $\sup_{z \in \overline{S_\phi}} \|T(z)\| < +\infty$, on dit que $(T(z))_{z \in \overline{S_\phi}}$ est uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques généralisés

On dira que $(e^{xQ})_{x \geq 0}$ est un semi-group analytique généralisé si Q est un opérateur linéaire dans X , de domaine non dense et vérifiant :

$$\begin{cases} \rho(Q) \supset S_{\omega, \delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} / |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \text{ et} \\ \sup_{\lambda \in S_{\omega, \delta}} \|(\lambda - \omega)(\lambda I - Q)^{-1}\|_{L(X)} < +\infty \end{cases}$$

où

$$\omega \in \mathbb{R} \text{ et } \delta \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

et $\rho(Q)$ désigne l'ensemble résolvant de l'opérateur Q

Dans ce cas $(e^{xQ})_{x \geq 0}$ n'est pas continue (voir [14])

Remarque 1.2.1 En fixant $r > 0$, $\delta_0 \in]0, \delta[$ alors $(e^{xQ})_{x \geq 0}$ est défini par

$$(e^{xQ}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int e^{\lambda x} (\lambda I - Q)^{-1} d\lambda & \text{si } x > 0 \\ I & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où γ est le bord de $S_{\omega, \delta_0} \setminus B(0, r)$ orienté négativement.

Générateur infinitésimal d'un semi-group analytique(ou holomorphe)

Théorème 1.2.1 Soit $D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire .

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est fermé, $D(A)$ est dense dans X il existe $C \geq 0$ tel que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\} \text{ et} \\ \exists C > 0, \forall \lambda : \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \end{cases}$$

2. A est le générateur infinitésimal d'un semi-group analytique, uniformément borné $(T(t))_{t \geq 0}$ qui est de plus se prolonge en $(T(z))_{z \in \overline{S_\phi}}$, semi-group sur X , analytique dans S_ϕ , uniformément borné dans $\overline{S_\phi}$. (avec $\phi \in]0, \pi[$).

1.3 Les espaces d'interpolation

Définition 1.3.1 Soit X un espace de Banach. On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ ($1 \leq p < \infty$), l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$

à valeurs dans X telles que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X)} < \infty.$$

Si $p = +\infty$, on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ par

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X) \iff \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X \text{ fortement mesurable et} \\ \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ess} \|f(t)\|_X < \infty. \end{cases}$$

Définition 1.3.2 Soient $(X_0, \|\cdot\|_0)$ et $(X_1, \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continuellement dans un espace topologique séparé F .

Les espaces $(X_0 \cap X_1, \|\cdot\|_{X_0 \cap X_1})$, $(X_0 + X_1, \|\cdot\|_{X_0 + X_1})$ munis des normes suivantes

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}, \text{ pour } x \in X_0 \cap X_1 \\ \|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_i \in X_i}} (\|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}), \text{ pour } x \in X_0 + X_1 \end{cases},$$

sont des espaces de Banach.

Pour $\theta \in]0, 1[$, $p \in]1, +\infty]$, on définit l'espace d'interpolation entre X_0 et X_1 noté $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ comme étant l'ensemble des vecteurs $x \in X_0 + X_1$ tels que

$$\begin{cases} \forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 : x = u_0(t) + u_1(t) \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ muni de la norme

$$\|x\|_{\theta, p} = \inf_{\substack{x=u_0(t)+u_1(t) \\ u_i(t) \in X_i}} \left(\|t^{-\theta} u_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0)} + \|t^{1-\theta} u_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1)} \right),$$

est un espace de Banach vérifiant

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta, p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injection continue voir ([12])

Définition 1.3.3 Soit $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé. Son domaine $D(A)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X, x \in D(A).$$

Pour $X_0 = D(A)$, $X_1 = X$, on note pour $\theta \in]0, 1[$, $p \in]1, +\infty]$,

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta, p}.$$

Certains espaces d'interpolation ont une caractérisation explicite, on cite par exemple les cas suivants : *voir* ([3])

1. Si $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$ et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \|(A - \lambda I_X)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{c}{\lambda},$$

alors l'espace $D_A(\theta, p)$ est donné par

$$D_A(\theta, p) = \{u \in X : t^\theta A(A - tI)^{-1}u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X)\},$$

Dans ce cas et grâce à la propriété de réitération de Lions-Peetre *voir* [9], on a pour tout $p \in]1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}^*$,

$$D_A(m\theta, p) = D_{A^m}(\theta, p).$$

2. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X alors

$$D_A(\theta, p) = \{u \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)^{-1}u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X)\},$$

voir ([6]).

3. Si A génère un semi-groupe analytique et borné dans X alors

$$D_A(\theta, p) = \{u \in X : t^{1-\theta} A e^{tA} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X)\}.$$

Ces espaces vérifient la propriété d'inclusion

$$D_A(\theta', p) = D_A(\theta, q),$$

pour $\theta' > \theta$ et $p, q \in [1, +\infty]$ quelconques ou pour $\theta' = \theta$ et $q \leq p$.

1.4 Calcul et intégrale de Dunford

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

1.4.1 Formule de cauchy :

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in H(U)$ et $z_0 \in K$. On a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\lambda) (\lambda I - z_0)^{-1} d\lambda,$$

où γ est le bord positivement orienté de K .

1.4.2 Intégrale de Dunford-Riesz :

Soient $T \in L(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(T)$ et γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de T). Soit $f \in H(U)$. Alors

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) (zI - T)^{-1} d\lambda.$$

1.4.3 Propriété de l'intégrale de Dunford

Théorème 1.4.1 Soient f et $g \in H(T)$ et $T \in L(X)$, alors $f.g \in H(T)$, et

$$f(T).g(T) = (f.g)(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) g(\lambda) (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$$

1.5 Espace de Hölder

Comme il a été énoncé en introduction, on va travailler dans les espaces de Hölder : $C^\theta([0, 1]; X)$.

On va donc définir les espaces de Hölder et énoncer quelques propriétés importantes de ces espaces.

Définition 1.5.1 Soient X un espace de Banach complexe et $C([0, 1]; X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans X muni de la norme

$$\|f\|_{C([0,1],X)} = \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_X$$

On considère, pour $0 \leq \theta \leq 1$, l'espace

$$C^\theta([0, 1]; X) = \left\{ f \in C([0, 1]; X) \mid \sup_{t-s \neq 0} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^\theta} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{\substack{t-s \neq 0 \\ t,s \in [0,1]}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^\theta}.$$

Cet espace est appelé espace höldérien de degré θ .

1.6 Puissances fractionnaires d'opérateurs

Théorème 1.6.1 *Si A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0 : \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \text{ et pour } \lambda \geq 0 \\ \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}, \end{array} \right.$$

alors pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $-(-A)^\alpha$ génère un semi-groupe $T_\alpha(t)$ fortement continue pour $t \geq 0$ et uniformément continue pour $t > 0$.

Preuve. voir A.V.Blakrishnan([2])

□

Exemple 1.6.1 *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a :*

$$T_{\frac{1}{2}}(t) = \int_0^{+\infty} (A - \lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda$$

Résolution du problème dans le cas où f est dans $C^\theta([0, 1]; X)$, $(0 < \theta < 1)$

2.1 Approche utilisant la racine carrée de $(-A)$

Considérons dans un espace de Banach complexe X le problème abstrait suivant :

$$u''(x) + Au(x) = f(x), x \in (0, 1) \quad (2.1.1)$$

$$\begin{cases} u(0) = d_0. \\ u'(1) = n_1. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X , ici d_0, n_1 sont des éléments donnés dans X et $f \in C^\theta(0 < \theta < 1)$ f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans X . On s'intéressera à l'existence et l'unicité d'une solution stricte du problème (2.1.1) – (2.1.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in C^2([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(A)),$$

2.2 Hypothèses

On suppose ici que $f \in C^\theta([0, 1]; X)$, $\theta \in]0, 1[$

L'opérateur A vérifie (l'hypothèse d'ellipticité)

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, [0, +\infty[\subset \rho(A) \\ \text{et } \exists C > 0 : \forall \lambda > 0 : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Remarque 2.2.1 Cette hypothèse implique que $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ est défini et est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté $\left\{e^{-\sqrt{-A}x}\right\}_{x \geq 0}$ non fortement continue en zéro car $D(A)$ n'est pas supposé dense dans X , c'est-à-dire $\overline{D(A)} \neq X$ voir ([2]).

On pose que $-B$ est un générateur infinitésimal.

Nous avons mis tout au long du travail $B = \sqrt{-A}$ et $Z = e^{-2B}$.

Proposition 2.2.1 Supposons (2.2.1). l'opérateur $(I - Z)$ a un inverse borné donné par :

$$(I - Z)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\#}} \frac{e^{2z}}{1 - e^z} (zI + B)^{-1} dz + I,$$

où $\gamma_{\#}$ est une courbe appropriée dans le plan complexe (une courbe sectorielle de Jordan entourant le spectre $(-B)$).

Preuve. Puisque l'axe imaginaire est continue dans l'ensemble résolvant $\rho(-B)$ on peut adapter la preuve de Lunardi's ([10]) (proposition 2.3.6 page 60), en choisissant une courbe appropriée $\gamma_{\#}$ sur le compte, du fait que $(-B)$ génère un semi-groupe analytique. $\square$

Corollaire 2.2.1 Sous l'hypothèse (2.2.1) l'opérateur $(I + Z)$ a un inverse borné.

Preuve. On a

$$(I - e^{-2B})(I + e^{-2B}) = I - e^{-4B}$$

alors

$$(I + e^{-2B}) = (I - e^{-2B})^{-1} (I - e^{-4B}).$$

En conséquence,

$$(I + e^{-2B})^{-1} = (I - e^{-4B})^{-1} (I - e^{-2B}).$$

$\square$

2.3 Quelques résultats

Lemme 2.3.1 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine D_A non nécessairement dense alors :

$$\overline{D(A)} = \overline{D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}}.$$

Preuve. On rappelle que $:D(A) \subset D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$

donc $\overline{D(A)} = \overline{D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}}$

Cette inclusion est évidente

Soit $x \in \overline{D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}}$ alors $x = \lim_n x_n$.

où

$$x_n = (-A)^{-\frac{1}{2}} y_n \in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$x_n = (-A)^{-\frac{1}{2}} y_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}} (A - I)^{-1} y_n dz$$

alors $x_n = (-A)^{-\frac{1}{2}} y_n \in \overline{D_A}$ vu que l'intégrale existe et dont les éléments à l'intérieur sont dans

D_A

D'où

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{D_A}.$$

□

Pour $d_0 \in X$, on considère la fonction abstraite suivante

$$\begin{aligned}]0, 1] &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto D_0 \left(x, \sqrt{-A} \right) d_0 \end{aligned}$$

où

$$D_0 \left(x, \sqrt{-A} \right) d_0 = (I + Z)^{-1} \left(I + e^{-2\sqrt{-A}(1-x)} \right) e^{-\sqrt{-A}x} d_0$$

on a le résultat suivant :

Lemme 2.3.2 On a :

1.

$$D_0 \left(x, \sqrt{-A} \right) d_0 \in C^\infty ([0, 1]; D(A^k)), k \in \mathbb{N},$$

2.

$$\forall x \in]0, 1], D_0'' \left(x, \sqrt{-A} \right) d_0 + A D_0 \left(x, \sqrt{-A} \right) d_0 = 0,$$

3.

$$\exists C > 0, \forall \in]0, 1], \left\| D_0 \left(x, \sqrt{-A} \right) d_0 \right\|_x \leq C \|d_0\|_X.$$

Preuve. Soit $x > 0$, $d_0 \in X$. Il est facile de vérifier que

$$(I \pm Z)^{-1} e^{-Bx} = e^{-Bx} (I \pm Z)^{-1},$$

alors

$$D_0(x, B) d_0 = e^{-Bx} (I + e^{-2B(1-x)}) (I + Z)^{-1} d_0,$$

d'où l'on déduit la première assertion en vertu de Sinistrari([14]).

On a, pour $x \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned} D'_0(x, B) d_0 &= (I + Z)^{-1} (2Be^{-2B(1-x)}) e^{-Bx} d_0 \\ D''_0(x, B) d_0 &= (I + Z)^{-1} (4(-A) e^{-2B(1-x)}) e^{-Bx} d_0 \\ &\quad - (I + Z)^{-1} (2Be^{-2B(1-x)}) Be^{-Bx} d_0 \\ &\quad - (I + Z)^{-1} (2Be^{-2B(1-x)}) e^{-Bx} d_0 \\ &\quad - (I + Z)^{-1} (I + e^{-2B(1-x)}) Ae^{-Bx} d_0 \\ &= - (I + Z)^{-1} (I + e^{-2B(1-x)}) Ae^{-Bx} d_0 \\ D''_0(x, B) d_0 + AD_0(x, B) d_0 &= - (I + Z)^{-1} (I + e^{-2B(1-x)}) Ae^{-Bx} d_0 \\ &\quad + A(I + Z)^{-1} (I + e^{-2B(1-x)}) e^{-Bx} d_0 \\ &= - (I + Z)^{-1} (I + e^{-2B(1-x)}) Ae^{-Bx} d_0 \\ &\quad + (I + Z)^{-1} (I + e^{-2B(1-x)}) Ae^{-Bx} d_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On sait qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x > 0$, $d_0 \in X$, on a

$$\|e^{-Bx} d_0\|_X \leq M \|d_0\|_X$$

voir Tanab([15]). Alors, $\exists C > 0$:

$$\begin{aligned} \|D_0(x, B) d_0\|_X &= \|(I + Z)^{-1} (I + e^{-2B(1-x)}) e^{-Bx} d_0\|_X \\ &\leq C \|d_0\|_X. \end{aligned}$$

□

Ici, on étudie le comportement de $D_0(., B)$ en 0.

Lemme 2.3.3 1. Soit $d_0 \in X$. Alors

$$D_0\left(., \sqrt{-A}\right) d_0 \in C([0, 1]; X) \text{ si seulement si } d_0 \in \overline{D(A)}$$

2. Soit $d_0 \in D(A)$. Alors

$$D_0\left(., \sqrt{-A}\right) d_0 \in C([0, 1]; D(A)) \text{ si seulement si } Ad_0 \in \overline{D(A)}$$

Preuve. C'est une conséquence de la commutativité entre $(I + Z)^{-1}$ et A sur $D(A)$ d'une part et Sinestrari ([14]), d'une autre part on utilise aussi le fait que

$$\overline{D(\sqrt{-A})} = \overline{D(A)},$$

voir Haase ([7])

□

Maintenant, pour $n_1 \in X$, on considère la fonction abstraite suivante

$$\begin{aligned} [0, 1[&\rightarrow X \\ x &\mapsto N_1\left(x, \sqrt{-A}\right) n_1 \end{aligned}$$

où

Lemme 2.3.4 On a :

1. $N_1\left(x, \sqrt{-A}\right) n_1 \in C^\infty([0, 1]; D(A^k)), k \in \mathbb{N}$,
2. $\forall x \in [0, 1[, N_1''\left(x, \sqrt{-A}\right) + AN_1\left(x, \sqrt{-A}\right) n_1 = 0$,
3. $\exists C > 0, \forall x \in [0, 1[, \|N_1\left(x, \sqrt{-A}\right) n_1\|_X \leq C \|n\|_X$.

Preuve. Il n'est pas difficile de montrer ce lemme, il suffit de remplacer x par $1 - x$. □

Lemme 2.3.5 1. Soit $n_1 \in X$. Alors :

$$N_1\left(., \sqrt{-A}\right) n_1 \in C([0, 1]; X) \text{ si seulement si } n_1 \in \overline{D(A)}$$

2. Soit $n_1 \in D(A)$. Alors

$$N_1\left(., \sqrt{-A}\right) n_1 \in C([0, 1]; D(A)) \text{ si seulement si } \sqrt{-A}n_1 \in \overline{D(A)}.$$

Preuve. On montre ce lemme de la même manière que le lemme 3.

□

2.4 Représentation de la solution

On suppose que le problème (2.1.1) – (2.1.2) admet une solution stricte u .

on pose

$$u(1) = u_1.$$

Alors u est la solution stricte du problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) - B^2 u(x) = f(x) \\ u(0) = d_0. \\ u(1) = u_1. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

En utilisant la méthode de la variation des constantes, on obtient la représentation ci - dessus

$$u(x) = e^{-xB} \zeta_0 + e^{-(1-x)B} \zeta_1 - \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds - \frac{1}{2} B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds,$$

où

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= (I - Z)^{-1} (d_0 - e^{-B} u_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - Z)^{-1} B^{-1} \left(\int_0^1 e^{-sB} f(s) ds - \int_0^1 e^{-(2-s)B} f(s) ds \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (I - Z)^{-1} (-e^{-B} d_0 + u_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - Z)^{-1} B^{-1} \left(\int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds - \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds \right). \end{aligned}$$

On déduit que

$$n_1 = u'(1)$$

$$\begin{aligned} &= -B e^{-B} (I - Z)^{-1} (d_0 - e^{-B} u_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-B} (I - Z)^{-1} \left(\int_0^1 e^{-sB} f(s) ds - \int_0^1 e^{-(2-s)B} f(s) ds \right) \\ &\quad + B (I - Z)^{-1} (-e^{-B} d_0 + u_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (I - Z)^{-1} \left(\int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds - \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2(I-Z)^{-1} B e^{-B} d_0 + (I-Z)^{-1} (I+Z) B u_1 \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{-B} (I-Z)^{-1} \left(\int_0^1 e^{-sB} f(s) ds - \int_0^1 e^{-(2-s)B} f(s) ds \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (I-Z)^{-1} \left(- \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds + Z \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \right).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
u_1 &= (I+Z)^{-1} (2e^{-B} d_0 + (I-Z) B^{-1} n_1) \\
&\quad + (I+Z)^{-1} B^{-1} \left(- \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds + \int_0^1 e^{-(1+s)B} f(s) ds \right).
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Les conditions aux limites déterminent ζ_0, ζ_1 pour avoir l'expression de la solution u qui est donnée par :

$$\begin{aligned}
u(x) &= (I+Z)^{-1} [(e^{-xB} + e^{-(2-x)B}) d_0 + (e^{-(1-x)B} - e^{-(1+x)B}) B^{-1} n_1] \\
&\quad + \frac{1}{2} (I+Z)^{-1} B^{-1} \left[\int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s) ds + \int_0^1 e^{-(2-x+s)B} f(s) ds \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} (I+Z)^{-1} B^{-1} \left[\int_0^1 e^{-(2+x-s)B} f(s) ds - \int_0^1 e^{-(2-x-s)B} f(s) ds \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s) ds - \frac{1}{2} B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s) ds.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

2.5 Existence, unicité et La régularité maximale de la solution

On considère le problème (2.1.1) et (2.1.2) la solution est donnée par (2.4.3)

Le théorème suivant précise les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une solution stricte.

Théorème 2.5.1 *soit $f \in C^\theta([0, 1]; X)$, $0 < \theta < 1$, et supposons (2.2.1). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. problème(2.1.1)-(2.1.2) admet une unique solution stricte u , telle que

$$u \in C^2([0, 1]; X) \cap C([0, 1]; D(A)),$$

et vérifiant (2.1.1)-(2.1.2).

2. $d_0 \in D(A)$, $Ad_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$, u est donnée par la formule (2.4.3).

$$n_1 \in D(\sqrt{-A}) \quad \text{et} \quad \sqrt{-A}n_1 \in \overline{D(A)}.$$

Preuve. supposons 1, alors

$$d_0 = u(0) \in D(A),$$

et

$$\begin{cases} Ad_0 - f(0) = -u''(0) \in \overline{D(A)} \\ Au(1) - f(1) = -u''(1) \in \overline{D(A)} \\ f(x) = Au(x) + u''(x). \end{cases}$$

Maintenant, on considère la solution représenté par (2.4.3).

On met,

$$\begin{aligned} L(f)(x) = & \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1}e^{-(x+s)B} f(s) ds + \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1}e^{-(2-x+s)B} f(s) ds \\ & + \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1}e^{-(2+x-s)B} f(s) ds - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1}e^{-(2-x-s)B} f(s) ds \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x B^{-1}e^{-(x-s)B} f(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^1 B^{-1}e^{-(s-x)B} f(s) ds. \end{aligned}$$

On a :

$$f(x) = Au(x) + u''(x).$$

On obtient

$$\begin{aligned} L(f)(x) &= L(Au)(x) + L(u'')(x) \\ &= \sum_{i=1}^6 H_i + \sum_{i=1}^6 J_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(f)(x) &= \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(x+s)B} Au(s) ds + \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(2-x+s)B} Au(s) ds \\
&+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(2+x-s)B} Au(s) ds - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(2-x-s)B} Au(s) ds \\
&- \frac{1}{2} \int_0^x B^{-1} e^{-(x-s)B} Au(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^1 B^{-1} e^{-(s-x)B} Au(s) ds \\
&+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(x+s)B} u''(s) ds + \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(2-x+s)B} u''(s) ds \\
&+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(2+x-s)B} u''(s) ds - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(2-x-s)B} u''(s) ds \\
&- \frac{1}{2} \int_0^x B^{-1} e^{-(x-s)B} u''(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^1 B^{-1} e^{-(s-x)B} u''(s) ds
\end{aligned}$$

Après intégration par parties, on a :

Pour les (J_i) :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} B^{-1} \int_0^1 e^{-(x+s)B} u''(s) ds \\
&= \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} B^{-1} [e^{-(x+s)B} u'(s)]_0^1 + \int_0^1 B u'(s) e^{-(x+s)B} ds \\
J_1 &= \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} B^{-1} [e^{-(x+1)B} u'(1) - e^{-xB} u'(0)] + I_1
\end{aligned}$$

Avec,

$$I_1 = \int_0^1 B u'(s) e^{-(x+s)B} ds$$

encore l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
&= B [e^{-(x+s)B} u(s)]_0^1 + B \int_0^1 e^{-(x+s)B} u(s) ds \\
&= B [e^{-(x+1)B} u(1) - e^{-xB} u(0)] + B \int_0^1 e^{-(x+s)B} u(s) ds
\end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} J_1 = & \frac{1}{2} (I + Z)^{-1} B^{-1} [e^{-(x+1)B} u'(1) - e^{-xB} u'(0)] + \frac{1}{2} (I + Z)^{-1} [e^{-(x+1)B} u(1) - e^{-xB} u(0)] \\ & + \frac{1}{2} (I + Z)^{-1} \int_0^1 B e^{-(x+s)B} u(s) ds. \end{aligned}$$

De même on trouvent les autres intégrales J_2, J_3, J_4, J_5, J_6

la solution u est donnée par la formule(2.4.3). On déduit que

$$\begin{aligned} u(1) = & (I + Z)^{-1} (2e^{-B} d_0 + (I - Z) B^{-1} n_1) \\ & + (I + Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(1+s)B} f(s) ds \\ & - (I + Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(1-s)B} f(s) ds \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} B^{-1} n_1 = & u(1) - 2(I + Z)^{-1} e^{-B} d_0 + \\ & + (I + Z)^{-1} e^{-2B} B^{-1} n_1 \\ & - (I + Z)^{-1} e^{-B} \int_0^1 B^{-1} e^{-sB} f(s) ds \\ & + (I + Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(1-s)B} f(s) ds \\ = & u(1) - 2e^{-B} (I + Z)^{-1} d_0 \\ & + e^{-2B} (I + Z)^{-1} B^{-1} n_1 \\ & - e^{-B} (I + Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-sB} f(s) ds \\ & + (I + Z)^{-1} \int_0^1 B^{-1} e^{-(1-s)B} f(s) ds \\ = & \sum_{i=1}^5 a_i \end{aligned}$$

Il est clair que a_1, a_2, a_3, a_4 sont dans $D(A)$ d'une autre part, de a_5

$$\begin{aligned} = & (I + Z)^{-1} B^{-1} \int_0^1 e^{-(1-s)B} f(s) ds \\ = & -A^{-1} (I + Z)^{-1} \int_0^1 B e^{-(1-s)B} (f(s) - f(1)) ds \\ & + A^{-1} (I + Z)^{-1} (I - e^{-B}) f(1) \end{aligned}$$

on a $a_5 \in D(A)$. on déduit que

$$B^{-1}n_1 \in D(A)$$

ce qui implique que

$$n_1 \in D(B).$$

De plus

$$\begin{aligned} & Au(1) - f(1) = \\ & 2(I+Z)^{-1}e^{-B}Ad_0 - (I+Z)^{-1}(I-Z)Bn_1 \\ & - (I+Z)^{-1}e^{-B}\int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds + (I+Z)^{-1}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(f(s) - f(1))ds + \\ & (I+Z)^{-1}(I - e^{-B})f(1) - (I+Z)^{-1}(I+Z)f(1) \\ & = 2(I+Z)^{-1}e^{-B}Ad_0 - (I+Z)^{-1}(I+Z-2Z)Bn_1 \\ & - (I+Z)^{-1}e^{-B}\int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds + (I+Z)^{-1}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(f(s) - f(1))ds \\ & - (I+Z)^{-1}(e^{-B} + e^{-2B})f(1) \\ & = 2(I+Z)^{-1}e^{-B}Ad_0 + Bn_1 + 2(I+Z)^{-1}e^{-2B}Bn_1 \\ & - (I+Z)^{-1}e^{-B}\int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds + (I+Z)^{-1}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(f(s) - f(1))ds \\ & - (I+Z)^{-1}(e^{-B} + e^{-2B})f(1). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} Bn_1 &= [Au(1) - f(1)] - 2e^{-B}(I+Z)^{-1}Ad_0 \\ &+ 2e^{-2B}(I+Z)^{-1}Bn_1 \\ &+ (I+Z)^{-1}e^{-B}\int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds \\ &- (I+Z)^{-1}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(f(s) - f(1))ds \\ &+ (e^{-B} + e^{-2B})(I+Z)^{-1}f(1) \\ &= \sum_{i=1}^6 b_i \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

b_1, b_2, b_3, b_4, b_6 sont dans $\overline{D(A)}$, alors

$$Bn_1 \in \overline{D(A)}.$$

Inversement, on suppose que

$$d_0 \in D(A), n_1 \in D(B),$$

$$Ad_0 - f(0) \in \overline{D(A)} \text{ et } Bn_1 \in \overline{D(A)}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= D_0(x, B)d_0 + N_1(x, B)n_1 \\ &+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-1} \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-1} \int_0^1 e^{-(2-x+s)B} f(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{-(2+x-s)B} f(s)ds \\ &- \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{-(2-x-s)B} f(s)ds \\ &- \frac{1}{2}B^{-1} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s)ds - \frac{1}{2}B^{-1} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s)ds, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= D'_0(x, B)d_0 + N'_1(x, B)n_1 \\ &- \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 e^{-(2-x+s)B} f(s)ds - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 e^{-(2+x-s)B} f(s)ds \\ &- \frac{1}{2}(I+Z)^{-1} \int_0^1 e^{-(2-x-s)B} f(s)ds + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s)ds - \frac{1}{2} \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s)ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''(x) &= D''_0(x, B)d_0 + N''_1(x, B)n_1 \\ &+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(x+s)B} f(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(2-x+s)B} f(s)ds \\ &+ \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(2+x-s)B} f(s)ds \\ &- \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(2-x-s)B} f(s)ds \\ &- \frac{1}{2}B \int_0^x e^{-(x-s)B} f(s)ds - \frac{1}{2}B \int_x^1 e^{-(s-x)B} f(s)ds + f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(I + Z)^{-1}(I + e^{-2(1-x)B})e^{-xB}Ad_0 \\
&\quad + (I + Z)^{-1}(I - e^{-2xB})(e^{-(1-x)B}Bn_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(x+s)B}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(2-x+s)B}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(2+x-s)B}f(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}B \int_0^1 e^{-(2-x-s)B}f(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{2}B \int_0^x e^{-(x-s)B}f(s)ds - \frac{1}{2}B \int_x^1 e^{-(s-x)B}f(s)ds + f(x)
\end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned}
u''(x) &= -(I + Z)^{-1}e^{-xB}(Ad_0 - f(0)) - (I + Z)^{-1}e^{-(2-x)B}Ad_0 \\
&\quad - (I + Z)^{-1}e^{-xB}f(0) + (I + Z)^{-1}e^{-(1-x)B}Bn_1 \\
&\quad - (I + Z)^{-1}e^{-(1+x)B}Bn_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-xB} \int_0^1 Be^{-sB}(f(s) - f(0))ds \\
&\quad - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(1+x)B}f(0) + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-xB}f(0) \\
&\quad + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(2-x)B} \int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(1+x)B} \int_0^1 Be^{-(1-s)B}f(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(1-x)B} \int_0^1 Be^{-(1-s)B}(f(s) - f(1))ds \\
&\quad - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(1-x)B}f(1) + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(2-x)B}f(1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^x Be^{-(x-s)B}(f(s) - f(x))ds + \frac{1}{2}f(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{-xB}(f(x) - f(0)) - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-xB}f(0) \\
&\quad - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}Ze^{-xB}f(0) - \frac{1}{2} \int_x^1 Be^{-(s-x)B}(f(s) - f(x))ds \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-(1-x)B}(f(x) - f(1)) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(1-x)B}f(1)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(I+Z)^{-1}Ze^{-(1-x)B}f(1)+f(x)$$

d'où on a

$$\begin{aligned} u''(x) = & -(I+Z)^{-1}e^{-xB}(Ad_0 - f(0)) - (I+Z)^{-1}e^{-(1-x)B}Bn_1 \\ & -(I+Z)^{-1}e^{-(2-x)B}Ad_0 - (I+Z)^{-1}e^{-(1+x)B}Bn_1 \\ & +\frac{1}{2}(I+Z)^{-1}e^{-xB}\int_0^1 Be^{-sB}(f(s)-f(0))ds \\ & -\frac{1}{2}(I+Z)^{-1}e^{-(1+x)B}f(0) - \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}e^{-(2+x)B}f(0) \\ & +\frac{1}{2}(I+Z)^{-1}e^{-(2-x)B}\int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds \\ & +\frac{1}{2}(I+Z)^{-1}e^{-(1+x)B}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}f(s)ds \\ & -\frac{1}{2}(I+Z)^{-1}e^{-(1-x)B}\int_0^1 Be^{-(1-s)B}(f(s)-f(1))ds \\ & +\frac{1}{2}(I+Z)^{-1}e^{-(2-x)B}f(1) + \frac{1}{2}(I+Z)^{-1}Ze^{-(1-x)B}f(1) \\ & -\frac{1}{2}\int_0^x Be^{-(x-s)B}(f(s)-f(x))ds + \frac{1}{2}e^{-xB}(f(x)-f(0)) \\ & -\frac{1}{2}\int_x^1 Be^{-(s-x)B}(f(s)-f(x))ds + \frac{1}{2}e^{-(1-x)B}(f(x)-f(1)) \\ & +f(x). \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Utilisant les lemmes(3)et (5) le premier et le deuxième termes sont dans $C([0,1];X)$, les autres sont continus car $f \in C^\theta([0,1];X)$.

D'où l'on déduit que $u'' \in C([0,1];X)$ de la même manière on montre que $Au \in C([0,1];X)$,

$$\begin{aligned}
Au(x) = & (I + Z)^{-1}e^{-xB}Ad_0 + (I + Z)^{-1}e^{-(2-x)B}Ad_0 \\
& - (I + Z)^{-1}e^{-(1-x)B}Bn_1 + (I + Z)^{-1}e^{-(1+x)B}Bn_1 \\
& - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-xB} \int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds \\
& - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(2-x)B} \int_0^1 Be^{-sB}f(s)ds \\
& - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(1+x)B} \int_0^1 Be^{-(1-s)B}f(s)ds \\
& - \frac{1}{2}(I + Z)^{-1}e^{-(1-x)B} \int_0^1 Be^{-(1-s)B}f(s)ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x Be^{-(x-s)B}f(s)ds + \frac{1}{2} \int_x^1 Be^{-(s-x)B}f(s)ds
\end{aligned}$$

alors

$$u''(x) + Au(x) = f(x).$$

□

Pour la régularité maximale de la solution stricte on a

Théorème 2.5.2 *Soit $f \in C^\theta([0, 1]; X)$, $0 < \theta < 1$, on suppose (2.2.1). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1 *L'unique solution stricte u du problème (2.1.1)-(2.1.2) a la propriété de régularité maximale :*

$$u'', Au \in C^\theta([0, 1]; X).$$

- 2 *Les éléments d_0 et n_1 satisfaisant les conditions suivantes*

$$\begin{aligned}
d_0 & \in D(A), \quad n_1 \in D(\sqrt{-A}), \quad Ad_0 - f(0) \in (D(A), X)_{1-\frac{\theta}{2}, \infty} \\
\sqrt{-A}n_1 & \in (D(A), X)_{1-\frac{\theta}{2}, \infty}.
\end{aligned}$$

Preuve. Supposons qu'il existe une solution stricte u du problème (2.1.1) – (2.1.2) ayant la propriété de régularité maximale. Du théorème précédent, on a

$$d_0 \in D(A), n_1 \in D(B)$$

Aussi le premier et le second terme dans la formule (2.5.2) sont dans $C^\theta([0, 1]; X)$ alors

$$\begin{aligned} e^{-B} (Ad_0 - f(0)) &\in C^\theta([0, 1]; X), \\ e^{(1-\cdot)B} Bn_1 &\in C^\theta([0, 1]; X). \end{aligned}$$

et appliquant la remarque , ((f) , page 39 dans([14])), on obtient

$$\begin{aligned} Ad_0 - f(0) &\in (D(B), X)_{1-\theta, \infty}, \\ Bn_1 &\in (D(B), X)_{1-\theta, \infty}. \end{aligned}$$

On conclut on notant que

$$(D(B), X)_{1-\theta, \infty} = (D(A), X)_{1-\frac{\theta}{2}, \infty}.$$

Inversement, supposons que

$$d_0 \in D(A), n_1 \in D(B), (Ad_0 - f(0)) \in (D(A), X)_{1-\frac{\theta}{2}, \infty}$$

$$\text{et } Bn_1 \in (D(A), X)_{1-\frac{\theta}{2}, \infty}.$$

Utilisant le théorème (1.4 page 361 de ([3]))on a

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{-A}} (Ad_0 - f(0)) &\in C^\theta([0, 1]; X), \\ e^{(1-\cdot)\sqrt{-A}} Bn_1 &\in C^\theta([0, 1]; X), \\ \int_0^1 B e^{-sB} (f(s) - f(0)) ds &\in C^\theta([0, 1]; X), \\ \int_0^1 B e^{-(1-s)B} (f(s) - f(1)) ds &\in C^\theta([0, 1]; X), \end{aligned}$$

Donc

$$u'', Au \in C^\theta([0, 1]; X).$$

□

Application

3.1 Application dans le cas où f est dans $C^\theta([0, 1]; X)$

On s'intéresse dans ce chapitre à un exemple de problème concret, pour illustrer tout ce qu'on a vu dans les deux premiers chapitres de ce mémoire.

Soit :

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = \{u \in C^{2+\theta}([0, 1]; D(A)) : u''(0) \in (D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}\}, \\ \tau_\theta = D(A) \times D_{\sqrt{-A}}(\theta + 1, \infty), \end{cases}$$

où

$$D_{\sqrt{-A}}(\theta + 1, \infty) = \{\xi \in D_{\sqrt{-A}} : \sqrt{-A}\xi \in (D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}\}.$$

Proposition 3.1.1 *L'application J*

$$\begin{aligned} J & : \quad \varepsilon_\theta \longrightarrow \tau_\theta \\ u & \longmapsto (u(0), u'(1)) \end{aligned}$$

est définie, linéaire, continue et bijective.

Preuve. L'application J est évident linéaire .soit $u \in \varepsilon_\theta$, alors :

$$u'', Au \in C^\theta([0, 1]; X)$$

D'où :

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = u''(x) + Au(x) := g(x), \\ u(0) = d_0 & \text{dans } D(A), \\ u'(1) = n_1 & \text{dans } X, \end{cases}$$

de plus

$$u \in C^{2+\theta}([0, 1]; X) \cap C^\theta([0, 1]; D(A)).$$

Du théorème (2) (chapitre 2), on obtient que :

$$d_0 \in D(A), n_1 \in D(\sqrt{-A})$$

et

$$Ad_0 - g(0) \in (D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}, \sqrt{-A}n_1 \in (D(A), X)_{1-\theta/2, \infty},$$

d'où : $(d_0, n_1) \in \tau_\theta$. Montrons maintenant que J est bijective, Soit $(d_0, n_1) \in \tau_\theta$, Alors le problème admet une unique solution stricte u vérifiant

$$u \in C^{2+\theta}([0, 1]; X) \cap C^\theta([0, 1]; D(A)),$$

telle que :

$$u''(0) = -Ad_0 + g(0) \in (D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}$$

d'où $\exists! u \in \epsilon_\theta$ telle que $J(u) = (d_0, n_1)$, alors J est bijective.

Soit (d_0, n_1) , alors

$$\begin{aligned} \|J(u)\|_{\tau_\theta} &= \|(d_0, n_1)\|_{D(A)*D_{\sqrt{-A}}(\theta+1, \infty)} = \sup_{x \in [0, 1]} \left\{ \|d_0\|_{D(A)}, \|n_1\|_{D_{\sqrt{-A}}(\theta+1, \infty)} \right\} \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} \left\{ \|d_0\|_{D(A)}, \left\| \sqrt{-A}n_1 \right\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \right\}. \end{aligned}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} \|d_0\|_{D(A)} &\leq \|Ad_0\|_X \\ &\leq \|Ad_0 - u''(0) + u''(0)\|_X \\ &\leq \|u''(0)\|_X + \|Ad_0 - u''(0)\|_X \\ &\leq c \left[\|u''(0)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} + \sup_{x \in [0, 1]} \|Au(x)\|_X + \sup_{x \in [0, 1]} \|u''(x)\|_X \right] \\ &\leq c \left[\|u''(0)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} + \|Au\|_{C([0, 1], X)} + \|u''\|_{C([0, 1], X)} \right] \\ &\leq c \left[\|u''(0)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} + \|Au\|_{C^\theta([0, 1], X)} + \|u''(x)\|_{C^\theta([0, 1], X)} \right] \\ &\leq c \|u\|_{\epsilon_\theta}. \end{aligned}$$

D'une autre part, de la formule (2.5.1) on a :

$$\begin{aligned}
 & \|n_1\|_{D_{\sqrt{-A}}(\theta+1, \infty)} = \left\| \sqrt{-A} n_1 \right\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \\
 &= \left\| (I - Z)^{-1} (I + Z) Au(1) + 2(I - Z)^{-1} e^{-\sqrt{-A}} Ad_0 \right\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \\
 &+ \left\| (I - Z)^{-1} \sqrt{-A} \int_0^1 e^{-(1+s)\sqrt{-A}} g(s) ds \right\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \\
 &+ \left\| (I - Z)^{-1} \sqrt{-A} \int_0^1 e^{-(1-s)\sqrt{-A}} g(s) ds \right\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \\
 &\leq \left\| (I - Z)^{-1} (I + Z) Au(1) \right\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \\
 &+ \left\| 2(I - Z)^{-1} e^{-\sqrt{-A}} Ad_0 \right\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} + c \|g\|_{C^\theta([0,1], X)} \\
 &\leq c [\|Au(1)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} + \|Ad_0\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}}] \\
 &+ c [\|Au\|_{C^\theta([0,1], X)} + \|u''\|_{C^\theta([0,1], X)}] \\
 &\leq c [\|Au(1)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} + \|Ad_0 + u''(0) - u''(0)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}}] \\
 &+ \|Au\|_{C^\theta([0,1], X)} + \|u''\|_{C^\theta([0,1], X)}]
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 & \|n_1\|_{D_{\sqrt{-A}}(\theta+1, \infty)} \\
 &\leq c \left[\sup_{x>0} \left\| x^{-\theta} (e^{-x\sqrt{-A}} - 1) Au(1) \right\|_X + \sup_{x>0} \left\| x^{-\theta} (e^{-x\sqrt{-A}} - 1) (Ad_0 + u''(0)) \right\|_X \right. \\
 &\quad \left. + \|u''(0)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} + \|Au\|_{C^\theta([0,1], X)} + \|u''\|_{C^\theta([0,1], X)} \right] \\
 &\leq c \left[\sup_{x>0} \|Au(x)\|_X + \sup_{x>0} \|u''(x)\|_X + \|u''(x)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \right] \\
 &\quad + c [\|Au\|_{C^\theta([0,1], X)} + \|u''\|_{C^\theta([0,1], X)}] \\
 &\leq c \left[\|Au\|_{C^\theta([0,1], X)} + \|u''\|_{C^\theta([0,1], X)} + \|u''(0)\|_{(D(A), X)_{1-\theta/2, \infty}} \right] \\
 &\leq c \|u\|_{\varepsilon_\theta}.
 \end{aligned}$$

Finalement on déduit que $\exists c > 0 / \forall u \in \varepsilon_\theta, \|J(u)\|_{\tau_\theta} \leq c \|u\|_{\varepsilon_\theta}$. □

Exemple 3.1.1 Soit $X = C([0, 1])$ et soit

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in C^2([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}, \\ Au = u''. \end{cases}$$

Ici $D(A)$ n'est pas dense dans X car

$$\overline{D(A)} = \{u \in C([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

La caractérisation de $D(\sqrt{-A})$ est difficile, cependant on sait que

$$D(\sqrt{-A}) \subset (D(A), X)_{1/2, \theta} = \{u \in C_*^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\},$$

où

$$C_*^1([0, 1]) = \left\{ u \in C([0, 1]) : \sup_{x, y, (x+y)/2 \in [0, 1]} \left(\frac{|u(x) + u(y) - 2u((x+y)/2)|}{|x-y|} \right) < \infty \right\}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} & (D(A), C([0, 1]))_{1-\theta/2, \infty} \\ &= \{u \in C^2([0, 1], C([0, 1]))_{1-\theta/2, \infty} : u(0) = u(1) = 0\} \\ &= \{u \in C^\theta([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}, \end{aligned}$$

(voir [16]). soit

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = \{u \in C^{2+\theta}([0, 1]; C([0, 1])) \cap C^\theta[0, 1] : D(A) : \\ u''(0) \in (D(A), C([0, 1]))_{1-\theta/2, \infty}\}, \\ \tau_\theta = D(A) \times \kappa_\theta \end{cases}$$

où

$$\kappa_\theta = \{\xi \in H^1(\mathbb{R}) : \sqrt{-A}\xi \in (D(A), C([0, 1]))_{1-\theta/2, \infty}\}.$$

On peut appliquer la proposition (3.1.1) afin d'obtenir la proposition suivante

Proposition 3.1.2 L'application N

$$\begin{aligned} N & : \quad \varsigma_{\theta \rightarrow \tau_\theta} \\ u & \longmapsto (u(0), u'(1)) \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire, continue et bijective.

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a considéré, un problème abstrait de second ordre de type mêlé dans l'espace de Hölder. Ce problème a été étudié par F.Z.MAZAGHRANI ([13]) en 2011.

Le but de notre travail était de trouver des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution, on a obtenu des conditions nécessaires et suffisantes sur les données.

Les techniques utilisées sont basées sur la théorie des semi-groupes, le calcul de Dunford, espaces d'interpolation, etc...

Bibliographie

- [1] **W.Arendt, R. Chill, D. Fornaro and C.poupand** : L^P -maximal regularity for non-autonomous evolution equations, *J. Differential Equations* 237 (2007), 1–26.
- [2] **A.V. Balakrishnan** : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pacific J. Math.* 10 (1960), 419–437.
- [3] **G. Da Prato** : Abstract differential equations, maximal regularity, and linearization ; in *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part 1 (Berkeley, Calif., 1983)*, *Proc. Sympos. Pure Math.* 45, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 359–370.
- [4] **A. Favini , R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi** : On the solvability and the maximal regularity of complete abstract differential equations of elliptic type, *Funkcial. Ekvac.* 47 (2004), 423–452.
- [5] **A. Favini , R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi** : Necessary and sufficient conditions for maximal regularity in the study of elliptic differential equations in Hölder spaces, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 22 (2008), 973–987.
- [6] **P. Grisvard** : *Spazi di tracce e applicazioni*, *Rend. Mat. (6)* 5 (1972), 657–729.
- [7] **M. Hasse** : *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, *Operator Theory : Advances and Applications* 169, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [8] **R.Labbas** : *Problèmes aux limites pour une équation différentielle abstraite de type elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.
- [9] **J. -L. Lions and J. Peetre** : Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 19 (1964), 5–68.

-
- [10] **A.Lunardi** : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.
 - [11] **C. Martinez and M. Sanz** : *Fractional powers of non-densely defined operators*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 18 (1991), 443–454.
 - [12] **A. Medeghri** : *Cours master (2015-2017)*.
 - [13] **F. Z. Mezeghrani** : *Necessary and Sufficient Condition For The Solvability And Maximal Regularity Of Abstract Differential Equations Of Abstract Differential Equations Of Mixed Type In Holder Spaces*, *Rend. Mat , Osaka J. Math.* 50 (2011), 725–747.
 - [14] **E. Sinestrari** : *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions*, *J. Math. Anal. Appl.* 107 (1985), 16–66.
 - [15] **J. Tanabe** : *Equations of Evolution*, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.
 - [16] **H. Triebel** : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.