

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



THÈSE

**Doctorat en Sciences**

**pour obtenir le grade de docteur délivré par**

**Université de Mostaganem**

**Spécialité “Mathématiques Appliquées”**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Naima ABLAOUI-LAHMAR**

le 23 Novembre 2016

## **Sur l'analyse multi-résolution en ondelettes bidimensionnelles et application pour la simulation des problèmes biologiques**

Directeur de thèse : **Omar BELHAMITI (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

### **Jury**

<b>M. S.M. BAHRI,</b>	MCA	Président (Université de Mostaganem, Algérie)
<b>Mme K. NACHI,</b>	Professeur	Examinatrice (Université d'Oran 1, Algérie)
<b>M. A. MOUSSAOUI,</b>	Professeur	Examinateur (Université de Tlemcen, Algérie)
<b>M. H. BOUZIT,</b>	MCA	Examinateur (Université de Mostaganem, Algérie)
<b>M. M. CHEGGAG,</b>	Professeur	Examinateur (ENP d'Oran, Algérie)
<b>M. A. AMIR,</b>	MCA	Professeur invité (Université de Mostaganem, Algérie)

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES**  
**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)**  
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

# Remerciements

Mes chaleureux remerciements et ma profonde gratitude vont à mon encadreur Mer BELHAMITI OMAR, pour m'avoir accueilli dans son équipe et pour m'avoir autant fait confiance. Ses qualités mathématiques et humaines ont rendu ces quatre années de travail des plus agréables.

Très sensible à l'honneur que m'ont fait, Mme NACHI, Mer CHEGGAG, Mer MOUS-SAOUI, Mer BAHRI, Mer BOUZIT et Mer AMIR, d'avoir accepté de faire partie de mon jury, je les en remercie infiniment.

J'ai une pensée toute particulière à mes très proches et chères ex étudiantes, avec qui une partie du chemin a été faite dans la bonne humeur, il s'agit de BOUZID Leila, HAM-MOU MAAMAR Maghnia, ALI MERINA Houria et HAKIKI Kheira.

Je tiens à remercier ma MAMAN pour son amour, son dévouement inconditionnel et ses perpétuels encouragements. Pour leur soutien permanent, que mon frère, mes sœurs et toute ma famille, trouvent ici toute ma reconnaissance.

Je remercie enfin et surtout ceux avec qui j'ai la chance de partager ma vie, mon mari Krimo, ma fille Marina et mon fils Sami.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>1 La modélisation du Gliome</b>	<b>7</b>
1 Introduction	7
2 Bagage biologique et médical	9
2.1 Le cerveau	9
2.2 Le gliome (La tumeur cérébrale).	10
3 Modélisation des Gliomes	11
3.1 Les ingrédients et les hypothèses de la modélisation	11
3.2 La description mathématique	13
4 Proposition d'un modèle "Position particulière"	15
<b>2 L'approximation dans certains espaces fonctionnels</b>	<b>20</b>
1 Introduction et motivation	20
2 Les ondelettes de Legendre	21
2.1 Les polynômes de Legendre	21
2.2 Les ondelettes de Legendre	23
3 L'approximation dans $L^2(]0, 1[)$	24
3.1 Décomposition des éléments de $L^2(]0, 1[)$	24
4 L'approximation dans l'espace $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$	26
4.1 La décomposition des éléments de $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$	26
4.2 Analyse des fonctions coefficients $C_{nm}$	27
4.3 L'étude de la convergence	29
4.4 Approximation et estimation de l'erreur	31
5 L'approximation dans l'espace $C([0, T]; L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[))$	32
5.1 Généralités dans $L^2(]-1, 1[ \times ]-1, 1[)$	32
5.2 La décomposition dans $L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[)$	33
6 La décomposition des éléments de $C([0, T]; L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[))$	35
<b>3 La méthode de résolution</b>	<b>38</b>
1 Introduction	38
2 Les matrices opérationnelles d'intégration	40
2.1 Le cas des ondelettes monodimensionnelles	40
2.2 Le cas des ondelettes bidimensionnelles	44
3 Exposé de la méthode (cas monodimensionnel en espace)	48
3.1 Cas des conditions de type Dirichlet	49
3.2 Cas des conditions mixtes	51
4 Exposé de la méthode (cas bidimensionnel en espace)	53

4.1	Cas des conditions de type Dirichlet : . . . . .	53
4.2	Cas des conditions mixtes . . . . .	56
4.3	Cas des conditions de type Neumann . . . . .	59
5	Résultats Numériques . . . . .	60
5.1	La technique de quazilinéarisation (QLT) . . . . .	61
5.2	Exemple 1 (Equation des télégraphistes) . . . . .	61
5.3	Exemple 2 (Equation de réaction diffusion) . . . . .	63
5.4	Exemple 3 (Equation de réaction-convection-diffusion) . . . . .	64
5.5	Exemple 4 (le cas bidimensionnel) . . . . .	66
6	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Développement de la méthode en trois dimensions</b>	<b>70</b>
1	Définition et propriétés des ondelettes en 3 dimensions . . . . .	70
2	Calcul des matrices opérationnelles d'intégration . . . . .	72
2.1	Calcul de la matrice $P_x$ . . . . .	72
2.2	Calcul de la matrice $P_y$ . . . . .	74
2.3	Calcul de la matrice $P_z$ . . . . .	75
3	Développement de la méthode de résolution . . . . .	77
3.1	Résolution de l'équation complète . . . . .	77
3.2	Exemple simple . . . . .	83
	<b>Conclusion</b>	<b>85</b>

# Introduction générale

Cette thèse est une contribution, d'une part à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles qui dépendent des variables temps-espace et d'autre part à la modélisation en oncologie (cancérologie).

Parmi les équations spatio-temporelles, les équations de la conservation de la matière, de réaction-diffusion et de réaction-convection-diffusion se distinguent, vu qu'elles interviennent dans la description de beaucoup de phénomènes naturels. Parmi ces phénomènes, on cite les réactions chimiques [35], l'invasion biologique [38], l'excitation des tissus cardiaques [15], les AVC (accident vasculo-cérébraux), l'évolution de la digestion, de la cicatrisation, l'évolution d'une tumeur [26], etc.

On s'est intéressé particulièrement à la description d'une tumeur cérébrale appelée "Gliome" [26]. Le modèle qui régit l'évolution et la croissance du gliome fait intervenir les trois équations suscitées (voir plus). Afin de comprendre les étapes de cette modélisation, un bagage biologique et médical concernant le cerveau, les tumeurs et leurs formations (selon les médecins spécialisés et les biologistes) a été introduit. En remarquant que les modèles existants ne prennent pas en considération les différentes positions de la tumeur, on a tenté d'établir un qui décrive l'évolution de la tumeur dans le cas où elle se situe à proximité du crâne et dans différentes positions.

Les modèles de la croissance tumorale, tout comme la plus part des modèles qui décrivent les phénomènes diffusifs et les interactions entre les différentes substances qui interviennent, sont constitués d'un système d'équations de réaction-diffusion non linéaires et couplées. Ces systèmes ont largement été étudiés et ont fait l'objet de plusieurs analyses ; existence locale et globale de la solution [35], influence des données sur le comportement de la solution [19]. Toutefois, ces systèmes ne possèdent pas une expression explicite de la solution. Le recours aux méthodes numériques pour estimer la solution s'avère donc nécessaire.

Beaucoup de méthodes numériques ont été développées, améliorées, combinées pour obtenir une solution approchée de haute qualité d'un problème donné. Pour ne citer que les problèmes faisant intervenir l'équation de réaction-diffusion, on peut se pencher sur les travaux de [5], pour la méthode des éléments finis, ceux de [45] pour la méthode des différences finies et enfin ceux de [11] et [26] pour l'application de la méthode des volumes finis.

Récemment, un intérêt particulier a été porté aux ondelettes et à leurs applications en analyse numérique. Par exemple, la méthode des ondelettes de Legendre est largement utilisée pour la résolution des équations différentielles ou intégrales. Cette méthode a été introduite, pour la première fois en 2000, par Razzaghi et Yousefi [33] pour résoudre des problèmes variationnels. En 2001, les mêmes auteurs l'ont adoptée pour la résolution d'une équation différentielle [34]. Elle a été encore appliquée en 2006 par Yousefi pour traiter les équations intégrales d'ABEL [48] et en 2007 par Maleknejad et Sohrabi [27] pour les équations de Fredholm de première espèce. Au cours de l'année 2011, REHMAN et ALI KHAN [36] l'ont introduite pour la résolution des équations différentielles fractionnaires.

Par deux techniques différentes, et avec les ondelettes de Legendre en deux dimensions, [47] et [6], ont pu résoudre les équations aux dérivées partielles à deux variables et d'ordre deux.

Cette méthode a pour objectif de ramener la résolution d'une équation différentielle, intégrale ou aux dérivées partielles à la résolution d'un simple système linéaire algébrique. Elle est basée principalement sur trois étapes pour un problème d'ordre 1 :

La première étape consiste à décomposer la dérivée de la fonction inconnue  $u$  solution du problème, dépendante de la variable  $x$ , en série d'ondelettes de Legendre et ensuite approcher cette fonction par une somme finie du type

$$u'(x) \simeq \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M C_{nm} \Psi_{nm}(x), \quad (1)$$

avec  $C_{nm} = \langle u', \Psi_{nm} \rangle = \int_0^1 u'(x) \Psi_{nm}(x) dx$ . Les fonctions  $\Psi_{nm}(x)$  sont les ondelettes de Legendre en une dimension.

La deuxième étape consiste, via l'intégration de la relation (1), à exprimer les différents termes, qui apparaissent dans l'équation du problème, en fonction des coefficients  $C_{nm}$  et de la matrice opérationnelle d'intégration introduite dans [34].

Dans la troisième étape, l'équation (différentielle ou intégrale) est réduite à un système algébrique dont l'inconnue est le vecteur  $C$  qui est formé de tous les coefficients  $(C_{nm})_{n,m}$ .

L'objectif de cette thèse est la généralisation de cette méthode pour les équations qui dépendent du temps  $t$  et des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Pour cela, on propose de décomposer en série d'ondelettes de Legendre, les éléments  $f$  de l'espaces  $C([0, T], L^2([0, 1]))$  et les éléments  $f$  de l'espace  $C([0, T], L^2([0, 1] \times [0, 1]))$ .

L'idée principale réside dans le fait que les coefficients de ces décompositions ne sont plus des réels mais des fonctions en temps  $t$ .

La série obtenue pour les fonctions  $f \in C([0, T], L^2([0, 1]))$  est

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \geq 0} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(x), \quad (2)$$

avec

$$C_{nm}(t) = \langle f, \Psi_{nm} \rangle = \int_0^1 f(t, x) \Psi_{nm}(x) dx,$$

et celle obtenue pour les fonctions  $f \in C([0, T], L^2([0, 1] \times [0, 1]))$ , est du type

$$f(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m, m' \geq 0} C_{nmn'm'}(t) \Psi_{nmn'm'}(x, y), \quad (3)$$

avec

$$C_{nmn'm'}(t) = \langle f, \Psi_{nmn'm'} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(t, x, y) \Psi_{nmn'm'}(x, y) dx dy.$$

Les fonctions  $\Psi_{nmn'm'}(x, y)$  sont les ondelettes de Legendre en deux dimensions.

Grâce à ces décompositions (par une approximation en sommes finies) et aux matrices opérationnelles d'intégration, une procédure calculatoire est alors développée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Cette résolution est ramenée à la résolution d'un système différentiel dont l'inconnue est le vecteur  $C(t)$ . Ce vecteur est formé des fonctions coefficients de la décomposition;  $(C_{nm}(t))_{nm}$  pour une variable spatiale ou des  $(C_{nmn'm'}(t))_{nmn'm'}$  pour deux variables spatiales. Il restera à résoudre le système différentiel qui fournira ces fonctions coefficients.

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante.

Le chapitre 1 est composé de deux parties. La première qui est un résumé d'une partie de la thèse de Lagaert [26], comporte les étapes de l'évolution du gliome et les hypothèses de la modélisation de cette évolution. La seconde partie est consacrée à notre contribution.

Le chapitre 2 est réservé à l'établissement de différents résultats sur :

- l'analyse des fonctions coefficients,
- la convergence des séries (2) et (3),
- certains résultats d'approximation.

Dans le chapitre 3, et après un rappel des matrices d'intégration, un résultat sur l'inversion de ces matrices est établi, ainsi qu'un exposé détaillé concernant cette méthode de résolution est effectué en considérant les conditions aux limites de type Dirichlet, mixtes et enfin de type Neumann pour le cas mono et bidimensionnel en espace. Des tests numériques, réalisés sur l'équation des télégraphistes et sur l'équation de réaction-convection-diffusion linéaire et non linéaire, ont démontré l'efficacité de la méthode proposée. Pour linéariser les équations considérées, une méthode numérique et itérative, dite méthode de quazilinéarisation, a été retenue.

Dans le chapitre 4, les ondelettes de Legendre en trois dimensions et leurs propriétés sont introduites. Les matrices opérationnelles d'intégration, par rapport à chaque variable, notées  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont calculées. Les résultats du chapitre 3 ont été généralisés pour les équations aux dérivées partielles qui dépendent du temps et des trois variables d'espace.

On termine ce manuscrit par une conclusion générale et des perspectives.

# Chapitre 1

## La modélisation du Gliome

C'est pour la nature de ses équations que le modèle, qui régie l'évolution du gliome, a été choisi. Les équations de ce modèle sont les équations de réaction-diffusion qui sont fortement non linéaires, couplées et faisant intervenir plusieurs phénomènes tels que la convection ou encore la chimiotaxie.

### 1 Introduction

Les gliomes sont des tumeurs qui représentent 50% de toutes les tumeurs cérébrales. Ils sont agressifs, très infiltrants et envahissants et détectés que tardivement par imagerie médicale, ce qui conduit à une espérance de vie courte pour la personne atteinte.

En cancérologie, la modélisation a été développée dans le but de comprendre et prédire la croissance tumorale, mais aussi pour anticiper et comparer les effets des différentes thérapies. Comme un très grand nombre de phénomènes intervient dans le développement d'une tumeur, (certains sont encore incompris d'autres peut être même pas imaginés) la modélisation mathématique (complétée par l'imagerie médicale qui est en plein essor) pourrait apporter des informations supplémentaires sur certains mécanismes tel que le métabolisme, la structure multicouches, l'étendue de l'invasion spatio-temporelle du gliome [12], la détermination des taux d'infiltration et d'invasion [7].

Différentes approches ont été utilisées pour poser un modèle mathématique décrivant l'évolution d'une tumeur. La première approche discrète adopte les automates cellulaires [4] et [20], où chaque cellule, individuellement étudiée, se déplace sur les nœuds d'une grille. En 2003 et par une approche discrète, Giese [21] met en évidence deux types de population de cellules cancéreuses, l'invasive et la proliférante ainsi que leur influence sur la croissance de la tumeur.

La difficulté pour ces problèmes discrets réside essentiellement dans la gestion d'un grand nombre de cellules. (une tumeur peut atteindre des millions de cellules), en plus du fait que certains aspects importants sont ignorés tels que l'apport en nutriments et en oxygène. On fera remarquer que, ces modèles sont importants dans le sens où ils sont adaptés par les généticiens pour des études microscopiques (par exemple pour étudier la régulation génétique).

Contrairement aux modèles discrets, les modèles continus peuvent décrire le comportement de grandes quantités de cellules en se basant sur des équations aux dérivées partielles ou sur des équations différentielles.

Les équations différentielles ont été utilisées dans les modèles non spatiaux. Ceux-ci décrivent l'évolution du volume, du rayon ou la masse de la tumeur. On peut se référer aux travaux de Siméoni et al. [40], où ces équations différentielles sont utilisées en phar-

macologie pour l'étude de l'impact d'un agent sur la croissance (en poids) de la tumeur. Une synthèse de ces modèles non spatiaux est effectuée en 2014 par Riba et al. [37].

Les modèles spatiaux-temporels se basent sur les équations aux dérivées partielles pour prendre en compte différentes étapes et différents mécanismes dans l'évolution d'une tumeur.

Afin de générer l'aspect diffus de la tumeur, en 2003, Swansson et al. dans [43] et [44] ont introduit l'équation de "réaction-diffusion" pour décrire la croissance du gliome. Depuis, ce modèle est considéré comme référentiel et a servi comme point de départ dans l'élaboration d'autres travaux. Certains sont très simples et ne font pas intervenir beaucoup de paramètres (voir [24][25]), mais ne reproduisent pas la structure multicouche du gliome, n'incluent pas l'influence de l'hypoxie (manque d'oxygène) et donc ne peuvent être utilisés à des fins thérapeutiques. D'autres par contre, font intervenir un maximum de phénomènes [18] et sont par conséquent complexes et leur nombre élevé de paramètres les disqualifie pour des fins cliniques.

Le modèle qu'on présente, celui proposé par Lagaert [26] est considéré comme intermédiaire, proche de la réalité et des observations cliniques. Il prend en considération les différents types de populations cellulaires faisant ainsi reproduire cette structure multicouche typique au gliome. L'apport en nutriments et en oxygène et leur impact sur la croissance de la tumeur et sur la formation de la néo-vascularisation est clairement mis en évidence.

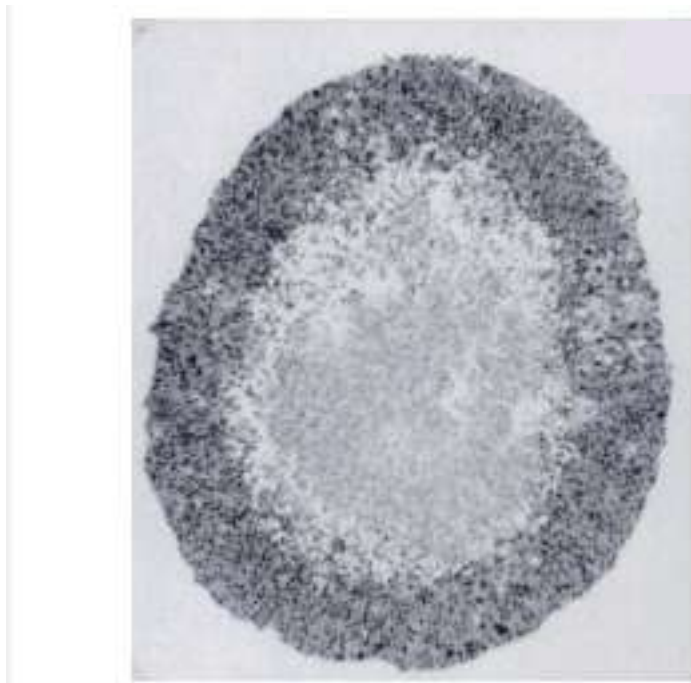


FIGURE 1.1 – Exemple d'une structure multicouche typique aux gliomes. Au centre le coeur nécrosé, à l'extérieur les cellules proliférantes et entre les deux les cellules quiescentes. Le diamètre de ce sphéroïde est 1.4mm [42].

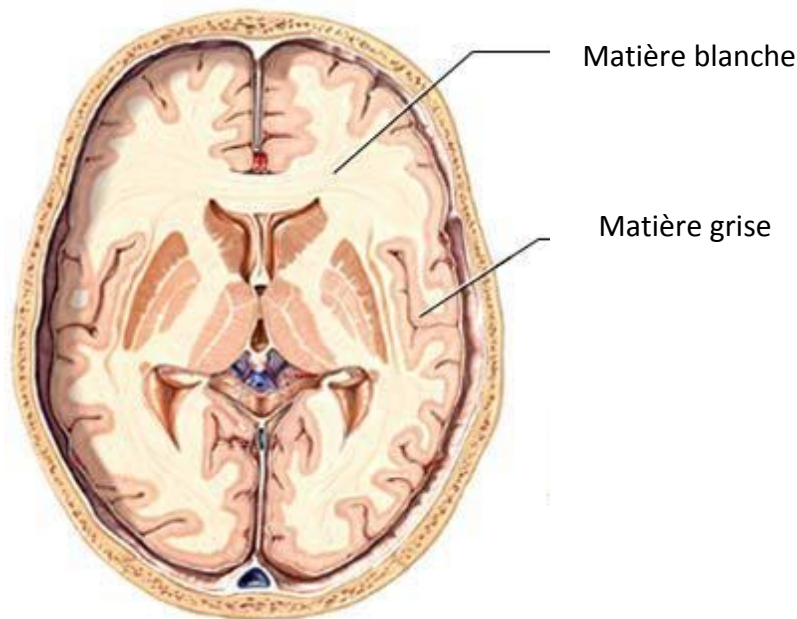


FIGURE 1.2 – Cerveau.

## 2 Bagage biologique et médical

### 2.1 Le cerveau

Le cerveau est le centre du système nerveux et se trouve au centre de la cavité crânienne, baignant dans un liquide, appelé liquide céphalo-rachidien (ou céphalo-spinal). Il est rattaché aux os du crâne par les méninges. Ceux sont trois couches, la dure mère qui tapisse les os du crâne, l'arachnoïde et la pie-mère qui recouvrent tout le cerveau. Entre ces deux dernières couches se trouve le liquide céphalo-spinal et des vaisseaux sanguins qui irrigue le cerveau. Les neurones jouent le rôle principal dans le traitement de l'information nerveuse, quant aux cellules gliales, (qui occupent 50% du volume cérébral), elles remplissent diverses fonctions assurant un bon fonctionnement des neurones. Ces derniers, communiquent entre eux par des signaux (électrochimiques) envoyés via l'axone (prolongement du neurone). Le point de jonction entre l'axone d'un neurone et d'un autre neurone (là où le signal est transmis) est appelé la synapse. Il peut exister des milliers de terminaisons synaptiques pour un même axone.

Les axones sont regroupés en faisceaux de fibre nerveuse assurant la connexion entre le cerveau et le reste du corps et entre les différentes zones du cerveau. Ils sont enveloppés d'une gaine de myéline (substance blanche) permettant une transmission rapide du signal (l'information).

Le nom de matière blanche, pour la zone occupée par les faisceaux d'axones est dû à la couleur de la myéline. La zone occupée par les neurones et les cellules gliales est connue par la matière grise.

La longueur totale des axones myélinisés dans le cerveau adulte d'un humain dépasse les 100 000 kilomètres.

## 2.2 Le gliome (La tumeur cérébrale).

### Description et évolution

Une tumeur est un amas de cellules qui ont muté et qui ne sont plus sensibles à la régulation de la division cellulaire. Ayant développé leurs propres signaux de croissance, ces cellules tumorales se divisent de manière anarchique envahissant et asphyxiant les cellules saines des tissus voisins.

Les tumeurs cérébrales sont classées en deux types :

- Les métastases qui proviennent d'un cancer d'un organe extérieur au cerveau (phase terminale).
- Les tumeurs dites spontanées ou primaires. Elles proviennent de différentes cellules du cerveau ou du reste de la boîte crânienne. Elles sont classées, selon l'OMS (organisation mondiale de la santé), en quatre grades (du grade I pour des tumeurs non malignes et pouvant être totalement soignées par chirurgie au grade VI où elles sont considérées comme malignes et agressives, laissant au malade atteint une durée de vie courte de 6 à 12 mois).

Parmi les tumeurs spontanées, on distingue les méningiomes qui se développent lentement sur le périphérique du cerveau (là où sont localisées les méninges) et les gliomes qui sont causés par différentes cellules gliales et qui représentent 50% des tumeurs primaires. Les gliomes de différents grades ont un caractère infiltrant sans effet de masse, c'est à dire qu'au cours de leur évolution ne vont pas repousser et comprimer les tissus sains mais s'y mêlent et les envahissent ne laissant pas de limite claire entre les tissus sains et les tissus cancéreux.

Tout commence, lors de l'évolution d'un gliome, par un tas de cellules qui mutent et qui se divisent en permanence, en consommant les nutriments et l'oxygène rapportés par les réseaux sanguins et présents dans son environnement proche. Ces cellules sont appelées proliférantes, on note  $P$  leur densité et  $C$  la densité de l'apport (oxygène et nutriments) circulant dans le sang. La tumeur à son premier stade mesure quelques millimètres et n'est pas décelable par imagerie médicale telle que l'IRM (imagerie par résonance magnétique). Lorsque les cellules proliférantes se trouvant sur le périphérique de la tumeur sont nombreuses, elles consomment une grande partie des nutriments et d'oxygène ne laissant pas suffisamment pour les cellules qui se trouvent au centre de la masse tumorale. Ces dernières passent alors à l'état quiescent, c'est à dire qu'elles stoppent leurs divisions tout en restant vivantes. La densité des cellules quiescentes est toujours notée  $P$ , c'est avec le taux de mitose (mitose est la division cellulaire) qu'on fera la différence. Pour les cellules proliférantes ce taux de mitose est strictement positif alors qu'il est nul pour les quiescentes. On note  $m$  ce taux qui est fonction de l'oxygène  $C$ . Le manque d'oxygène devient tellement sévère, au centre de la tumeur (c'est l'état d'hypoxie) que les cellules quiescentes se nécrosent et meurent. On note leur densité  $N$ .

A cette étape de l'évolution, qu'on appelle étape avasculaire, la tumeur est bénigne et la taille de celle-ci est limitée par l'apport pauvre en nutriments et oxygène. Mais afin de poursuivre sa croissance, la tumeur va déclencher un processus de création d'un nouveau réseau sanguin pour l'irriguer directement. Ce processus est appelé néo-vascularisation ou angiogénèse. Il se déclenche grâce à des mutations génétiques qui rendent la tumeur capable de sécréter des facteurs pro-angiogénétiques et notamment une protéine appelée VEGF (vascular endothelial growth factor ; facteur de croissance de l'endothélium vasculaire) et qui stimule la division des cellules endothéliales (ces cellules sont les constituants des vaisseaux sanguins). Ce caractère est typique des tumeurs malignes.

Attirées par cette néo-vascularisation, des cellules proliférantes vont se déplacer vers cette nouvelle zone, provoquant ainsi l'invasion des tissus sains. On note I leur densité. Grâce à la richesse de nouvelle vascularisation, les cellules invasives redeviennent proliférantes permettant ainsi l'extension de la tumeur.

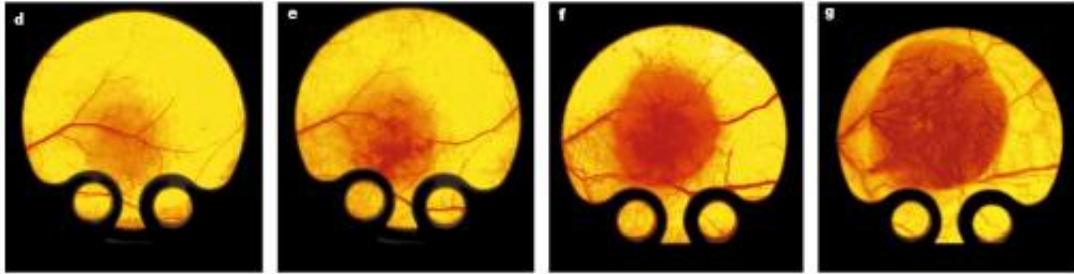


FIGURE 1.3 – Vascularisation d'une tumeur animale [39].

La prise en compte de l'angiogénèse dans la modélisation de la croissance tumorale est importante dans la mesure où elle est la cible de certains agents thérapeutiques, appelés anti-angiogéniques, qui cherchent à la bloquer ou la détruire. Ainsi l'étude de l'effet de ce type de thérapie sur la croissance est très attendue.

### 3 Modélisation des Gliomes

#### 3.1 Les ingrédients et les hypothèses de la modélisation

Il est connu que :

- En raison de leur capacité d'invasion, il est important d'étudier la croissance des gliomes au sein du cerveau tout entier. Celui-ci est donc le domaine d'étude  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , supposé borné, incompressible et indéformable.
- Comme il a été décrit plus haut, la mitose est à l'origine du grossissement de la tumeur au dépend des tissus sains voisins. Cela entraîne un déplacement de l'ensemble de la tumeur et une variation du volume tumoral. C'est ce déplacement qui est considéré comme le mouvement global du processus. On note  $v$ , la vitesse de ce mouvement.

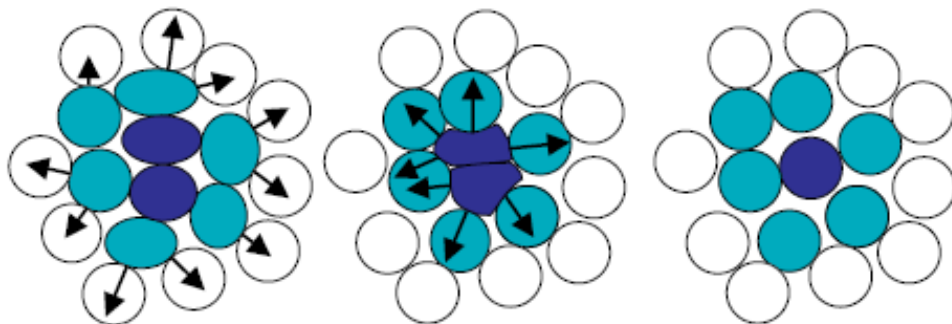


FIGURE 1.4 – Schéma décrivant le mouvement global des cellules.

- La variation du volume tumoral est compensée, via la circulation sanguine, par une perte d'une part de cellules saines mortes par apoptose (mort cellulaire programmée) et d'autre part du liquide spinal. On note  $L$  la densité de l'ensemble de ces constituants du cerveau (cellules +liquide).

On pose les hypothèses suivantes :

- Comme on se place à l'échelle de populations cellulaires, la description de leur évolution se fait par l'équation de la conservation de la masse. Si  $d$  est la densité de la population en question, cette équation est donnée, (pour les cellules qui se contentent de suivre le mouvement global telles que les cellules proliférantes (P) et nécrosées (N)), par

$$\frac{\partial d}{\partial t}(t, x) + \nabla \cdot J_d(t, x) = \text{entrées} - \text{sorties}. \quad (1.1)$$

- La loi de Fick, considère le flux  $J_d$  comme un terme d'advection et l'exprime en fonction de la densité et de la vitesse du mouvement

$$J_d = dv.$$

- D'autres populations cellulaires, telles que les invasives, sont fortement mobiles. Pour décrire cette mobilité, l'équation de la conservation est complétée par diffusion et par chimiotaxie.

- Le terme de diffusion,  $\Delta d(t, x)$ , traduit l'infiltration par les cellules invasives des tissus sains.
- Le terme de chimiotaxie,  $\nabla \cdot (d(d-1)\nabla C)$ , traduit l'attraction des cellules par les zones riches en oxygène  $C$ .

- Les travaux in vivo de Hart en 1998 et de Shochat en 1999 (voir [29]) ont démontré que la croissance en exponentielle d'une tumeur (considérée comme telle) n'était pas conforme aux observations réelles. Il est plus réaliste de supposer que le taux de mitose  $m = m(C)$  suive une progression linéaire. Celle qui semble appropriée est :

$$m(C) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{si } C \geq c_{inv} \\ \frac{C - c_{int}}{c_{inv} - c_{int}} \frac{1}{\tau} & \text{si } c_{int} < C < c_{inv} \\ 0 & \text{si } C \leq c_{int} \end{cases}, \quad (1.2)$$

- $\tau^{-1}$  est une fréquence de référence de division des cellules proliférantes.
- $c_{inv}$  est le seuil d'oxygène pour la transition du type proliférant vers le type invasif.
- $c_{hypo}$  est le seuil d'oxygène pour la transition du type proliférant (quiescent) vers le type nécrosé.
- $c_{int}$  est un seuil intermédiaire où les cellules ne se divisent plus tout en restant vivantes. On peut le prendre égale à la moyenne entre  $c_{inv}$  et  $c_{hypo}$  ;  $c_{int} = \frac{c_{hypo} + c_{inv}}{2}$ .

Pour mieux comprendre ce formalisme, voir le diagramme 1.5.

**Remarque 1.1** *Le caractère incompressible du cerveau et sa fermeture se traduisent par le fait que l'ensemble des densités cellulaires reste constant. En choisissant des densités normalisées, cela entraîne :*

$$N + P + I + L = 1. \quad (1.3)$$

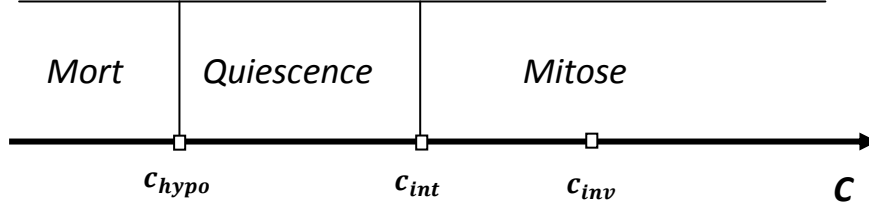


FIGURE 1.5 – Transition entre les différents types cellulaires.

### 3.2 La description mathématique

On rappelle que  $N(t, x)$ ,  $P(t, x)$ ,  $I(t, x)$  et  $L(t, x)$  sont, respectivement, les densités des cellules nécrosées, proliférantes, invasives et saines à l'instant  $t$  et à la position  $x \in \Omega$ .

La dynamique des différentes populations cellulaires suivra le diagramme :

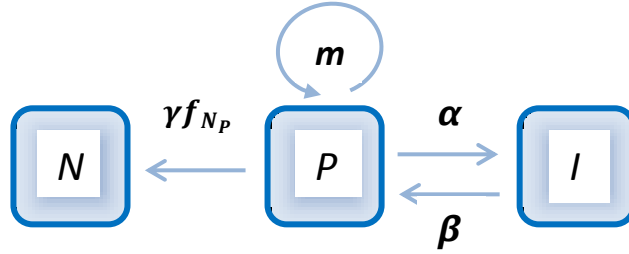


FIGURE 1.6 – Dynamique cellulaire.

Comme la population des cellules nécrosées et des cellules proliférantes suit le mouvement global de la tumeur, l'équation (1.1) de la conservation de la matière s'écrit pour

- les cellules nécrosées qui proviennent de la mort des cellules proliférantes avec un taux de mortalité  $\gamma$

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t, x) + \nabla \cdot (v(t, x)N(t, x)) = \gamma f_{Np}P(t, x), \quad (1.4)$$

$f_{Np}$  est une fonction seuil déterminant le passage en nécrose, donnée par :

$$f_{Np}(c) = \tilde{H}(c - c_{hypo}), \quad (1.5)$$

avec

$$\tilde{H}(x) = \frac{1 + \tanh(Rx)}{2},$$

$R$  est une constante de régularisation (ou de raideur) prise  $R = 500$ .

- les cellules proliférantes

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \nabla \cdot (v(t, x)P(t, x)) = m(c)P(t, x) - \alpha P(t, x) + \beta I(t, x) - \gamma f_{Np}P(t, x), \quad (1.6)$$

- le terme  $\alpha P(t, x)$ , représente les cellules proliférantes qui ont transité à l'état invasif avec un taux  $\alpha$ ,
- le terme  $\beta I(t, x)$ , représente les cellules invasives qui ont transité vers l'état proliférant avec un taux  $\beta$ ,
- le terme  $\gamma f_{N_p} P(t, x)$  est le nombre des cellules proliférantes qui se sont nécrosées.

La population des cellules invasives est décrite par une équation de type "réaction-diffusion" complétée par un terme de chimiotaxie, vu leur déplacement privilégié vers les zones riche en oxygène, on obtient

$$\frac{\partial I}{\partial t}(t, x) + \nabla \cdot (v(t, x)I(t, x)) - \nabla \cdot (K_I \nabla I) + \eta \nabla \cdot ((1 - I) \nabla C) = \alpha P(t, x) - \beta I(t, x), \quad (1.7)$$

où  $\eta$  est le coefficient de chimiotaxie.

Comme les cellules invasives infiltrent les tissus sains (mêlangés avec le liquide), cette population va subir l'effet inverse que subit la population de cellules invasives. De plus, le liquide expulsé est proportionnel à la variation du volume de la tumeur lors de la croissance. L'équation complète régissant la densité du "liquide" est

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t, x) + \nabla \cdot (v(t, x)L(t, x)) + \nabla \cdot (K_I \nabla I) - \eta \nabla \cdot ((1 - I) \nabla C) = -\frac{L}{\|L\|_{1,\Omega}} \int_{\Omega} m(C)P(t, x) dx, \quad (1.8)$$

le terme  $\int_{\Omega} m(C)P(t, x) dx$ , représente la variation du volume de la tumeur.

La concentration de l'oxygène dans le sang est décrite par l'équation

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \nabla \cdot (K_C \nabla C(t, x)) = -\delta_1 P(t, x) + \delta_2 F_{alm}(C_{\max} - C), \quad (1.9)$$

où  $\delta_1 P(t, x)$  représente la consommation en oxygène des cellules proliférantes avec un taux  $\delta_1$ ,  $F_{alm}$  est l'apport en oxygène par le fond des raseaux avec un taux  $\delta_2$ ,  $C_{\max}$  est le seuil de concentration maximale en oxygène.

Les tenseurs de diffusion des cellules invasives  $K_I$  et celui de la concentration en oxygène  $K_C$ , s'expriment en fonction d'un tenseur de référence noté  $K$ , ( $K_I = \lambda_I K$  et  $K_C = \lambda_C K$ ). Ce tenseur de référence est défini par :

$$K = (1 - P - N)K_{sain} + (P + N)K_{tum},$$

où  $K_{sain}$  est le tenseur de diffusion dans le cerveau sain et  $K_{tum}$  est le tenseur de diffusion dans la tumeur. Tous deux peuvent être fournis par une IRM dite de diffusion.

En faisant la somme des expressions (1.4), (1.6)~(1.8), la relation (1.3) entraine

$$\nabla \cdot v = m(C)P(t, x) - \frac{L(t, x)}{\|L\|_{1,\Omega}} \int_{\Omega} m(C)P(t, x) dx. \quad (1.10)$$

La loi de Darcy donne une relation entre la vitesse  $v$  et le potentiel  $\pi$ , à savoir

$$v = -K_v \nabla \pi \quad (1.11)$$

où  $K_v$  est un tenseur de diffusion qui traduit l'influence de la structure du cerveau et donc peut être égal à  $K$ .

Il reste à décrire le phénomène de l'angiogénèse. On suppose que c'est un mécanisme d'adaptation à l'état d'hypoxie. Les cellules hypoxiques de la tumeur vont sécréter le facteur de croissance vasculaire endothéliale (appelé VEGF) qui est à l'origine de la fixation et

de la formation de la néo-vascularisation. Comme pour les cellules invasives, leur quantité  $\|I\|_{1,\Omega}$  varie en fonction de l'hypoxie, en introduisant pour l'angiogénèse un quantificateur numérique  $\xi$ , et en supposant que sa variation par rapport au temps est proportionnelle à la quantité des cellules invasives, on obtient une description de la concentration  $\xi$  par l'équation différentielle

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = \frac{1}{\tau_2} \int_{\Omega} I(t, x) dx - \frac{\xi}{\tau_3} \int_{\Omega} P(t, x) dx, \quad (1.12)$$

où  $\tau_2, \tau_3$  représente respectivement la vitesse de formation et de dégradation de la néo-vascularisation. Le terme  $\frac{\xi}{\tau_3} \int_{\Omega} P(t, x) dx$ , représente la dégradation de la vascularisation par la tumeur.

L'apport en oxygène est donné par

$$\begin{cases} F_{alm} = F_0 + F_{angio} \\ F_{angio} = F_{max} P \tanh(\xi), \end{cases}$$

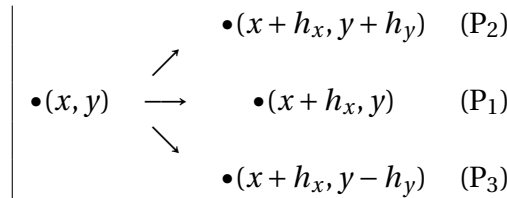
$F_0$  et  $F_{max}$  sont deux paramètres qui peuvent être définis par une IRM dite de perfusion (ou biopsies).

Comme il n'y a pas d'échange avec l'extérieur du cerveau, toutes les conditions aux limites sont soit de type Dirichlet ou de type Neumann (flux nuls sur le bord du cerveau).

## 4 Proposition d'un modèle "Position particulière"

Pour que les modèles soient mieux représentatifs de l'évolution d'une tumeur, on devrait inclure la position de cette tumeur au sein de l'organe, comme cela a été noté par Filipovic et al dans [17] en rapportant, *"In order to make a clinically relevant cancer simulation tool that accurately predicts in vivo tumour growth dynamics, shape and spread throughout an organ, computational models must consider the location of a tumour within the organ, and the physical constraints placed on growth by that organ"*. Si cette tumeur se situe à proximité du crâne, son évolution ne se fait pas autour de la masse tumorale mais plutôt à l'intérieur du crâne. On tente, dans cette section, d'établir un modèle pour ces positions particulières.

On suppose que le cerveau est le carré unité. Une tumeur, qui se trouve à proximité et à gauche du crâne, occupe au début de sa formation une position  $x = 0$  et  $y \in [0, 1]$ . On suppose aussi que les cellules, se trouvant à une position quelconque  $(x, y)$ , se déplacent aléatoirement vers les trois directions de positions  $(x + h_x, y)$ ,  $(x + h_x, y + h_y)$  et  $(x + h_x, y - h_y)$  avec des probabilités respectives  $P_1, P_2$  et  $P_3$ . (voir diagramme ci dessous)



Ces hypothèses se traduisent par l'équation du bilan suivante

$$\begin{aligned} & \underbrace{u(t + \Delta t, x, y) - u(t, x, y)}_{\text{variation entre } t \text{ et } t + \Delta t} \quad (1.13) \\ = & \underbrace{u(t, x, y)}_{\text{quantité existante}} - \underbrace{P_1 u(t, x + h_x, y) + P_2 u(t, x + h_x, y + h_y) + P_3 u(t, x + h_x, y - h_y)}_{\text{quantité déplacée}} \\ & + \Delta t \underbrace{(\text{Entrées-Sorties})}_{\text{par unité de temps}} \end{aligned}$$

On effectue un développement des quantités  $u(t, x+h_x, y)$ ,  $u(t, x+h_x, y+h_y)$  et  $u(t, x+h_x, y-h_y)$ .

$$u(t, x+h_x, y) = u(t, x, y) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) + \frac{1}{2} h_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) + \dots$$

$$\begin{aligned} u(t, x+h_x, y+h_y) = & u(t, x, y) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) + h_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) \\ & + \frac{1}{2} \left( h_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) + 2h_x h_y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) + h_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t, x+h_x, y-h_y) = & u(t, x, y) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - h_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) \\ & + \frac{1}{2} \left( h_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) - 2h_x h_y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) + h_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) \right) + \dots \end{aligned}$$

En portant ces développements dans (1.13) et en réarrangeant les termes jusqu'à l'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned} u(t+\Delta t, x, y) - u(t, x, y) = & u(t, x, y) - (P_1 + P_2 + P_3)u(t, x, y) \\ & - (P_1 + P_2 + P_3)h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)h_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) \\ & - (P_1 + P_2 + P_3) \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) - (P_2 - P_3)h_x h_y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) \\ & - (P_2 + P_3) \frac{h_y^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) + \Delta t(\text{Entrées-Sorties}) + \dots \end{aligned}$$

En divisant l'équation par l'unité de temps  $\Delta t$  et sachant que  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ , cette dernière devient

$$\begin{aligned} & \frac{u(t+\Delta t, x, y) - u(t, x, y)}{\Delta t} \tag{1.14} \\ = & - \frac{h_x}{\Delta t} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3) \frac{h_y}{\Delta t} \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) - \frac{h_x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) \\ & - (P_2 - P_3) \frac{h_x h_y}{\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) - (P_2 + P_3) \frac{h_y^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) \\ & + (\text{Entrées-Sorties}) + \dots \end{aligned}$$

On note les composantes de la vitesse

$$\begin{cases} \tilde{v}_x = \frac{h_x}{\Delta t} \\ \tilde{v}_y = \frac{h_y}{\Delta t}, \end{cases}$$

et les composantes du tenseur de diffusion

$$\begin{cases} D_{xx} = \frac{h_x^2}{2\Delta t} \\ D_{yy} = \frac{h_y^2}{2\Delta t} \\ D_{xy} = D_{yx} = \frac{h_x h_y}{\Delta t}. \end{cases}$$

Par passage à la limite dans l'équation (1.14) ( $\Delta t, h_x$  et  $h_y \rightarrow 0$ ), on obtient l'équation de diffusion

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = & -v_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)v_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) - \nabla \cdot (D \nabla u)(t, x, y) \\ & + (\text{Entrées-Sorties}) \end{aligned}$$

où

$$D = \lim_{\Delta t, h_x, h_y \rightarrow 0} \begin{pmatrix} D_{xx} & \frac{1}{2}(P_2 - P_3)D_{xy} \\ \frac{1}{2}(P_2 - P_3)D_{yx} & (P_2 + P_3)D_{yy} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

et

$$\begin{cases} v_x = \lim_{\Delta t, h_x \rightarrow 0} \tilde{v}_x \\ v_y = \lim_{\Delta t, h_y \rightarrow 0} \tilde{v}_y. \end{cases}$$

En considérant seulement l'ordre 1 dans les développements et en suivant les mêmes étapes, on obtient l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = -v_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)v_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) + (\text{Entrées-Sorties}). \quad (1.16)$$

Le mouvement des cellules nécrosées (N) et des cellules proliférantes (P), qui est le mouvement de déplacement de la tumeur, est décrit par l'équation (1.16). Quant au mouvement des cellules invasives (I), des cellules saines (L) et de l'oxygène (C), qui subissent une diffusion en plus du mouvement de la tumeur, est décrit par l'équation (1.15). Les "Entrées-Sorties" sont celles considérées dans le précédent modèle.

On rappelle aussi que les cellules invasives privilégient le déplacement vers les zones les plus riches en oxygène, d'où un rajout d'un terme de chimiotaxie suivant le gradient de l'oxygène pour l'équation régissant le mouvement de ces cellules.

On est en mesure de résumer les équations qui décrivent l'état de la tumeur, à savoir : les cellules nécrosées

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t, x, y) = -v_x \frac{\partial N}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)v_y \frac{\partial N}{\partial y}(t, x, y) + \gamma f_{N_P} P(t, x, y),$$

les cellules proliférantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x, y) = & -v_x \frac{\partial P}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)v_y \frac{\partial P}{\partial y}(t, x, y) + m(c)P(t, x, y) \\ & - \alpha P(t, x, y) + \beta I(t, x, y) - \gamma f_{N_P} P(t, x, y), \end{aligned}$$

les cellules invasives

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t}(t, x, y) = & -v_x \frac{\partial I}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)v_y \frac{\partial I}{\partial y}(t, x, y) - \nabla \cdot (D \nabla I)(t, x, y) \\ & - \eta \nabla \cdot ((1 - I) \nabla C) + \alpha P(t, x, y) - \beta I(t, x, y), \end{aligned}$$

le liquide et les cellules saines

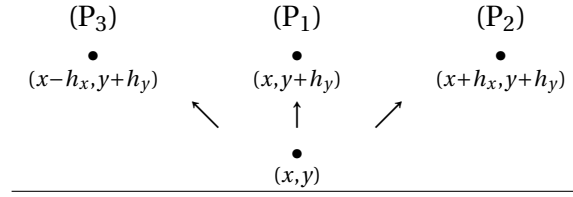
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t}(t, x, y) = & -v_x \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)v_y \frac{\partial L}{\partial y}(t, x, y) - \nabla \cdot (D \nabla I)(t, x, y) \\ & + \eta \nabla \cdot ((1 - I) \nabla C) - \frac{L}{\|L\|_{1, \Omega}} \int_{\Omega} m(C) P(t, x, y) dx dy, \end{aligned}$$

l'oxygène

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(t, x, y) = & -v_x \frac{\partial C}{\partial x}(t, x, y) - (P_2 - P_3)v_y \frac{\partial C}{\partial y}(t, x, y) - \nabla \cdot (D\nabla C)(t, x, y) \\ & -\delta_1 P(t, x, y) + \delta_2 F_{ini}(C_{\max} - C). \end{aligned}$$

Les coefficients qui interviennent dans ces équations tels que  $m(c)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $f_{Np}, \dots$  sont tous définis dans la précédente section.

On peut envisager d'autre positions de la tumeur, quand par exemple celle-ci est située en bas et à proximité du crâne ; c'est à dire qu'au début de sa formation, elle occupe une position  $y = 0$  et  $x \in [0, 1]$ . Le déplacement des cellules se fait alors de bas en haut suivant ce diagramme.



L'équation de diffusion et de transport d'une quantité de cellules de densité  $u(t, x, y)$  sont données par :

— l'équation de diffusion

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = & -v_x(P_3 - P_2) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - v_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) - \nabla \cdot (D\nabla u)(t, x, y) \\ & + (\text{Entrées-Sorties}) \end{aligned}$$

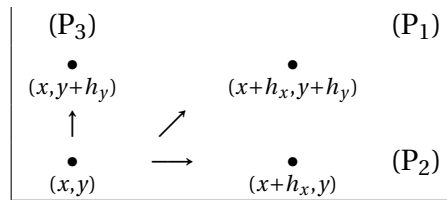
où le tenseur de diffusion est

$$D = \lim_{\Delta t, h_x, h_y \rightarrow 0} \begin{pmatrix} (P_2 + P_3)D_{xx} & \frac{1}{2}(P_2 - P_3)D_{xy} \\ \frac{1}{2}(P_2 - P_3)D_{yx} & D_{yy} \end{pmatrix}.$$

— l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = -(P_3 - P_2)v_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - v_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) + (\text{Entrées-Sorties}).$$

On peut également envisager la situation suivante, on suppose que le centre de la tumeur coïncide avec l'origine  $(0, 0)$ . Dans ce cas c'est la moitié supérieure du cerveau qui est supposée être le carré unité. Le déplacement envisagé des cellules suivra alors ce diagramme.



L'équation de diffusion d'une quantité de cellules de densité  $u(t, x, y)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = & -v_x(P_1 + P_2) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - v_y(P_1 + P_3) \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) - \nabla \cdot (D\nabla u)(t, x, y) \\ & + (\text{Entrées-Sorties}), \end{aligned}$$

où le tenseur de diffusion est

$$D = \lim_{\Delta t, h_x, h_y \rightarrow 0} \begin{pmatrix} (P_1 + P_2)D_{xx} & \frac{1}{2}P_1D_{xy} \\ \frac{1}{2}P_1D_{yx} & (P_1 + P_3)D_{yy} \end{pmatrix},$$

et l'équation de transport est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = -(P_1 + P_2)v_x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) - (P_1 + P_2)v_y \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) + (\text{Entrées-Sorties}).$$

**Conclusion 1.1** *Dans cette dernière partie, un modèle décrivant l'évolution d'un gliome (quand il est situé à proximité du crâne) est présenté. Il est souhaitable de :*

- *le résoudre (ce qui a été très compliqué avec la méthode que l'on présente dans cette thèse),*
- *le confronter à des données réelles pour le valider.*

# Chapitre 2

## L'approximation dans certains espaces fonctionnels

### 1 Introduction et motivation

L'approximation dans des espaces fonctionnels, tels que  $L^2([-1, 1])$ ,  $L^2(]0, 1[)$ ,  $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$  ou alors  $C([0, T]; L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[))$ , passe d'abord par le développement des éléments de ces espaces en séries convergentes, ensuite par la troncature de ces séries (approximation par des sommes partielles).

Ce procédé, c'est à dire la représentation d'une fonction par une série, est un concept qu'a utilisé Joseph Fourier en 1822 pour résoudre des équations différentielles et aux dérivées partielles. Mais les outils mathématiques pour faire aboutir cette résolution faisaient défaut. Il a fallu près d'un siècle pour que les mathématiciens analystes dégagent les outils d'études adaptés comme :

- La théorie de l'intégration, avec les résultats de Hadamard, Lebesgue et Borel sans oublier la résolution de certaines équations intégrales par Fredholm.
- L'analyse fonctionnelle, avec les résultats de Riesz, Fréchet, Banach, Hilbert, Von Neumann,... en définissant le produit scalaire, les espaces  $l^2$  et  $L^2$ , l'orthogonalité, les bases orthogonales, la notion de topologie, de distance et de norme dans des espaces fonctionnels, la notion d'opérateur linéaire et de continuité d'un opérateur, de convergence, de complétion d'un espace,...[16].

C'est toujours à des fins numériques et plus précisément, pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, que l'on s'intéresse à la représentation d'une fonction par une série en ondelette de Legendre dans des espaces particuliers tels que  $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$  et  $C([0, T]; L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[))$ .

L'approximation dans  $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$  permettra de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles qui dépendent du temps et d'une variable d'espace. Elle est obtenue connaissant une base hilbertienne de l'espace de Hilbert  $L^2(]0, 1[)$ . Cette base est constituée des ondelettes de Legendre monodimensionnelles, notées ultérieurement  $\{\Psi_{nm}(x)\}_{1 \leq n \leq N, m \geq 0}$ , ( $n, m$  des entiers,  $N$  le nombre de niveaux). Ainsi toute fonction  $h \in L^2(]0, 1[)$  peut être représentée par la série

$$h(\cdot) = \sum_{n=1}^N \sum_{m \geq 0} C_{nm} \Psi_{nm}(\cdot),$$

où les coefficients de cette série sont donnés par le produit scalaire de  $L^2([0, 1])$  à savoir

$$C_{nm} = \langle h, \psi_{nm} \rangle = \int_0^1 h(x) \psi_{nm}(x) dx.$$

Il reste à exploiter ce résultat pour développer en série, les fonctions  $u \in C([0, T]; L^2([0, 1]))$ .

On remarque alors que les fonctions à variables séparées ;  $u(t, x) = V(t)X(x)$  avec  $X \in L^2([0, 1])$ , peuvent s'écrire  $\forall t \in [0, T]$  comme suit

$$\begin{aligned} u(t, \cdot) &= V(t)X(\cdot) \\ &= V(t) \sum_{n=1}^N \sum_{m \geq 0} C_{nm} \psi_{nm}(\cdot) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m \geq 0} \underbrace{V(t)C_{nm}}_{C_{nm}(t)} \psi_{nm}(\cdot) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m \geq 0} C_{nm}(t) \psi_{nm}(\cdot), \end{aligned}$$

le coefficient  $C_{nm}(t) = V(t)C_{nm}$  prend l'expression souhaitée (sous forme de produit scalaire) suivante

$$\begin{aligned} C_{nm}(t) &= V(t) \int_0^1 X(x) \psi_{nm}(x) dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{V(t)X(x)}_{u(t,x)} \psi_{nm}(x) dx \\ &= \int_0^1 u(t, x) \psi_{nm}(x) dx. \end{aligned}$$

C'est ce résultat qui va être démontré pour une fonction quelconque de l'espace  $C([0, T]; L^2([0, 1]))$  et qui sera généralisé pour les éléments de l'espace  $C([0, T]; L^2([0, 1] \times [0, 1]))$ .

## 2 Les ondelettes de Legendre

On commencera cette section par un rappel des polynômes de Legendre, ainsi que quelques propriétés importantes vérifiées par ces derniers.

### 2.1 Les polynômes de Legendre

**Définition 2.1** Les polynômes de Legendre, notés  $L_n$ ;  $n \geq 0$ , sont des polynômes de degré  $n$ , définis dans [3] sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , comme étant les solutions de l'équation différentielle, dite de Legendre

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) - 2x \frac{dy}{dx}(x) + n(n + 1)y(x) = 0; \quad -1 < x < 1.$$

**Proposition 2.1** (Caractérisation)(voir [22]/[32])

Les polynômes de Legendre  $\{L_n\}_{n \geq 0}$  sont caractérisés par l'une des trois représentations :

1. Ils sont définis par la formule dite de Rodriguez

$$L_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; \quad n \geq 0.$$

2. Ils vérifient la relation de récurrence  $\forall n \geq 1$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (2.1)$$

avec

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x. \end{cases}$$

3. Ils admettent la représentation intégrale

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ x + \sqrt{1-x^2} \cos(t) \right]^n dt.$$

Ces polynômes possèdent les propriétés suivantes :

1. La famille des polynômes de Legendre  $\{L_n\}_{n \geq 0}$  est orthogonale dans  $L^2([-1, 1])$  ;

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

La famille  $\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n \right\}_{n \geq 0}$  est orthonormée dans  $L^2([-1, 1])$ .

2. Le polynôme de Legendre  $L_n$  est pair (respectivement impair) si  $n$  est pair (respectivement impair), de plus  $\forall n \geq 0$ , on a

$$\begin{cases} L_n(1) = 1 \\ L_n(-1) = (-1)^n. \end{cases} \quad (2.2)$$

3. La primitive du polynôme de Legendre est donnée par

$$\int L_n(x)dx = \frac{1}{2n+1} (L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)). \quad (2.3)$$

Le résultat, tant important pour cette étude, sur le développement en série de Legendre d'une fonction de carré intégrable est donné par le théorème suivant.

**Théorème 2.1** [22] Soit  $h$  une fonction de carré intégrable sur  $[-1, 1]$ , alors, on a dans  $L^2([-1, 1])$

$$h = \sum_{n \geq 0} \frac{2n+1}{2} \langle h, L_n \rangle L_n, \quad (2.4)$$

et on a l'égalité de Bessel-Parseval

$$\|h\|^2 = \int_{-1}^1 |h(x)|^2 dx = \sum_{n \geq 0} \frac{2n+1}{2} |\langle h, L_n \rangle|^2.$$

Si la fonction  $h$  est régulière, le théorème suivant assure la convergence ponctuelle de la série (2.4).

**Théorème 2.2** [22] Soit une fonction  $h \in C^\infty([-1, 1])$ . Alors les coefficients de Legendre  $\langle h, L_n \rangle$ ;  $n \geq 0$ , sont à décroissance rapide et  $\forall x \in [-1, 1]$  on a

$$h(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{2n+1}{2} \langle h, L_n \rangle L_n(x). \quad (2.5)$$

La convergence de cette série est absolue ainsi que pour toutes les séries des dérivées de la fonction  $h$ .

## 2.2 Les ondelettes de Legendre

Dans toute la suite, on note par  $j$  un entier positif non nul fixé. L'intervalle  $[0, 1]$  est subdivisé en  $2^{j-1}$  sous intervalles notés  $I_n$ , tels que

$$[0, 1] = \bigcup_{1 \leq n \leq 2^{j-1}} I_n$$

avec

$$I_n = \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right],$$

à l'exception de

$$I_{2^{j-1}} = \left[ \frac{2^{j-1}-1}{2^{j-1}}, 1 \right].$$

**Définition 2.2** Les ondelettes sont une famille de fonctions construites à partir de la dilatation et de la translation d'une fonction de moyenne finie, appelée ondelette mère. Si cette ondelette mère est notée  $\psi$ , si  $a$  est le paramètre de dilatation et  $b$  le paramètre de translation, alors la famille d'ondelettes notées  $\psi_{a,b}$ , est définie pour  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ , par

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

**Remarque 2.1** Ces fonctions ont été introduites par J.Morlet en 1983.

1. Le facteur  $|a|^{-\frac{1}{2}}$ , normalise ces fonctions dans le sens où la norme  $\|\psi_{a,b}\|_{L^2}$ , est indépendante de  $a$  et  $b$ .
2. Si les paramètres de dilation et de translation varient de façon continue sur  $\mathbb{R}$ , on parle de famille continue d'ondelettes et il s'agit d'une famille discrète si ces paramètres sont discrets dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.3** Les ondelettes de Legendre sont une famille discrète de fonctions, obtenue par dilatation, avec un paramètre  $a = 2^{j-1}$ , et par translation, avec un paramètre  $b = (2n-1)2^{j-1}$ , des polynômes de Legendre [5]. Elles sont définies, sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} L_m(2^j x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$  et  $m \geq 0$ ; ( $n$  représente le niveau de décomposition de l'intervalle  $[0, 1]$  et  $m$  est le degrés du polynôme de Legendre  $L_m$ ).

**Proposition 2.2** La famille d'ondelettes définies par (2.6) forme un ensemble orthonormé dans l'espace  $L^2([0, 1])$ . Elle vérifie donc la propriété

$$\langle \psi_{nm}, \psi_{n'm'} \rangle = \int_0^1 \psi_{nm}(x) \psi_{n'm'}(x) dx = \delta_{nn'} \delta_{mm'},$$

$\delta_{nn'}$  représente le symbole de Kronecker.

**Preuve.** Cette propriété découle de la définition de ces fonctions, de leurs supports et du fait que les polynômes de Legendre soient orthogonaux dans  $L^2([-1, 1])$ .

Le coefficient  $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ , qui apparait dans la définition de (2.6), assure l'orthonormalité. ■

### 3 L'approximation dans $L^2(]0, 1[)$

#### 3.1 Décomposition des éléments de $L^2(]0, 1[)$

Pour énoncer un résultat sur les bases hilbertiennes de l'espace  $L^2(]0, 1[)$ , on se réfère à un théorème de caractérisation de ces dernières.

**Théorème 2.3** (*Caractérisation des bases hilbertiennes*) [13]

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $\{e_i\}_{i \in I_{index}}$  une famille orthonormée de  $H$ . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1.  $\{e_i\}_{i \in I_{index}}$  est une base hilbertienne.
2. Tout  $h \in H$ ,  $h = \sum_{i \in I_{index}} \langle h, e_i \rangle e_i$ .
3. Pour tout  $h, g \in H$ ,

$$\langle h, g \rangle = \sum_{i \in I_{index}} \langle h, e_i \rangle \langle e_i, g \rangle = \sum_{i \in I_{index}} \langle h, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle}.$$

4. Tout  $h \in H$  satisfait l'identité de Parseval,

$$\|h\|^2 = \sum_{i \in I_{index}} |\langle h, e_i \rangle|^2.$$

Grâce à l'assertion 2, on peut démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.4** La famille  $\{\psi_{nm}\}_{1 \leq n \leq 2^{j-1}, m \geq 0}$  est une base hilbertienne de  $L^2(]0, 1[)$ .

**Preuve.** Il suffit donc de vérifier que toute fonction  $h \in L^2(]0, 1[)$ , admet la décomposition

$$h(\cdot) = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m \geq 0} \mathbf{C}_{nm} \psi_{nm}(\cdot), \quad (2.7)$$

où les fonctions  $\psi_{nm}$ ;  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$  et  $m \geq 0$  sont les ondelettes de Legendre et les coefficients  $\mathbf{C}_{nm}$  sont définis par le produit scalaire dans  $L^2(]0, 1[)$

$$\mathbf{C}_{nm} = \langle h, \psi_{nm} \rangle = \int_0^1 h(x) \psi_{nm}(x) dx. \quad (2.8)$$

Soit une fonction quelconque  $h$  de l'espace  $L^2(]0, 1[)$ , on lui associe la série

$$\sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m \geq 0} \mathbf{C}_{nm} \psi_{nm}.$$

On doit vérifier que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| h(\cdot) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^k \mathbf{C}_{nm} \psi_{nm}(\cdot) \right\|_{L^2(]0, 1[)} = 0. \quad (2.9)$$

On remarque qu'on peut toujours écrire une fonction  $h \in L^2(]0, 1[)$  comme suit

$$h = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} h_n \text{ sur } [0, 1], \quad (2.10)$$

où les fonctions  $h_n; 1 \leq n \leq 2^{j-1}$ , sont définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$h_n = h|_{I_n}.$$

Il n'est pas difficile de voir que les fonctions  $h_n$  sont dans  $L^2(]0, 1[)$ . En effet

$$\int_0^1 h_n^2(x) dx = \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} h^2(x) dx \leq \int_0^1 h^2(x) dx < \infty.$$

En passant par le changement de variable,

$$X = 2^j x - 2n + 1, \quad (2.11)$$

et en notant

$$\widetilde{h}_n(X) = h_n(x) \text{ pour } x \in I_n,$$

on a d'une part, la fonction  $\widetilde{h}_n \in L^2(]-1, 1[)$ , car

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \widetilde{h}_n^2(X) dX &= \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} h_n^2(x) 2^j dx \\ &\leq 2^j \int_0^1 h^2(x) dx < \infty, \end{aligned}$$

d'autre part, le théorème (2.1) appliqué à  $\widetilde{h}_n$  entraîne dans  $L^2(]-1, 1[)$  la décomposition suivante

$$\widetilde{h}_n = \sum_{m \geq 0} \frac{2m+1}{2} \langle \widetilde{h}_n, L_m \rangle L_m,$$

c'est à dire que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \widetilde{h}_n - \sum_{m=0}^{m=k} \frac{2m+1}{2} \langle \widetilde{h}_n, L_m \rangle L_m \right\|_{L^2(]-1, 1[)} = 0. \quad (2.12)$$

A partir de (2.10), on a

$$\begin{aligned} \left\| h - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{m=k} \mathbf{C}_{nm} \Psi_{nm} \right\|_{L^2(]0, 1[)} &= \left\| \sum_{n=1}^{2^{j-1}} h_n - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{m=k} \mathbf{C}_{nm} \Psi_{nm} \right\|_{L^2(]0, 1[)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \left\| h_n - \sum_{m=0}^{m=k} \mathbf{C}_{nm} \Psi_{nm} \right\|_{L^2(]0, 1[)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \left[ \int_0^1 \left( h_n(x) - \sum_{m=0}^{m=k} \mathbf{C}_{nm} \Psi_{nm}(x) \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En rappelant l'expression des coefficients  $\mathbf{C}_{nm}$  et des ondelettes  $\Psi_{nm}$ , on a

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left( h_n(x) - \sum_{m=0}^{m=k} \mathbf{C}_{nm} \Psi_{nm}(x) \right)^2 dx \\ &= \int_{I_n} \left( h_n(x) - 2^j \sum_{m=0}^{m=k} \frac{2m+1}{2} \left( \int_{I_n} h_n(x) L_m(2^j t - 2n + 1) dt \right) L_m(2^j x - 2n + 1) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

En reprenant le changement de variables (2.11), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left\| h - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{m=k} C_{nm} \Psi_{nm} \right\|_{L^2(]0,1[)} \\
 & \leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \left[ \int_{-1}^1 \left( \widetilde{h}_n(X) - 2^j \sum_{m=0}^{m=k} \frac{2m+1}{2} \left( \int_{-1}^1 \widetilde{h}_n(X) L_m(X) \frac{1}{2^j} dX \right) L_m(X) \right)^2 \frac{1}{2^j} dX \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \sqrt{\frac{1}{2^j}} \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \left[ \int_{-1}^1 \left( \widetilde{h}_n(X) - \sum_{m=0}^{m=k} \frac{2m+1}{2} \left( \int_{-1}^1 \widetilde{h}_n(X) L_m(X) dX \right) L_m(X) \right)^2 dX \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \sqrt{\frac{1}{2^j}} \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \left\| \widetilde{h}_n - \sum_{m=0}^{m=k} \frac{2m+1}{2} \langle \widetilde{h}_n, L_m \rangle L_m \right\|_{L^2(]-1,1[)}.
 \end{aligned}$$

D'après (2.12), ce dernier terme tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $\infty$ . ■

## 4 L'approximation dans l'espace $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$

Pour la définition de l'espace  $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$  et de la convergence en norme, on se réfère à [14].

### 4.1 La décomposition des éléments de $C([0, T]; L^2(]0, 1[))$

**Théorème 2.5** *Toute fonction  $h(.,.) \in C([0, T]; L^2(]0, 1[))$  admet pour tout  $t \in [0, T]$ , la décomposition*

$$h(t, .) = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(.), \quad (2.13)$$

où les fonctions coefficients  $C_{nm}$ , qui dépendent de la variable  $t$ , sont définies  $\forall t \in [0, T]$ , par

$$C_{nm}(t) = \langle h(t, .), \Psi_{nm} \rangle = \int_0^1 h(t, x) \Psi_{nm}(x) dx. \quad (2.14)$$

**Preuve.** On rappelle qu'une fonction  $h \in C([0, T]; L^2(]0, 1[))$ , vérifie

$$h(t, .) \in L^2(]0, 1[); \forall t \in [0, T].$$

Ainsi, et d'après le théorème précédent, pour tout  $t$  fixé arbitrairement dans l'intervalle  $[0, T]$ , la fonction  $h(t, .)$  peut s'écrire suivant (2.7)

$$h(t, .) = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(.), \text{ dans } L^2(]0, 1[),$$

où les fonctions  $\Psi_{nm}$ ;  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$ ,  $m \geq 0$  sont les ondelettes de Legendre et les coefficients  $C_{nm}(t)$ ,  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$ ,  $m \geq 0$ , sont définis par le produit scalaire

$$C_{nm}(t) = \langle h(t, .), \Psi_{nm} \rangle = \int_0^1 h(t, x) \Psi_{nm}(x) dx.$$

Les fonctions  $h(t, .)$  et  $\Psi_{nm}(\cdot)$  étant dans  $L^2(]0, 1[)$ , leur produit est dans  $L^1(]0, 1[)$ , c'est ce qui permet de conclure que les coefficients  $C_{nm}(t)$  sont bien définis pour tout  $t \in [0, T]$ . On a de ce fait, construit pour tout indice  $n$  et tout indice  $m$ , une fonction coefficient  $C_{nm}(t)$ , qui dépend de la variable  $t$  et qui est définie sur l'intervalle  $[0, T]$  par la relation (2.14) ■

- Remarque 2.2** 1. Pour que les coefficients  $C_{nm}(t); \forall t \in [0, T]$ , soient bien définis, il suffit que la fonction  $h(.,.)$  soit bornée pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$ .
2. La décomposition des éléments  $h(.,.)$  de l'espace  $L^2([0, T]; L^2([0, 1]))$  se fait de la même manière que celle de l'espace  $C([0, T]; L^2([0, 1]))$ .

## 4.2 Analyse des fonctions coefficients $C_{nm}$

Dans cette sous section, on va énoncer quelques résultats concernant les fonctions coefficients  $C_{nm}$ .

### Proposition 2.3 (La continuité)

Pour tout  $h \in C([0, T], L^2([0, 1]))$ , les fonctions coefficients  $C_{nm}$  sont continues sur  $[0, T]$ .

**Preuve.** Soit  $t_0 \in [0, T]$ . La fonction  $h(., x)$  étant continue  $\forall x \in [0, 1]$ , donc pour tout  $\varepsilon' > 0$ , il existe un voisinage de  $t_0$ , noté  $V_{t_0}$ , tel que;  $\forall t \in V_{t_0}$  on a

$$|h(t, x) - h(t_0, x)| < \varepsilon'.$$

A partir de l'égalité

$$|C_{nm}(t) - C_{nm}(t_0)| = \left| \int_0^1 (h(t, x) - h(t_0, x)) \psi_{nm}(x) dx \right|,$$

on déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout  $t \in V_{t_0}$ , on a

$$|C_{nm}(t) - C_{nm}(t_0)| < \varepsilon,$$

on prend

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sup_{x \in [0, 1]} |\psi_{nm}(x)|}.$$

■

### Proposition 2.4 (La dérivabilité)

Si la fonction  $h \in C^1([0, T], L^2([0, 1]))$ , et si  $\frac{\partial h}{\partial t} \in L^2([0, T], L^2([0, 1]))$ , alors les fonctions coefficients  $C_{nm}$  sont dans  $C^1([0, T])$ . De plus on a

$$\frac{dC_{nm}(t)}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} \psi_{nm}(x) dx. \quad (2.15)$$

**Preuve.** La démonstration de cette proposition est basée sur l'égalité

$$\frac{C_{nm}(t + \Delta t) - C_{nm}(t)}{\Delta t} = \int_0^1 \frac{h(t + \Delta t, x) - h(t, x)}{\Delta t} \psi_{nm}(x) dx,$$

$\forall t$  et  $t + \Delta t \in ]0, T[$ .

Du fait que la fonction  $h(., x)$  est dérivable et continue sur  $]0, T[, \forall x \in [0, 1]$ , on a alors

$$\frac{h(t + \Delta t, x) - h(t, x)}{\Delta t} = \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + \varepsilon(t, \Delta t, x),$$

avec

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon(t, \Delta t, x) = 0.$$

Ce qui donne

$$\frac{C_{nm}(t + \Delta t) - C_{nm}(t)}{\Delta t} = \int_0^1 \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} \psi_{nm}(x) dx + \int_0^1 \varepsilon(t, \Delta t, x) \psi_{nm}(x) dx.$$

Par passage à la limite sur  $\Delta t$ , on obtient la relation (2.15). ■

**Remarque 2.3** On peut généraliser le résultat de la proposition précédente. Si la fonction  $h \in C^k([0, T[, L^2([0, 1]))$ , et si  $\frac{\partial^{(k)} h}{\partial t^k} \in L^2([0, T[, L^2([0, 1]))$ , alors les fonctions coefficients  $C_{nm}$  sont dans  $C^k([0, T])$ . De plus, on a

$$\frac{d^{(k)} C_{nm}(t)}{dt^k} = \int_0^1 \frac{\partial^{(k)} h(t, x)}{\partial t^k} \psi_{nm}(x) dx.$$

**Proposition 2.5** (Un équivalent de l'inégalité de Bessel)

La série des coefficients, associés à toute fonction  $h \in L^2([0, T[, L^2([0, 1]))$ ,

$$\sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{nm}^2(t),$$

est convergente et vérifie pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^2(t) \leq \int_0^1 h^2(t, x) dx. \quad (2.16)$$

**Preuve.** Soit  $h \in L^2([0, T[, L^2([0, 1]))$  et soient  $C_{nm}$ ;  $m \geq 0$  et  $1 \leq n \leq 2^{j-1}$ , les coefficients associés à la fonction  $h$  et qui sont définis par la relation (2.14). A partir de l'inégalité

$$\int_0^1 \left( h(t, x) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^M C_{nm}(t) \psi_{nm}(x) \right)^2 dx \geq 0; \forall t \in [0, T],$$

on a

$$\int_0^1 h^2(t, x) dx - 2 \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^M \int_0^1 h(t, x) C_{nm}(t) \psi_{nm}(x) dx + \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^M \int_0^1 C_{nm}^2(t) \psi_{nm}^2(x) dx \geq 0.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(t, x) C_{nm}(t) \psi_{nm}(x) dx &= C_{nm}(t) \int_0^1 h(t, x) \psi_{nm}(x) dx \\ &= C_{nm}^2(t), \end{aligned}$$

et vu l'orthonormalité des fonctions  $\psi_{nm}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 C_{nm}^2(t) \psi_{nm}^2(x) dx &= C_{nm}^2(t) \int_0^1 \psi_{nm}^2(x) dx \\ &= C_{nm}^2(t), \end{aligned}$$

alors la dernière inégalité se ramène,  $\forall t \in [0, T]$ , à

$$\sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^M C_{nm}^2(t) \leq \int_0^1 h^2(t, x) dx.$$

Comme le terme de droite est indépendant de  $M$ , la série converge et le passage à la limite sur  $M$  donne l'inégalité (2.16), équivalente à l'inégalité de Bessel. ■

### 4.3 L'étude de la convergence

#### Théorème 2.6 (de convergence)

Si la fonction  $u \in C([0, T], C^2([0, 1]))$  et s'il existe un nombre réel positif  $\alpha$  vérifiant pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t, x) \right| \leq \alpha, \quad (2.17)$$

alors

1. pour  $m \geq 2$  et  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$ , on a

$$|C_{nm}(t)| \leq \frac{\sqrt{6}\alpha 2^{-\frac{5}{2}j}}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}}. \quad (2.18)$$

2. La série donnée par (2.13), est uniformément convergente sur  $[0, T] \times [0, 1]$ .

**Preuve.** On commence par rappeler l'expression des coefficients  $C_{nm}$

$$C_{nm}(t) = \int_0^1 u(t, x) \psi_{nm}(x) dx.$$

En remplaçant par l'expression de  $\psi_{nm}$ , on obtient

$$C_{nm}(t) = \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{j/2} \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} u(t, x) L_m(2^j x - 2n + 1) dx. \quad (2.19)$$

En effectuant le changement de variables (2.11), l'expression (2.19) devient

$$C_{nm}(t) = \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{j/2} 2^{-j} \int_{-1}^1 u\left(t, \frac{X + 2n - 1}{2^j}\right) L_m(X) dX. \quad (2.20)$$

Connaissant la primitive de  $L_m$ , notée  $\widetilde{L}_m$ , à savoir

$$\widetilde{L}_m(x) = \frac{1}{2m+1} (L_{m+1}(x) - L_{m-1}(x)), \quad (2.21)$$

une intégration par partie dans (2.20) entraîne

$$C_{nm}(t) = \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{-j/2} \left( u\left(t, \frac{X + 2n - 1}{2^j}\right) \widetilde{L}_m(X) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial X}\left(t, \frac{X + 2n - 1}{2^j}\right) \frac{1}{2^j} \widetilde{L}_m(X) dX \right).$$

En considérant la propriété (2.2), il vient

$$\widetilde{L}_m(1) = \widetilde{L}_m(-1) = 0,$$

et la dernière expression de  $C_{nm}$  devient

$$\begin{aligned} C_{nm}(t) &= -\sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{-j/2} 2^{-j} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial X}\left(t, \frac{X + 2n - 1}{2^j}\right) \widetilde{L}_m(X) dX \\ &= \frac{-\sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{-3j/2}}{(2m+1)} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial X}\left(t, \frac{X + 2n - 1}{2^j}\right) (L_{m+1}(X) - L_{m-1}(X)) dX. \end{aligned}$$

Une deuxième intégration par partie donne

$$C_{nm}(t) = \frac{\sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{-3j/2}}{(2m+1)2^j} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\left(t, \frac{X + 2n - 1}{2^j}\right) (\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X)) dX$$

L'hypothèse (2.17) entraîne

$$|C_{nm}(t)| \leq \frac{\alpha 2^{-\frac{5j}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{(2m+1)}} \left[ \int_{-1}^1 |\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X)| dX \right]. \quad (2.22)$$

D'après la relation (2.21), on a

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X)| dX \\ &= \frac{1}{(2m+3)(2m-1)} \int_{-1}^1 |(2m-1)L_{m+2}(X) - 2(2m+1)L_m(X) + (2m+3)L_{m-2}(X)| dX. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz entraîne

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X)| dX \\ & \leq \frac{1}{(2m+3)(2m-1)} \left( \int_{-1}^1 dX \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left( \int_{-1}^1 |(2m-1)L_{m+2}(X) - 2(2m+1)L_m(X) + (2m+3)L_{m-2}(X)|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'orthogonalité des polynômes de Legendre, on a

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X)| dX \quad (2.23) \\ & \leq \frac{\sqrt{2}}{(2m+3)(2m-1)} \left( \frac{2(2m-1)^2}{2m+5} + \frac{8(2m+1)^2}{2m+1} + \frac{2(2m+3)^2}{2m-3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\sqrt{2}}{(2m+3)(2m-1)} \sqrt{\frac{48}{2^3} \left( \frac{(2m+3)(2m-1)(2m+1)}{(2m+5)(2m-3)} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ & \leq \frac{\sqrt{12}\sqrt{2m+1}}{\sqrt{(2m+3)(2m-1)(2m+5)(2m-3)}}. \end{aligned}$$

En injectant (2.23) dans (2.22), on obtient l'inégalité (2.18).

Pour démontrer la convergence de la série, on remarque que

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\psi_{nm}(x)| \leq 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}}.$$

Ainsi, pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $x \in [0, 1]$ , le terme général de la série est alors majoré par

$$\begin{aligned} |C_{nm}(t)\psi_{nm}(x)| & \leq \frac{\sqrt{6}\alpha 2^{-\frac{5j}{2}} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}}}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}} \\ & \leq \frac{\sqrt{3}\alpha 2^{-2j} \sqrt{2m+1}}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}} \\ & \leq \frac{\sqrt{3}\alpha \sqrt{2m+1}}{4n^2 \sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}}. \end{aligned}$$

Ce dernier, est le terme général d'une série numérique de type Riemann convergente.

■

**Remarque 2.4** L'inégalité (2.18) entraîne que la série, de terme général  $C_{nm}$ , est absolument convergente sur  $[0, T]$ .

#### 4.4 Approximation et estimation de l'erreur

**Remarque 2.5** Du fait que la série (2.13) est convergente, toute fonction  $u \in C([0, T], C^2([0, 1]))$ , peut être approchée par la somme finie (obtenue par troncature de cette série)

$$u(t, x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(x), \quad (2.24)$$

et l'erreur de cette approximation est estimée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.7** (estimation de l'erreur)

Sous les hypothèses du théorème (2.6), on a l'estimation de l'erreur, en norme de  $C([0, T]; L^2([0, 1]))$  suivante

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| u(t, \cdot) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(\cdot) \right\|_{L^2([0, 1])} \leq 2^{-\frac{3}{2}j-2} \frac{\sqrt{6}\alpha}{2M-3}. \quad (2.25)$$

**Preuve.** On a, pour tout  $t$  fixé arbitrairement dans  $[0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \left\| u(t, \cdot) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(\cdot) \right\|_{L^2([0, 1])} &= \left\| \sum_{n=1}^{2^{j-1}} u_n(t, \cdot) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(\cdot) \right\|_{L^2([0, 1])} \\ &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \left\| u_n(t, \cdot) - \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(\cdot) \right\|_{L^2([0, 1])} \\ &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \left( \sum_{m=M}^{\infty} |\langle u_n(t, \cdot), \Psi_{nm}(\cdot) \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=M}^{\infty} |C_{nm}(t)|. \end{aligned}$$

Or, sous l'hypothèse du théorème de la convergence, on a démontré pour tout  $t \in [0, T]$  que

$$|C_{nm}(t)| \leq \frac{\sqrt{6}\alpha 2^{-\frac{5}{2}j}}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}}.$$

Ainsi  $\forall t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} &\left\| h(t, \cdot) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t) \Psi_{nm}(\cdot) \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sqrt{6}\alpha 2^{-\frac{5}{2}j} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}} \\ &\leq 2^{j-1} \sqrt{6}\alpha 2^{-\frac{5}{2}j} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}} \\ &\leq \sqrt{6}\alpha 2^{-\frac{3}{2}j-1} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{(2m-3)(2m-1)}. \end{aligned}$$

La dernière somme tend vers zéro car c'est le reste d'une série numérique convergente. De plus, on peut vérifier que

$$\frac{1}{(2m-3)(2m-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2m-3} - \frac{1}{2m-1} \right),$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{(2m-3)(2m-1)} &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=M}^N \left( \frac{1}{2m-3} - \frac{1}{2m-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2M-3} - \frac{1}{2N-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2M-3}, \end{aligned}$$

par suite

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| h(t, \cdot) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t) \psi_{nm}(\cdot) \right\| \leq \sqrt{6\alpha} 2^{-\frac{3}{2}j-2} \frac{1}{2M-3}.$$

■

## 5 L'approximation dans l'espace $C([0, T]; L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[))$

### 5.1 Généralités dans $L^2(]-1, 1[ \times ]-1, 1[)$

On commence par rappeler l'espace des fonctions de carré intégrables sur un pavé  $[a, b] \times [c, d]$ . On s'intéressera par la suite au cas où  $[a, b] = [c, d] = [-1, 1]$  et au cas où  $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$ .

L'espace de Hilbert  $L^2(]a, b[ \times ]c, d[)$ , est défini comme étant l'ensemble de toutes les fonctions  $v$  définies presque partout sur  $[a, b] \times [c, d]$  et vérifiant

$$\int_a^b \int_c^d |v(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Il est muni du produit scalaire, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et défini pour  $u, v \in L^2(]a, b[ \times ]c, d[)$  par

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \int_c^d u(x, y)v(x, y) dx dy. \quad (2.26)$$

Il vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle; \forall u, v \in L^2(]a, b[ \times ]c, d[),$$

et il induit la norme, notée  $\|\cdot\|$

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}; \forall v \in L^2(]a, b[ \times ]c, d[).$$

**Proposition 2.6** *La famille obtenue par produit des polynômes de Legendre,  $\{L_n(x)L_m(y)\}_{n,m \geq 0}$ , est orthogonale dans  $L^2(]-1, 1[ \times ]-1, 1[)$  par rapport au produit scalaire (2.26). Plus précisément on a*

$$\begin{aligned} \langle L_n(x)L_m(y), L_{n'}(x)L_{m'}(y) \rangle &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(y)L_{n'}(x)L_{m'}(y) dx dy \quad (2.27) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n' \text{ ou } m \neq m' \\ \frac{2}{2n+1} \frac{2}{2m+1} & \text{si } n = n' \text{ et } m = m'. \end{cases} \end{aligned}$$

**Preuve.** Ce résultat découle du fait que l'intégrale double dans (2.27), se ramène au produit de deux intégrales simples et de la propriété (2.2). ■

Le théorème (2.1) se généralise en deux dimensions.

**Théorème 2.8** [13] Pour toute fonction  $h$  dans  $L^2([ -1, 1[ \times ] -1, 1[ ])$ , on a

$$h(.,.) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \frac{2n+1}{2} \frac{2m+1}{2} \langle \langle h, L_n L_m \rangle \rangle L_n(.) L_m(.), \quad (2.28)$$

et on a l'égalité de Bessel-Parseval

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2([ -1, 1[ \times ] -1, 1[ ])}^2 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |h(x, y)|^2 dx dy \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \frac{2n+1}{2} \frac{2m+1}{2} \langle \langle h, L_n L_m \rangle \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

## 5.2 La décomposition dans $L^2([0, 1[ \times ]0, 1[ ])$

**Définition 2.4** (Ondelettes de Legendre en deux dimensions)

On rappelle que, dans [31], les ondelettes de Legendre en deux dimensions, sont définies sur le carré  $I = [0, 1] \times [0, 1]$  comme suit : pour  $j$  et  $j'$  deux entiers positifs fixés,

$$\Psi_{nmn'm'}(x, y) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{j'}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \sqrt{\frac{2m'+1}{2}} L_m(2^j x - 2n + 1) L_{m'}(2^{j'} y - 2n' + 1) \\ \quad \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \text{ et } \frac{n'-1}{2^{j'-1}} \leq y < \frac{n'}{2^{j'-1}} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $m, m' \geq 0, n = 1, \dots, 2^{j-1}, n' = 1, \dots, 2^{j'-1}$  et  $L_m$  est le polynôme de Legendre de degrés  $m$ .

**Proposition 2.7** La famille d'ondelettes définie dans (2.30), est orthonormée dans  $L^2(I)$  ;

$$\int_0^1 \int_0^1 \Psi_{nmn'm'}(x, y) \Psi_{n_1 m_1 n'_1 m'_1}(x, y) dx dy = \delta_{nn_1} \delta_{mm_1} \delta_{n'n'_1} \delta_{m'm'_1}. \quad (2.31)$$

**Preuve.** Cette égalité découle directement de (2.27) et des supports des ondelettes. ■

**Remarque 2.6** A toute fonction  $u \in L^2(I)$ , on associe les coefficients notés  $C_{nmn'm'}$  et qui sont définis par le produit scalaire

$$C_{nmn'm'} = \langle \langle u, \Psi_{nmn'm'} \rangle \rangle = \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) \Psi_{nmn'm'}(x, y) dx dy. \quad (2.32)$$

Ces coefficients sont bien définis grâce à l'inégalité de Cauchy-Schawrtz.

**Théorème 2.9** (Décomposition dans  $L^2([0, 1[ \times ]0, 1[ ])$ )

La famille  $\{\Psi_{nmn'm'}\}_{1 \leq n \leq 2^{j-1}, 1 \leq n' \leq 2^{j'-1}, m, m' \geq 0}$  est une base hilbertienne de  $L^2([0, 1[ \times ]0, 1[ ])$ .

**Preuve.** On suivra la même procédure que celle de la preuve du théorème (2.4). Il s'agit donc de vérifier que toute fonction  $u \in L^2(I)$ , admet dans  $L^2(I)$  la décomposition

$$u(.,.) = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m \geq 0} \sum_{m' \geq 0} C_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(.,.), \quad (2.33)$$

où les coefficients  $C_{nmn'm'}$  sont définis par (2.32).

Pour cela, à la fonction  $u \in L^2(I)$ , on associe la série

$$S = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m \geq 0} \sum_{m' \geq 0} C_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(.,.),$$

et on doit vérifier que

$$\lim_{k, k' \rightarrow +\infty} \left\| u(., .) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \mathbf{C}_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(., .) \right\|_{L^2(I)} = 0.$$

La fonction donnée  $u$  dans  $L^2(I)$ , peut être écrite comme suit

$$u = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} u_{nn'} \text{ sur } I, \quad (2.34)$$

où les fonctions  $u_{nn'}$ , pour  $1 \leq n \leq 2^{j-1}$  et  $1 \leq n' \leq 2^{j'-1}$ , sont définies sur le carré  $I$  par

$$u_{nn'} = u|_{\left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right]}. \quad (2.35)$$

On remarque que les fonctions  $u_{nn'}$ ;  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$ ,  $n' = 1, \dots, 2^{j'-1}$ , sont dans  $L^2(I)$ . En effet

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 u_{nn'}^2(x, y) dx dy &= \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} \int_{\frac{n'-1}{2^{j'-1}}}^{\frac{n'}{2^{j'-1}}} u^2(x, y) dx dy \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 u^2(x, y) dx dy < \infty. \end{aligned}$$

En passant par le changement de variables

$$\begin{cases} X = 2^j x - 2n + 1 \\ Y = 2^{j'} y - 2n' + 1, \end{cases} \quad (2.36)$$

et en notant

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_{nn'}(X, Y) &= u_{nn'}(x, y), \\ \forall (x, y) \in I_{nn'} &= \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right], \end{aligned}$$

on a d'une part, la fonction  $\widetilde{u}_{nn'} \in L^2([-1, 1] \times [-1, 1])$ , car

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \widetilde{u}_{nn'}^2(X, Y) dXdY &= \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} \int_{\frac{n'-1}{2^{j'-1}}}^{\frac{n'}{2^{j'-1}}} u_{nn'}^2(x, y) (2^j dx) (2^{j'} dy) \\ &\leq 2^{j+j'} \int_0^1 \int_0^1 u^2(x, y) dx dy < \infty, \end{aligned}$$

d'autre part, le théorème (2.8) appliqué à  $\widetilde{u}_{nn'}$  entraîne, dans  $L^2([-1, 1] \times [-1, 1])$ , la décomposition suivante

$$\widetilde{u}_{nn'} = \sum_{m \geq 0} \sum_{m' \geq 0} \frac{2m+1}{2} \frac{2m'+1}{2} \langle \widetilde{u}_{nn'}, L_m L_{m'} \rangle L_m L_{m'}, \quad (2.37)$$

c'est à dire que

$$\lim_{k, k' \rightarrow +\infty} \left\| \widetilde{u}_{nn'}(., .) - \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \frac{2m+1}{2} \frac{2m'+1}{2} \langle \widetilde{u}_{nn'}, L_m L_{m'} \rangle L_m L_{m'} \right\|_{L^2(I)} = 0, \quad (2.38)$$

où  $J = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

A partir de (2.34), on a

$$\begin{aligned}
 & \left\| u(.,.) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \mathbf{C}_{nm,n'm'} \Psi_{nm,n'm'}(.,.) \right\|_{L^2(I)} \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} u_{nn'}(.,.) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \mathbf{C}_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(.,.) \right\|_{L^2(I)} \\
 &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \left\| u_{nn'}(.,.) - \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \mathbf{C}_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(.,.) \right\|_{L^2(I)} \\
 &\leq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \left[ \int_0^1 \int_0^1 \left( u_{nn'}(x, y) - \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \mathbf{C}_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(x, y) \right)^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

En rappelant l'expression des coefficients  $\mathbf{C}_{nmn'm'}$ , celle des ondelettes  $\Psi_{nmn'm'}$  et en re-  
prenant le changement de variables (2.36), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^1 \left( u_{nn'}(x, y) - \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \mathbf{C}_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(x, y) \right)^2 dx dy \\
 &= \int \int_J \left( \widetilde{u}_{nn'}(X, Y) - \sum_{mm'=0}^{k, k'} A_{jj'mm'}^2 \left( \langle \langle \widetilde{u}_{nn'}, L_m L_{m'} \rangle \rangle \frac{1}{2^{j+j'}} \right) L_m(X) L_{m'}(Y) \right)^2 \frac{1}{2^{j+j'}} dXdY \\
 &\leq \sqrt{\frac{1}{2^{j+j'}}} \int \int_J \left( \widetilde{u}_{nn'}(X, Y) - \sum_{m, m'=0}^{k, k'} \frac{2m+1}{2} \frac{2m'+1}{2} \langle \langle \widetilde{u}_{nn'}, L_m L_{m'} \rangle \rangle L_m(X) L_{m'}(Y) \right)^2 dXdY,
 \end{aligned}$$

avec

$$A_{jj'mm'} = 2^{\frac{j+j'}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \sqrt{\frac{2m'+1}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 & \left\| u(.,.) - \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \mathbf{C}_{nm,n'm'} \Psi_{nm,n'm'}(.,.) \right\|_{L^2(I)} \\
 &\leq \sqrt{\frac{1}{2^{j+j'}}} \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \left\| \widetilde{u}_{nn'} - \sum_{m=0}^{m=k} \sum_{m'=0}^{m'=k'} \frac{2m+1}{2} \frac{2m'+1}{2} \langle \langle \widetilde{u}_{nn'}, L_m L_{m'} \rangle \rangle L_m L_{m'} \right\|_{L^2(J)}
 \end{aligned}$$

De (2.38), on déduit que ce dernier terme tend vers 0 quand  $k$  et  $k'$  tendent vers  $\infty$ . ■

## 6 La décomposition des éléments de $C([0, T]; L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[))$

En suivant les mêmes étapes qui ont abouti à la démonstration du théorème (2.5), on peut énoncer le théorème suivant.

**Théorème 2.10** Toute fonction  $h \in C([0, T]; L^2(]0, 1[ \times ]0, 1[))$  admet,  $\forall t \in [0, T]$  la décomposition

$$h(t, ., .) = \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{m'=0}^{+\infty} \mathbf{C}_{nmn'm'}(t) \Psi_{nmn'm'}(.,.), \quad (2.39)$$

où les fonctions coefficients  $C_{nmn'm'}$ , qui dépendent de la variable  $t$ , sont définies  $\forall t \in [0, T]$  par

$$C_{nmn'm'}(t) = \langle \langle h(t, \cdot, \cdot), \Psi_{nmn'm'} \rangle \rangle = \int_0^1 \int_0^1 h(t, x, y) \Psi_{nmn'm'}(x, y) dx dy. \quad (2.40)$$

**Preuve.** Ce résultat est dû au fait que toute fonction  $h \in C([0, T]; L^2(I))$  vérifie  $h(t, \cdot, \cdot) \in L^2(I); \forall t \in [0, T]$ , ensuite, on applique le théorème (2.9). ■

**Remarque 2.7** Les fonctions coefficients définies par (2.40), vérifient les mêmes propriétés (de régularité) que celles définies par la relation (2.14).

L'équivalent de "l'inégalité de Bessel", s'énonce comme suit.

**Proposition 2.8** La série des coefficients, associés à toute fonction  $h \in L^2([0, T]; L^2(I))$

$$\sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{m'=0}^{+\infty} C_{nmn'm'}^2(t), \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

est convergente et vérifie

$$\sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{m'=0}^{+\infty} C_{nmn'm'}^2(t) \leq \int_0^1 \int_0^1 h^2(t, x, y) dx dy; \forall t \in [0, T].$$

**Théorème 2.11** (de convergence)

Si la fonction  $u \in C([0, T], C^4([0, 1] \times [0, 1]))$  et s'il existe un nombre réel positif  $\alpha$  tel que

$$\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(t, x, y) \right| \leq \alpha; \text{ pour tout } (t, x, y) \in [0, T] \times [0, 1] \times [0, 1] \quad (2.41)$$

alors,

1. pour  $m, m' \geq 2$ , et  $1 \leq n \leq 2^{j-1}$ ,  $1 \leq n' \leq 2^{j'-1}$ , on a

$$|C_{nmn'm'}(t)| \leq \frac{6\alpha 2^{-\frac{5}{2}(j+j')}}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m+5)(2m-3)}} \frac{1}{\sqrt{(2m'-1)(2m'+3)(2m'+5)(2m'-3)}} \quad (2.42)$$

2. la série donnée par (2.39), est uniformément convergente sur  $[0, T] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Preuve.** Pour démontrer l'inégalité (2.42), on commence par rappeler la définition de  $C_{nmn'm'}(t); t \in [0, T]$

$$C_{nmn'm'}(t) = A_{mm'} 2^{\frac{j+j'}{2}} \int_{I_{nn'}} u(t, x, y) L_m(2^j x - 2n + 1) L_{m'}(2^{j'} y - 2n' + 1) dx dy,$$

où

$$A_{mm'} = \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \sqrt{\frac{2m'+1}{2}}.$$

Par les changements de variables (2.36), l'expression des coefficients  $C_{nmn'm'}$  devient

$$C_{nmn'm'}(t) = A_{mm'} 2^{-\frac{j+j'}{2}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u\left(t, \frac{X+2n-1}{2^j}, \frac{Y+2n'-1}{2^{j'}}\right) L_m(X) L_{m'}(Y) dX dY. \quad (2.43)$$

En faisant deux intégrations par parties par rapport à la première variable d'espace, l'égalité (2.43) se ramène à :

$$C_{nmn'm'}(t) = A_{mm'} 2^{-\frac{j+j'}{2}} \frac{1}{2m+1} \frac{1}{2^{2j}} \int_J \int_J \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \left( t, \frac{X+2n-1}{2^j}, \frac{Y+2n'-1}{2^{j'}} \right) \\ \times (\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X)) L_{m'}(Y) dXdY.$$

On rappelle que

$$\widetilde{L}_m(X) = \int L_m(X) dX \\ = \frac{1}{2m+1} (L_{m+1}(x) - L_{m-1}(X)).$$

Deux autres intégrations, par parties par rapport à la seconde variable d'espace, dans (2.44) entraînent

$$C_{nmn'm'}(t) = A_{mm'} 2^{-\frac{j+j'}{2}} \frac{1}{2m+1} \frac{1}{2m'+1} \frac{1}{2^{2j}} \frac{1}{2^{2j'}} \int_J \int_J \frac{\partial^4 u}{\partial X^2 \partial Y^2} \left( t, \frac{X+2n-1}{2^j}, \frac{Y+2n'-1}{2^{j'}} \right) \\ \times (\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X)) (\widetilde{L}_{m'+1}(Y) - \widetilde{L}_{m'-1}(Y)) dXdY.$$

De l'hypothèse (2.41), l'expression de  $A_{mm'}$  et du théorème de Fubini on a

$$|C_{nmn'm'}(t)| \leq 2^{-\frac{5}{2}(j+j')} \frac{\alpha}{2\sqrt{2m+1}\sqrt{2m'+1}} \int_{-1}^1 |(\widetilde{L}_{m+1}(X) - \widetilde{L}_{m-1}(X))| dX \\ \times \int_{-1}^1 |(\widetilde{L}_{m'+1}(Y) - \widetilde{L}_{m'-1}(Y))| dY.$$

En appliquant l'inégalité (2.23), on obtient l'inégalité (2.42) du théorème.

Pour démontrer l'assertion 2 du théorème, on vérifie que le terme général de la série (2.39) est majoré par le terme général d'une série numérique convergente.

En effet, comme

$$\sup_{0 \leq x, y \leq 1} |\Psi_{nmn'm'}(x, y)| \leq 2^{\frac{j+j'}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} \sqrt{m' + \frac{1}{2}},$$

alors l'inégalité (2.42) entraîne pour tout  $t \in [0, T]$  et pour tout  $(x, y) \in I$

$$|c_{nmn'm'}(t) \Psi_{nmn'm'}(x, y)| \leq \frac{3\alpha 2^{-2(j+j')}}{\sqrt{(2m-1)(2m+3)(2m-3)} \sqrt{(2m'-1)(2m'+3)(2m'-3)}},$$

vu que  $n \leq 2^{j-1}$  et  $n' \leq 2^{j'-1}$ , on peut écrire,

$$|c_{nmn'm'}(t) \Psi_{nmn'm'}(x, y)| \leq \frac{3\alpha}{16n^2 n'^2 (2m-3)^{\frac{3}{2}} (2m'-3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le terme de droite est celui d'une série numérique de type Riemann convergente. ■

**Remarque 2.8** — La série (2.39) étant convergente, toute fonction  $u \in C([0, T]; C^4([0, 1] \times [0, 1]))$  peut être approchée, pour tout  $t \in [0, T]$  et  $(x, y) \in I$  par la série tronquée

$$u(t, x, y) \simeq \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{n'=1}^{2^{j'-1}} \sum_{m=0}^M \sum_{m'=0}^M C_{nmn'm'}(t) \Psi_{nmn'm'}(x, y). \quad (2.44)$$

— Les approximations (3.38) et (2.44) donnent naissance à une méthode de résolution des équations aux dérivées partielles mono et bidimensionnelle en espace. C'est la méthode exposée dans le chapitre qui suit.

# Chapitre 3

## La méthode de résolution

### 1 Introduction

En faisant une recherche bibliographique, on a constaté qu'une large documentation est disponible concernant la résolution, par les ondelettes de Legendre, des équations différentielles, intégrales et intégral-différentielles. Quant à la résolution des équations aux dérivées partielles (en présence de deux variables et plus), par la méthode des ondelettes, très peu de travaux s'y sont consacrés. On peut énumérer quelques techniques utilisées pour la résolution de telles équations.

Soit  $u$  l'inconnue d'une équation aux dérivées partielles d'ordre deux et à coefficients constants, à variables spatiales.

1. Dans [47], Yin et Song ont utilisé les ondelettes de Legendre en deux dimensions, introduites par Parsian dans [31] et définies par, pour  $n, n' \geq 1$  et  $m, m' \geq 0$ ,

$$\Psi_{nmn'm'}(x, y) = \Psi_{nm}(x) \Psi_{n'm'}(y).$$

Ils ont approché la dérivée d'ordre 4 par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) &\simeq \sum_{n, n'} \sum_{m, m'} C_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(x, y) \\ &= C^T \psi(x, y), \end{aligned} \quad (3.1)$$

où le vecteur  $\psi(x, y)$  est formé de toutes les fonctions  $\Psi_{nmn'm'}(x, y)$

$$\psi(x, y) = (\Psi_{nmn'm'}(x, y))_{nmn'm'},$$

avec,  $n = 1 \dots 2^{j-1}$ ;  $m = 0 \dots M-1$ ;  $n' = 1 \dots 2^{j'-1}$  et  $m' = 0 \dots M'-1$  ( $j, j', M$  et  $M'$  sont des entiers positifs fixés). Les composantes du vecteur  $C$ , notées  $C_{nmn'm'}$  sont définies par le produit scalaire

$$C_{nmn'm'} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) \Psi_{nmn'm'}(x, y) dx dy.$$

Connaissant les matrices d'intégration des ondelettes notées,  $P_x$  et  $P_y$ , définies dans [31] par

$$\begin{cases} \int_0^x \psi(\tau, y) d\tau = P_x \psi(x, y) \\ \int_0^y \psi(x, \tau) d\tau = P_y \psi(x, y), \end{cases}$$

l'utilisation d'intégrations successives dans (3.1), permet d'exprimer l'inconnue  $u$  ainsi que toutes ses dérivées en fonction des vecteurs  $C$  et  $\psi$ , des matrices  $P_x$ ,  $P_y$  et des conditions aux limites considérées. La substitution de toutes ces expressions dans l'équation aux dérivées partielles, ramène celle-ci, prise aux points de collocation, à un système algébrique d'inconnu le vecteur  $C$ . La taille de ce système est  $2^{j-1}2^{j'-1}MM'$ .

2. Dans [6], Aziz et al ont utilisé ces mêmes ondelettes de Legendre en deux dimensions, mais c'est chaque dérivée d'ordre deux qui est décomposée en ondelettes et approchée par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \simeq C^T \psi(x, y), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = K^T \psi(x, y). \quad (3.3)$$

La procédure est la même, ils substituent les différents termes qui apparaissent dans l'équation considérée après avoir intégré (3.2) et (3.3). Aux points de collocation, ils se ramènent à un système algébrique dont le nombre d'inconnues est deux fois plus grand que le nombre d'équations. Ils ont remédié à ce manque en rajoutant le système découlant de l'égalité

$$\begin{aligned} & C^T P_x^2 \psi(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + u(0, y) \\ &= K^T P_y^2 \psi(x, y) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + u(x, 0) \end{aligned}$$

prise aux points de collocation. Cette égalité est le résultat de deux intégrations successives de (3.2) et (3.3) respectivement. La taille finale du système qui permet de retrouver  $C$  et  $K$  est  $2 \times 2^{j-1}2^{j'-1}MM'$ .

L'inconvénient de cette technique est qu'elle ne s'adapte pas en présence des dérivées croisées.

3. Dans [8], Banifatemi et al se sont intéressés à l'équation intégrale mixte de Volterra-Fredholm. Ils ont approché la fonction inconnue  $u$  par

$$u(x, y) = \psi(x)^T U \psi(y), \quad (3.4)$$

où  $U$  est une matrice,  $\psi(x)$  est le vecteur constitué de toutes les ondelettes  $\psi_{nm}(x)$ . En remplaçant l'expression (3.4) dans l'équation intégrale, ils se ramènent à la résolution d'un système algébrique d'inconnue  $U$ .

4. Dans [46], Venkatesch et al se sont penchés sur l'équation d'advection (les variables sont le temps et l'espace). Ils ont commencé par la transformer en une équation intégrale où seule la dérivée de l'inconnue  $u$  par rapport à la variable espace  $x$  apparaît dans cette équation intégrale. Ensuite, ils ont combiné les ondelette de Legendre en une dimension et la base canonique polynômiale pour approcher la fonction inconnue par

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} C_{nm} \psi_{nm}(x) \Phi_n(t), \quad (3.5)$$

où  $\psi_{nm}$  sont les ondelettes de Legendre en une dimension,  $\Phi_n(t) = t^n$  et les coefficients  $C_{nm}$  sont donnés par

$$C_{nm} = (2m - 1) \int_0^1 \int_0^1 u(t, x) \psi_{nm}(x) \Phi_n(t) dt dx.$$

Le même procédé transforme l'équation intégrale en un système algébrique d'inconnus les coefficients  $C_{nm}$ .

Quant à la méthode qu'on propose pour résoudre les équations aux dérivées partielles spatio-temporelles, elle est basée sur la décomposition de la dérivée seconde par rapport à la variable espace  $x$  de la fonction inconnue  $u$  en ondelettes de Legendre monodimensionnelles. La variable temps  $t$  apparaît alors dans les coefficients de cette décomposition. On posera

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &\simeq \sum_{n=1}^{n=2^{j-1}} \sum_{m=0}^{m=M-1} C_{nm}(t) \psi_{nm}(x) \\ &\simeq C^T(t) \psi(x). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les fonctions coefficients du vecteur  $C(t)$  sont définies par

$$C_{nm}(t) = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \psi_{nm}(x) dx. \quad (3.7)$$

Connaissant la matrice d'intégration  $P$  qui est définie dans [34] [1][2] par

$$\int_0^x \psi(\tau) d\tau = P\psi(x), \quad (3.8)$$

des intégrations successives de la relation (3.6) permettent d'exprimer la fonction inconnue  $u$  ainsi que ses dérivées en fonction de la matrice  $P$ , des vecteurs  $C$ ,  $\psi$  et des conditions aux limites. La substitution de toutes les expressions obtenues dans l'équation étudiée, transforme cette dernière en un système d'équations différentielles en temps d'inconnue  $C$  de taille  $2^{j-1}M$ .

Les avantages :

1. Le premier avantage de cette méthode réside dans la taille du système à résoudre.
2. Le second réside dans le fait que cette méthode est naturellement généralisée à la résolution des équations aux dérivées partielles en présence du temps  $t$  et des variables spatiales  $x, y$ .
3. Le troisième avantage est qu'on peut l'adapter à des ordres élevés de dérivation.
4. Aussi, la généralisation en présence de la variable temps  $t$  et des trois variables espace  $x, y$  et  $z$  est possible. Pour ce dernier cas, on a besoin de calculer les trois matrices opérationnelles d'intégration, ce sera le but du chapitre 4.

Avant d'exposer, dans les détails, cette méthode de résolution, on présente les matrices d'intégration, notée  $P$  pour les ondelettes de Legendre monodimensionnelles et celles notées  $P_x$  et  $P_y$  pour les ondelettes bidimensionnelles et on démontrera qu'elles sont inversibles.

## 2 Les matrices opérationnelles d'intégration

### 2.1 Le cas des ondelettes monodimensionnelles

On rappelle que les ondelettes de Legendre en une dimension, sont définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} L_m(2^j x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$ ;  $m \geq 0$  et  $j$  est un entier strictement positif fixé.

Pour  $M > 0$ , un entier fixé, on note  $\psi(x)$  le vecteur d'ordre  $2^{j-1}M$ , formé de toutes les ondelettes

$$\psi(x) = (\psi_{nm}(x))_{1 \leq n \leq 2^{j-1}; 0 \leq m \leq M-1}.$$

La matrice opérationnelle d'intégration est définie par

$$\int_0^x \psi(t) dt = P\psi(x). \quad (3.10)$$

Pour déterminer cette matrice, on intègre chaque composante  $\psi_{nm}$ ;  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$ ;  $m = 0, \dots, M-1$ , du vecteur  $\psi$  sur  $[0, x]$  et on exprime le résultat de cette intégration en fonction des composantes de ce vecteur.

Pour  $m = 0$ ;

$$\int_0^x \psi_{n0}(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} L_0(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq t \leq \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} L_0(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} L_0(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x \end{cases}$$

Sachant que  $L_0(t) = 1$  pour tout  $t \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right]$ , on a

$$\int_0^x \psi_{n0}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = 1, \dots, n-1 \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} (x - \frac{n-1}{2^{j-1}}) & \text{si } x \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{j-1}} & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = n+1, \dots, 2^{j-1}. \end{cases}$$

Comme

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{2} (x - \frac{n-1}{2^{j-1}}) &= \frac{1}{2^j} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \left( (2^j x + 2n - 1) + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2^j} \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{\frac{j}{2}} (2^j x - 2n + 1) + 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

on peut exprimer la dernière intégrale par

$$\int_0^x \psi_{n0}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = 1, \dots, n-1 \\ \frac{1}{2^j} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{n1}(x) + \psi_{n0}(x) \right) & \text{si } x \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \\ \frac{1}{2^{j-1}} \psi_{\hat{n}0}(x) & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = n+1, \dots, 2^{j-1}. \end{cases} \quad (3.11)$$

On peut réécrire la relation (3.11) de la manière

$$\int_0^x \psi_{n0}(t) dt = \frac{1}{2^j} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{n1}(x) + \psi_{n0}(x) + 2 \sum_{\hat{n}=n+1}^{\hat{n}=2^{j-1}} \psi_{\hat{n}0}(x) \right). \quad (3.12)$$

Pour  $1 \leq m \leq M-2$ ,

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} L_m(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ \int_{\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{\frac{n}{2^{j-1}}} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} L_m(2^j t - 2n + 1) dt & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^x \Psi_{nm}(t) dt \\ \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2m+1} \left( L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{t=x}, \\ \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2m+1} \left( L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n-1}{2^{j-1}}}^{t=\frac{n}{2^{j-1}}}, \\ \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt \tag{3.13}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2m+1} \left( L_{m+1}(2^j x - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j x - 2n + 1) \right) \\ \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x, \end{cases}$$

car

$$\left( L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n-1}{2^{j-1}}} = L_{m+1}(-1) - L_{m-1}(-1) = 0,$$

et

$$\left( L_{m+1}(2^j t - 2n + 1) - L_{m-1}(2^j t - 2n + 1) \right) \Big|_{t=\frac{n}{2^{j-1}}} = L_{m+1}(1) - L_{m-1}(1) = 0.$$

De plus,

$$= \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \times \left( \frac{2^j}{\sqrt{2m+3}} \sqrt{\frac{2m+3}{2}} L_{m+1}(2^j x - 2n + 1) - \frac{2^j}{\sqrt{2m-1}} \sqrt{\frac{2m-1}{2}} L_{m-1}(2^j x - 2n + 1) \right).$$

Ainsi, on peut réécrire (3.13) de la manière

$$\int_0^x \Psi_{nm}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{nm+1}(x) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{nm-1}(x) \right) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x. \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour  $m = M - 1$ , en reprenant les mêmes calculs, on obtient

$$\int_0^x \Psi_{nM-1}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2M+1}} \Psi_{nM}(x) - \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{nM-2}(x) \right) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x. \end{cases}$$

Comme la fonction  $\Psi_{nM}$  ne figure pas dans le vecteur  $\psi$ , on approche ce dernier résultat par

$$\int_0^x \Psi_{nM-1}(t) dt \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \\ -\frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{nM-2}(x) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x. \end{cases} \quad (3.15)$$

Les relations (3.11), (3.14) et (3.15) déterminent la matrice  $P$  qui est d'ordre  $2^{j-1}M$ .

$$P = \frac{1}{2^j} \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ \mathbf{0} & L & F & \cdots & F \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & L \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{0}$  est la matrice nulle d'ordre  $M$ .  $F$  et  $L$  sont des matrices d'ordre  $M$  qui sont données par

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

et

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{7}\sqrt{5}} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{-1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

**Proposition 3.1** La matrice d'intégration  $P$ , donnée par (3.16)-(3.18), est inversible.

**Preuve.** Il suffit de vérifier que le déterminant de cette matrice est non nul. La matrice  $P$  étant triangulaire par blocs, son déterminant serait non nul si le déterminant de chaque bloc diagonal, à savoir la matrice  $L$  donnée par (3.18), est non nul. Ce qui est le cas. Car par la relation de récurrence

$$\det(L) = \frac{1}{2M-1} \frac{1}{2M-3} \det(\tilde{L}),$$

où la matrice  $\tilde{L}$  (est  $L$  privée des deux dernières lignes et colonnes) est définie par

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{7}\sqrt{5}} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{-1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-7}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-5}} & 0 \end{bmatrix},$$

il n'est pas difficile de voir que

$$\det(L) = \prod_{m=1}^{m=M} \frac{1}{2m-1}.$$

■

## 2.2 Le cas des ondelettes bidimensionnelles

On rappelle que les ondelettes de Legendre en deux dimensions, sont définies sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  par

$$\Psi_{nmn'm'}(x, y) = \Psi_{nm}(x)\Psi_{n'm'}(y).$$

c'est à dire

$$\Psi_{nmn'm'}(x, y) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{j'}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \sqrt{\frac{2m'+1}{2}} L_m(2^j x - 2n + 1) L_{m'}(2^{j'} y - 2n' + 1) \\ \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \text{ et } \frac{n'-1}{2^{j'-1}} \leq y < \frac{n'}{2^{j'-1}} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Pour  $M > 0$  et  $M' > 0$ ; deux entiers fixés, on note par  $\psi(x, y)$  le vecteur formé de toutes les ondelettes

$$\psi(x, y) = (\Psi_{nmn'm'}(x, y))_{1 \leq n \leq 2^{j-1}; 0 \leq m \leq M-1; 1 \leq n' \leq 2^{j'-1}; 0 \leq m' \leq M'-1}.$$

Les matrices opérationnelles d'intégrations sont définies dans [31] par

$$\int_0^x \psi(\tau, y) d\tau = P_x \psi(x, y), \quad (3.20)$$

et

$$\int_0^y \psi(x, \tau) d\tau = P_y \psi(x, y). \quad (3.21)$$

**Détermination de la matrice  $P_x$** 

Afin de déterminer la matrice  $P_x$ , on exprime  $\int_0^x \Psi_{nmn'm'}(\tau, y) d\tau$ , en fonctions des éléments du vecteur  $\Psi(x, y)$ .

Pour  $m = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{n0n'm'}(\tau, y) d\tau &= \int_0^x \Psi_{n0}(\tau) \Psi_{n'm'}(y) d\tau \\ &= 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{j'}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2m'+1}{2}} \left( \int_0^x L_0(2^j \tau - 2n + 1) d\tau \right) L_{m'}(2^{j'} y - 2n' + 1). \end{aligned}$$

En refaisant les mêmes calculs qui ont abouti à la relation (3.11), on a

$$\int_0^x \Psi_{n0n'm'}(\tau, y) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = 1, \dots, n-1; \forall y \\ \frac{1}{2^j} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n1}(\tau) \Psi_{n'm'}(y) + \Psi_{n0}(\tau) \Psi_{n'm'}(y) \right) & \text{si } (x, y) \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right] \\ \frac{1}{2^{j-1}} \Psi_{\hat{n}0}(\tau) \Psi_{n'm'}(y) & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = n+1, \dots, 2^{j-1}; \forall y, \end{cases}$$

cette dernière peut prendre l'expression

$$\int_0^x \Psi_{n0n'm'}(\tau, y) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = 1, \dots, n-1; \forall y. \\ \frac{1}{2^j} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n1n'm'}(x, y) + \Psi_{n0n'm'}(x, y) \right) & \text{si } (x, y) \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right] \\ \frac{1}{2^{j-1}} \Psi_{\hat{n}0n'm'}(x, y) & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{j-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{j-1}} \right]; \hat{n} = n+1, \dots, 2^{j-1}; \forall y. \end{cases} \quad (3.22)$$

La relation (3.22) prend alors la forme

$$\int_0^x \Psi_{n0n'm'}(\tau, y) d\tau = \frac{1}{2^j} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n1n'm'}(x, y) + \Psi_{n0n'm'}(x, y) + 2 \sum_{\hat{n}=n+1}^{\hat{n}=2^{j-1}} \Psi_{\hat{n}0n'm'}(x, y) \right).$$

Pour  $1 \leq m \leq M-2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{nmn'm'}(\tau, y) d\tau &= 2^{\frac{j}{2}} 2^{\frac{j'}{2}} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \sqrt{\frac{2m'+1}{2}} \left( \int_0^x L_m(2^j \tau - 2n + 1) d\tau \right) L_{m'}(2^{j'} y - 2n' + 1). \end{aligned}$$

Les mêmes calculs qui ont donné la relation (3.14) aboutissent à

$$= \begin{cases} \int_0^x \Psi_{nmn'm'}(\tau, y) d\tau \\ 0 \text{ si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \text{ et } \forall y \\ \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{nm+1}(x) \Psi_{n'm'}(y) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{nm-1}(x) \Psi_{n'm'}(y) \right) \\ \text{si } (x, y) \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right] \\ 0 \text{ si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x \text{ et } \forall y, \end{cases}$$

que l'on réécrit

$$= \begin{cases} \int_0^x \Psi_{nmn'm'}(\tau, y) d\tau \\ 0 \text{ si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \text{ et } \forall y \\ \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{nm+1n'm'}(x, y) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{nm-1n'm'}(x, y) \right) \\ \text{si } (x, y) \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right] \\ 0 \text{ si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x \text{ et } \forall y. \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour  $m = M - 1$ ,

$$\simeq \begin{cases} \int_0^x \Psi_{nM-1n'm'}(\tau, y) d\tau \\ 0 \text{ si } x \leq \frac{n-1}{2^{j-1}} \text{ et } \forall y \\ -\frac{1}{2^j \sqrt{2M-1} \sqrt{2M-3}} \Psi_{nM-2n'm'}(x, y) \text{ si } (x, y) \in \left[ \frac{n-1}{2^{j-1}}, \frac{n}{2^{j-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right] \\ 0 \text{ si } \frac{n}{2^{j-1}} \leq x \text{ et } \forall y. \end{cases} \quad (3.24)$$

Les relations (3.20)~(3.24) déterminent entièrement la matrice  $P_x$ . Celle-ci est une matrice d'ordre  $(2^{j-1}2^{j'-1}MM')$  définie par

$$P_x = \frac{1}{2^j} \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ \mathbf{0} & L & F & \cdots & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & L \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$\mathbf{0}$  est la matrice nulle d'ordre  $2^{j'-1}MM'$ .  $L$  et  $F$  sont des matrices de même ordre définies par

$$F = \begin{bmatrix} 2I & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \cdots & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \cdots & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \cdots & \mathbf{0}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \cdots & \mathbf{0}' \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{L} \tag{3.27} \\
 = & \begin{bmatrix}
 \mathbf{I} & \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I} & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \dots & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' \\
 \frac{-1}{\sqrt{3}}\mathbf{I} & \mathbf{0}' & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}\mathbf{I} & \mathbf{0}' & \dots & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' \\
 \mathbf{0}' & \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}\mathbf{I} & \mathbf{0}' & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\mathbf{I} & \ddots & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{\sqrt{7}\sqrt{5}}\mathbf{I} & \mathbf{0}' & \ddots & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \ddots & \frac{-1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-5}}\mathbf{I} & \mathbf{0}' & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}\mathbf{I} \\
 \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \dots & \mathbf{0}' & \frac{-1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}}\mathbf{I} & \mathbf{0}'
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\mathbf{0}'$  est la matrice nulle, toutes deux sont d'ordre  $2^{j'-1}M'$ .

**Proposition 3.2** La matrice  $P_x$  définie par (3.25)-(3.27) est inversible.

**Preuve.** On vérifie par récurrence que le déterminant de la matrice  $\mathbf{L}$  définie par (3.27) est donné par

$$\det(\mathbf{L}) = \prod_{m=1}^{m=M-1} \left( \frac{1}{2m+1} \right)^{2^{j'-1}M'}.$$

Comme la matrice  $P_x$  est triangulaire par blocs, avec la matrice  $\mathbf{L}$  sur sa diagonale, cela implique que le déterminant de la matrice  $P_x$  est non nul. ■

### Détermination de la matrice $P_y$

Pour déterminer la matrice  $P_y$ , on exprime  $\int_0^y \Psi_{nmn'm'}(x, \tau) d\tau$ , en fonctions des éléments du vecteur  $\psi(x, y)$ .

On remarque que c'est les mêmes calculs, qui ont déterminé la matrice  $P_x$ , qui se répètent sauf que les intégrales se font par rapport à la deuxième variable. Ainsi, on vérifie facilement que

pour  $m' = 0$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^y \Psi_{nmn'0}(x, s) ds \tag{3.28} \\
 = & \begin{cases}
 \frac{1}{2^{j'}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{nmn'1}(x, y) + \Psi_{nmn'0}(x, y) \right) & \text{si } (x, y) \in \left[ \frac{n-1}{2^{j'-1}}, \frac{n}{2^{j'-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right]; \\
 0 & \forall x \text{ et } \forall y \in \left[ \frac{\hat{n}'-1}{2^{j'-1}}, \frac{\hat{n}'}{2^{j'-1}} \right], \hat{n}' = 1, \dots, n'-1 \\
 \frac{1}{2^{j'-1}} \Psi_{nm\hat{n}'0}(x, y) & \forall x \text{ et } y \in \left[ \frac{\hat{n}'-1}{2^{j'-1}}, \frac{\hat{n}'}{2^{j'-1}} \right], \hat{n}' = n'+1, \dots, 2^{j'-1},
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

et que pour  $1 \leq m' \leq M' - 2$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^y \Psi_{nmn'm'}(x, \tau) d\tau \tag{3.29} \\
 = & \begin{cases}
 \frac{1}{2^{j'} \sqrt{2m'+1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2m'+3}} \Psi_{nmn',m'+1}(x, y) - \frac{1}{\sqrt{2m'-1}} \Psi_{nmn',m'-1}(x, y) \right) \\
 \text{si } (x, y) \in \left[ \frac{n-1}{2^{j'-1}}, \frac{n}{2^{j'-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{j'-1}}, \frac{n'}{2^{j'-1}} \right] \\
 0 & \text{ailleurs,}
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

et enfin pour  $m' = M' - 1$ ,

$$\int_0^y \Psi_{nmn'M'-1}(x, \tau) d\tau \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2^{j'}} \frac{1}{\sqrt{2^{M'-1}}} \frac{1}{\sqrt{2^{M'-3}}} \Psi_{nmn'M'-2}(x, y) \\ \text{si } \frac{n-1}{2^{j'-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j'-1}} \text{ et } \frac{n'-1}{2^{j'-1}} \leq y < \frac{n'}{2^{j'-1}} \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Les relations (3.21), (3.28)~(3.30) déterminent entièrement la matrice  $P_y$ . Celle-ci est une matrice d'ordre  $(2^{j'-1}2^{j'-1}MM')$  (contenant  $2^{j'-1}M$  blocs diagonaux) définie par

$$P_y = \frac{1}{2^{j'}} \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & P \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{0}$  et  $P$  sont d'ordre  $2^{j'-1}M'$ , avec  $\mathbf{0}$  est la matrice nulle et  $P$  est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} L & F & \cdots & F \\ \mathbf{0}' & L & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}' & \cdots & \mathbf{0}' & L \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{0}'$ ,  $L$  et  $F$  sont des matrices d'ordre  $M'$ ,  $\mathbf{0}'$  étant la matrice nulle et  $L, F$  sont définies par

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

$L$  est toujours la matrice d'ordre  $M'$  définie en (3.18).

**Proposition 3.3** *La matrice  $P_y$  est inversible.*

**Preuve.** Le déterminant de  $P_y$  est non nul si le déterminant de la matrice  $P$  donnée par (3.32) est non nul aussi. Ce qui est le cas, car

$$\begin{aligned} \det(P) &= (\det(L))^{2^{j'-1}M'} \\ &= \prod_{m=1}^{m=M'-1} \left( \frac{1}{2m-1} \right)^{2^{j'-1}M'}. \end{aligned}$$

■

### 3 Exposé de la méthode (cas monodimensionnel en espace)

On considère l'équation complète d'ordre deux à coefficients constants

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + a_4 u(t, x) = f(t, x), \quad (3.33)$$

avec les conditions initiales

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ sur } [0, 1], \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \text{ sur } [0, 1], \quad (3.35)$$

$u_0$  et  $u_1$  sont des fonctions données continues sur  $[0, 1]$ .

### 3.1 Cas des conditions de type Dirichlet

$$u(t, 0) = h_1(t) \text{ sur } [0, T], \quad (3.36)$$

$$u(t, 1) = h_2(t) \text{ sur } [0, T]. \quad (3.37)$$

$h_1$  et  $h_2$  sont des fonctions données deux fois dérivables sur  $[0, T]$ .

On pose

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &\simeq C^T(t)\psi(x) \\ &= \sum_{n=1}^{2^{j-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}(t)\psi_{nm}(x). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Une première intégration de (3.38) sur l'intervalle  $[0, x]$  et la relation (3.10) donnent

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \tau) d\tau &= \int_0^x C^T(t)\psi(\tau) d\tau \\ &= C^T(t)P\psi(x). \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = C^T(t)P\psi(x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0). \quad (3.39)$$

Une deuxième intégration sur l'intervalle  $[0, x]$  entraîne

$$u(t, x) = C^T(t)P^2\psi(x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)x + u(t, 0).$$

En considérant la condition (3.36) on a

$$u(t, x) = C^T(t)P^2\psi(x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)x + h_1(t). \quad (3.40)$$

Dans cette dernière expression, le terme  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)$  est inconnu. En posant  $x = 1$  dans (3.40) et en considérant la condition (3.37), on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = -C^T(t)P^2\psi(1) + h_2(t) - h_1(1).$$

En revenant à (3.40), on retrouve l'expression finale de  $u$  à savoir

$$u(t, x) = C^T(t)P^2 [\psi(x) - x\psi(1)] + (h_2(t) - h_1(t))x + h_1(t), \quad (3.41)$$

et en revenant à (3.39), on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = C^T(t)P [\psi(x) - P\psi(1)] + h_2(t) - h_1(t). \quad (3.42)$$

Il reste à dériver (3.41) par rapport à la variable  $t$ , pour retrouver l'approximation de  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$  et celle de  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{dC^T}{dt}(t)P^2 [\psi(x) - x\psi(1)] + \left( \frac{dh_2}{dt}(t) - \frac{dh_1}{dt}(t) \right) x + \frac{dh_1}{dt}(t), \quad (3.43)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{d^2 C^T}{dt^2}(t) P^2 [\psi(x) - x\psi(1)] + \left( \frac{d^2 h_2}{dt^2}(t) - \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t) \right) x + \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t). \quad (3.44)$$

En substituant (3.38) et (3.41)~(3.44) dans (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{d^2 C^T}{dt^2}(t) P^2 [\psi(x) - x\psi(1)] + \frac{dC^T}{dt}(t) P^2 [\psi(x) - x\psi(1)] \\ & + C^T(t) (a_2 P [\psi(x) - P\psi(1)] + a_3 \psi(x) + a_4 P^2 [\psi(x) - x\psi(1)]) \\ = & f(t, x) - a_1 \left( \left( \frac{d^2 h_2}{dt^2}(t) - \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t) \right) x + \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t) \right) \\ & - \left( \frac{dh_2}{dt}(t) - \frac{dh_1}{dt}(t) \right) x - \frac{dh_1}{dt}(t) - a_2 (h_2(t) - h_1(t)) \\ & - a_4 ((h_2(t) - h_1(t)) x + h_1(t)). \end{aligned} \quad (3.45)$$

En exprimant dans la base d'ondelettes les fonctions suivantes

$$\begin{cases} f(t, x) = F^T(t) \psi(x) = \psi^T(x) F(t) \\ x = X^T \psi(x) = \psi^T(x) X \\ 1 = d^T \psi(x) = \psi^T(x) d, \end{cases} \quad (3.46)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & [a_1 \psi^T(x) - a_1 X^T \psi(x) \psi^T(x) d \psi^T(1)] (P^2)^T \frac{d^2 C}{dt^2}(t) \\ & + [\psi^T(x) (P^2)^T - X^T \psi(x) \psi^T(x) d \psi^T(1) (P^2)^T] \frac{dC}{dt} \\ & + \left[ \begin{array}{l} (a_2 \psi^T(x) P^T - a_2 \psi^T(x) d \psi^T(1) (P^2)^T \\ + a_4 (\psi^T(x) - X^T \psi(x) \psi^T(x) d \psi^T(1)) (P^2)^T + a_3 \psi^T(x) \end{array} \right] C(t) \\ = & \psi^T(x) \left[ F(t) - X \left( \frac{dh_2}{dt}(t) - \frac{dh_1}{dt}(t) \right) - a_1 X \left( \frac{d^2 h_2}{dt^2}(t) - \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t) \right) \right] \\ & - \psi^T(x) \left[ (a_4 X + a_2 d) (h_2(t) - h_1(t)) - \left( a_4 h_1(t) + \frac{dh_1}{dt}(t) + a_1 \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t) \right) d \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Connaissant le produit de deux ondelettes par un vecteur, à savoir

$$V^T \psi(x) \psi^T(x) = \psi^T(x) \tilde{V}, \quad (3.48)$$

où  $\tilde{V}$  est une matrice d'ordre  $2^{j-1}M$  qui dépend du vecteur  $V$ , l'équation (3.47) devient

$$\begin{aligned} & [a_1 I_d - a_1 \tilde{X} d \psi^T(1)] (P^2)^T \frac{d^2 C}{dt^2}(t) + [(P^2)^T + \tilde{X} d \psi^T(1) (P^2)^T] \frac{dC}{dt}(t) \\ & + [a_2 P^T - a_2 d \psi^T(1) (P^2)^T + a_4 (P^2)^T + a_3 I_d - a_4 \tilde{X} d \psi^T(1) (P^2)^T] C(t) \\ = & F(t) - X \left( \frac{dh_2}{dt}(t) - \frac{dh_1}{dt}(t) \right) - a_1 X \left( \frac{d^2 h_2}{dt^2}(t) - \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t) \right) \\ & - (a_4 X + a_2 d) (h_2(t) - h_1(t)) - \left( a_4 h_1(t) + \frac{dh_1}{dt}(t) + a_1 \frac{d^2 h_1}{dt^2}(t) \right) d. \end{aligned} \quad (3.49)$$

C'est l'équation différentielle d'ordre deux en  $C$  à résoudre.

Les conditions initiales  $C(0)$  et  $\frac{dC}{dt}(0)$ , sont obtenues à partir de (3.36), (3.41), (3.46) et (3.48). Plus précisément de (3.36) et (3.41), on a

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(0, x) \\ &= C^T(0)P^2 [\psi(x) - x\psi(1)] + [h_2(0) - h_1(0)]x + h_1(0). \end{aligned}$$

La relation

$$\begin{aligned} u_0(x) &= U_0^T \psi(x) \\ &= \psi^T(x)U_0, \end{aligned}$$

une transposition et (3.46) conduisent à

$$\begin{aligned} &[\psi^T(x) - X^T \psi(x) \psi^T(x) d\psi^T(1)] (P^2)^T C(0) \\ &= \psi^T(x) [U_0 - (h_2(0) - h_1(0))X - h_1(0)d], \end{aligned}$$

la relation (3.48) entraîne

$$\begin{aligned} &\psi^T(x) [I_d - \tilde{X} d\psi^T(1)] (P^2)^T C(0) \\ &= \psi^T(x) [U_0 - (h_2(0) - h_1(0))X - h_1(0)d]. \end{aligned}$$

Ainsi, la condition initiale vérifiée par le vecteur inconnu  $C$  est

$$C(0) = ([I_d - \tilde{X} d\psi^T(1)] (P^2)^T)^{-1} (U_0 - (h_2(0) - h_1(0))X - h_1(0)d). \quad (3.50)$$

De même pour  $\frac{dC}{dt}(0)$ , (3.35), (3.43), (3.46) et (3.48) entraînent

$$\begin{aligned} &\frac{dC}{dt}(0) \\ &= ([I_d - \tilde{X} d\psi^T(1)] (P^2)^T)^{-1} \left( U_1 - \left( \frac{dh_2}{dt}(0) - \frac{dh_1}{dt}(0) \right) X - \frac{dh_1}{dt}(0)d \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

En résumé, résoudre le problème (3.33-3.34-3.35-3.36-3.37), revient à résoudre le problème (3.49-3.50-3.51).

### 3.2 Cas des conditions mixtes

En plus des conditions initiales (3.34) et (3.35), on considère

$$u(t, 0) = g_1(t) \text{ sur } [0, T], \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = g_2(t) \text{ sur } [0, T], \quad (3.53)$$

$g_1$  et  $g_2$  sont deux fonctions données dérivables sur  $[0, T]$ .

Une première intégration de (3.38) sur l'intervalle  $[0, x]$  et (3.53) donnent

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = C^T(t)P\psi(x) + g_2(t). \quad (3.54)$$

Une intégration de cette dernière et la condition (3.52) donnent

$$u(t, x) = C^T(t)P^2\psi(x) + g_2(t)x + g_1(t). \quad (3.55)$$

Il reste à dériver (3.55) par rapport à la variable  $t$ , pour retrouver  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{dC^T}{dt}(t)P^2\psi(x) + \frac{dg_2}{dt}(t)x + \frac{dg_1}{dt}(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) &= \frac{d^2C^T}{dt^2}(t)P^2\psi(x) + \frac{d^2g_2}{dt^2}(t)x + \frac{d^2g_1}{dt^2}(t).\end{aligned}\quad (3.56)$$

La substitution de (3.38) et de (3.54)~(3.56) dans (3.33) conduit à

$$\begin{aligned}&\frac{dC^T}{dt}(t)P^2\psi(x) + a_1\frac{d^2C^T}{dt^2}(t)P^2\psi(x) \\ &+ C^T(t)(a_2P + a_3I_d + a_4P^2)\psi(x) \\ &= f(t, x) - \left(\frac{dg_2}{dt}(t) + a_1\frac{d^2g_2}{dt^2}(t) + a_4g_2(t)\right)x \\ &\quad - \left(\frac{dg_1}{dt}(t) + a_1\frac{d^2g_1}{dt^2}(t) + a_2g_2(t) + a_4g_1(t)\right).\end{aligned}$$

En rappelant les relations (3.46), la transposition de cette dernière égalité donne

$$\begin{aligned}&\psi^T(x) \left( (P^2)^T \frac{dC}{dt}(t) + a_1(P^2)^T \frac{d^2C}{dt^2}(t) + (a_2P^T + a_3I_d + a_4(P^2)^T) C(t) \right) \\ &= \psi^T(x) \left( F(t) - \left( \frac{dg_2}{dt}(t) + a_1\frac{d^2g_2}{dt^2}(t) + a_4g_2(t) \right) X \right) \\ &\quad - \psi^T(x) \left( \frac{dg_1}{dt}(t) + a_1\frac{d^2g_1}{dt^2}(t) + a_2g_2(t) + a_4g_1(t) \right) d.\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire le système différentiel d'ordre 2 dont l'inconnue est  $C$

$$\begin{aligned}&a_1(P^2)^T \frac{d^2C}{dt^2}(t) + (P^2)^T \frac{dC}{dt}(t) + (a_2P^T + a_3I_d + a_4(P^2)^T) C(t) \\ &= F(t) - \left( \frac{dg_2}{dt}(t) + a_1\frac{d^2g_2}{dt^2}(t) + a_4g_2(t) \right) X \\ &\quad - \left( \frac{dg_1}{dt}(t) + a_1\frac{d^2g_1}{dt^2}(t) + a_2g_2(t) + a_4g_1(t) \right) d.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Les conditions initiales  $C(0)$  et  $\frac{dC}{dt}(0)$  sont obtenues de la même manière que pour le cas des conditions de type Dirichlet.

$$C(0) = (P^2)^{-1} (U_0 - g_2(0)X - g_1(0)d). \quad (3.58)$$

$$\frac{dC}{dt}(0) = (P^2)^{-1} \left( U_1 - \frac{dg_2}{dt}(0)X - \frac{dg_1}{dt}d \right). \quad (3.59)$$

En résumé, résoudre le problème (3.33-3.34-3.35-3.52-3.53) revient à résoudre le problème (3.57-3.58-3.59).

**Remarque 3.1** Les étapes effectuées pour transformer le problème aux limites (3.33-3.34-3.35-3.52-3.53), sont liées à la donnée de ces conditions en  $x = 0$ . Si les conditions (3.52) et (3.53) sont données en  $x = 1$ , la procédure de calcul n'est plus appliquée. On passera alors aux différentes intégrations sur l'intervalle  $[x, 1]$  (au lieu des intégrations sur  $[0, x]$ ). Pour cela il faut évidemment connaître la matrice opérationnelle d'intégration, notée  $\bar{P}$  et définie par :

$$\int_x^1 \psi(\tau) d\tau = \bar{P}\psi(x).$$

Pour la détermination de cette matrice, on se réfère à [23].

## 4 Exposé de la méthode (cas bidimensionnel en espace)

Une équation aux dérivées partielles non stationnaire d'ordre deux et en deux dimension prend la forme complète

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) + a_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) + a_2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) \\ & + a_4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) + a_5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) + a_6 u(t, x, y) \\ & = f(t, x, y), \end{aligned} \quad (3.60)$$

où  $t \in ]0, T]$  et  $(x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[$ .

On considère la condition initiale

$$u(0, x, y) = u_0(x, y) \text{ sur } [0, 1] \times [0, 1]. \quad (3.61)$$

### 4.1 Cas des conditions de type Dirichlet :

$$\begin{cases} u(t, 0, y) = u_G(t, y), & t \in ]0, T[, y \in ]0, 1[ \\ u(t, 1, y) = u_D(t, y), & t \in ]0, T[, y \in ]0, 1[ \\ u(t, x, 0) = u_B(t, x), & t \in ]0, T[, x \in ]0, 1[ \\ u(t, x, 1) = u_H(t, x), & t \in ]0, T[, x \in ]0, 1[. \end{cases} \quad (3.62)$$

où  $u_B, u_H, u_G, u_D$  et  $u_0$  sont des fonctions données régulières.

On commence par considérer la décomposition de la dérivée d'ordre 4

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(t, x, y) = C^T(t) \psi(x, y). \quad (3.63)$$

Une première intégration par rapport à la variable  $x$  et grâce à (3.20) on a

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(t, x, y) = C^T(t) P_x \psi(x, y) + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(t, 0, y). \quad (3.64)$$

Une deuxième intégration par rapport à la variable  $x$  donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) = C^T(t) P_x^2 \psi(x, y) + x \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(t, 0, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y). \quad (3.65)$$

Le terme  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(t, 0, y)$  étant inconnu, en posant  $x = 1$  dans (3.65), on peut l'exprimer

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(t, 0, y) = -C^T(t) P_x^2 \psi(1, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 1, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y).$$

En injectant cette dernière expression dans la relation (3.65), elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) = C^T(t) P_x^2 [\psi(x, y) - x \psi(1, y)] + x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 1, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y) \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y).$$

En faisant intervenir les conditions (3.62), on obtient l'expression finale de  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) = C^T(t) P_x^2 (\psi(x, y) - x \psi(1, y)) + x \left( \frac{\partial^2 u_D}{\partial y^2}(t, y) - \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}(t, y) \right) + \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}(t, y). \quad (3.66)$$

En refaisant les mêmes étapes, (par rapport à la variable  $y$ ), on obtient la décomposition de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) = C^T(t)P_y^2(\psi(x, y) - y\psi(x, 1)) + y \left( \frac{\partial^2 u_H}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2}(t, x) \right) + \frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2}(t, x). \quad (3.67)$$

Pour obtenir l'expression de  $u$ , il reste à intégrer deux fois (par rapport à  $y$ ) la relation (3.66). Une première intégration donne l'expression du terme  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) = & C^T(t)P_x^2P_y(\psi(x, y) - x\psi(1, y)) + x \left( \frac{\partial u_D}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, y) \right) \\ & - x \left( \frac{\partial u_D}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) \right) + \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0), \end{aligned}$$

la seconde donne

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = & C^T(t)P_x^2P_y^2(\psi(x, y) - x\psi(1, y)) \\ & + x(u_D(t, y) - u_D(t, 0) - u_G(t, y) + u_G(t, 0)) \\ & + y \left[ x \left( \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial u_D}{\partial y}(t, 0) \right) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) \right] \\ & + u_G(t, y) - u_G(t, 0) + u_B(t, x). \end{aligned}$$

Pour déterminer le terme entre crochets dans (3.68), on pose dans cette expression  $y = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} & x \left( \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial u_D}{\partial y}(t, 0) \right) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) \\ = & u_H(t, x) - C^T(t) \cdot P_x^2P_y^2(\psi(x, 1) - x\psi(1, 1)) \\ -x(u_D(t, 1) - u_D(t, 0) - u_G(t, 1) + u_G(t, 0)) & - u_G(t, 1) + u_G(t, 0) - u_B(t, x). \end{aligned}$$

En portant cette dernière dans (3.68), on obtient l'expression finale de  $u$ , à savoir

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = & C^T(t) \cdot P_x^2P_y^2[\psi(x, y) - x\psi(1, y) - y\psi(x, 1) + xy\psi(1, 1)] \\ & - xy(u_D(t, 1) - u_D(t, 0) - u_G(t, 1) + u_G(t, 0)) \\ & + y(u_G(t, 0) - u_G(t, 1) + u_H(t, x) - u_B(t, x)) + u_G(t, y) - u_G(t, 0) \\ & + x(u_D(t, y) - u_D(t, 0) - u_G(t, y) + u_G(t, 0)) + u_B(t, x). \end{aligned}$$

Le terme  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y)$  est calculé à partir de la dérivation par rapport à  $t$  de la relation (3.68).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) \quad (3.68) \\ = & \frac{dC^T}{dt}(t)P_x^2P_y^2[\psi(x, y) - x\psi(1, y) - y\psi(x, 1) + xy\psi(1, 1)] \\ & - xy[u'_D(t, 1) - u'_D(t, 0) - u'_G(t, 1) + u'_G(t, 0)] \\ & + y \left[ u'_G(t, 0) - u'_G(t, 1) + \frac{\partial u_H}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial u_B}{\partial t}(t, x) \right] + \frac{\partial u_G}{\partial t}(t, y) - u'_G(t, 0) \\ & + x \left[ \frac{\partial u_D}{\partial t}(t, y) - u'_D(t, 0) - \frac{\partial u_G}{\partial t}(t, y) + u'_G(t, 0) \right] + \frac{\partial u_B}{\partial t}(t, x). \end{aligned}$$

Il reste à retrouver la décomposition des termes  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

Le premier est le résultat de l'intégration par rapport à la variable  $x$  de relation (3.67), ce qui donne

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) \\ &= C^T(t)P_y^2P_x(\psi(x, y) - y\psi(x, 1)) + y\left(\frac{\partial u_H}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, x)\right) \\ & \quad - y\left(\frac{\partial u_H}{\partial x}(t, 0) - \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, 0)\right) + \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y). \end{aligned} \quad (3.69)$$

La dérivée croisée est obtenue par intégration par rapport à la variable  $y$  de la relation (3.64), ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) = C^T(t)P_xP_y\psi(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, 0). \quad (3.70)$$

En portant (3.66)~(3.68) et (3.68)~(3.70) dans (3.60), cette dernière se transforme en une équation différentielle d'inconnue le vecteur  $C$ , du type

$$V_1^T(x, y)\frac{dC}{dt}(t) = V_4^T(x, y)C(t) + G(t, x, y), \quad (3.71)$$

où les vecteurs  $V_i(x, y)$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$  sont définis par

$$V_1(x, y) = P_x^2P_y^2[\psi(x, y) - x\psi(1, y) - y\psi(x, 1) + xy\psi(1, 1)]. \quad (3.72)$$

$$V_2(x, y) = \psi(x, y) - y\psi(x, 1). \quad (3.73)$$

$$V_3(x, y) = \psi(x, y) - x\psi(1, y).$$

$$\begin{aligned} V_4(x, y) &= -(a_1P_y^2P_x + a_3P_y^2)V_2(x, y) - (a_2P_x^2P_y + a_4P_x^2)V_3(x, y) \\ & \quad - a_5P_xP_y\psi(x, y) - a_6V_1(x, y). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Les fonctions  $G, F_i$ ;  $i = 1, \dots, 6$  sont définies par

$$\begin{aligned} & G(t, x, y) \\ &= xy(F_1(t, 1) + a_6F_2(t, 1)) \\ & \quad - x\left[F_1(t, y) - a_2\frac{\partial F_2}{\partial y}(t, y) + a_4\left(\frac{\partial^2 u_D}{\partial y^2}(t, y) - \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}(t, y)\right) + a_6F_2(t, y)\right] \\ & \quad - y\left[\frac{\partial F_3}{\partial t}(t, x) - a_1(F_4(t, x) - F_4(t, 0)) - a_3\frac{\partial F_4}{\partial x^2}(t, x) - a_6F_3(t, x)\right] \\ & \quad + f(t, x, y) - \frac{\partial F_5}{\partial t}(t, x, y) - a_6F_5(t, x, y) - F_6(t, x, y). \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$F_1(t, y) = \frac{\partial u_D}{\partial t}(t, y) - u'_D(t, 0) - \frac{\partial u_G}{\partial t}(t, y) + u'_G(t, 0). \quad (3.76)$$

$$F_2(t, y) = u_D(t, y) - u_D(t, 0) - u_G(t, y) + u_G(t, 0). \quad (3.77)$$

$$F_3(t, x) = u_G(t, 0) - u_G(t, 1) + u_H(t, x) - u_B(t, x). \quad (3.78)$$

$$F_4(t, x) = \frac{\partial u_H}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, x). \quad (3.79)$$

$$F_5(t, x, y) = u_G(t, y) - u_G(t, 0) + u_B(t, x). \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}
 & F_6(t, x, y) \\
 = & a_1 \left( \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) \right) \\
 & + a_2 \left( \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) \right) + a_3 \frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2}(t, x) \\
 & + a_4 \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}(t, y) + a_5 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, 0) \right).
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

A partir des relations (3.61) et (3.68), on peut exprimer la condition initiale C(0)

$$V_1^T(x, y)C(0) = u_0(x, y) + xyF_2(0, 1) - yF_3(0, x) - xF_2(0, y) - F_5(0, x, y). \tag{3.82}$$

**Remarque 3.2** 1. L'équation différentielle (3.71), d'inconnue le vecteur  $C(t)$ , est une équation scalaire. Elle est transformée en un système de  $MM'2^{j-1}2^{j'-1}$  équations ( $C(t) \in \mathbb{R}^{MM'2^{j-1}2^{j'-1}}$ ), en la considérant en  $MM'2^{j-1}2^{j'-1}$  points de collocation choisis dans le domaine  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

2. Les points de collocation doivent être choisis de sorte que la matrice  $V_1(x, y)$  ne soit pas singulière. Par exemple, les points  $x = 0$ ,  $x = 1$  ou encore  $y = 1$  rendent cette matrice non inversible.
3. Les termes indéterminés apparaissant dans les fonctions  $G(t, x, y)$  et  $F_i$ ;  $i = 1, \dots, 6$ , tels que  $\frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, 0)$  ou  $\frac{\partial u_B}{\partial x}(t, 0)$ , seront approchés, lors de la résolution, par un schéma aux différences finies.

## 4.2 Cas des conditions mixtes

Il s'agit de résoudre l'équation (3.60) avec la condition initiale (3.61), mais en considérant les conditions aux limites mixtes suivantes

$$\begin{cases}
 u(t, 0, y) = u_G(t, y), & t \in ]0, T[, y \in ]0, 1[ \\
 u(t, x, 0) = u_B(t, x), & t \in ]0, T[, y \in ]0, 1[ \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) = h_1(t, y), & t \in ]0, T[, y \in ]0, 1[ \\
 \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) = h_2(t, x), & t \in ]0, T[, x \in ]0, 1[.
 \end{cases} \tag{3.83}$$

Les fonctions données  $u_G$ ,  $u_B$ ,  $h_1$  et  $h_2$  sont supposées régulières.

On commence, comme pour le cas précédent, par décomposer la dérivée d'ordre 4 en

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(t, x, y) = C^T(t)\psi(x, y), \tag{3.84}$$

ensuite, on effectue des intégrations successives pour obtenir la décomposition des différents termes de l'équation (3.60).

Pour la dérivée spatiale d'ordre 2 par rapport à la variable  $y$ , deux intégrations par rapport à  $x$  de (3.84) entraînent

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(t, x, y) &= C^T(t)P_y\psi(x, y) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(t, x, 0), \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) &= C^T(t)P_x^2\psi(x, y) + x\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(t, 0, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y).
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

De la condition  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) = h_1(t, y)$ , on a

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}(t, 0, y) = \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(t, y), \quad (3.86)$$

et de la condition  $u(t, 0, y) = u_G(t, y)$ , on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y) = \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}(t, y).$$

La relation (3.85) devient alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) = C^T(t)P_x^2\psi(x, y) + x\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(t, y) + \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}(t, y). \quad (3.87)$$

Des intégrations successives de (3.87) permettent d'avoir la décomposition de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  et de  $u$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) = & C^T(t)P_x^2P_y\psi(x, y) + x\left(\frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0)\right) \\ & + \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) + h_2(t, x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = & C^T(t)P_x^2P_y^2\psi(x, y) + x(h_1(t, y) - h_1(t, 0)) - xy\frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0) \\ & + (u_G(t, y) - u_G(t, 0)) - y\frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) + yh_2(t, x) + u_B(t, x). \end{aligned}$$

En refaisant les mêmes calculs par rapport à la variable  $x$ , on aboutit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) = C^T(t)P_y^2\psi(x, y) + y\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2}(t, x). \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) = & C^T(t)P_y^2P_x\psi(x, y) + y\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0)\right) \\ & + \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, 0) + h_1(t, y). \end{aligned}$$

L'expression de la dérivée croisée est le résultat de l'intégration de (3.86) par rapport à  $x$ , ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) = C^T(t)P_yP_x\psi(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, 0) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, y). \quad (3.89)$$

Des conditions aux bords  $\frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) = h_2(t, x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) = h_1(t, y)$ , on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, 0) = \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, 0, y) = \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y). \end{array} \right.$$

La relation (3.89) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) = C^T(t) P_y P_x \psi(x, y) + \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y). \quad (3.90)$$

La dérivée temporelle est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) &= \frac{dC^T}{dt}(t) P_x^2 P_y^2 \psi(x, y) + x \left( \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, 0) \right) - xy \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial y}(t, 0) \\ &\quad + \left( \frac{\partial u_G}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial u_G}{\partial t}(t, 0) \right) - y \frac{\partial^2 u_G}{\partial t \partial y}(t, 0) + y \frac{\partial h_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u_B}{\partial t}(t, x). \end{aligned}$$

En injectant les expressions (3.87)~(3.89), (3.90) et (3.91) dans (3.60), on obtient l'équation différentielle d'inconnue C suivante

$$\begin{aligned} &\frac{dC^T}{dt}(t) P_x^2 P_y^2 \psi(x, y) \\ &+ C^T(t) \left[ a_1 P_y^2 + a_2 P_x^2 + a_3 P_y P_x + a_4 P_y^2 P_x + a_5 P_x^2 P_y + a_6 P_x^2 P_y^2 \right] \psi(x, y) \\ &= -x H_1(t, y) - y H_2(t, x) + xy \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial y}(t, 0) + a_6 \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0) \right) + H_3(t, x, y), \end{aligned} \quad (3.91)$$

où les fonctions  $H_i$ ;  $i = 1, 2, 3$ , sont définies par

$$\begin{aligned} H_1(t, y) &= \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, 0) + a_2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(t, y) + a_5 \left( \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, 0) \right) \\ &\quad + a_6 (h_1(t, y) - h_1(t, 0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(t, x) &= \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u_G}{\partial t \partial y}(t, 0) - a_1 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}(t, x) \\ &\quad - a_4 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0) \right) + a_6 \left( h_2(t, x) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) \right), \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} &H_3(t, x, y) \\ &= f(t, x, y) - \frac{\partial}{\partial t} (u_G(t, y) - u_G(t, 0) + u_B(t, x)) - a_1 \frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2}(t, x) \\ &\quad - a_2 \frac{\partial^2 u_G}{\partial y^2}(t, y) - a_3 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y) \right) \\ &\quad - a_4 \left( \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial u_B}{\partial x}(t, 0) + h_1(t, y) \right) \\ &\quad - a_4 \left( \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial u_G}{\partial y}(t, 0) + h_2(t, x) \right) - a_6 (u_G(t, y) - u_G(t, 0) + u_B(t, x)). \end{aligned} \quad (3.93)$$

A partir de la condition (3.61) et la relation (3.88), on a la condition initiale

$$\begin{aligned} C^T(0) P_x^2 P_y^2 \psi(x, y) &= u_0(x, y) - x (h_1(0, y) - h_1(0, 0)) + xy \frac{\partial h_1}{\partial y}(0, 0) \\ &\quad - (u_G(0, y) - u_G(0, 0)) - u_B(0, x) + y \frac{\partial u_G}{\partial y}(0, 0) - y h_2(0, x). \end{aligned}$$

**Remarque 3.3** L'équation différentielle à résoudre (3.91) et la condition initiale (3.94) vérifiée par  $C(t)$ , sont transformées en un système de  $MM'2^{j-1}2^{j'-1}$  équations ( $C(t) \in \mathbb{R}^{MM'2^{j-1}2^{j'-1}}$ ), en les considérant en  $MM'2^{j-1}2^{j'-1}$  points de collocation choisis dans  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

### 4.3 Cas des conditions de type Neumann

Il s'agit toujours de résoudre l'EDP (3.60) avec la condition initiale (3.61) et les conditions de type Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0, y) = h_1(t, y), t \in [0, T] \text{ et } y \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1, y) = h_2(t, y), t \in [0, T] \text{ et } y \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y=0) = g_1(t, x), t \in [0, T] \text{ et } x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y=1) = g_2(t, x), t \in [0, T] \text{ et } x \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (3.94)$$

On adopte toujours la stratégie qui consiste à poser

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(t, x, y) = C^T(t)\psi(x, y),$$

et on intègre successivement pour obtenir la décomposition des termes qui interviennent dans l'équation (3.60). Les différents termes obtenus sont

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) = C^T(t)P_y^2\psi(x, y) + y\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, 0), \quad (3.95)$$

de même pour

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) = C^T(t)P_x^2\psi(x, y) + x\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(t, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y), \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) = C^T(t)P_y P_x \psi(x, y) + \frac{\partial g_1}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial g_1}{\partial x}(t, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y), \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) = & C^T(t)P_y^2 P_x \psi(x, y) + y \left[ \frac{\partial g_1}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial g_1}{\partial x}(t, 0) \right] \\ & + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, 0) - h_1(t, 0) + h_1(t, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) = & C^T(t)P_x^2 P_y \psi(x, y) + x \left[ \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0) \right] \\ & + \frac{\partial u}{\partial y}(t, 0, y) - g_1(t, 0) + g_1(t, x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = & C^T(t)P_x^2 P_y^2 \psi(x, y) + x \left[ h_1(t, y) - h_1(t, 0) - y \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0) \right] \\ & + u(t, 0, y) - u(t, 0, 0) - y g_1(t, 0) + y g_1(t, x) + u(t, x, 0). \end{aligned} \quad (3.98)$$

La dérivée temporelle est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = & \frac{dC^T}{dt}(t)P_x^2 P_y^2 \psi(x, y) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0, y) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0, 0) \\ & + x \left[ \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, 0) - y \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial y}(t, 0) \right] \\ & - y \frac{\partial g_1}{\partial t}(t, 0) + y \frac{\partial g_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, 0). \end{aligned} \quad (3.99)$$

En portant les expressions (3.95)~(3.99) dans (3.60), on obtient une équation différentielle d'inconnue  $C$  du type

$$\frac{dC^T}{dt}(t)P_x^2P_y^2\Psi(x, y) + C^T(t)\Lambda\Psi(x, y) = F(t, x, y), \quad (3.100)$$

où

$$\Lambda = a_1P_y^2P_x + a_2P_x^2P_y + a_3P_y^2 + a_4P_x^2 + a_5P_yP_x + a_6P_x^2P_y^2, \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} & F(t, x, y) \\ = & f(t, x, y) - x \frac{\partial F_2}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial F_1}{\partial t}(t, x, y) - \\ & - y \frac{\partial F_3}{\partial t}(t, x) - a_1 y \frac{\partial F_3}{\partial x}(t, x) - a_2 F_3(t, x) - a_5 \frac{\partial F_3}{\partial x}(t, x) \\ & - a_1 F_4(t, y) - a_2 x \frac{\partial F_4}{\partial y}(t, y) - a_6 F_1(t, x, y) - a_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, 0) - a_2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, 0, y) \\ & - a_3 \left[ y \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, 0) \right] - a_4 \left[ x \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(t, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, 0, y) \right] \\ & - a_5 \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y) - a_6 (x F_2(t, y) + F_1(t, x, y) + y F_3(t, x)), \end{aligned}$$

les fonctions  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  sont données par

$$F_1(t, x, y) = u(t, 0, y) - u(t, 0, 0) + u(t, x, 0),$$

$$F_2(t, y) = h_1(t, y) - h_1(t, 0) - y \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0),$$

$$F_3(t, x) = g_1(t, x) - g_1(t, 0),$$

$$F_4(t, y) = h_1(t, y) - h_1(t, 0).$$

Il reste à déterminer la condition initiale  $C(0)$ . Comme précédemment, la condition (3.61) et la relation (3.98), entraînent

$$\begin{aligned} C^T(0)P_x^2P_y^2\Psi(x, y) = & u_0(x, y) - x \left[ h_1(0, y) - h_1(0, 0) - y \frac{\partial h_1}{\partial y}(0, 0) \right] \\ & - u_0(0, y) + u_0(0, 0) - y g_1(0, x) + y g_1(0, 0) - u_0(x, 0). \end{aligned}$$

## 5 Résultats Numériques

On constate que lors du développement de la méthode, les équations considérées (3.33), (3.60), sont linéaires et à coefficients constants, ce qui, en réalité, n'est pas toujours le cas. En fait, les phénomènes du vivant sont souvent décrits par des systèmes différentiels ou aux dérivées partielles qui peuvent être linéaires ou non linéaires et éventuellement couplés. Ainsi, avant d'entamer la résolution numérique d'un problème, il subit le traitement de linéarisation et (ou) du découplage. Ces traitements se font par différentes méthodes. On a choisi la méthode numérique, dite technique de quazilinéarisation, qui ramène un système d'équations non linéaires et couplées (ou une équation non linéaire) à un système d'équations linéarisées découplées (ou une équation linéarisée). Ainsi, avant d'exposer les résultats des différents exemples traités, on commence par présenter cette technique.

## 5.1 La technique de quazilinéarisation (QLT)

Cette méthode de linéarisation et de découplage, introduite par Bellman et Kalaba [10], est à l'origine un procédé numérique et itératif appliqué pour résoudre les équations algébriques non linéaires. Elle a été utilisée et adaptée dans plusieurs travaux (voir [9], [28], [30], [41]). En résumé, on considère un système d'équations non linéaires et couplées suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t, x, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(t, x, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(t, x, \frac{\partial y_n}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0. \end{array} \right. \quad (3.102)$$

Pour un bon choix d'un profil initial  $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  de la solution du problème (3.102) qui vérifie les conditions initiales de ce dernier, on forme le système itératif

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1(t, x, \frac{\partial y_1^{(k+1)}}{\partial t}, \frac{\partial y_1^{(k+1)}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n^{(k)}}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1^{(k+1)}}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 y_n^{(k)}}{\partial x^2}, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) = 0 \\ \tilde{f}_2(t, x, \frac{\partial y_2^{(k+1)}}{\partial t}, \frac{\partial y_1^{(k)}}{\partial x}, \frac{\partial y_2^{(k+1)}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n^{(k)}}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1^{(k)}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y_2^{(k+1)}}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 y_n^{(k)}}{\partial x^2}, y_1^{(k)}, y_2^{(k+1)}, \dots, y_n^{(k)}) = 0 \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t, x, \frac{\partial y_n^{(k+1)}}{\partial t}, \frac{\partial y_1^{(k)}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y_n^{(k+1)}}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1^{(k)}}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 y_n^{(k+1)}}{\partial x^2}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k+1)}) = 0, \end{array} \right. \quad (3.103)$$

où chaque fonction  $\tilde{f}_i$ , est linéaire par rapport à  $y_i^{(k+1)}$ ,  $\frac{\partial y_i^{(k+1)}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial y_i^{(k+1)}}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 y_i^{(k+1)}}{\partial x^2}$ . Toutes les autres composantes de  $\tilde{f}_i$  sont écrites à l'itération précédente à savoir  $(k)$ . On résout ce système itératif par la méthode choisie, et on s'arrête dès que la différence entre deux itérations successives est inférieure, en norme, à une tolérance donnée, c'est dire pour

$$\|y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}\|_2 \leq \varepsilon; \forall i > 0.$$

La méthode de résolution exposée à la section 3, a été testée sur l'équation des télégraphistes [1] et sur l'équation de convection-réaction-diffusion [2]. Le système différentiel en temps qui en découle, suite à l'application de la décomposition en ondelettes de Legendre, est traité par une méthode des différences finies.

## 5.2 Exemple 1 (Equation des télégraphistes)

L'équation des télégraphistes est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux en temps et en espace qui intervient dans les phénomènes de transmission et de réflexion. Elle permet, par exemple, de décrire l'évolution de la tension et du courant électrique le long d'une ligne électrique ou de décrire les fréquences audio dans une ligne téléphonique.

On considère une équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + 4 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + 4u(t, x), \quad (3.104)$$

avec les conditions initiales

$$u(0, x) = 1 + \exp(-2x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 2, \quad (3.105)$$

et les conditions aux bords

$$u(t, 0) = 1 + \exp(2t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = -2. \quad (3.106)$$

La solution exacte du problème (3.104), (3.105), (3.106) est donnée par

$$u_{ex}(t, x) = \exp(2t) + \exp(-2x).$$

On suivra les étapes qui ont transformé le problème (3.33), (3.34), (3.35), (3.52) et (3.53) en système différentiel (3.57), (3.58) et (3.59).

Le problème (3.104), (3.105) et (3.106) se transforme en

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(t) + \frac{\partial C}{\partial t}(t) + (4I - (P^2)^T)^{-1}C(t) = -((P^2)^T)^{-1}(8X + 4d),$$

avec les conditions

$$\begin{cases} C(0) = ((P^2)^T)^{-1}(U_0 - 2d - 2X) \\ \frac{\partial C}{\partial t}(0) = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce dernier problème différentiel par la méthode des différences finies, engendre le vecteur  $C$ , qui intervient dans l'expression de la solution approchée, notée  $u_{app}$ , donnée par (3.55), à savoir

$$u_{app}(t, x) = C^T(t) \cdot \psi(x) - 2x + 1 + \exp(2t).$$

La représentation graphique de la solution exacte et de la solution approchée montre la concordance de ces dernières (voir figure 3.1).

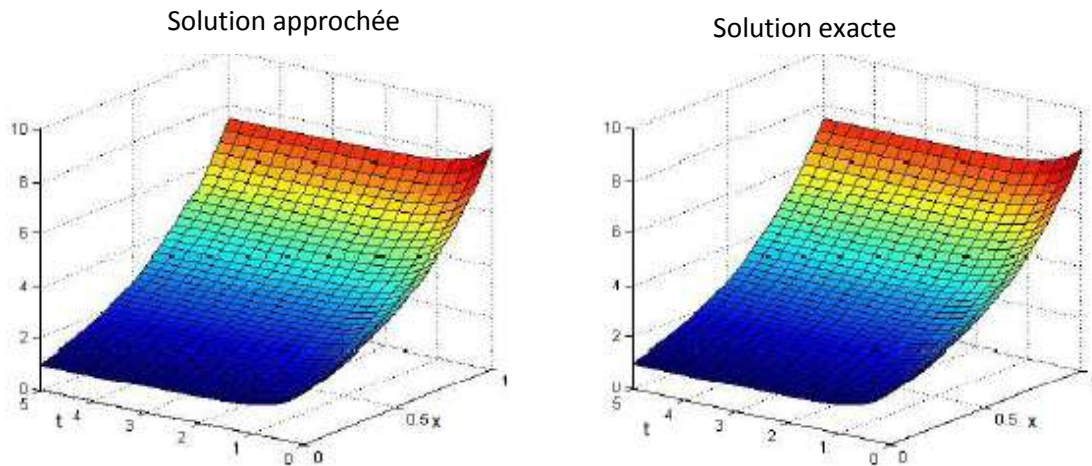


FIGURE 3.1 – Graphe de la solution approche et la solution exacte.

L'erreur absolue a été calculée pour un nombre de points de collocation  $M = 3$  et différentes valeurs du niveau  $j$ , ensuite pour un niveau  $j = 3$  et différentes valeurs du nombre de points de collocation  $M$ . Voir tables 3.1 et 3.2. On constate alors que l'erreur diminue dans les deux cas, mais l'impact du nombre de points  $M$  sur cette diminution est plus sensible.

D'autres exemples qui confortent les résultats ci-dessus sont traités dans [1].

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6
Nombre de niveaux	1	2	4	8	16	32
Erreurs absolues	1.2048	1.910E-001	3.1442E-002	5.0610E-003	8.4109E-004	1.43699E-004

TABEAU 3.1 – Evolution de l’erreur absolue pour M = 3.

M	2	4	6	8	10
Erreurs absolues	6.1105e-001	1.1544e-003	7.3398e-007	2.3729e-010	1.7700e-013

TABEAU 3.2 – Evolution de l’erreur absolue pour j = 3.

### 5.3 Exemple 2 (Equation de réaction diffusion)

Les équations de réaction-diffusion sont des équations qui décrivent des phénomènes dynamiques qu’ils soient de nature physique, chimique, biologique ou autres. Elles interviennent en présence de deux processus : la diffusion qui provoque la répartition des cellules (en biologie) et la réaction qui regroupe les différentes transformations et interactions entre ces cellules.

On considère le problème de réaction-diffusion non linéaire suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{3}{4}(1 - u(t, x))u(t, x) + f(t, x), \quad x \in ]0, 1], \quad t \in ]0, T], \quad (3.107)$$

où  $f$  est donnée telle que l’équation (3.107) admette comme solution exacte

$$u_{ex}(t, x) = 1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)}.$$

On considère alors la condition initiale

$$u(0, x) = 1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}, \quad (3.108)$$

et les conditions aux limites de types mixtes

$$\begin{cases} u(t, 0) = 1 + e^{-\frac{t}{2}} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t}{2}}. \end{cases} \quad (3.109)$$

L’équation (3.107) étant non linéaire, donc la technique de quazilinéarisation est appliquée. Ainsi, pour la donnée d’un profil initial  $u^{(0)}$ , on est amené à résoudre l’équation linéarisée et itérative

$$\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial x^2}(t, x) + \frac{3}{4}u^{(k+1)}(t, x) - \frac{3}{4}(u^{(k)}(t, x))^2 + f(t, x).$$

Cette dernière, avec les conditions (3.108)-(3.109), est transformée en système différentiel

$$\begin{aligned} & \frac{dC}{dt}(t) + \left(\frac{3}{4}I_d - ((P^2)^T)^{-1}\right)C(t) \\ &= ((P^2)^T)^{-1} \left( G(t) - \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{-t}{2}\right)X + \frac{5}{4}(1 + \exp\left(\frac{-t}{2}\right)d) \right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} g(t, x) &= f(t, x) + \frac{3}{4}(u^{(k)}(t, x))^2 \\ &= G^T(t) \cdot \Psi(x), \end{aligned}$$

avec la condition initiale

$$C(0) = ((p^2)^T)^{-1} (U_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}X + 2d).$$

L'inconnue  $C$  de ce système est obtenue par une résolution avec la méthode des différences finies pour 60 points de collocation, répartis uniformément sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et pour différentes valeurs du pas de temps  $\Delta t = 0.2632, 0.1282, 0.0847$ .

L'erreur peut être estimée, à partir du moment où la solution exacte est connue, par

$$E = \|u_{app} - u_{ex}\|_2. \quad (3.110)$$

L'évolution de cette erreur en fonction du pas de temps est représentée dans la figure 3.2.

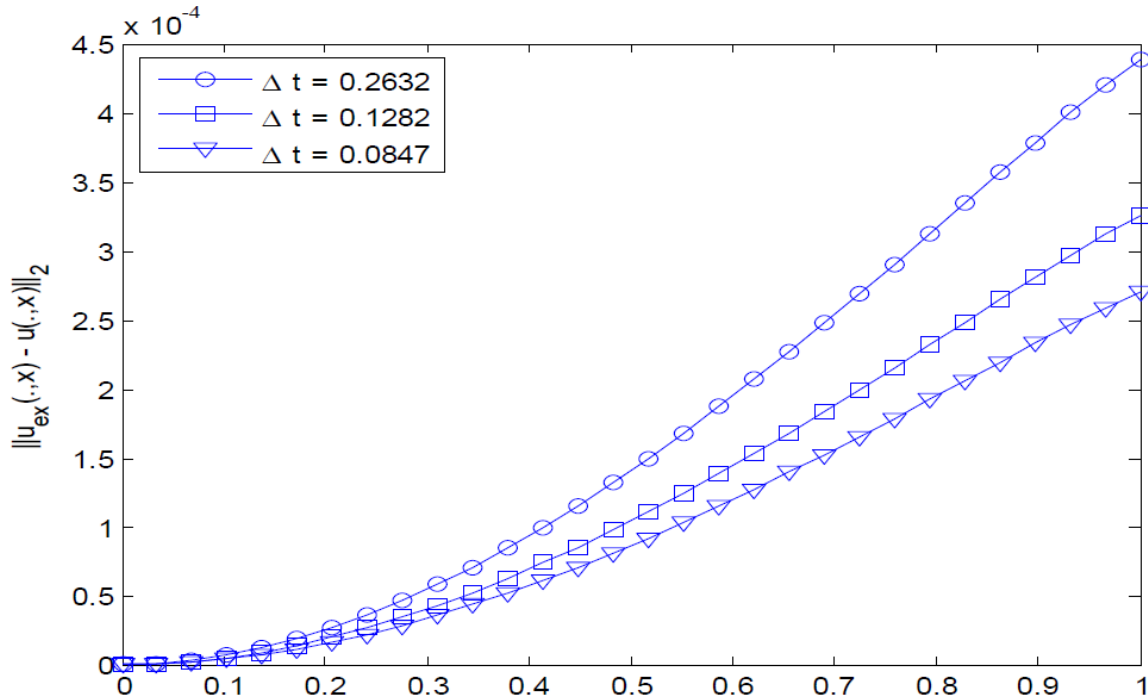


FIGURE 3.2 – L'erreur en fonction de la discrétisation temporelle

D'autres calculs, pour un pas de temps petit et pour différentes valeurs du nombre de points de collocation ont été effectués, ils sont exposés dans la figure 3.3.

### 5.4 Exemple 3 (Equation de réaction-convection-diffusion)

On considère l'équation fortement non linéaire de réaction-convection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = f, \quad x \in ]0, 1], t \in ]0, T], \quad (3.111)$$

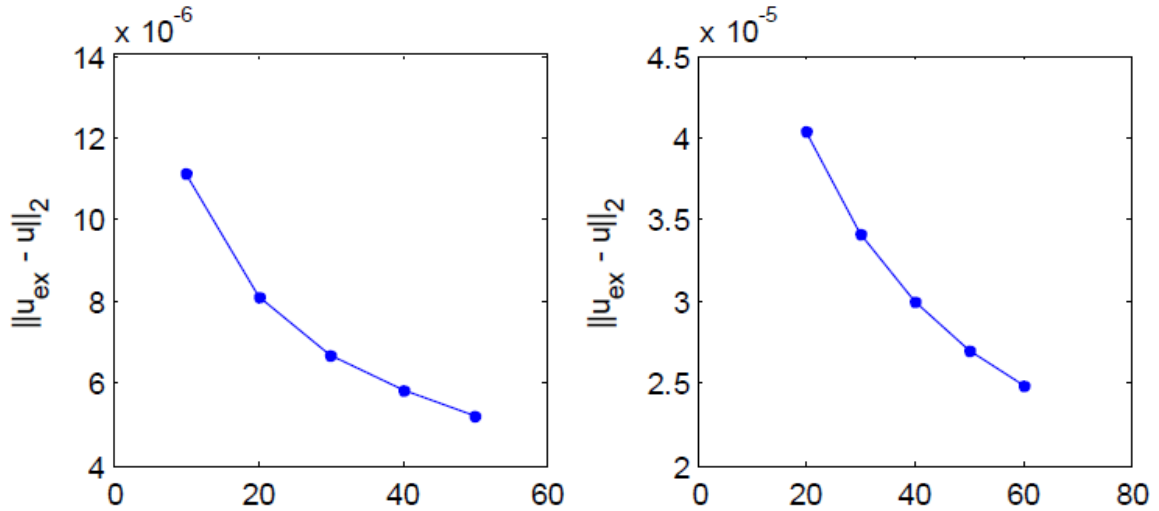


FIGURE 3.3 – Discrétisation temporelle.

où la fonction  $f$  est déterminée telle que l'équation (3.111), admette comme solution la fonction

$$u_{ex}(t, x) = \frac{1 + \cos(\pi x)}{4(t+1)}.$$

On considère alors la condition initiale

$$u(0, x) = \frac{1}{4}(1 + \cos(\pi x)), \quad x \in ]0, 1], \quad (3.112)$$

et les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(t, 0) = \frac{1}{2(t+1)}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.113)$$

Les mêmes étapes que l'exemple précédant sont suivies. On commence par linéariser l'équation (3.111), la transformer avec les conditions (3.113) en système différentiel itératif que l'on résout par la méthode des différences finies. Ce système différentiel est

$$\frac{dC}{dt}(t) + [\beta I_d - \alpha(P^T)^{-1} + D((P^2)^T)^{-1}]C(t) = ((P^2)^T)^{-1} \left( G(t) - \left( \frac{\alpha}{2(1+t)} - \frac{1}{2(1+t)^2} \right) d \right),$$

où

$$G(t, x) = f(t, x) + \left( \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right)^{(k)}.$$

Le coefficient de réaction est  $\beta = 0.5$ , le coefficient de diffusion est  $D = 1$  et enfin le coefficient de convection est  $\alpha = 0.1$ .

Une comparaison entre l'erreur en deux pas de temps différents  $\Delta t = 0.052$  et  $\Delta t = 0.034$ , et différents points est explicitée dans la figure 3.4.

Les calculs, pour différents pas de temps et d'espace sont exposée dans le table 3.3, où est clairement mis en évidence la décroissance de l'erreur vers zéro.

D'autres problèmes non linéaires et qui confirment les résultats obtenus, sont traités dans [2].

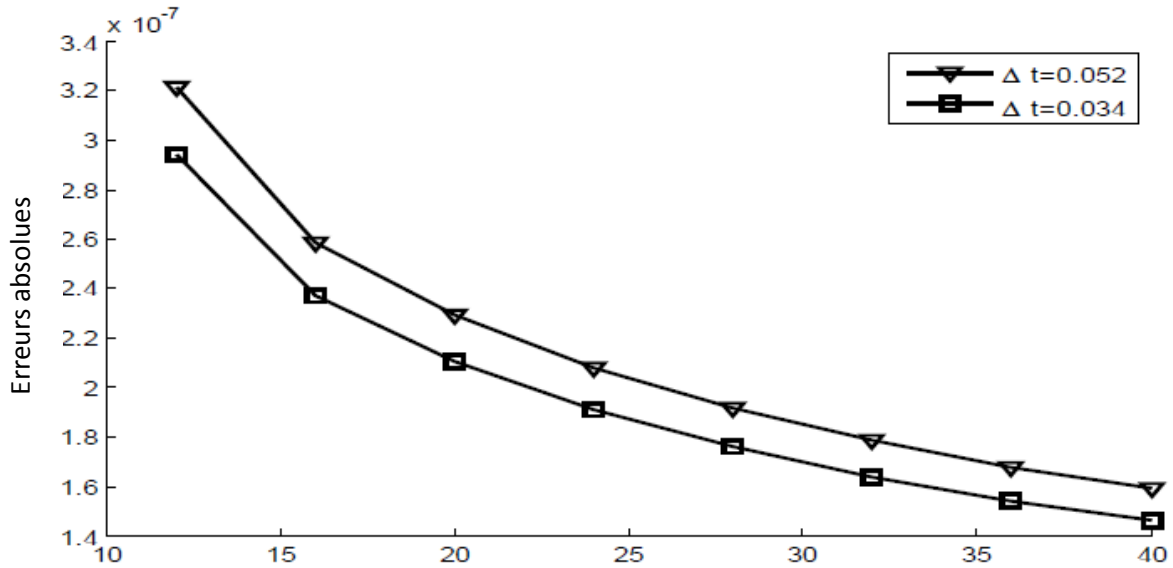


FIGURE 3.4 – l’erreur en fonction des points de collocation.

$\Delta t \backslash \Delta x$	0.2	0.1429	0.1111	0.0909	0.0769	0.0667
0.1111	1.4546e-004	1.1828e-005	8.9825e-007	5.4550e-008	6.6459e-009	5.1412e-009
0.0256	8.5133e-005	6.9221e-006	5.2541e-007	3.2180e-008	4.8173e-009	3.9425e-009
0.0145	6.5754e-005	5.3464e-006	4.0579e-007	2.4882e-008	3.8153e-009	3.1383e-009
0.0101	5.5485e-005	4.5114e-006	3.4240e-007	2.1005e-008	3.2500e-009	2.6782e-009

TABEAU 3.3 – L’évolution de l’erreur en fonction de  $\Delta t$  et de  $\Delta x$ .

### 5.5 Exemple 4 (le cas bidimensionnel)

On considère le problème aux limites posé dans  $\Omega = ]0, T] \times ]0, 1[ \times ]0, 1[$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) + \Delta u(t, x, y) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y) - (1, 1) \cdot \nabla u(t, x, y) + 2u(t, x, y) \\ = 2(1 + 2t)te^{2x} + (4 + 4y^2 - 2y)e^{y^2}, \end{cases}$$

avec la condition initiale

$$u(t = 0, x, y) = e^{y^2} \text{ pour } (x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[,$$

et les conditions aux bords de type Dirichlet

$$\begin{aligned} u(t, 0, y) &= t^2 + e^{y^2} \text{ pour } t \in ]0, T], y \in ]0, 1[ \\ u(t, x, 0) &= t^2 e^{2x} + 1 \text{ pour } t \in ]0, T], x \in ]0, 1[ \\ u(t, 1, y) &= t^2 e^2 + e^{y^2} \text{ pour } t \in ]0, T], y \in ]0, 1[ \\ u(t, x, 1) &= t^2 e^{2x} + e \text{ pour } t \in ]0, T], x \in ]0, 1[. \end{aligned}$$

La solution exacte est

$$u(x, y, t) = t^2 e^{2x} + e^{y^2}.$$

Ce problème est transformé en un système différentiel en temps du type (3.71), avec la condition initiale (3.82).

On rappelle que la matrice de ce système est donnée par

$$V_1(x, y) = P_x^2 P_y^2 [\psi(x, y) - x\psi(1, y) - y\psi(x, 1) + xy\psi(1, 1)],$$

et qu'un mauvais choix des points de discrétisation peut la rendre singulière. Les points  $(0, y)$ ,  $(1, y)$ ,  $(x, 0)$  et  $(x, 1)$  y sont donc tous exclus.

La résolution du système différentiel obtenu, a été effectuée pour les données

$$n_t = 24, \text{ (nombre de points pour le temps)}$$

$$j_x = j_y = 2, \text{ (nombre de niveaux est } 2^{j-1})$$

$$M_x = M_y = 5, \text{ (le dgrés des polynômes de legendre).}$$

Les résultats obtenus et présentés dans les figures 3.5, 3.6 et 3.7, décrivent, pour un pas de temps, l'évolution en fonction du temps de la solution approchée dans la première rangée et celle de la solution exacte dans la seconde rangée.

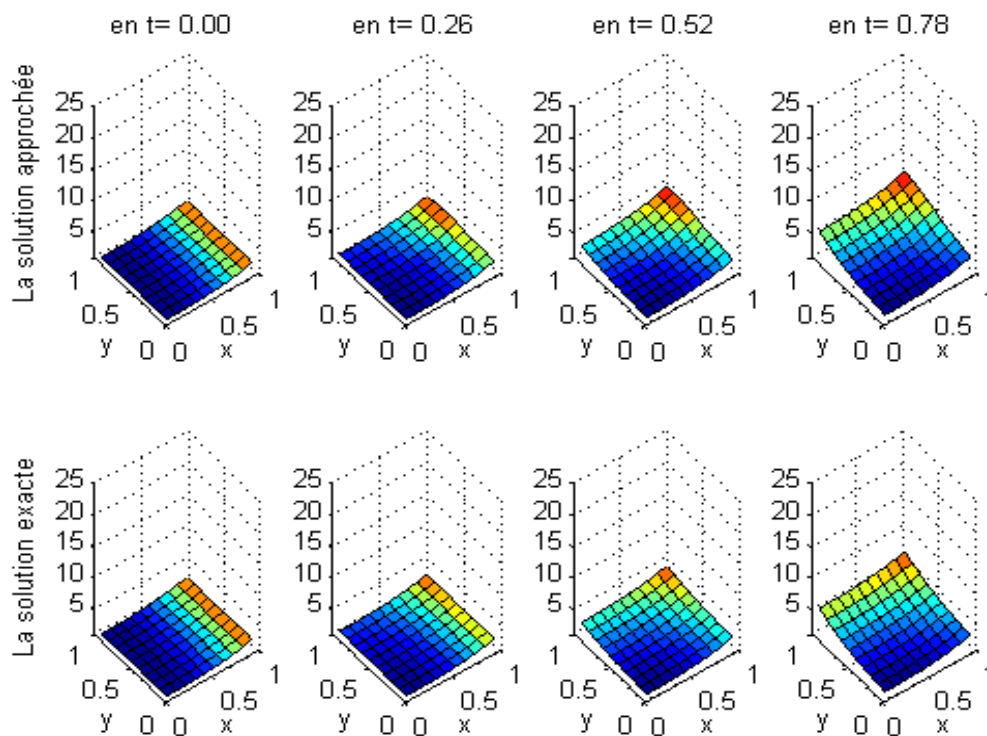


FIGURE 3.5 – Évolution de la solution exacte et de la solution approchée en fonction du temps,  $0.0 \leq t \leq 0.78$ .

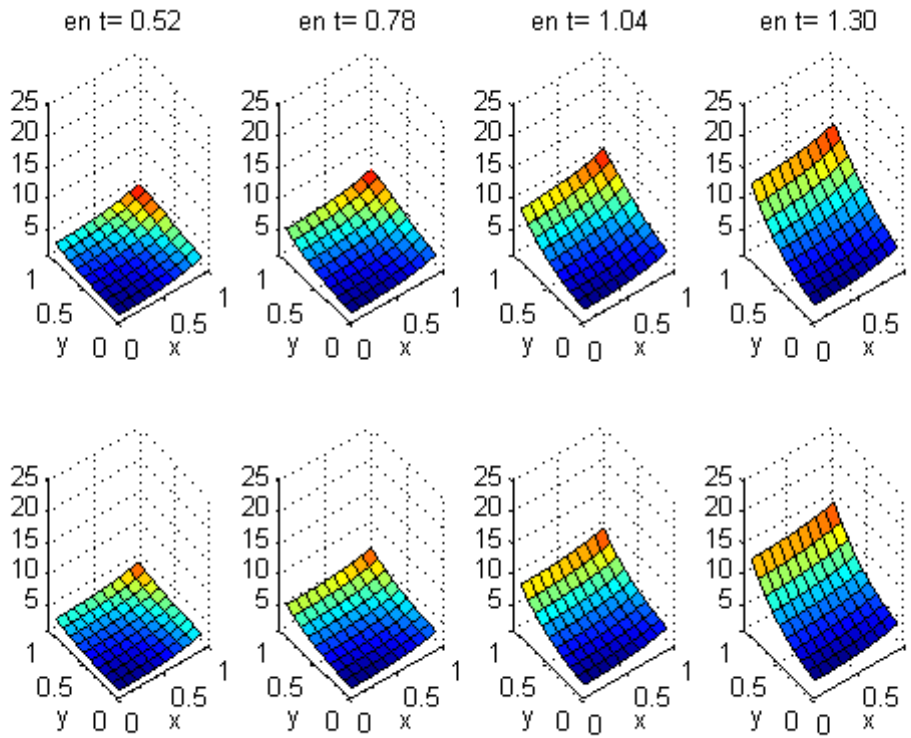


FIGURE 3.6 – Évolution de la solution exacte et de la solution approchée en fonction du temps,  $0.52 \leq t \leq 1.30$ .

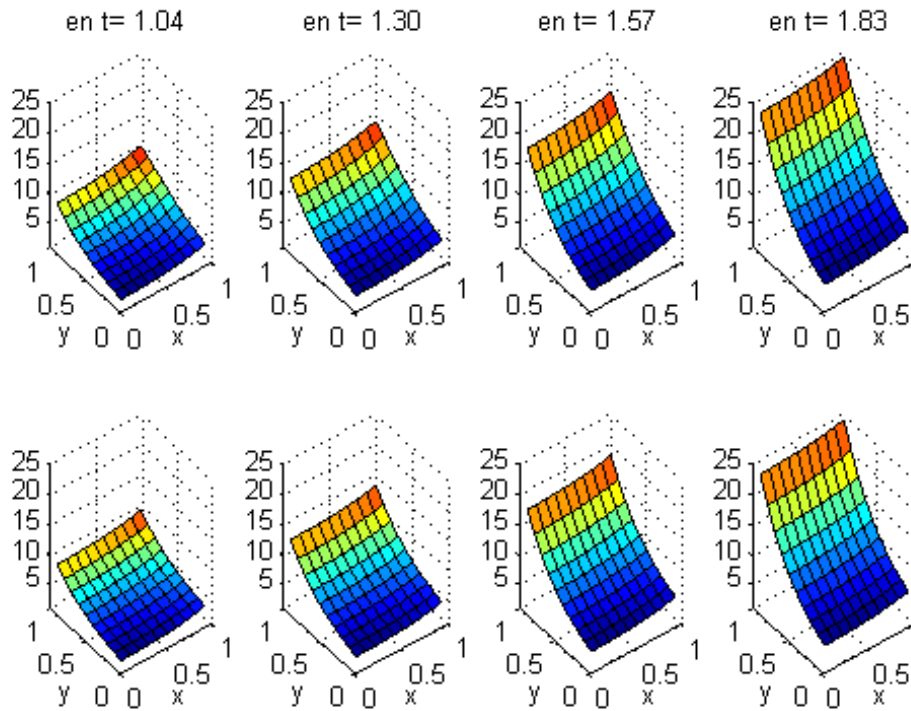


FIGURE 3.7 – Évolution de la solution exacte et de la solution approchée en fonction du temps,  $1.04 \leq t \leq 1.83$ .

## 6 Conclusion

Dans ce travail, on a utilisé la décomposition en ondelettes de Legendre par rapport à la variable d'espace pour transformer une équation aux dérivées partielles (dépendante de variables temporelle et spatiale) en un système différentiel ordinaire en temps. Une méthode aux différences finies est alors appliquée pour résoudre le dit système.

La combinaison de ces deux méthodes est fructueuse et a donné des résultats satisfaisants, lors de son application pour la résolution de l'équation des télégraphistes et l'équation de réaction-convection-diffusion non linéaire. Pour cette dernière, la technique de quazilinéarisation a été employée pour gérer la non linéarité de ces équations.

Les résultats obtenus, montrent l'efficacité de la méthode proposée. Celle-ci produit une solution approchée en parfait accord avec la solution exacte, en considérant qu'un nombre réduit de points de collocation.

La méthode est simple à appliquer (même si les calculs sont longs et parfois ennuyeux), s'adapte à différentes conditions aux limites et même à des ordres de dérivation élevés (ordre  $\geq 2$ ).

# Chapitre 4

## Développement de la méthode en trois dimensions

On sait que beaucoup de phénomènes, tels que les réactions chimiques ou enzymatiques [35], l'évolution en dynamique des populations [29], sont décrits par des systèmes d'équations qui dépendent du temps et des trois variables d'espace. Afin de résoudre ces systèmes, on propose, dans cette section, de généraliser la méthode étudiée au chapitre 3. Pour se faire, on introduit les ondelettes de Legendre en trois dimensions et on construit les matrices opérationnelles d'intégration par rapport à chacune des variables.

### 1 Définition et propriétés des ondelettes en 3 dimensions

De manière naturelle et naive, les ondelettes de Legendre en trois dimensions, sont obtenues par une généralisation des celles introduites par Persian [31] en deux dimensions.

**Définition 4.1** Les ondelettes de Legendre en trois dimensions, notées  $\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z)$ , sont définies sur le domaine ouvert  $I$  tel que  $\bar{I} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  par :

$$\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{(m + \frac{1}{2})(m' + \frac{1}{2})(\bar{m} + \frac{1}{2})} 2^{\frac{k+k'+\bar{k}}{2}} \bar{L}_m(x) \bar{L}_{m'}(y) \bar{L}_{\bar{m}}(z) \\ \text{si } (x, y, z) \in I_{n,n',\bar{n}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$I_{n,n',\bar{n}} = \left[ \frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right] \times \left[ \frac{n'-1}{2^{k'-1}}, \frac{n'}{2^{k'-1}} \right] \times \left[ \frac{\bar{n}-1}{2^{\bar{k}-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{\bar{k}-1}} \right], \quad (4.2)$$

et

$$\begin{cases} \bar{L}_m(x) = L_m(2^k x - 2n + 1), \\ \bar{L}_{m'}(y) = L_{m'}(2^{k'} y - 2n' + 1), \\ \bar{L}_{\bar{m}}(z) = L_{\bar{m}}(2^{\bar{k}} z - 2\bar{n} + 1), \end{cases} \quad (4.3)$$

$L_m$  est le polynôme de Legendre de degrés  $m$ , défini dans chapitre 2, section 1. Les indices  $k, k'$  et  $\bar{k}$  sont fixés.  $n = 1, \dots, 2^{k-1}$ ,  $n' = 1, \dots, 2^{k'-1}$  et  $\bar{n} = 1, \dots, 2^{\bar{k}-1}$  représente le niveau de décomposition de l'intervalle  $[0, 1]$  suivant  $x, y, z$  respectivement.  $m \geq 0, m' \geq 0, \bar{m} \geq 0$  représente le degrés du polynôme de Legendre.

**Proposition 4.1** La famille d'ondelettes de Legendre  $\{\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}\}_{n,m,n',m',\bar{n},\bar{m}}$  est ortho-normée par rapport au produit scalaire de  $L^2(I)$ . Plus précisément on a

$$\begin{aligned} & \int_I \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z) \Psi_{n_1 m_1 n'_1 m'_1 \bar{n}_1 \bar{m}_1}(x, y, z) dx dy dz \\ &= \delta_{nn_1} \delta_{mm_1} \delta_{n'n'_1} \delta_{m'm'_1} \delta_{\bar{n}\bar{n}_1} \delta_{\bar{m}\bar{m}_1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve.** l'égalité (4.4) découle des supports des ondelettes et de l'orthogonalité des polynômes de Legendre. ■

**Proposition 4.2** La famille  $\{\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}\}_{n,m,n',m',\bar{n},\bar{m}}$  pour  $n = 1, \dots, 2^{k-1}$ ,  $n' = 1, \dots, 2^{k'-1}$ ,  $\bar{n} = 1, \dots, 2^{\bar{k}-1}$  et  $m, m', \bar{m} \geq 0$ , est une base Hilbertienne de  $L^2(I)$ . Pour toute fonction  $h \in L^2(I)$ , on a la décomposition

$$h = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{\bar{n}=1}^{2^{\bar{k}-1}} \sum_{m,m',\bar{m} \geq 0} C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}} \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}, \text{ dans } L^2(I), \quad (4.5)$$

où les coefficients  $C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}$ , sont définis par le produit scalaire de  $L^2(I)$ ,

$$C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}} = \int_I h(x, y, z) \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.6)$$

Si de plus la fonction  $h$  est continue sur  $I$ , alors la convergence de (4.5) est ponctuelle;

$$h(x, y, z) = \sum_{n,n',\bar{n}=1}^{2^{k-1}} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{\bar{n}=1}^{2^{\bar{k}-1}} \sum_{m,m',\bar{m} \geq 0} C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}} \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z); \forall (x, y, z) \in I.$$

**Preuve.** Il suffit de suivre la même démonstration du théorème (2.9). ■

Le théorème (2.10) peut être généralisé comme suit.

**Théorème 4.1** Toute fonction  $h \in C^0([0, T], L^2(I))$ , pour  $T \geq 0$ , admet la décomposition

$$h(t, \cdot, \cdot) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{\bar{n}=1}^{2^{\bar{k}-1}} \sum_{m,m',\bar{m} \geq 0} C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t) \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(\cdot, \cdot), \text{ dans } L^2(I), \quad (4.7)$$

où les fonctions coefficients  $C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t)$ , sont définies par

$$C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t) = \int_I h(t, x, y, z) \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z) dx dy dz. \quad (4.8)$$

Et si la fonction  $h$  est continue par rapport aux variables d'espace, la convergence de la série (4.7) est ponctuelle sur le domaine  $I$  et donc on a

$$h(t, x, y, z) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{\bar{n}=1}^{2^{\bar{k}-1}} \sum_{m,m',\bar{m} \geq 0} C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t) \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z); \forall T \geq 0, \forall (x, y, z) \in I. \quad (4.9)$$

**Théorème 4.2** (de convergence)

Soit la fonction  $u \in C^0([0, T], C^6(\bar{I}))$ , s'il existe une constante positive  $\alpha$ , vérifiant

$$\left| \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}(t, x, y, z) \right| \leq \alpha; \forall t \geq 0; \forall (x, y, z) \in I,$$

alors

— les fonctions coefficients définies par (4.8), vérifient l'inégalité

$$|C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t)| \leq \frac{3\sqrt{3}\alpha 2^{-(k+k'+\bar{k})}}{A_m A_{m'} A_{\bar{m}}},$$

où

$$A_l = \frac{1}{\sqrt{2l-1}\sqrt{2l+5}\sqrt{2l-3}}.$$

— la série donnée par (4.9) converge pour tout  $t \geq 0$  et tout  $(x, y, z) \in I$ .

**Preuve.** En suivant les mêmes étapes de la démonstration du théorème (2.11), on démontre que le terme général de la série est majoré par le terme général d'une série numérique convergente. Plus précisément, on a

$$|C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t)\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z)| \leq \frac{3\sqrt{3}\alpha}{4^3 n^2 n'^2 \bar{n}^2 A_m A_{m'} A_{\bar{m}}}.$$

Ainsi, pour les données  $M, M', \bar{M} > 0$ , la troncature de la série (4.9) aboutit, pour  $t \in [0, T]$  et  $(x, y, z) \in I$ , à l'approximation

$$\begin{aligned} & h(t, x, y, z) \\ & \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{\bar{n}=1}^{2^{\bar{k}-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{m'=0}^{M'-1} \sum_{\bar{m}=0}^{\bar{M}-1} C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t)\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z), \end{aligned} \quad (4.10)$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle

$$h(t, x, y, z) \approx C^T(t)\psi(x, y, z), \quad (4.11)$$

$C(t)$  et  $\psi(x, y, z)$  sont deux vecteurs-colonnes de dimension  $2^{k-1}M \cdot 2^{k'-1}M' \cdot 2^{\bar{k}-1}\bar{M}$ , dont les coefficients sont respectivement  $C_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(t)$  et  $\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z)$  pour  $n = 1, \dots, 2^{k-1}$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ ,  $n' = 1, \dots, 2^{k'-1}$ ,  $m' = 0, \dots, M'-1$  et  $\bar{n} = 1, \dots, 2^{\bar{k}-1}$ ,  $\bar{m} = 0, \dots, \bar{M}-1$ . ■

## 2 Calcul des matrices opérationnelles d'intégration

### 2.1 Calcul de la matrice $P_x$

Les matrices opérationnelles d'intégration  $P_x, P_y$  et  $P_z$  sont obtenues par intégration de chaque composantes du vecteur colonne  $\psi(x, y, z)$  par rapport aux variables  $x, y$  et  $z$  respectivement.

**Théorème 4.3** *La relation*

$$\int_0^x \Psi(\tau, y, z) d\tau = P_x \Psi(x, y, z), \quad (4.12)$$

détermine la matrice  $P_x$  d'ordre  $2^{k-1}2^{k'-1}2^{\bar{k}-1}MM'\bar{M}$ . Celle-ci est définie par

$$P_x = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & F & F & \dots & F \\ O & L & F & \dots & F \\ O & O & L & \dots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & L \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$O$  est une matrice carrée nulle d'ordre  $2^{k'-1}2^{\bar{k}-1}MM'\bar{M}$ .  $L$  et  $F$  sont des matrices de même ordre que  $O$  définies comme suit

$$F = \begin{bmatrix} 2I_{n_1} & O' & O' & \dots & O' \\ O' & O' & O' & \dots & O' \\ O' & O' & O' & \dots & O' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O' & O' & O' & \dots & O' \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \frac{1}{\sqrt{3}}I_{n_1} & O' & O' & \dots & O' \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}I_{n_1} & O' & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{n_1} & O' & \dots & O' \\ O' & \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{n_1} & O' & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_{n_1} & \dots & O' \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O' & \dots & O' & \frac{-1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-3}}I_{n_1} & O' & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}I_{n_1} \\ O' & \dots & O' & O' & \frac{-1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}I_{n_1} & O' \end{bmatrix},$$

où  $I_{n_1}$  et  $O'$  sont respectivement la matrice identité et la matrice nulle de même ordre  $n_1 = 2^{k'-1}2^{\bar{k}-1}M'\bar{M}$ .

**Preuve.** La preuve découle de l'intégration de chaque composante  $\Psi_{nmn'm'\bar{nm}}(x, y, z)$  du vecteur  $\Psi(x, y, z)$  par rapport à la première variable sur l'intervalle  $[0, x]$ . Ce qui donne

Pour  $m = 0$ ,

$$\int_0^x \Psi_{n0n'm'\bar{nm}}(\tau, y, z) d\tau \quad (4.14)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n1n'm'\bar{nm}}(x, y, z) + \Psi_{n0n'm'\bar{nm}}(x, y, z) & \text{si } x \in \left[ \frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right], \text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1 \\ \frac{1}{2^k} 2 \Psi_{\hat{n}0n'm'\bar{nm}}(x, y, z) & \text{si } x \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{cases}$$

Pour  $1 \leq m \leq M-2$ ,

$$\int_0^x \Psi_{nmn'm'\bar{nm}}(\tau, y, z) d\tau \quad (4.15)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{n,m+1,n'm'\bar{nm}}(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{n,m-1,n'm'\bar{nm}}(x, y, z) \right] \\ \text{si } x \in \left[ \frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right] \\ 0 & \text{si } x \notin \left[ \frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]. \end{cases}$$

Pour  $m = M - 1$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{n,M-1,n'm'\overline{nm}}(\tau, y, z) d\tau \\ & \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{n,M-2,n'm'\overline{nm}}(x, y, z) & \text{si } x \in \left[ \frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[ \\ 0 & \text{si } x \notin \left[ \frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Les variables  $(y, z) \in \left[ \frac{n'-1}{2^{k'-1}}, \frac{n'}{2^{k'-1}} \right[ \times \left[ \frac{\overline{n}-1}{2^{\overline{k}-1}}, \frac{\overline{n}}{2^{\overline{k}-1}} \right[$ . Les formules (4.14)~(4.16), donnent la matrice d'intégration  $P_x$ . ■

## 2.2 Calcul de la matrice $P_y$

**Théorème 4.4** *La relation*

$$\int_0^y \Psi(x, \tau, z) d\tau = P_y \Psi(x, y, z), \quad (4.17)$$

détermine la matrice d'intégration  $P_y$ , d'ordre  $2^{k-1}2^{k'-1}2^{\overline{k}-1}MM'\overline{M}$ , comme suit

$$P_y = \frac{1}{2^{k'}} \begin{bmatrix} D & O & O & \cdots & O \\ O & D & O & \cdots & O \\ O & O & D & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & D \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

O est la matrice nulle d'ordre  $2^{k'-1}2^{\overline{k}-1}M'M$ . D est la matrice carrée de même ordre que O, définie par

$$D = \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ O' & L & F & \cdots & F \\ O' & O' & L & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O' & O' & O' & \cdots & L \end{bmatrix},$$

où

$$F = \begin{bmatrix} 2I_{n_2} & O'' & \cdots & O'' \\ O'' & O'' & \cdots & O'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O'' & O'' & \cdots & O'' \end{bmatrix},$$

$I_{n_2}$  et  $O''$  sont respectivement la matrice identité et la matrice nulle d'ordre  $n_2 = 2^{\overline{k}-1}\overline{M}$ .

$$L = \begin{bmatrix} I_{n_2} & \frac{1}{\sqrt{3}}I_{n_2} & O'' & O'' & \cdots & O'' \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}I_{n_2} & O'' & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{n_2} & O'' & \cdots & O'' \\ O'' & \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{n_2} & O'' & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_{n_2} & \cdots & O'' \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O'' & \cdots & O'' & \frac{-1}{\sqrt{2M'-5}\sqrt{2M'-3}}I_{n_2} & O'' & \frac{1}{\sqrt{2M'-3}\sqrt{2M'-1}}I_{n_2} \\ O'' & \cdots & O'' & O'' & \frac{-1}{\sqrt{2M'-3}\sqrt{2M'-1}}I_{n_2} & O'' \end{bmatrix}.$$

**Preuve.** On procède comme précédemment, on intègre toutes les composantes  $\Psi_{nmn'm'\overline{nm}}(x, y, z)$  du vecteur  $\psi(x, y, z)$  par rapport à la seconde variable sur l'intervalle  $[0, y]$ . Ce qui donne

Pour  $m' = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^y \Psi_{nmn',0,\overline{nm}}(x, \tau, z) d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^{k'}} \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{nmn',1,\overline{nm}}(x, y, z) + \Psi_{nmn',0,\overline{nm}}(x, y, z) & \text{si } y \in \left[ \frac{n'-1}{2^{k'-1}}, \frac{n'}{2^{k'-1}} \right[ \\ 0 & \text{si } y \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{k'-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k'-1}} \right[ , \text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n' - 1 \\ \frac{1}{2^{k'}} 2 \Psi_{nm\hat{n},0,\overline{nm}}(x, y, z) & \text{si } y \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{k'-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k'-1}} \right[ , \text{ pour } \hat{n} = n' + 1, \dots, 2^{k'-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Pour  $1 \leq m' \leq M' - 2$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^y \Psi_{nmn'm'\overline{nm}}(x, \tau, z) d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^{k'}} \frac{1}{\sqrt{2m'+1}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2m'+3}} \Psi_{nmn',m'+1,\overline{nm}}(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2m'-1}} \Psi_{nmn',m'-1,\overline{nm}}(x, y, z) \right] \\ \text{si } y \in \left[ \frac{n'-1}{2^{k'-1}}, \frac{n'}{2^{k'-1}} \right[ \\ 0 & \text{si } y \notin \left[ \frac{n'-1}{2^{k'-1}}, \frac{n'}{2^{k'-1}} \right[ , \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

et pour  $m' = M' - 1$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^y \Psi_{nmn',M'-1,\overline{nm}}(x, \tau, z) d\tau \\ &\simeq \frac{1}{2^{k'}} \begin{cases} -\frac{1}{2^{k'}} \frac{1}{\sqrt{2M'-1}} \frac{1}{\sqrt{2M'-3}} \Psi_{nmn',M'-1,\overline{nm}}(x, y, z) & \text{si } y \in \left[ \frac{n'-1}{2^{k'-1}}, \frac{n'}{2^{k'-1}} \right[ \\ 0 & \text{si } y \notin \left[ \frac{n'-1}{2^{k'-1}}, \frac{n'}{2^{k'-1}} \right[ . \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Les variables  $(x, z) \in \left[ \frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[ \times \left[ \frac{\overline{n}-1}{2^{\overline{k}-1}}, \frac{\overline{n}}{2^{\overline{k}-1}} \right[$ . Les formules (4.19)~(4.21), donnent la matrice d'intégration  $P_y$ . ■

### 2.3 Calcul de la matrice $P_z$

**Théorème 4.5** *La relation*

$$\int_0^z \psi(x, y, \tau) d\tau = P_z \psi(x, y, z),$$

détermine la matrice d'intégration  $P_z$ , d'ordre  $2^{k-1} 2^{k'-1} 2^{\overline{k}-1} M M' \overline{M}$ , comme suit

$$P_z = \frac{1}{2^{\overline{k}}} \begin{bmatrix} D & O & O & \cdots & O \\ O & D & O & \cdots & O \\ O & O & D & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & D \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

O est la matrice nulle et D la matrice carrée définie par

$$D = \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ O' & L & F & \cdots & F \\ O' & O' & L & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O' & O' & O' & \cdots & L \end{bmatrix},$$

où  $L$  et  $F$  sont d'ordre  $2^{\bar{k}-1}\bar{M}$ , avec

$$F = \begin{bmatrix} 2I_{n_3} & O'' & \cdots & O'' \\ O'' & O'' & \cdots & O'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O'' & O'' & \cdots & O'' \end{bmatrix},$$

$I_{n_3}$  et  $O''$  sont respectivement la matrice identité et la matrice nulle, d'ordre  $\bar{M}$ , et

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & O'' & O'' & \cdots & O'' \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & O'' & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & O'' & \cdots & O'' \\ O'' & \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & O'' & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \cdots & O'' \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O'' & \cdots & O'' & \frac{-1}{\sqrt{2\bar{M}-5}\sqrt{2\bar{M}-3}} & O'' & \frac{1}{\sqrt{2\bar{M}-3}\sqrt{2\bar{M}-1}} \\ O'' & \cdots & O'' & O'' & \frac{-1}{\sqrt{2\bar{M}-3}\sqrt{2\bar{M}-1}} & O'' \end{bmatrix}.$$

**Preuve.** La détermination de cette matrice  $P_z$ , passe par l'intégration, par rapport à la dernière variable et sur  $[0, z]$ , de toutes les composantes  $\Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, z)$  du vecteur  $\Psi(x, y, z)$ . On trouve

pour  $\bar{m} = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^z \Psi_{nmn'm'\bar{n}0}(x, y, \tau) d\tau \quad (4.23) \\ & = \begin{cases} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{nmn'm'\bar{n},1}(x, y, z) + \Psi_{nmn'm'\bar{n}0}(x, y, z) & \text{si } z \in \left[ \frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right[ \\ 0 & \text{si } z \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[ , \text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, \bar{n}-1 \\ \frac{1}{2^k} 2 \Psi_{nmnm'\hat{n}0}(x, y, z) & \text{si } z \in \left[ \frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[ \text{ pour } \hat{n} = \bar{n}+1, \dots, 2^{\bar{k}-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq \bar{m} \leq \bar{M}-2$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^z \Psi_{nmn'm'\bar{n}\bar{m}}(x, y, \tau) d\tau \quad (4.24) \\ & = \begin{cases} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{2\bar{m}+1}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\bar{m}+3}} \Psi_{nmn'm'\bar{n},\bar{m}+1}(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2\bar{m}-1}} \Psi_{nmn'm'\bar{n},\bar{m}-1}(x, y, z) \right] \\ \text{si } z \in \left[ \frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right[ \\ 0 & \text{si } z \notin \left[ \frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right[ , \end{cases} \end{aligned}$$

et pour  $\bar{m} = \bar{M}-1$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^z \Psi_{nmn'm'\bar{n},\bar{M}-1}(x, y, \tau) d\tau \quad (4.25) \\ & \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{2\bar{M}-1}} \frac{1}{\sqrt{2\bar{M}-3}} \Psi_{nmn'm'\bar{n},\bar{M}-1}(x, y, z) & \text{si } z \in \left[ \frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right[ \\ 0 & \text{si } z \notin \left[ \frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right[ . \end{cases} \end{aligned}$$

Les variables  $(x, y) \in \left[ \frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right[ \times \left[ \frac{\bar{n}'-1}{2^{k'-1}}, \frac{\bar{n}'}{2^{k'-1}} \right[$ . Les formules (4.23)~(4.25), déterminent la matrice d'intégration  $P_z$ . ■

### 3 Développement de la méthode de résolution

#### 3.1 Résolution de l'équation complète

Pour  $t \in [0, T]$  et  $(x, y, z) \in I$ , on veut résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y, z) + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, z) + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y, z) + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, x, y, z) + \\ & a_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(t, x, y, z) + a_5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(t, x, y, z) + a_6 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(t, x, y, z) + a_7 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y, z) \\ & + a_8 \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y, z) + a_9 \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, y, z) + a_{10} u(t, x, y, z) \\ & = f(t, x, y, z), \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec les conditions de type mixtes suivantes

$$\begin{cases} u(t, 0, y, z) = h_1(t, y, z), \\ u(t, x, 0, z) = h_2(t, x, z), \\ u(t, x, y, 0) = h_3(t, x, y), \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y, z) = g_1(t, y, z), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0, z) = g_2(t, x, z), \\ \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, y, 0) = g_3(t, x, y), \end{cases} \quad (4.28)$$

et avec la donnée de la condition initiale

$$u(t = 0, x, y, z) = u_0(x, y, z). \quad (4.29)$$

On pose

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}(t, x, y, z) = C^T(t) \psi(x, y, z). \quad (4.30)$$

Plusieurs et différentes intégrations de cette égalité entraînent l'expression des différents termes de l'EDP en fonction de  $P_x, P_y, P_z, C(t), \psi(x, y, z)$  et des conditions imposées.

En intégrant deux fois de suite (4.30) par rapport à la première variable d'espace sur l'intervalle  $[0, x]$  et en utilisant les premières conditions de (4.27) et de (4.28) et la relation (4.30), on obtient

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2}(t, x, y, z) = C^T(t) P_x^2 \psi(x, y, z) + x \frac{\partial^4 g_1}{\partial y^2 \partial z^2}(t, y, z) + \frac{\partial^4 h_1}{\partial y^2 \partial z^2}(t, y, z). \quad (4.31)$$

$\int_0^y \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2}(t, x, \tau, z) d\tau$  entraîne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2}(t, x, y, z) &= C^T(t) P_x^2 P_y \psi(x, y, z) + x \frac{\partial^3 g_1}{\partial y \partial z^2}(t, y, z) - x \frac{\partial^3 g_1}{\partial y \partial z^2}(t, 0, z) \\ &+ \frac{\partial^3 h_1}{\partial y \partial z^2}(t, y, z) - \frac{\partial^3 h_1}{\partial y \partial z^2}(t, 0, z) + \frac{\partial^2 g_2}{\partial z^2}(t, x, z). \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'expression des termes  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, x, y, z)$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(t, x, y, z)$  est obtenue par intégration de (4.32) par rapport à la deuxième variable d'espace sur  $[0, y]$  et la troisième variable sur  $[0, z]$  respectivement. Ce qui donne, pour le premier terme et en exploitant la seconde condition

(4.27)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, x, y, z) &= C^T(t)P_x^2P_y^2\Psi(x, y, z) + x\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}(t, y, z) - x\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}(t, 0, z) \\
 &\quad - xy\frac{\partial^3 g_1}{\partial y\partial z^2}(t, 0, z) + \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2}(t, y, z) - \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2}(t, 0, z) - y\frac{\partial^3 h_1}{\partial y\partial z^2}(t, 0, z) \\
 &\quad + y\frac{\partial^2 g_2}{\partial z^2}(t, x, z) + \frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2}(t, x, z),
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

et pour le second terme

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}(t, x, y, z) \\
 &= C^T(t)P_x^2P_yP_z\Psi(x, y, z) + x\frac{\partial^2 g_1}{\partial z\partial y}(t, y, z) - x\frac{\partial^2 g_1}{\partial z\partial y}(t, y, 0) + \frac{\partial^2 h_1}{\partial z\partial y}(t, y, z) \\
 &\quad - \frac{\partial^2 h_1}{\partial z\partial y}(t, y, 0) - x\frac{\partial^2 g_1}{\partial z\partial y}(t, 0, z) + x\frac{\partial^2 g_1}{\partial z\partial y}(t, 0, 0) + \frac{\partial^2 h_1}{\partial z\partial y}(t, 0, z) \\
 &\quad - \frac{\partial^2 h_1}{\partial z\partial y}(t, 0, 0) + \frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, z) - \frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + \frac{\partial g_3}{\partial y}(t, x, y).
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Sachant que

$$\frac{\partial u}{\partial z}(t, x, y, z) = \int_0^z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, x, y, \tau) d\tau + \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, y, 0),$$

la décomposition de ce dernier terme est

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial u}{\partial z}(t, x, y, z) \\
 &= C^T(t)P_x^2P_y^2P_z\Psi(x, y, z) + x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, y, z) - x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, y, 0) \\
 &\quad - x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, 0, z) + x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, 0, 0) - xy\frac{\partial^2 g_1}{\partial y\partial z}(t, 0, z) + xy\frac{\partial^2 g_1}{\partial y\partial z}(t, 0, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, y, z) \\
 &\quad - \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, y, 0) - \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, 0, z) + \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, 0, 0) - y\frac{\partial^2 h_1}{\partial y\partial z}(t, 0, z) + y\frac{\partial^2 h_1}{\partial y\partial z}(t, 0, 0) \\
 &\quad + y\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, z) - y\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + \frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, z) - \frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, 0) + g_3(t, x, y).
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

En suivant les mêmes étapes, mais en changeant l'ordre d'intégration au niveau de la relation (4.31), on obtient la décomposition de  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y, z)$  et de  $\frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y, z)$ .

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y, z) \\
 &= C^T(t)P_x^2P_z^2\Psi(x, y, z) + x\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}(t, y, z) - x\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}(t, y, 0) - xz\frac{\partial^3 g_1}{\partial y^2\partial z}(t, y, 0) \\
 &\quad + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(t, y, z) - \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(t, y, 0) - z\frac{\partial^3 h_1}{\partial y^2\partial z}(t, y, 0) + z\frac{\partial^2 g_3}{\partial y^2}(t, x, y) + \frac{\partial^2 h_3}{\partial y^2}(t, x, y),
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y, z) \\
 &= C^T(t)P_x^2P_z^2P_y\Psi(x, y, z) + x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, y, z) - x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, 0, z) \\
 & \quad - x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, y, 0) + x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, 0, 0) - xz\frac{\partial^2 g_1}{\partial y\partial z}(t, y, 0) + xz\frac{\partial^2 g_1}{\partial y\partial z}(t, 0, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y, z) \\
 & \quad - \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0, z) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0, 0) - z\frac{\partial^2 h_1}{\partial y\partial z}(t, y, 0) + z\frac{\partial^2 h_1}{\partial y\partial z}(t, 0, 0) \\
 & \quad + z\frac{\partial g_3}{\partial y}(t, x, z) - z\frac{\partial g_3}{\partial y}(t, x, 0) + \frac{\partial h_3}{\partial y}(t, x, z) - \frac{\partial h_3}{\partial y}(t, x, 0) + g_2(t, x, z).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Pour l'obtention des décompositions de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, z)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y, z)$ , on reprend (4.30) et on l'intègre deux fois de suite, sur l'intervalle  $[0, y]$ , par rapport à la deuxième variable d'espace. Ce qui donne

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial z^2}(t, x, y, z) = C^T(t)P_y^2\Psi(x, y, z) + y\frac{\partial^4 g_2}{\partial x^2\partial z^2}(t, x, z) + \frac{\partial^4 h_2}{\partial x^2\partial z^2}(t, x, z) \tag{4.38}$$

$\int_0^z \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial z^2}(t, x, y, \tau) d\tau$  entraîne

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 u}{\partial z\partial x^2}(t, x, y, z) \\
 &= C^T(t)P_y^2P_z\Psi(x, y, z) + y\frac{\partial^3 g_2}{\partial z\partial x^2}(t, x, z) - y\frac{\partial^3 g_2}{\partial z\partial x^2}(t, x, 0) \\
 & \quad + \frac{\partial^3 h_2}{\partial z\partial x^2}(t, x, z) - \frac{\partial^3 h_2}{\partial z\partial x^2}(t, x, 0) + \frac{\partial^2 g_3}{\partial x^2}(t, x, y).
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Comme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, z) = \int_0^z \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}(t, x, y, \tau) d\tau + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, 0),$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(t, x, y, z) = \int_0^x \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}(t, \tau, y, z) d\tau + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(t, 0, y, z),$$

on a

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, z) \\
 &= C^T(t)P_y^2P_z^2\Psi(x, y, z) + y\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(t, x, z) - y\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(t, x, 0) - yz\frac{\partial^3 g_2}{\partial x^2\partial z}(t, x, 0) \\
 & \quad + \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}(t, x, z) - \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}(t, x, 0) - z\frac{\partial^3 h_2}{\partial x^2\partial z}(t, x, 0) + z\frac{\partial^2 g_3}{\partial x^2}(t, x, y) + \frac{\partial^2 h_3}{\partial x^2}(t, x, y),
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(t, x, y, z) \\
 &= C^T(t)P_y^2P_zP_x\Psi(x, y, z) + y\frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z}(t, x, z) - y\frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z}(t, 0, z) + \frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(t, y, z) \\
 & \quad - \frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(t, 0, z) - y\frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z}(t, x, 0) + y\frac{\partial^2 g_1}{\partial x\partial z}(t, 0, 0) - \frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(t, x, 0) + \frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(t, 0, 0) \\
 & \quad + \frac{\partial g_3}{\partial x}(t, x, y) - \frac{\partial g_3}{\partial x}(t, 0, y) + \frac{\partial g_1}{\partial z}(t, y, z).
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

La décomposition des termes  $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y, z)$  et  $u(t, x, y, z)$ , est le résultat de deux intégrations successives de (4.40), ce qui donne

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y, z) & (4.42) \\
 = & C^T(t)P_y^2P_z^2P_x\Psi(x, y, z) + y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x, z) - y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, z) - y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x, 0) \\
 & + y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, 0) - yz\frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z}(t, x, 0) + yz\frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z}(t, 0, 0) + \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x, z) - \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, z) \\
 & - \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x, 0) + \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, 0) - z\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(t, x, 0) + z\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(t, 0, 0) + z\frac{\partial g_3}{\partial x}(t, x, y) \\
 & - z\frac{\partial g_3}{\partial x}(t, 0, y) + \frac{\partial h_3}{\partial x}(t, x, y) - \frac{\partial h_3}{\partial x}(t, 0, y) + g_1(t, y, z),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & u(t, x, y, z) & (4.43) \\
 = & C^T(t)P_y^2P_z^2P_x^2\Psi(x, y, z) + yg_2(t, x, z) - yg_2(t, 0, z) - xy\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, z) \\
 & - yg_2(t, x, 0) + yg_2(t, 0, 0) + xy\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, 0) - yz\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + yz\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, 0, 0) \\
 & + xyz\frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z}(t, 0, 0) + h_2(t, x, z) - h_2(t, 0, z) - x\frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, z) - h_2(t, x, 0) \\
 & + h_2(t, 0, 0) + x\frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, 0) - z\frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, 0) + z\frac{\partial h_2}{\partial z}(t, 0, 0) + xz\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(t, 0, 0) \\
 & + zg_3(t, x, y) - zg_3(t, 0, y) - zyg_3(t, 0, y) + h_3(t, x, y) - h_3(t, 0, y) \\
 & - x\frac{\partial h_3}{\partial x}(t, 0, y) + xg_1(t, y, z) + h_1(t, y, z).
 \end{aligned}$$

La dérivation de ce dernier terme par rapport à la variable temps  $t$ , donne l'expression de  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y, z)$  en fonction de  $\frac{dC}{dt}$ ,  $\frac{\partial g_i}{\partial t}$  et de  $\frac{\partial h_i}{\partial t}$ ;  $i = 1, \dots, 3$ .

Il reste à retrouver l'expression de la dérivée croisée  $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(t, x, y, z)$ . Celle-ci est obtenue en intégrant la relation (4.30) deux fois de suite, sur l'intervalle  $[0, z]$ , par rapport à la troisième variable d'espace. La relation obtenue, est intégrée sur  $[0, y]$ , par rapport à la second variable d'espace et ensuite sur  $[0, x]$ . Ce qui aboutit à

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(t, x, y, z) & (4.44) \\
 = & C^T(t)P_z^2P_yP_x\Psi(x, y, z) + z\frac{\partial^2 g_3}{\partial x\partial y}(t, x, y) - z\frac{\partial^2 g_3}{\partial x\partial y}(t, 0, y) - z\frac{\partial^2 g_3}{\partial x\partial y}(t, x, 0) \\
 & + \frac{\partial^2 h_3}{\partial x\partial y}(t, x, y) - \frac{\partial^2 h_3}{\partial x\partial y}(t, 0, y) - \frac{\partial^2 h_3}{\partial x\partial y}(t, 0, y) - \frac{\partial^2 h_3}{\partial x\partial y}(t, x, 0) \\
 & + \frac{\partial^2 h_3}{\partial x\partial y}(t, 0, 0) + \frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x, z) - \frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, z) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(t, y, z).
 \end{aligned}$$

En injectant les relations (4.33)-(4.37) et (4.40)-(4.44) dans l'EDP (4.26), on obtient l'équation différentielle vérifiée par l'inconnue  $C(t)$

$$\frac{dC^T}{dt}(t)P_y^2P_z^2P_x^2\Psi(x, y, z) + C^T(t)\Lambda\Psi(x, y, z) = F(t, x, y, z), \quad (4.45)$$

où la matrice  $\Lambda$  d'ordre  $MM'\overline{M}2^{k-1}2^{k'-1}2^{\bar{k}-1}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \Lambda = & a_1 P_y^2 P_z^2 + a_2 P_x^2 P_z^2 + a_3 P_x^2 P_y^2 + a_4 P_z^2 P_y P_x + a_5 P_y^2 P_z P_x \\ & + a_6 P_x^2 P_y P_z + a_7 P_y^2 P_z P_x + a_8 P_x^2 P_z^2 P_y + a_9 P_x^2 P_y^2 P_z + a_{10} P_y^2 P_z^2 P_x^2 \end{aligned}$$

quant à la fonction second membre  $F(t, x, y, z)$  elle est définie par

$$\begin{aligned} F(t, x, y, z) & \quad (4.46) \\ = & f(t, x, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial t}(t, x, y, z) - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(t, x, y, z) - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}(t, x, y, z) \\ & - \frac{\partial^2 F_4}{\partial z^2}(t, x, y, z) - \frac{\partial^2 F_5}{\partial x \partial y}(t, x, y, z) - \frac{\partial^2 F_6}{\partial x \partial z}(t, x, y, z) \\ & - \frac{\partial^2 F_7}{\partial y \partial z}(t, x, y, z) - F_8(t, x, y, z), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(t, x, y, z) & \\ = & yg_2(t, x, z) - yg_2(t, 0, z) - xy \frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, z) - yg_2(t, x, 0) + yg_2(t, 0, 0) + xy \frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, 0) \\ & - yz \frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + yz \frac{\partial g_2}{\partial z}(t, 0, 0) + xyz \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial z}(t, 0, 0) + h_2(t, x, z) - h_2(t, 0, z) \\ & - x \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, z) - h_2(t, x, 0) + h_2(t, 0, 0) + x \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, 0) - z \frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, 0) + z \frac{\partial h_2}{\partial z}(t, 0, 0) \\ & + xz \frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial z}(t, 0, 0) + zg_3(t, x, y) - zg_3(y, 0, y) - xz \frac{\partial g_3}{\partial x}(t, 0, y) + h_3(t, x, y) - h_3(t, 0, y) \\ & - x \frac{\partial h_3}{\partial x}(t, 0, y) + g_1(t, y, z) + h_1(t, y, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(t, x, y, z) = & -a_1 (yg_2(t, x, z) - yg_2(t, x, 0) - yz \frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + h_2(t, x, z) \\ & - h_2(t, x, 0) - z \frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, 0) + zg_3(t, x, y) + h_3(t, x, y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(t, x, y, z) = & -a_2 (xg_1(t, y, z) - xg_1(t, y, 0) - xy \frac{\partial g_1}{\partial z}(t, y, 0) + h_1(t, y, z) \\ & - h_1(t, y, 0) - z \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, y, 0) + zg_3(t, x, y) + h_3(t, x, y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(t, x, y, z) = & -a_3 (xg_1(t, y, z) - xg_1(t, 0, z) - xy \frac{\partial g_1}{\partial y}(t, 0, z) + h_1(t, y, z) \\ & - h_1(t, 0, z) - y \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0, z) + yg_2(t, x, y) + h_2(t, x, z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_5(t, x, y, z) = & -a_4 (zg_3(t, x, y) - zg_3(t, 0, y) - zg_3(t, x, 0) \\ & + zg_3(t, 0, 0) + h_3(t, x, y) - h_3(t, 0, y) - h_3(t, x, 0) + h_3(t, 0, 0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_6(t, x, y, z) \\
 = & -a_5(yg_2(t, x, z) - yg_2(t, 0, z) - yg_2(t, x, 0) + yg_2(t, 0, 0) + h_2(t, x, z) \\
 & - h_2(t, 0, z) - h_2(t, x, 0) + h_2(t, 0, 0)) + a_7(g_2(t, x, 0) - yzg_2(t, 0, 0) \\
 & + zh_2(t, x, 0) - zh_2(t, 0, 0)) - a_{10}xyzg_2(t, 0, 0) - a_{10}xzh_2(t, 0, 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_7(t, x, y, z) \\
 = & -a_6(xg_1(t, y, z) - xg_1(t, y, 0) - xg_1(t, 0, z) + xg_1(t, 0, 0) + h_1(t, y, z) \\
 & - h_1(t, y, 0) - h_1(t, 0, z) + h_1(t, 0, 0)) + a_8(g_1(t, y, 0) - xzg_1(t, 0, 0) \\
 & + zh_1(t, y, 0) - zh_1(t, 0, 0)) + a_9(xyg_1(t, 0, z) - xyg_2(t, 0, 0) \\
 & + yh_1(t, 0, z) - yh_1(t, 0, 0) - a_{10}xyzg_2(t, 0, 0) - a_{10}xzh_2(t, 0, 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_8(t, x, y, z) \\
 = & a_4\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x, z) - \frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, z) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(t, y, z)\right) + a_5\left(\frac{\partial g_3}{\partial x}(t, x, y) \right. \\
 & - \frac{\partial g_3}{\partial x}(t, 0, y) + \frac{\partial g_1}{\partial z}(t, y, z)\left. + a_6\left(\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, z) - \frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + \frac{\partial g_3}{\partial y}(t, x, y)\right) \right. \\
 & + a_7\left(y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x, z) - y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, z) - y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, x, 0) + y\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, 0) + \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x, z) \right. \\
 & - \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, z) + \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, x, 0) + \frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, 0) + z\frac{\partial g_3}{\partial x}(t, x, y) - z\frac{\partial g_3}{\partial x}(t, 0, y) \\
 & + \frac{\partial h_3}{\partial x}(t, x, y) - \frac{\partial h_3}{\partial x}(t, 0, y) + g_1(t, y, z)\left. + a_8\left(x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, y, z) - x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, 0, z) \right. \right. \\
 & - x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, y, 0) + x\frac{\partial g_1}{\partial y}(t, 0, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y, z) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0, z) - \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, y, 0) \\
 & + \frac{\partial h_1}{\partial y}(t, 0, 0) + z\frac{\partial g_3}{\partial y}(t, x, y) - z\frac{\partial g_3}{\partial y}(t, x, 0) + \frac{\partial h_3}{\partial y}(t, x, y) - \frac{\partial h_3}{\partial y}(t, x, 0) \\
 & + g_2(t, x, z) + a_9\left(x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, y, z) - x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, y, 0) - x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, 0, z) + x\frac{\partial g_1}{\partial z}(t, 0, 0) \right. \\
 & + \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, y, z) - \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, y, 0) - \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, 0, z) + \frac{\partial h_1}{\partial z}(t, 0, 0) + y\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, z) \\
 & - y\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + \frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, z) - \frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, 0) + g_3(t, x, y)\left. + a_{10}(yg_2(t, x, z) \right. \\
 & - yg_2(t, 0, z) - xy\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, z) - yg_2(t, x, 0) + yg_2(t, 0, 0) + xy\frac{\partial g_2}{\partial x}(t, 0, 0) - \\
 & yz\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, x, 0) + yz\frac{\partial g_2}{\partial z}(t, 0, 0) + h_2(t, x, z) - h_2(t, 0, z) - x\frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, z) \\
 & - h_2(t, x, 0) + h_2(t, 0, 0) + x\frac{\partial h_2}{\partial x}(t, 0, 0) - z\frac{\partial h_2}{\partial z}(t, x, 0) + z\frac{\partial h_2}{\partial z}(t, 0, 0) \\
 & + zh_3(t, x, y) - zg_3(t, 0, y) - xz\frac{\partial g_3}{\partial x}(t, 0, y) + h_3(t, x, y) - h_3(t, x, y) \\
 & \left. - x\frac{\partial h_3}{\partial x}(t, 0, y) + g_1(t, y, z) + h_1(t, y, z)\right).
 \end{aligned}$$

La condition initiale  $C(0)$  est obtenue à partir de la condition (4.29) et de la relation (4.43) ; c'est à dire

$$\begin{aligned}
 & u_0(x, y, z) \\
 = & C^T(0)P_y^2P_z^2P_x^2\psi(x, y, z) + yg_2(0, x, z) - yg_2(0, 0, z) - xy\frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0, z) - \\
 & yg_2(0, x, 0) + yg_2(0, 0, 0) + xy\frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0, 0) - yz\frac{\partial g_2}{\partial z}(0, x, 0) + yz\frac{\partial g_2}{\partial z}(0, 0, 0) \\
 & + xyz\frac{\partial^2 g_2}{\partial x\partial z}(0, 0, 0) + h_2(0, x, z) - h_2(0, 0, z) - x\frac{\partial h_2}{\partial x}(0, 0, z) - h_2(0, x, 0) \\
 & + h_2(0, 0, 0) + x\frac{\partial h_2}{\partial x}(0, 0, 0) - z\frac{\partial h_2}{\partial z}(0, x, 0) + z\frac{\partial h_2}{\partial z}(0, 0, 0) \\
 & + xz\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial z}(0, 0, 0) + zg_3(0, x, y) - zg_3(0, 0, y) - zyg_3(0, 0, y) + h_3(0, x, y) \\
 & - h_3(0, 0, y) - x\frac{\partial h_3}{\partial x}(0, 0, y) + xg_1(0, y, z) + h_1(0, y, z).
 \end{aligned}$$

Ce qui peut se ramener à

$$\begin{aligned}
 C^T(0)P_y^2P_z^2P_x^2\psi(x, y, z) &= \widetilde{u}_0(x, y, z) \\
 &= \widetilde{U}^T\psi(x, y, z),
 \end{aligned}$$

et donc la condition initiale est déterminée par

$$C(0) = \left( (P_y^2P_z^2P_x^2)^T \right)^{-1} \widetilde{U}. \quad (4.47)$$

En résumé, résoudre le problème aux limites (4.26)~(4.29), revient à résoudre le problème différentiel (4.45)-(4.47).

### 3.2 Exemple simple

On veut transformer le problème aux limites posé dans  $[0, T] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y, z) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, z) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y, z) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, x, y, z) = f(t, x, y, z) \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 u(t=0, x, y, z) = u_0(x, y, z) \\
 = \cos(x) \cos(y) \cos(z)
 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 u(t, x=0, y, z) = \exp(t) \cos y \cos z \\
 u(t, x, y=0, z) = \exp(t) \cos x \cos z \\
 u(t, x, y, z=0) = \exp(t) \cos x \cos y
 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y, z) = 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0, z) = 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial z}(t, x, y, 0) = 0,
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

en un problème différentiel du type (4.45).

Pour cet exemple, on a seulement besoin des expressions de l'inconnue  $u$  et de ses dérivées secondes, c'est à dire on reprend les relations (4.33), (4.36), (4.40) et (4.43), qui prennent la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, x, y, z) = C^T(t)P_x^2P_y^2\psi(x, y, z) - \exp(t)(\cos y \cos z - \cos z + \cos x \cos z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y, z) = C^T(t)P_x^2P_z^2\psi(x, y, z) - \exp(t)(\cos y \cos z - \cos y + \cos x \cos y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y, z) = C^T(t)P_y^2P_z^2\psi(x, y, z) - \exp(t)(\cos x \cos z - \cos x + \cos x \cos y),$$

et

$$u(t, x, y, z) = C^T(t)P_y^2P_z^2P_x^2\psi(x, y, z) + \exp(t)(\cos x \cos z - \cos z - \cos x - \cos y + \cos x \cos y + \cos y \cos z + 1).$$

En remplaçant par la dérivée temporelle de  $u(t, x, y, z)$  et par les trois dérivées spatiales dans l'équation, on obtient

$$\frac{dC^T}{dt}(t)P_y^2P_z^2P_x^2\psi(x, y, z) + C^T(t)\Lambda\psi(x, y, z) = F(t, x, y, z),$$

avec

$$\Lambda = P_y^2P_z^2 + P_x^2P_z^2 + P_x^2P_y^2$$

et

$$F(t, x, y, z) = f(t, x, y, z) - \exp(t)(3 \cos x \cos z + 3 \cos x \cos y + 3 \cos y \cos z - 2 \cos x - 2 \cos y - 2 \cos z + 1).$$

La condition initiale est déterminée par la relation

$$C(0) = \left( (P_y^2P_z^2P_x^2)^T \right)^{-1} \tilde{U}.$$

Le vecteur  $\tilde{U}$  est le vecteur de décomposition de la fonction

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(x, y, z) \\ = & \cos x \cos y \cos z - \cos x \cos z - \cos x \cos y - \cos y \cos z + \cos z \cos x + \cos y - 1. \end{aligned}$$

# Conclusion

Dans cette thèse, on s'est intéressé, dans une première partie, à la modélisation d'une tumeur cérébrale ; le gliome. On a proposé un modèle décrivant l'évolution de cette tumeur pour certaines positions particulières de celle-ci, en complétant ainsi le travail fait par Lagaert [26], où il considère que la tumeur évolue de manière sphérique à l'intérieur du cerveau.

Dans une seconde partie, on a développé une méthode de résolution des équations aux dérivées partielles. Cette méthode est basée sur l'approximation d'une fonction par une série d'ondelettes de Legendre en espace, la variable temps apparaît dans les coefficients de la série. On a donc commencé par justifier cette approche dans les espaces  $C([0, t]; L^2([0, 1]))$ ,  $C([0, T]; L^2([0, 1] \times [0, 1]))$  et  $C([0, T], L^2([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]))$  où des résultats de régularité pour les coefficients de la série de Legendre comme des résultats de convergence de ces séries ont été établis. L'estimation de l'erreur de cette approximation n'a été démontrée que dans le premier espace. Les outils nécessaires au développement de la méthode ont été introduits. Dans ce cadre, les matrices opérationnelles en trois dimensions ont été calculées. Cette méthode de résolution s'applique facilement et s'adapte à tous types de conditions aux limites. Elle transforme une équation aux dérivées partielles spatio-temporelles en un système différentiel en temps, qui est résolu par la méthode des différences finies. Pour le traitement des équations non linéaires, une technique numérique et itérative (QLT) a été retenue. Les différents résultats numériques obtenus, montrent l'efficacité de cette méthode. La solutions approchée qui en découle est alors très proche de la solution exacte et pour un moindre cout (en temps et en discrétisation). Cependant, il a été difficile de simuler le modèle proposé (dernière section du chapitre 1) par cette méthode. La difficulté réside dans le fait que :

1. les différentes espèces cellulaires sont structurées en couches.
2. les limites des couches sont inconnues et varient avec le temps.
3. la méthode de résolution proposée n'est applicable que pour des domaines fixes.

Comme perspectives pour ce travail, on propose :

- Trouver une méthode de résolution adaptée à des domaines variables.
- Trouver les estimations de l'erreur d'approximation dans les espaces  $C([0, T]; L^2([0, 1] \times [0, 1]))$  et  $C([0, T], L^2([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]))$ .

# Bibliographie

- [1] **N. Abblaoui-Lahmar, O. Belhamiti and S. M. Bahri**, A New Legendre Wavelets Decomposition Method for Solving PDEs, *Malaya J. Mat.*, 1 (1)(2014), 72-81. [40](#), [61](#), [62](#)
- [2] **N. Abblaoui-Lahmar and O. Belhamiti**, Numerical Study of Convection-Reaction-Diffusion Equation by the Legendre Wavelet Finite difference method, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, Vol. 19, Numb. 2 (2016), 94-112. [40](#), [61](#), [65](#)
- [3] **M. Abramowitz and I.A. Stegun**, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*; National Bureau of Standards Applied Mathematics, Serie 55, (1972). [21](#)
- [4] **T. Alarcón, H. M. Byrne, and P. K. Maini**, A cellular automaton model for tumour growth in inhomogeneous environment. *Journal of Theoretical Biology*, 225(2) (2003), 257-274. [7](#)
- [5] **A. Arrarás, F.J. Gaspar, L. Portero and C. Rodrigo**, Domain decomposition multigrid methods for nonlinear reaction–diffusion problems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 20 (2015), 699-710. [4](#), [23](#)
- [6] **I. Aziz, S. Ul-Islam and B. Sarler**, Wavelets collocation method for the numerical solution of elliptic BV problems, *Applied Mathematical Modelling*, 37 (2013), 676-694. [5](#), [39](#)
- [7] **A.L. Baldock, S. Ahn, R. Rockne, S. Johnston, M. Neal, et al**, Patient-Specific Metrics of Invasiveness Reveal Significant Prognostic Benefit of Resection in a Predictable Subset of Gliomas. *PLoS ONE* 9(10), (2014), e99057. doi :10.1371/journal.pone.0099057 [7](#)
- [8] **E. Banifatemi, M. Razzaghi and S. Yousefi**, Two-dimensional Legendre Wavelets Method for the Mixed Volterra- Fredholm Integral Equations. *Journal of Vibration and Control*, 13 (2007), 1667-1674. [39](#)
- [9] **O. Belhamiti**, A new approach to solve a set of nonlinear split boundary value problems, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17 (2012), 555-565. [61](#)
- [10] **R. E. Bellman and R. E. Kalaba**, *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems*, Elsevier, New York, NY, USA, (1965). [61](#)
- [11] **N. Chalhoub**, Estimations a posteriori pour l'équation de convection–diffusion–réaction stationnaire et applications aux volumes finis, Thèse de Doctorat (Mathématiques Appliquées). Université de Paris-Est (2012). [4](#)
- [12] **F. Cornelis, O. Saut, P. Cumsill, D. Lombardi, A. Iollo, J. Palussiere and T. Colin**, La modélisation mathématique in vivo de la croissance tumorale sur les données de l'imagerie : Un avenir proche, *Journal de Radiologie Diagnostique et Interventionnelle* 94 (2013), 610-617. [7](#)
- [13] **R. Courant and D. Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics. Volume 1*. Interscience Publishers, INC., New York, (1989). [24](#), [33](#)

- [14] **R. Dautray and J.L. Lions**, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 8 : Evolution : semi-groupe, variationnel, edition Masson, (1980). [26](#)
- [15] **A. Defontaine**, Modélisation multirésolution et multiformalisme de l'activité électrique cardiaque. Thèse de Doctorat (Traitement du Signal et Télécommunications). l'Université de Rennes 1. (2006). [4](#)
- [16] **J. Dhombres**, Analyse fonctionnelle, dans D. Lecourt ; Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences, PUF, 4ème édition, (2006). [20](#)
- [17] **N. Filipovic, T. Djukic, M. Radovic, D. Cvetkovic, M. Curcic, S. Markovic, A. Peulic and B. Jeremic**, Electromagnetic field investigation on different cancer cell lines. Cancer Cell International (2014), 14-84. [15](#)
- [18] **H. B. Frieboes, J. S. Lowengrub, S. Wise, X. Zheng, P. Macklin, E. L. Bearer, and V. Cristini**, Computer simulation of glioma growth and morphology. NeuroImage, 37(Supplement 1) (2007), S59-S70. [8](#)
- [19] **J. Garnier**, Analyse mathématique de modèles de dynamique des populations : équations aux dérivées partielles paraboliques et équations intégro-différentielles. Thèse de Doctorat (Mathématiques Appliquées). Université d'Aix-Marseille (2013). [4](#)
- [20] **P. Gerlee and A.R.A. Anderson**, Evolution of cell motility in an individual-based model of tumour growth. Journal of Theoretical Biology, 259 (1) (2009), 67-83. [7](#)
- [21] **A. Giese**, Glioma invasion-pattern of dissemination by mechanisms of invasion and surgical intervention, pattern of gene expression and its regulatory control by tumor suppressor p53 and proto-oncogene ets-1. Acta Neurochir Suppl, 88 (2003), 153-162. [7](#)
- [22] **L. Guillopé**, Analyse fonctionnelle. Approximations Hilbertiennes et développements en série. Ecole polytechnique de l'université de Nantes (2008). [21](#), [22](#)
- [23] **M. Hamou Maamar and O. Belhamiti**, New (0,2) Jacobi Multi- Wavelets Adaptive Method for Numerical Simulation of Gas Separations Using Hollow Fiber Membranes. Communications on Applied Nonlinear Analysis, 22 (3) (2015), 61-81. [52](#)
- [24] **E. Konukoglu, O. Clatz, H.M. Bjoern, M.-A. Wever, B. Stieltjes, E. Mandonnet, H. Delingette, and N. Ayache**, Image guided personalization of reaction-diffusion type tumor growth models using modified anisotropic eikonal equations. IEEE Transactions on Medical Imaging, 29(1) (2010), 77-95. [8](#)
- [25] **E. Konukoglu, O. Clatz, P.-Y. Bondiau, H. Delingette, and N. Ayache**, Extrapolating glioma invasion margin in brain magnetic resonance images : Suggesting new irradiation margins. Medical Image Analysis, 14 (2010), 111-125. [8](#)
- [26] **J.B. Lagaert**, Modélisation de la croissance tumorale : estimation de paramètres d'un modèle de croissance et introduction d'un modèle spécifique aux gliomes de tout grade. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, (2011). [4](#), [6](#), [8](#), [85](#)
- [27] **K. Maleknejad and S.Sohrabi**, Numerical solution Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets. Applied Mathematics and Computation, Volume 186, Issue 1, (2007), 836-843. [4](#)
- [28] **S. S. Motsa and P. Sibanda**, Some Modification of the Quasilinearization Method with Higher-Order Convergence for Solving Nonlinear BVPs. Numerical Algorithms, 63 (3) (2013), 399-417. [61](#)

- [29] **J.D. Murray**, *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications*. 3ième édition Springer, (2003). [12](#), [70](#)
- [30] **C. V. Pao**, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum, New York, (1992). [61](#)
- [31] **H. Parsian**, Two Dimension Legendre Wavelets and Operational Matrices of Integration, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 21 (2005), 101-106. [33](#), [38](#), [44](#), [70](#)
- [32] **C. Portenier**, *Analyse fonctionnelle; Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg* (2005). [21](#)
- [33] **M. Razzaghi and S. Yousefi**, Legendre wavelets Direct Method for Variational Problems. *Mathematics and Computer in Simulation*, 53 (2000), 185-192. [4](#)
- [34] **M. Razzaghi and S. Yousefi**, The Legendre wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science*, 32 (2001), 495-502. [4](#), [5](#), [40](#)
- [35] **B. Rebiai**, *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse. Thèse d'université* (2010), Université MENTOURI Constantine, Algérie. [4](#), [70](#)
- [36] **M. Rehman and R Ali Khan**, The Legendre wavelets Method for Solving Fractional Differential Equations, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17 (2011), 4163-4173. [4](#)
- [37] **B. Ribba, NH Holford, P Magni, I Trocóniz, I Gueorguieva, P Girard, C Sarr, M Elishmereni, C Kloft and LE Friberg**, A Review of Mixed-Effects Models of Tumor Growth and Effects of Anticancer Drug Treatment Used in Population Analysis, *CPT Pharmacometrics Syst. Pharmacol.* 3 (2014), e113. [8](#)
- [38] **L. Roques**, *Equations de réactions-diffusion non-linéaires et modélisation en écologie. Thèse de Doctorat (Mathématiques Appliquées)*. Université de Pierre et Marie Curie- Paris 6 (2004). [4](#)
- [39] **O. SAUT**, *Contributions en optique non-linéaire et en modélisation de la croissance tumorale en vue des applications cliniques, Habilitation à diriger des recherches (Mathématiques appliquées et Calcul Scientifique)*. Université Bordeaux 1 (2012) [11](#)
- [40] **M. Simeoni, P. Magni, C. Cammia, G. De Nicolao, V. Croci, E. Pesenti, M. Germani, I. Poggesi and M. Rocchetti**, Predictive Pharmacokinetic-Pharmacodynamic Modeling of Tumor Growth Kinetics in Xenograft Models after Administration of Anticancer Agents, *CANCER RESEARCH* 64 (2004), 1094-1101. [7](#)
- [41] **D. Stutson and A. S. Vatsala**, Quadratic and semi-quadratic convergence of IVP, *Journal of Neural Parallel Sci. Comput.*, 3 (2) (1995), 235-248. [61](#)
- [42] **R.M. Sutherland, B. Sordat, J. Bamat, H. Gabbert, B. Bourrat and W. Mueller-Klieser**, Oxygenation and differentiation in multicellular spheroids of human colon carcinoma. *Cancer Research*, 46(10) (1986), 5320-5329. [8](#)
- [43] **K. R. Swanson**. Quantifying glioma cell growth and invasion in vitro. *Mathematical and Computer Modelling*, 47(5-6) (2008), 638-648. [8](#)
- [44] **K. R. Swanson, E. C. Alvord, and J. D. Murray**, Virtual resection of gliomas : Effect of extent of resection on recurrence. *Mathematical and Computer Modelling*, 37(11) (2003), 1177-1190. [8](#)
- [45] **R. Uddin**, Comparison of the nodal integral method and nonstandard finite-difference schemes for the Fisher equation. *SIAM Jnl. Sci. Comput.*, 22 (6) (2006), 1926-1942. [4](#)

- [46] **S.G. Venkatesh, S.K. Ayyaswamy and S. Raja Balachandar**, Legendre Wavelets Based Approximation Method for Solving Advection Problems, Ain Shams Engineering Journal, 4 (2013), 925-932. [39](#)
- [47] **F. Yin and J. Song**, Solving Linear PDEs with the Aid of Two-Dimensional Legendre Wavelets, National Conference on Information Technology and Computer Science, (CITCS 2012). [5](#), [38](#)
- [48] **S. A. Yousefi**, Numerical Solution of Abel's Integral Equation by Using Legendre wavelets, Applied Mathematics and Computation 175 (2006), 574-580. [4](#)