REPUBLIQUE ALGERIENNE ET DEMOCRATIQUE ET POPULAURE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de mathématique d'Informatique

THESE DE DOCTORAT LMD

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Problème Aux Limites Pour Les Equations Différentielles Fractionnaires

Présenté par :Mme BENHAMIDA OUAFAA

Soutenue le :09/01/2020, devant le Jury Composé de:

Président **:** *BOUAGADA Djillali* *Prof. Université de Mostaganem*
Examinateur **:** *DAHMANI Zoubir* *Prof. Université de Mostaganem*
Examinatrice **:** *AZIZ karima née HAMANI* *Prof. Université de Mostaganem*
Examinatrice **:** *LIMAM Kheira* *MCA.Université de Mostaganem*
Examinatrice **:** *SAHRAOUI Rahma* *Prof. Ecole Supérieure d'Agronomie de Mostaganem*
Rapporteuse **:** *BELARBI Samira née HAMANI Prof.Université de Mostaganem*

Table des matières

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Dieu le Tout Puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier **Mme BELARBI HAMANI Samira**, pour avoir accepté de rapporter cette thèse ainsi que pour sa constante disponibilité, ses encouragements, son aide précieuse, ses conseils et ses grandes qualités scientifiques qui m'ont permis de mener à bien ce projet passionnant ; où il trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je remercie également **Mr BOUAGADA Djillali** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciments vont également à **Mr DAHMANI Zoubir** pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Je remercie **Mme AZIZ HAMANI Karima** d'avoir accepté de participer au jury .

J'adresse aussi mes remerciements à **Mme LIMAM Kheira** d'avoir bien voulu faire partie de jury.

Je remercie de même **Mme SAHRAOUI Rahma** d'avoir accepté de juger ce travail.

Enfin, Je ne saurais oublier l'apport de mes parents et mon mari pour l'accomplissement de ce travail, je tiens à leur rendre hommage à travers cette thèse .

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes aux limites concernant les équations différentielles qui sont engendrées par les dérivées de Caputo, Hadamard et Caputo-Hadamard avec des conditions non locales, conditions intégrales et anti-périodiques et conditions non locales des points multiples. Pour cela, on va utiliser les théorèmes de points fixes telles que : le théorème de Banach, le théorème de Scheafer, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de Mönch combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski.

Mots clés : Calcul fractionnaire, point fixe, problème aux limites, la mesure de Kuratowski, non locale, inégrale, anti-périodique, multi points.

abstract

This thesis deals with the study of the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems concerning fractional differential equations that are generated by the derivative of Caputo type, Hadamard and Caputo-Hadamard, with nonlocal conditions, integral and anti-periodic conditions and a nonlocal multi-point conditions. We will use the fixed point theorems as Banach's theorem, Scheafer's theorem, Leray-Schauder's nonlinear alternative and the theorem of Mönch combined with Kuratowski's measure of noncompactness.

Key words : Fractional calculus, fixed point, boundary value problem, the measure of Kuratowski, nonlocal , integral and anti-periodic, nonlocal multi-point .

الملخص

المعادلات التفاضلية الكسرية

هذه الأطروحة مكرسة لدراسة وجود وحدانية حلول بعض مسائل القيم الحدية لمعادلات تفاضلية ذوات الرتب الكسرية. هذه المعادلات هي من نوع كابوتو، هدامارو كابوتوهدامار وخاضعة لشروط غير محلية، لشروط غير دورية أولشروط غيرمحلية متعدد النقاط. في دراستنا سنعتمد على تطبيق مبدأ النقطة الثابتة لباناخ، شيفر، المتناوبة الغيرالخطية ليراي شاودر وكذالك على نظرية مونش مقترنة بمقياس كوراتوفسك.

كلمات مفتاحية

المعادلات التفاضلية ، الحساب الكسري ، النقطة الثابتة ، مشكلة الحدود،مقياس كوراتوفسك. ، غير محلي ، غير دوري ، متعدد النقاط غير محلي.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires (réels ou complexes). Son apparition remonte à la fin du 17ième sciècle, l'époque où Newton et Liebniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En 1695, Gottfried Leibniz a annoncé la question clé**"Can the meaning of derivatives with integer order be generalized to derivative with non-integer order ?"** dans une lettre à L'Hopital, le 30 septembre 1695 l'Hopital demanda à Leibniz quel sens pourrait-on attribuer à $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ si n était la fraction $\frac{1}{2}$? .

De nombreuses définitions des opérateurs non entiers ont été introduites. Elles ont, pendant longtemps, semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats.On cite les approches de dérivations fractionnaires suivantes : l'approche de Riemann-Liouville, de Caputo et celle de Hadamard ; et comme nouvelle approche , on cite la dérivation de Caputo-Hadamard.

La dérivation fractionnaire de Hadamard est une approche de dérivation qui est construite par Hadamard en 1892 [37], cette dérivation est différente à celle de Riemann-Liouville, mais ces deux approches de dérivation ont des inconvénients, parmi celuis est que la dérivée d'une constante n'est pas égale à zéro. Le lecteur peut trouver une description détaillée sur les opérateurs fractionnaires de Hadamard dans [15], [16], [17], [62].

La dérivation de Caputo-Hadamard est dûe à Jarad en 2012 [41], sa formule est obtenue a partir de la définition de la dérivation de Hadamard, en permutant l'opérateur d'intégration et celui de la dérivation. La différence entre l'approche de Caputo-Hadamard et celle de Hadamard est que la dérivée d'une constante par la première définition est zéro. L'avantage le plus important de dérivation de Caputo-Hadamard est qu'elle peut être appliquée à des systèmes avec n'importes quelles conditions initiales, contrairement à celle de Hadamard qui impose la présence de la condition initiale nulle au point 1.

Au départ, le calcul fractionnaire a été longuement considéré comme une simple théorie mathématique sans aucune explication réelle ou pratique. En effet, l'intérêt de ce concept dans les sciences fondamentales et en ingénierie ne s'est manifesté qu'à la seconde moitié du 20 ième siècle. Des lors , beaucoup de contributions autant théorique que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordres fractionnaires et leurs intérêts dans différentes disciplines telles que la physique, l'électricité, la biologie, la chimie, l'automatique,voir, par exemple [39], [56], [61], [54]. Au cours des dernières années un intérêt considérable est donné aux applications des dérivées fractionnaires de Hadamard dans plusieurs domaines. On cite maintenant quelques exemples sur ce sujet :

En physique : La dérivée fractionnaire de Hadamard considérée comme un cas particulier de l'opérateur fractionnaire dans l'équation de relaxation fractionnaire (voir[31]).

En probabilité : L'intérêt des opérateurs fractionnaires de Hadamard se manifeste dans la généralisation de distribution de COM-Poisson implquant la fonction de Mittag-leffler et les équations fractionnaires de Hadamard (voir : [32])

En rhéologie : Le calcul fractionnaire de Hadamard a été utilisé dans la loi de fluage logarithmique "qui est déjà obtenue pour le paramètre $\gamma = 1$" pour le généraliser par un paramètre $0 < \gamma \leq 1$ (voir[33]).

On peut noter que la plupart des travaux sur le calcul fractionnaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles fractionnaires. La résolution de ces problèmes traite l'existence, l'unicité des solutions, et la multiplicité ...etc ; plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes , surtout les méthodes basées sur le principe du point fixe, on invite le lecteur aux monographies de Kilbas et al.[43] , Momani et al. [50], Podlubny [53], Miller et Ross[49] Samko et al.[57] et les travaux de Agarwal et al. [2], et Benchohra et al. [7], [8], [9] , Delbosco et Rodino[25], Diethelem et al.[26], [27], [28], El-Sayed [24], Kilbas et Marzan [42], Mainardi [45] et Podlubny et al .[55] .

La théorie de point fixe fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence de solutions de nombreux problèmes non-linéaires différents. Les théorèmes du point fixe sont souvent basés sur certaines propriétés (telles que la continuité complète, la monotonie, la contraction....) que l'application considérée doit satisfaire. Les célèbres théorèmes de point fixe sont le theorème de Banach, théorème de Scheafer et l'alternative non linéaire de Leary-Schauder.

Comme une autre théorie de point fixe, le théorème de point fixe de Mönch combiné avec la mesure de noncompacité de Kuratowski, c'est une méthode qui a été principalement initiée dans la monographie de Banas et Goebel [5], puis développée et utilisée dans de nombreux articles, voir , par exemple Banas et Sadarangani [6], Guo et al. [36], Lakshmikantham et Leela [44], Mönch [51], et Szufla [60].

Cette thèse se compose d'une introduction et quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions générales concernant les espaces de Banach , le calcul fractionnaire, la mesure de non compacité de Kuratowski et les théorème de points fixes.

Au deuxième chapitre, on établit des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec la dérivée de Caputo et une condition intégrale et anti-périodique. Les premiers résultats sont basés sur le théorème du point fixe de Banach, de Scheafer et l'alternative non linéaire de

Leary-Schauder, le deuxème résultat est obtenu en moyennant le théorème de Mönch combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski, on termine par un exemple illustratif.

Dans le chapitre trois, on donne des résultats d'existence et d'unicité de solutions de deux problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Hadamard, l'un soumis à une condition non locale et l'autre soumis à une condition non locale des points multiples, en se basant sur les théorèmes de point fixe. Quelques exemples sont aussi construits pour illustrer nos résultats .

Le quatrième chapitre est résevé à exposer des résultats d'existence et d'unicité de solutions concernant un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire de type Caputo-Hadamard. Les premiers résultats sont assurés par les théorèmes de point fixe de (Banach, Schaefer et Leary-Schauder). Le deuxième résultat est prouvée par le théorème de point fixe de mönch et la mesure de non compacité de Kuratowski. Quelques exemples sont fournis pour appliquer les résultats.

Chapitre 1

Préliminaires

On introduit dans ce chapitre les éléments de bases théoriques sur les opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui vont suivre.

1.1 Notations et Définitions

Dans cette section, on présente les notations et définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce travail.
Soient $J=[a,b]$un intervalle fini et $\mathbb{E}$ un espace de Banach menu de la norme $\|.\|$.
$C(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de $[a,b]$ dans E, muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\|\ /t\in[a,b]\}.$$

$L^1(J,\mathbb{E})$ l'espace de Banach des fonctions $y:J\to\mathbb{E}$ qui sont Bochner intégrables, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1}=\int_a^b\|y(t)\|dt.$$

$L^\infty(J,E)$ est l'espace de Banach des fonctions mésurables $y:J\to\mathbb{E}$ qui sont bornées, muni de la norme :

$$\|y\|_{L^\infty}=\inf\{c>0,\|y(t)\|\leq c\text{ p.p }t\in J\}.$$

$AC(J,\mathbb{E})$ L'espace des fonctions absolument continues
Soient les espaces suivants :

$$AC^n(J,\mathbb{E})=\{f:J\to\mathbb{E};f^{\ (k)}\in C(J,\mathbb{E}),k=0,1,...,n-1,f^{(n-1)}\in AC(J,\mathbb{E})\big\},$$

et

$$AC^n_\delta(J,\mathbb{E})=\big\{y:J\to\mathbb{E};\delta^{n-1}y\in AC(J,\mathbb{E})\big\},$$

où $\delta=t\dfrac{d}{dt}$ est l'opérateur de dérivation de Hadamard .

Pour un ensemble donné V des fonctions $v : J \to \mathbb{E}$, on note :

$$V(t) = \{v(t), v \in V\}, t \in J,$$

et

$$V(J) = \{v(t), v \in V, t \in J\}.$$

Définition 1.1 *[63] On dit que l'application $f : J \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ a la propriété de Carathéodory si :*

(1) $t \to f(t, u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{E}$,

(2) $u \to f(t, u)$ est continue presque pour tout $t \in J$.

Théorème 1.1 *(Arzelà-Ascoli) [38]*
Soit A un sous ensemble de $C(J, \mathbb{E})$; A est relativement compact dans $C(J, \mathbb{E})$ si et seulemnt si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *L'ensemble A est borné c'est à dire :*

$$\exists k > 0 : \|f(x)\| \leq k, \forall x \in J \quad \text{et } f \in A.$$

2. *L'ensemble A est équicontinu c'est à dire :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A.$$

1.2 Fonctions Spéciales

Dans cette section, on expose deux fonctions principales pour le calcul non entier. On définit la fonction Gamma et Bêta d'Euler, puis on introduit quelques propriétés liées à ces fonctions. Pour plus de détails voir [49], [57], [59].

1.2.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma, qui permet de prolonger la factorielle aux valeurs non entières, la fonction Gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée.

Définition 1.2 *[34] Pour tout nombre réel α tel que $\alpha > 0$, on définit la fonction Gamma d'Euler Γ par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \alpha > 0.$$

Proposition 1.1 *Pour tout $\alpha > 0$, la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)...(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$.
3. $\Gamma(n) = (n - 1)!, n \geq 1$.

Quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$

* $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{1-1}du = 1.$

* $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ (L'intégrale de Gauss).

* $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$

1.2.2 Fonction Bêta

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.3 *[34] La fonction Bêta est un type d'intégrale dEuler définie pour tous couple $(\alpha, \beta) \in R_+^*$ par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du.$$

Remarque 1.1 *La relation entre les fonctions Gamma et Bêta est donnée par l'expression :*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\beta, \alpha); \quad pour \ \ tout\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*.$$

1.3 Intégration Fractionnaire :

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

1.3.1 Intégrale de Riemann-Liouville

La définition de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est une généralisation "à l' ordre α réel"de la formule de Cauchy (1789 - 1857), qui est obtenue comme suit :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on note

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Une double intégration

$$I^2 f(t) = \int_a^t \int_a^s f(\mu)d\mu ds = \int_a^t (t-s)f(s)ds.$$

En répétant le processus (n-1) fois, on obtient la relation suivante :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1}f(s)ds,$$

ainsi

$$I^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-s)^{n-1}f(s)ds.$$

Et pour un ordreα plus général, on a la définition suivante :

Définition 1.4 *[43]-[53] L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$; pour une fonction $f \in C([a;b))$ est défini par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, & \alpha > 0 \\ f(t), & \alpha = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarque 1.2 *Dans la formule (1.1), en prennant $a = 0$; I_a^α sera notée I^α.*

Exemple 1.1 *([43]) On considère la fonction f définie par : $f : t \to (t-a)^\beta$.*
On a :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds,$$

par le changement de variable $\mu = \dfrac{s-a}{t-a}$, on obtient

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \mu^\beta (1-\mu)^{\alpha-1} d\mu,$$

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.2}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$, la relation devient :

$$I_a^{\frac{1}{2}} (t-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)} (t-a)^2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (t-a)^2.$$

Proposition 1.2 *[43]Soit $f \in C([a,b))$. Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $A, B \in R$, on a :*

1. $I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) = I_a^\beta (I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t)$.
2. $I_a^\alpha [Af(t) + Bg(t)] = A I_a^\alpha f(t) + B I_a^\alpha g(t)$.

1.3.2 Intégrale de Hadamard

L'intégrale fractionnaire de Hadamard était basée sur la généralisation de la nième intégrale suivant :

$$I_a^n f(x) = \int_a^x \frac{dt_1}{t_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \int_a^{t_2} \frac{dt_3}{t_3} ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) \frac{dt_n}{t_n}.$$

Définition 1.5 *[43] L'opérateur intégral fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \geq 0$; pour une fonction $f \in C([a;b))$ est défini par :*

$${}_H I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s}, & \alpha > 0 \\ f(t), & \alpha = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Remarque 1.3 *Dans la formule (1.3), en prennant $a = 1$, ${}_H I_a^\alpha$ sera notée ${}_H I^\alpha$.*

Exemple 1.2 *([43]) On considère la fonction f définie par* $f : t \to \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta}$.
L'intégrale fractionnaire de Hadamard s'écrit :

$$ {}_{H}I_{a}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta}. = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\beta}\frac{ds}{s}, $$

pour évaluer cette intégrale, on effectue le changement de variable $\mu = \dfrac{\log\frac{s}{a}}{\log\frac{t}{a}}$,

$$ \begin{aligned} {}_{H}I_{a}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta} &= \frac{\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\mu^{\beta}(1-\mu)^{\alpha-1}d\mu \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta} \end{aligned} $$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{3}{2}$ *, la relation devient :*

$$ {}_{H}I_{a}^{\frac{1}{2}}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{2}. $$

Proposition 1.3 *[43] Soient $f, g \in C([a,b))$, pour $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ et $A, B \in R$, on a*

1. ${}_{H}I_{a}^{\alpha}({}_{H}I_{a}^{\beta}f)(t) = {}_{H}I_{a}^{\beta}({}_{H}I_{a}^{\alpha}f)(t) = ({}_{H}I_{a}^{\alpha+\beta}f)(t)$.
2. ${}_{H}I_{a}^{\alpha}[Af(t)+Bg(t)] = A\,{}_{H}I_{a}^{\alpha}f(t) + B\,{}_{H}I_{a}^{\alpha}g(t)$.

Preuve : Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in C([a,b))$
Pour (1) ; la démonstration est obtenue par le calcul direct en utilisant la fonction Bêta. En effet :

$$ \begin{aligned} {}_{H}I_{a}^{\alpha}({}_{H}I_{a}^{\beta}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}(I^{\beta}f)(s)\frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{t}\int_{a}^{s}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{\mu}\right)^{\beta-1}f(\mu)\frac{d\mu}{\mu}\frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{t}f(\mu)\int_{\mu}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{\mu}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s}\frac{d\mu}{\mu}. \end{aligned} $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{t}f(\mu)\int_{\mu}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{\mu}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s}\frac{d\mu}{\mu}. \tag{1.4} $$

En posant

$$ x = \frac{\log\frac{s}{\mu}}{\log\frac{t}{\mu}}, $$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_\mu^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{\mu}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s} &= \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx\\ &= \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)\\ &= \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

En remplaçant la dernière formule dans (1.4), on aura :

$$_HI_a^\alpha({}_HI_a^\beta f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{\mu}\right)^{\alpha+\beta-1} f(\mu)\frac{d\mu}{\mu} = I_a^{\alpha+\beta}f(t),$$

d'où le résultat.
En utilisant la propriété précédente, on a

$$_HI_a^\alpha({}_HI_a^\beta f)(t) ={}_H I_a^{\alpha+\beta}f(t) ={}_H I_a^{\beta+\alpha}f(t) ={}_H I_a^\beta({}_HI_a^\alpha f)(t).$$

1.4 Dérivation Fractionnaire

La notion de dérivée d'ordre non entier est une généralisation du concept de la diférentiation d'ordre entier. Il existe plusieurs définitions mathématiques concernant la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter les quatre célèbres approches de la dérivée fractionnaire : dérivée de Riemann-Liouville (1847), de Caputo (1967), et de Hadamard (1891) et, enfin, celle de Caputo-Hadamard (2012).

1.4.1 Approche de Riemann-Liouville

L'approche de B.Riemann et J.Liouville de dérivation fractionnaire est donnée par l'intégrale suivante :

Définition 1.6 *[43][53] Soit une fonction $f \in C([a,b))$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville de f est*

$$\begin{aligned}D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds \qquad n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}^*\\ &= D_a^n I_a^{n-\alpha}f(t).\end{aligned}$$

Exemple 1.3 *[43] On considère la fonction*

$$f : t \to (t-a)^\beta, \quad t > a.$$

Alors

$$\begin{aligned}D_a^\alpha (t-a)^\beta &= D^m I_a^{m-\alpha}(t-a)^\beta\\ &= D^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right].\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de la dérivation entière suivante :

$$D^m(t-a)^\delta = \delta(\delta-1)...(\delta-m+1)(t-a)^{\delta-m} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-m+1)}(t-a)^{\delta-m}, \tag{1.5}$$

on aura

$$D_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1-m)}(t-a)^{\beta+m-\alpha-m},$$

ce qui permet d'avoir

$$D_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Si on pose $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{3}{2}$*, alors :*

$$D_a^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a).$$

Et pour $\alpha > 0$*,et* $\beta = 0$*, on aura le résultat suivant :*

$$D_a^\alpha(t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

C'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

La proposition suivante permet d'effectuer une composition entre l'intégrale et la derivée de Riemann-Liouville.

Proposition 1.4 *[43] Soit* $\alpha > \beta > 0$*, si* $f \in C([a,b])$*, alors*

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t). \tag{1.6}$$

En particulier, si $\alpha = \beta$*, alors*

$$D_a^\alpha\ (I_a^\alpha f)(t) = f(t). \tag{1.7}$$

Proposition 1.5 *[43] Soient* $m \in N^*$ *et* $m-1 \le \alpha < m$*,* $f \in C([a,b])$*. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville* D_a^α *possède les propriétés suivantes :*

(1) D_a^α *est un opérateur linéaire.*

(2) *Si* $D_a^\alpha f(t) = 0$*, alors* $f(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} c_j(t-a)^{\alpha+j-m}$*.*

1.4.2 Approche de Caputo

La dérivée de Riemann-Liouville a certains inconvénients qui se reflète dans la modélisation des phénomènes réels. Les problèmes étudiés exigent une définition de dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaires qui satisfait ces demandes ; elle a été introduite par Caputo[52]. Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.7 *[42], [43] Soit $f \in AC^n([a,b)), n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo de la fonction f est définie comme suit :*

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \qquad n-1<\alpha<n, n \in \mathbb{N}^* \\ &= I_a^{n-\alpha} D_a^n f(t). \end{aligned}$$

Exemple 1.4 *On reprend la fonction $f : t \to (t-a)^{\frac{3}{2}}$,*
et on calcule ${}^C D_a^{\frac{1}{2}} f(t)$

$$\begin{aligned} {}^C D_a^{\frac{1}{2}} (t-a)^{\frac{3}{2}} &= \left(I^{1-\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{d}{dt}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \left(I^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{d}{dt}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation 1.5, on aura :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^{\frac{1}{2}} (t-a)^{\frac{3}{2}} &= \left(I^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+1-1)}(t-a)^{\frac{3}{2}-1}\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(I^{\frac{1}{2}}\right)(t-a)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2})}(t-a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a). \end{aligned}$$

Proposition 1.6 *[43] Soit $n-1 < \alpha < n$,$n \in N^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $f \in AC^n([a,b))$, $\alpha > 0$. La relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$ {}^C D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right], \tag{1.8}$$

où

$$ {}^C D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

Proposition 1.7 *[43]Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b))$, alors*

$$^{C}D_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$$^{C}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = f(t).$$

Démonstration :
La relation de (1.8) permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned} ^{C}D_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta} f\right)(t) &= D_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\frac{d^j}{dt^j}(I_a^{\beta} f)(a)}{j!}(t-a)^j\right] \\ &= I_a^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\frac{d^j}{dt^j} I_a^{\alpha} f(a)}{j!} D^m I^{n-\alpha}(t-a)^j. \end{aligned}$$

Et comme $j \leq m-1 < \alpha$, pour $j = 0, 1, ..., m-1$, alors

$$\frac{d^j}{dt^j} I_a^{\alpha} f(a) = 0.$$

ce qui donne

$$^{C}D_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta} f\right)(t) = I_a^{\beta-\alpha} f(t),$$

en particulier

$$^{c}D_a^{\alpha}\left(I_a^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

1.4.3 Approche de Hadamard

L'approche de Hadamard de la dérivée fractionnaire est donnée par l'intégrale suivante :

Définition 1.8 *[43] Soit une fonction $f \in C([a,b))$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens d Hadamard de f est*

$$\begin{aligned} {}_{H}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s} \qquad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ &= \delta^n \; {}_{H}I_a^{n-\alpha} f(t), \end{aligned}$$

tel que $\delta = t\dfrac{d}{dt}$.

Exemple 1.5 *([43])On considère la fonction f définie par :*

$$f : t \to \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta}.$$

On a alors

$$_{H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(t\frac{d}{dt})^n\int_a^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\beta}\frac{ds}{s}.$$

Par le changement de variable $\mu=\dfrac{\log\frac{s}{a}}{\log\frac{t}{a}}$*, on obtient*

$$_{H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta}=\frac{\left(t\frac{d}{dt}\right)^n\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1\mu^{\beta}(1-\mu)^{n-\alpha-1}d\mu,$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^n\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta}.$$

Si on prend $\beta=\frac{5}{2}$,$\alpha=\frac{1}{2}$*, alors*

$$_{H}D_a^{\frac{1}{2}}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^1\left(\log\frac{t}{a}\right)^3=\frac{15\sqrt{\pi}}{64}\left(\log\frac{t}{a}\right)^2.$$

Si on prend $\alpha=\frac{1}{2}$ *et* $\beta=0$ *alors*

$$_{H}D_a^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^0=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2+1)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^1\left(\log\frac{t}{a}\right)^{1/2}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}(\log\frac{t}{a})^{-\frac{1}{2}}$$

n'est pas nulle.

Proposition 1.8 *([43]) Soit* $\alpha>\beta>0$*. Si* $f\in C([a,b))$*, alors :*

$$_{H}D_a^{\beta}(_{H}I_a^{\alpha}f)(t)=\ _{H}I_a^{\alpha-\beta}f(t).$$

En particulier, si $\alpha=\beta$*, alors*

$$_{H}D_a^{\alpha}(_{H}I_a^{\alpha}f)(t)=f(t).$$

Démonstration : Soit $m-1<\beta\leq m(m\in N)$, si $\beta=m$

$$\delta^m f(t)=\left(t\frac{d}{dt}\right)^m f(t).$$

En appliquant l'opérateur δ^m à la fonction $I^{\alpha}f(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta^m \ \left({}_H I_a^\alpha f\right)(t) &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^m \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s} \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{m-1} \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{d}{dt}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s} \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{m-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-2} f(s)\frac{ds}{s} \\
&= \delta^{m-1} \ {}_H I_a^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

On répéte cette procédure $(1 < k \leq m)$ fois , on obtient

$$\delta^m \ \left({}_H I_a^\alpha f\right)(t) = \delta^{m-k}\left({}_H I_a^{\alpha-k} f\right)(t).$$

Donc, pour $k = m$, on a

$$\delta^m \ {}_H I_a^\alpha f(t) = \ {}_H I_a^{\alpha-m} f(t).$$

De plus,

$$\delta^m \ {}_H I_a^m f(t) = f(t).$$

Par conséquent,

$${}_H D_a^\beta \ {}_H I_a^\alpha f(t) = \ \delta^m \ \left({}_H I_a^{m-\beta} \ {}_H I_a^\alpha f\right)(t) = \delta^m I^m \left(I_a^{\alpha-\beta} f\right)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

1.4.4 Approche de Caputo-Hadamard

Comme la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée de Hadamard présente également des inconvénients. Les auteurs F. Jarad, D. Baleanu, A. Abdeljawad [41] ont résolu ces problèmes en modifiant la dérivée en une version plus appropriée à avoir des conditions initiales physiquement interprétables semblables à celles de Caputo.

Définition 1.9 *[41] [43]Soit $f \in AC_\delta^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo-Hadamard de la fonction f est définie comme suite :*

$$\begin{aligned}
{}_H^C D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n f(s) ds \qquad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\
&= {}_H I_a^{n-\alpha} \delta^n f(t),
\end{aligned}$$

tel que $\delta = t\dfrac{d}{dt}$.

Exemple 1.6 *[43]On considère la fonction f définie par :*

$$f : t \to \left(\log\frac{t}{a}\right)^\beta.$$

On a alors

$${}_H^C D_a^\alpha \left(\log\frac{t}{a}\right)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n \left(\log\frac{s}{a}\right)^\beta \frac{ds}{s}.$$

Si on prend $\beta = \dfrac{3}{2}$,$\alpha = \dfrac{1}{2}$, *et* $n = 1$, *alors*

$$\delta^n \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\beta} = \delta^1 \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$${}_{H}^{C}D_a^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{1-\frac{1}{2}-1} \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s}.$$

Par le changement de variable $\mu = \dfrac{\log \frac{s}{a}}{\log \frac{t}{a}}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} {}_{H}^{C}D_a^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\frac{3}{2}\left(\log \frac{t}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \mu^{3/2}(1-\mu)^{\frac{1}{2}} d\mu, \\ &= \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\log \frac{t}{a}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(\log \frac{t}{a}\right). \end{aligned}$$

Dans la suite, on donne une relation reliant la dérivée de Hadamard à celle de Caputo-Hadamard.

Proposition 1.9 *([43]) Soit* $n-1 < \alpha < n, n \in N$ *et* $f \in AC_\delta^n([a,b))$. *La relation entre la dérivée de Caputo-Hadamard et celle de Hadamard est donnée par :*

$${}_{H}^{C}D_a^{\alpha} f(x) =_H D_a^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)f}(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^k \right],$$

où

$${}_{H}^{C}D_a^{\alpha} f(x) =_H D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)f}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}.$$

Démonstration : Par définition, ${}_HD_a^{\alpha} f(t) = \left(t\dfrac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha} f(t)$ et on intègre par partie, en posant $u(t) = f(t)$ et $v'(t) = \left(\log \dfrac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \dfrac{1}{s}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s} &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[-\frac{1}{n-\alpha}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha} f(s)\right]_a^t \\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{d}{ds}f(s)\right] ds \\
&= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^n \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha}\right] \\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{sd}{ds}f(s)\right] \frac{ds}{s} \\
&= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha-n+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}\right] \\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{sd}{ds}f(s)\right] \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s} &= \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha} \\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{sd}{ds}f(s)\right] \frac{ds}{s} \\
&= \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha} + \delta^n I^{n-\alpha+1}(\delta f)(t).
\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement, on a :

$$\begin{aligned}
\delta^n I_a^{n-\alpha+1}(\delta f)(t) &= \frac{\delta f(a)}{\Gamma(n-\alpha+2)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^n \left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+1} \\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+2)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha+1} \frac{d}{ds}\left[\delta f(s)\right] ds \\
&= \frac{\delta f(a)}{\Gamma(-\alpha+2)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha+1} \\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+2)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha+1} \frac{d}{ds}\left[\delta f(s)\right] ds \\
&= \frac{\delta f(a)}{\Gamma(-\alpha+2)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha+1} \\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+2)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha+1} \delta^2 f(s)\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir à

$$
\begin{aligned}
\left(t\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(t) &= \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha} + \frac{\delta f(a)}{\Gamma(-\alpha+2)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha+1}\\
&+ \left(t\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{n-\alpha+2}\delta^2 f(t)\\
&\quad \text{...répite l'intégration (n) fois}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^{(k)f}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha} + \delta^n I_a^{2n-\alpha}\delta^n f(t)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^{(k)f}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha} + \delta^n I_a^{n} I_a^{n-\alpha}\delta^n f(t).
\end{aligned}
$$

D'où

$$\delta^n I_a^{n-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^{(k)f}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha} + I_a^{n-\alpha}\delta^n f(t). \tag{1.9}$$

De plus, on a

$$D^\alpha\left(\log\frac{t}{a}\right)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha}$$

Donc

$${}_HD_a^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^k\right] = {}_H^CD_a^\alpha f(t). \tag{1.10}$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$${}_HD_a^\alpha f(t) = {}_H^C D_a^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha}. \tag{1.11}$$

D'où le résultat.

Proposition 1.10 *([43])Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b])$, alors*

$${}_H^CD_a^\beta({}_HI_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$${}_H^CD_a^\alpha({}_HI_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Démonstration :
En appliquant la relation (1.10) pour la fonction $I_a^\alpha f(t)$, on trouve le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
{}_{H}^{C}D_{a}^{\beta}\left({}_{H}I_{a}^{\alpha}f\right)(t) &= {}_{H}D_{a}^{\beta}\left[{}_{H}I_{a}^{\alpha}f(t)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\delta_{H}^{j}I_{a}^{\alpha}f(a)}{j!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{j}\right] \\
&= {}_{H}I_{a}^{\alpha-\beta}f(t)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\delta_{H}^{j}I_{a}^{\alpha}f(a)}{j!}\,{}_{H}D_{a}^{\beta}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{j} \\
&= {}_{H}I_{a}^{\alpha-\beta}f(t)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\delta_{H}^{j}I_{a}^{\alpha}f(a)}{j!}\delta_{H}^{n}I_{a}^{n-\beta}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{j}.
\end{aligned}$$

Et comme $j-1<\alpha$, pour $j=0,1,...m-1$, alors, les dérivées $\delta_{H}^{j}I^{\alpha}f(a)=0$, ce qui donne

$${}_{H}^{C}D_{a}^{\beta}{}_{H}I^{\alpha}f(t)=I^{\beta-\alpha}f(t).$$

1.5 Mesure de Non Compacité au Sens de Kuratowski

On présente dans cette section quelques propriétés fondamentales de la mesure de non compacité au sens de Kuratowski.

Définition 1.10 *[4]-[5] La mesure de non compacité au sens de Kuratowski est l'application* $\gamma : P_b(\mathbb{E}) \to R_+$ *définie par*

$$\gamma(B)=\inf\left\{\varepsilon>0, B\subset\cup_{i=1}^{n}B_i diam(B_i)\leq\varepsilon\right\}, B\in P_b(\mathbb{E}).$$

tel que : $P_b(\mathbb{E})$ *est la famille des sous ensemble borné de* $\mathbb{E}$.

Proposition 1.11 *[4]-[5] Soient* $\mathbb{E}$ *un espace de Banach,* B *et* A *sont des ensembles bornés de* $\mathbb{E}$. *Alors, la mesure de non compacité au sens de Kuratowski satisfait les propriétés suivantes*

1. $\gamma(B)=0\Leftrightarrow\overline{B}$ *est compacte (*B *est relativement compacte dans* $\mathbb{E}$*) .*
2. $\gamma(B)=\gamma(\overline{B})$.
3. $A\subset B\to\gamma(A)\leq\gamma(B)$.
4. $\gamma(A+B)\leq\gamma(A)+\gamma(B)$.
5. $\gamma(cA)\leq|c|\,\gamma(A); c\in R$.
6. $\gamma(convA)=\gamma(A)$.

Lemme 1.1 *[60] Soient* D *un sous espace fermé borné et convexe d'un espace de Banach* $C(J,\mathbb{E})$, *et* G *une fonction continue sur* $J\times J$ *et* $f:J\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ *une fonction qui satisfait les conditions de carathéodory, et il existe* $p\in L^1(J,R_+)$ *telle que pour tout* $t\in J$ *et tout sous ensemble borné* $B\subset\mathbb{E}$ *on a :*

$$\lim_{h\to 0^+}\gamma(f(J_{t,h}\times B))\leq p(t)\gamma(B),\qquad J_{t,h}=[t-h;t]\cap J.$$

Si V *est un sous ensemble équicontinu de* D, *alors :*

$$\gamma\big(\{\int_J G(s,t)f(s,y(s))ds:\ \ y\in V\}\big)\leq\int_J\|G(s,t)\|\gamma(V(s))ds.$$

1.6 Théorèmes du Point Fixe

Les théorèmes de point fixe permettent d'assurer l'existence de solutions d'un problème donné en le transformant en un problème du point fixe, et en fournissant des conditions suffisantes pour lesquelles, une application donnée admet des points fixes.

1.6.1 Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.2 *[43][58] Soient* $(\mathbb{E}; d)$ *un espace métrique complet et* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *une contraction. Alors* f *admet un point fixe unique.*

1.6.2 Théorème du Point Fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 1.3 *[43][58] Soient* B *un espace de Banach et* $T : B \to B$ *un opérateur complètement continu. Si l'ensemble :*

$$\Omega = \{u \in B : u = \mu T u, \mu \in]0, 1[\}$$

est borné, alors T *possède au moins un point fixe.*

1.6.3 Alternative Non Linéaire de Leray Schauder

Théorème 1.4 *[2] Soit* X *un espace de Banach et* K *un sous ensemble convexe non vide, soit* U *un sous ensemble ouvert non vide de* K, $0 \in U$ *et* $T : \overline{U} \to K$ *un opérateur complètement continu, alors soit*

1. *L'opérateur* T *admet un point fixe dans* $\overline{U}$, *soit,*

2. $\exists \lambda \in (0, 1)$ *et* $x \in \partial U$ *tels que* $x = \lambda T(x)$.

1.6.4 Théorème du Point Fixe de Mönch

Théorème 1.5 *[51] Soit* D*un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach tel que* $0 \in D$, *et soit* N *une application continue de* D *dans* D.
Si l'implication

$$v = \overline{conv} N(v) \text{ où } v = N(v) \cup \{0\} \to \alpha(v) = 0$$

est vérifiée pour tout sous ensemble v *de* D *? tel que* α *est la mesure de non compacité de Kuratowski, alors* N *a admet un point fixe dans* D.

1.7 Lemmes Auxiliaires

Les lemmes suivants sont utilisés dans la démonstration de nos résultats.

Lemme 1.2 *[43]-[53] Soit $\alpha \geq 0$. L'équation différentielle fractionnaire*

$$^{C}D_a^{\alpha}h(t) = 0$$

possède des solutions

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i,$$

tels que $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.3 *[43]-[53] Soient $\alpha \geq 0$ et $h \in AC^n([a,b])$. Alors*

$$I_a^{\alpha}\, {}^{C}D_a^{\alpha}h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i + h(t)$$

tel que $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.4 *[43] Pour $m-1 < \alpha < m$, $m \in N^*$ et $h \in C([a,b))$, l'équation différentielle*

$$_{H}D_a^{\alpha}h(t) = 0,$$

admet comme solution générale la fonction

$$h(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}, (c_i)_{i=0,1,\ldots m-1} \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : Soient $m-1 < \alpha < m, m \in N^*$, et $h \in C([a,b))$. On a par définition :

$$_{H}D_a^{\alpha}h(t) = \delta^m \left(I_a^{m-\alpha}h\right)(t) = 0,$$

c'est à dire que la dérivée d'ordre m de $(I^{m-\alpha}h)$ est nulle . Donc, on peut écrire :

$$\left(I_a^{m-\alpha}h\right)(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^j, \qquad c_j \in R, \quad j = 0,1,...,m-1.$$

L'application de $_{H}I_a^{\alpha}$ aux deux membres de l'identité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\left(I_a^{m-\alpha+\alpha}h\right)(t) &= {}_{H}I_a^{m}h(t) \\ &= {}_{H}I_a^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j+\alpha}.\end{aligned}$$

Puis, on applique δ^m sur les deux membres de l'égalité

$$\delta^m({}_H I_a^m h)(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} \delta^m \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j+\alpha},$$

on a

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} \frac{\Gamma(j+1+\alpha)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j+\alpha-m} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j+\alpha-m}. \end{aligned}$$

Finalement, pour $i = m - j$, on obtient

$$h(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}, (c_i)_{i=0,1,\ldots m-1} \in \mathbb{R}$$

Lemme 1.5 *[43]-[53] Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $h \in C([a,b))$.Alors on a*

$${}_H I^\alpha({}_H D^\alpha h)(t) = h(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}.$$

Lemme 1.6 *[43] Pour $m-1 < \alpha < m$, $m \in N^*$ et $h \in AC_\delta^m([a,b))$, l'équation différentielle fractionnaire*

$${}_H^C D_a^\alpha h(t) = 0,$$

admet des solutions

$$h(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^j, \quad (c_j)_{j=0,1,\ldots m-1} \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : Soient $m-1 < \alpha < m, m \in N^*$, et $h \in AC_\delta^m([a,b))$.
Si

$${}_H^C D_a^\alpha h(t) = 0,$$

alors , on a :

$${}_H I_a^{m-\alpha} \left(\delta^m h\right)(t) = 0.$$

En appliquant ${}_H^C D_a^{m-\alpha}$ aux deux membres de l'égalité, on aura :

$${}_H^C D_a^{m-\alpha} \; {}_H I_a^{m-\alpha} \left(\delta^m h\right)(t) = \delta^m h(t) = 0.$$

Alors , h peut s'écrire sous la forme :

$$h(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^j, \qquad c_j \in R, \quad j = 0, 1, ..., m-1.$$

Lemme 1.7 *[43] Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $h \in AC^n_\delta$. Alors, on a*

$$
{}_H I^\alpha_a ({}^C_H D^\alpha_a h)(t) = h(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i f(a)}{i!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^i \tag{1.12}
$$

tel que δ^i est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre i où $i = 0, 1, ..., n-1$.

Preuve D'après la proposition 1.8, on a

$$
\delta^n I^n f(t) = f(t).
$$

En utilisant l'identité(1.9), on trouve

$$
\begin{aligned}
\delta^n_H I^n_a f(x) &= {}_H I^n_a \delta^n f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)} f(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k \\
&= I^n_a \delta^n f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)} f(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^k \\
&= {}_H I^\alpha_a {}_H I^{n-\alpha}_a \delta^n f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)} f(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^k \\
&= {}_H I^{\alpha c}_a {}_H D^\alpha_a f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)} f(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^k .
\end{aligned}
$$

Par conséquence, on obtient

$$
{}_H I^{\alpha C}_a {}_H D^\alpha_a f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)} f(a)}{k!} \left(\log \frac{x}{a}\right)^k .
$$

Chapitre 2

Problème aux Limites Concenant les Equations Différentielles Fractionnaires avec la Dérivée de Caputo et une Condition Intégrale et Anti-périodique

[1]

2.1 Introduction

Au cours des dernières années, la théorie des équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires a attiré l'attention de nombreux auteurs, et un nombre considérable de résultats ont été obtenus. Cependant, la majorité des travaux parus concernant l'étude de ces équations dans des espaces de Banach ont considéré l'existence et l'unicité de solutions dans l'intervalle fini . Les conditions aux limites anti-périodiques apparaissent dans la modélisation mathématique de nombreuse phynomènes physique, voir par exemple : les monographies de Ahmed et al[3], Chen et al [21] et Mattar [46], [47], [48].
Ce chapite est consacré à l'étude de l'existence et l'uninité de solutions du problème aux limites suivant :

$$^{c}D^{r}y(t) = f(t, y(t)), \ \forall t \in J = [0, T], \quad 0 < r \leq 1, \tag{2.1}$$

$$y(T) + y(0) = b\int_0^T y(s)ds, \quad bT \neq 2, \tag{2.2}$$

où $^{c}D^{r}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, satisfaisant quelques hypothèses qui seront spécifiée plus tard.

1. **W. Benhamida**, J. R. Graef, and S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations with integral and anti-periodic conditions in a Banach space,Progr.Frac.Differ.Appl.4,No2,65-70(2018).

2.2 Existence de Solutions

Définition 2.1 *Une fonction* $y \in AC^1([0,T],\mathbb{R})$ *est dite une solution du problème (2.1)-(2.2) si* y *satisfait l'équation*

$$^cD^r y(t) = f(t, y(t)) \quad 0 < r \leq 1$$

avec la condition

$$y(T) + y(0) = b\int_0^T y(s)ds.$$

On démontre le lemme suivant qui est important pour donner la solution intégrale du problème (2.1)-(2.2) .

Lemme 2.1 *Soient* $0 < r \leq 1$, $bT \neq 2$ *et* $h : J \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue. Une fonction* y *est une solution de l'equation fractionaire intégrale*

$$y(t) = \frac{b}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^r}{\Gamma(r+1)}h(s)ds - \frac{1}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds. \tag{2.3}$$

si et seulement si y *est une solution du problème*

$$^cD^r y(t) = h(t), \ \ \forall t \in J = [0,T], \quad 0 < r \leq 1, \tag{2.4}$$

$$y(T) + y(0) = b\int_0^T y(s)ds, \quad bT \neq 2. \tag{2.5}$$

Preuve : On suppose que y satisfait (2.4),en appliquant le Lemme 1.3, on réduit le problème (2.4)-(2.5) à l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = c_0 + \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds. \tag{2.6}$$

Par (2.5),

$$c_0 = \frac{b}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^r}{\Gamma(r+1)}h(s)ds - \frac{1}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds.$$

Donc on obtient l'équation (2.3).

Inversement, on a

$$\begin{aligned}
{}^cD^r y(t) &= {}^cD^r\Big(\frac{b}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^r}{\Gamma(r+1)}h(s)ds - \frac{1}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds \\
&+ \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds\Big) \\
&= I^{1-r}\left(\frac{d}{dt}\right)\Big(\frac{b}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^r}{\Gamma(r+1)}h(s)ds - \frac{1}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds \\
&+ \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}h(s)ds\Big) \\
&= I^{1-r}\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}h(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-r)}\int_0^t (t-s)^{-r}\left(\frac{d}{ds}\right)(\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^s (s-\mu)^{r-1}h(\mu)d\mu) \\
&= {}^cD^r I^r h(t) = h(t).
\end{aligned}$$

□

2.2.1 Premiers Résultats

Notre premier résultat est basé sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 2.1 *On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée*
(H1) Il existe un constant $k > 0$ *tel que*

$$f(t,u) - f(t,u^*) \leq k\,|u-u^*| \quad \forall t \in [0,T] \ \textit{et} \ u,u^* \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\left[\frac{bT^{r+1}}{(2-bt)\Gamma(r+2)} + \frac{(3-bT)T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\right]k < 1, \tag{2.7}$$

alors le problème (2.1)-(2.2) admet une solution unique sur $[0,T]$.

Preuve. On transforme le problème (2.1)-(2.2) a un problème du point fixe, dont les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont identifiées à des points fixes de l'opérateur F qui est défini par :

$$F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
F(y)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}f(s,y(s))ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}f(s,y(s))ds \\
&- \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}f(s,y(s))ds
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que F est une contraction. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; $\forall t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \, ds \\
&+ \int_0^t \frac{b(t-s)^r}{(2-bt)\Gamma(r+1)} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \, ds \\
&\quad + \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \, ds \\
&\leq k \|x-y\|_\infty \left[\int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} ds + \int_0^t \frac{b(t-s)^r}{(2-bt)\Gamma(r+1)} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)} ds \right] \\
&\leq k \|x-y\|_\infty \left[\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^r}{(2-bt)\Gamma(r+1)} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)} ds \right] \\
&\leq k \|x-y\|_\infty \left[\frac{-(T-s)^r}{r\Gamma(r)} + \frac{-b(T-s)^{r+1}}{(2-bt)\Gamma(r+2)} + \frac{-(T-s)^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)} \right]_0^T \\
&\leq \left[\frac{bT^{r+1}}{(2-bt)\Gamma(r+2)} + \frac{(3-bT)T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)} \right] k \|x-y\|_\infty .
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{bT^{r+1}}{(2-bt)\Gamma(r+2)} + \frac{(3-bT)T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)} \right] k \|x-y\|_\infty ,$$

d'après (2.7), on conclut que F admet un point fixe unique, ce qui implique que de problème(2.1)-(2.2))admet une seule solution dans $C([0,T], \mathbb{R})$.

Le deuxième résultat d'existence est basé sur le théoréme de point fixe de Schaefer.

Théorème 2.2 *On suppose les hypothèses suivantes sont vérifiées*

(H2) La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(H3) Il existe un constant $M > 0$ *tel que*

$$f(t, u(t)) \leq M \ , \forall t \in [0,T] \ \textit{et} \ u \in \mathbb{R}.$$

Alors le probème(2.1)-(2.2) admet au moins une solution dans $C([0,T], \mathbb{R})$

Preuve. On va utiliser le théorème de Schaefer pour montrer que F définit par (2.8) admet des points fixes qui sont des solutions de problème(2.1)-(2.2). La preuve sera donnée en plusieurs étapes.
Étape 1 : continuité de F

Soit$\{y_n\}$ une suite qui converge vers y dans $C([0,T];\mathbb{R})$, $\forall t\in[0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Fy_n)(t)-(Fy)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}\left|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\right|ds\\
&+ \int_0^t \frac{b(t-s)^{r}}{(2-bt)\Gamma(r+1)}\left|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\right|ds\\
&\quad+\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}\left|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\right|ds\\
&\leq \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}\sup_{s\in[0,T]}\left|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\right|ds\\
&\quad+\int_0^T \frac{b(T-s)^{r}}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\sup_{s\in[0,T]}\left|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\right|ds\\
&\quad+\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}\sup_{s\in[0,T]}\left|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\right|ds\\
&\leq \left[\frac{bT^{r+1}}{(2-bt)\Gamma(r+2)}+\frac{(3-bT)T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\right]\left\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, on a donc

$$\left\|F(y_n)-F(y)\right\|_\infty \to 0 \text{ lorsque } n\to\infty.$$

Étape2 : L'image d'un ensemble borné est un ensemble borné
En effet, il suffit démontrer que pour tout $\mu^*>0$, il existe une constante positive l telle que pour chaque

$$y\in B_{\mu^*}=\left\{y\in C([0,T];\mathbb{R}) : \|y\|_\infty\leq\mu^*\right\},$$

on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}\left|f(s,y(s))\right|ds+\int_0^t \frac{b(t-s)^{r}}{(2-bt)\Gamma(r+1)}\left|f(s,y(s))\right|ds\\
&\quad+\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}\left|f(s,y(s))\right|ds\\
&\leq M\left[\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}ds+\int_0^T \frac{b(T-s)^{r}}{(2-bt)\Gamma(r+1)}ds+\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}ds\right]\\
&\leq M\left[\frac{bT^{r+1}}{(2-bt)\Gamma(r+2)}+\frac{(3-bT)T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(y)\|_\infty\leq M\left[\frac{bT^{r+1}}{(2-bt)\Gamma(r+2)}+\frac{(3-bT)T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\right]=l.$$

Étape 3 : L'image d'un ensemble borné est un ensemble équicontinu dans $C([0,T];\mathbb{R})$
Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$ et B_{μ^*} un ensemble borné qui est défini dans l'étape 2 . Si $y \in B_{\mu^*}$, alors

$$\begin{aligned}
|(Fy)(t_2)-(Fy)(t_1)| &\leq |\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}f(s,y(s))ds+\int_0^{t_2}\frac{b(t_2-s)^r}{(2-bt_2)\Gamma(r+1)}f(s,y(s))ds\\
&\quad \int_0^{t1}\frac{(t_1-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}f(s,y(s))ds+\int_0^{t_1}\frac{b(t_1-s)^r}{(2-bt_1)\Gamma(r+1)}f(s,y(s))ds|\\
&\leq \int_0^{t1}\frac{(t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}|f(s,y(s))|ds\\
&\quad +\int_0^{t_1}\left[\frac{b(t_2-s)^r}{(2-bt_2)\Gamma(r+1)}-\frac{b(t_1-s)^r}{(2-bt_1)\Gamma(r+1)}\right]|f(s,y(s))|ds\\
&\quad +\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}|f(s,y(s))|ds+\int_{t_1}^{t_2}\frac{b(t_2-s)^r}{(2-bt_2)\Gamma(r+1)}|f(s,y(s))|ds\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(r)}\left[\int_0^{t1}(t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1}ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{r-1}ds\right]\\
&\quad +\frac{bM}{\Gamma(r+1)}\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^r}{(2-bt_2)}-\frac{(t_1-s)^r}{(2-bt_1)}ds\\
&\quad +\frac{bM}{(2-bt_2)\Gamma(r+1)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^r ds\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(r+1)}\left({t_2}^r-{t_1}^r\right)+\frac{bM}{\Gamma(r+1)}\left[\frac{t_2^{r+1}}{2-bt_2}-\frac{t_1^{r+1}}{2-bt_1}\right].
\end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \to t_2$, le second membre de l'inégalité précedent tend vers zéro.
Comme une conséquence des étapes 1, 2 et 3 avec le théorème de Arzelà-Ascoli, on peut conclure que F est continu et complètement continu.
Étape 4 :
L'ensemble

$$\Phi_1 = \{y \in C([0,T;\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour certain } 0 < \lambda < 1\}$$

est borné .
On a

$$\begin{aligned}
y(t) = \lambda\Big[\int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}f(s,y(s))ds + \int_0^t \frac{b(t-s)^r}{(2-bt)\Gamma(r+1)}f(s,y(s))ds\\
-\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}f(s,y(s))ds\Big].
\end{aligned}$$

Soit $t \in [0,T]$, pour $\lambda \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq M\left[\int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}ds + \int_0^t \frac{b(t-s)^r}{(2-bt)\Gamma(r+1)}ds + \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}ds\right] \\
&\leq M\left[\int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}ds + \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}ds\right] \\
&\leq M\left[\frac{T^r}{\Gamma(r+1)} + \frac{bT^{r+1}}{(2-bT)\Gamma(r+2)} + \frac{T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\right],
\end{aligned}
$$

donc

$$\|F(y)\|_\infty \leq M\left[\frac{bT^{r+1}}{(2-bT)\Gamma(r+2)} + \frac{(3-bT)T^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\right] = R.$$

Cela montre que l'ensemble Φ_1 est borné. En conséquence du théorème de point fixe de Schaefer, on en déduit que F a des points fixes qui sont des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.3 *On suppose l' hypothèse suivante :*

(H4) Il existe $\phi_f \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ et $\Psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction continue et croissante telle que :

$$|f(t,u)| \leq \phi_f(t)\Psi(|u|).$$

Si il existe un nombre $M' > 0$ tel que

$$\frac{M'}{\Psi(M')\left[\frac{(3-bT)}{(2-bT)}I^r\phi_f(T) + \frac{b}{(2-bT)}I^{r+1}\phi_f(T)\right]} > 1, \tag{2.9}$$

alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solutions sur $[0,T]$.

Peuve. En utilisant l'alternative non linéaire de de Leary-Schauder, on va prouver que l'opérateur F qui défini par (2.8) admet des points fixes. Comme des résultats de théorème (2.2), on voit que l'opérateur F est continu et uniformement borné, alors d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli l'opérateur F est complètement continu.
Soient $0 < \lambda < 1$, et $t \in [0,T]$. Alors,

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}\phi_f(s)\Psi(|y|)ds + \int_0^t \frac{b(t-s)^r}{(2-bt)\Gamma(r+1)}\phi_f(s)\Psi(|y|)ds \\
&+ \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}\phi_f(s)\Psi(|y|)ds \\
&\leq \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)}\phi_f(s)\Psi(|y|)ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)}\phi_f(s)\Psi(|y|)ds \\
&+ \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)}\phi_f(s)\Psi(|y|)ds \\
&\leq \Psi(\|y\|_\infty)\left[\frac{(3-bT)}{(2-bT)}I^r\phi_f(T) + \frac{b}{(2-bT)}I^{r+1}\phi_f(T)\right],
\end{aligned}
$$

donc

$$\frac{\|y\|_\infty}{\Psi(\|y\|_\infty)\left[\frac{(3-bT)}{(2-bT)}I^r\phi_f(T)+\frac{b}{(2-bT)}I^{r+1}\phi_f(T)\right]}\leq 1.$$

Par la condition (2.9), il existe M' tel que $\|y\|_\infty \neq M'$.
Soit

$$B_{M'}=\{y\in C([0,T;\mathbb{R}):\|y\|_\infty\leq M'\}.$$

De l'alternative non linéaire de Leary-Schauder, on en déduit qui F admet des points fixes, qui sont des solutions du problème(2.1)-(2.2). Cela compléte la preuve.

2.2.2 Deuxième Résultat

Pour la suite, on considère le problème (2.1)-(2.2), avec la fonction $f:[0,T]\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$, tel que $\mathbb{E}$ est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.

Théorème 2.4 *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H5) La fonction $f\,:J\times\mathbb{E}\longrightarrow E$ satisfait les Conditions de Carathèodory.

(H6) Il existe $p\in L^1(J,\mathbb{R}_+)$, tel que

$$\|f(t,y)\|\leq p(t)\|y\|\;\;\forall t\in J\quad y\in\mathbb{E}.$$

(H7)Pour tout $t\in J$ et chaque ensemble borné $B\subset\mathbb{E}$, on a

$$\lim_{k\to 0^+}\alpha(f(J_{t,k}\times B))\leq p(t)\alpha(B).$$

Si

$$\left(\frac{\|p\|_{L^\infty}T^r}{\Gamma(r+1)}+\frac{|b|\|p\|_{L^\infty}T^{r+1}}{|2-bT|\Gamma(r+2)}+\frac{\|p\|_{L^\infty}T^r}{|2-bT|\Gamma(r+1)}\right)<1, \tag{2.10}$$

alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution dans $C(J,B)$.

Peuve. On sait que les points fixes de F sont des solutions de problème (2.1)-(2.2)
Soit $R>0$, on considère l'ensemble :

$$D_R=\{y\in C(J,\mathbb{E})\,:\|y\|_\infty\leq R\},$$

où D_R est fermé, borné et convexe.

On va montrer que F satisfait les hypothèses du théorème de Mönch. La preuve se fait en trois étapes :

Étape 1 : *continuité de F .*

Soit $(y_n)_n$ une suite telle que $y_n\to y$ dans $C(J,E)$, alors pour tout $t\in J$, on a :

$$\begin{aligned}\|(Fy_n)(t)-(Fy)(t)\| &\leq \int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds\\ &+\int_0^T\frac{|b|(T-s)^{\alpha}}{|2-bT|\Gamma(\alpha+1)}\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds\\ &+\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{|2-bT|\Gamma(\alpha)}\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds.\end{aligned}$$

on a aussi :

$$\|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| \leq 2Rp(s) := \sigma(s);\ \sigma \in L^1(J,\mathbb{R}_+).$$

Comme f est de Carathéodory, alors f est mesurable par rapport à y, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue. Donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|(Fy_n)(t) - (Fy)(t)\| &\leq \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} \lim_{n\to\infty} \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|\, ds \\
&+ \int_0^T \frac{b(T-s)^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)} \lim_{n\to\infty} \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|\, ds \\
&+ \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)} \lim_{n\to\infty} \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|\, ds.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Étape 2 : *L'image d'un ensemble borné par l'opérateur F est un ensemble borné*
Soit $y \in D_R$, on a pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}
\|F(y)(t)\| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} \|f(s,y(s))\| ds \\
&+ \int_0^T \frac{|b|(T-s)^r}{|2-bT|\Gamma(r+1)} \|f(s,y(s))\| ds + \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{|2-bT|\Gamma(r)} \|f(s,y(s))\| ds \\
&\leq R\left(\frac{T^r\|p\|_\infty}{\Gamma(r+1)} + \frac{|b|T^{r+1}\|p\|_\infty}{|2-bT|\Gamma(r+2)} + \frac{T^r\|p\|_\infty}{|2-bT|\Gamma(r+1)}\right) \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$(Fy)(t) \in D_R \ \textit{implique}\ \ F(D_R) \subset D_R.$$

Étape 3 : *L'image d'un ensemble borné par l'opérateur F est un ensemble borné et équicontinu.*

D'après l'ètape2, il est évident que $F(D_R) \subset C(J,E)$ est borné.
Pour l'équicontinuité de $F(D_R)$, soit $t_1,\ t_2 \in J$, $t_1 <\ t_2$, et $y \in D_R$, on a :

$$\begin{aligned}
\|(Fy)(t_2) - (Fy)(t_1)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^{t_1} \left[(t_2-s)^{r-1} - (t_1-s)^{r-1}\right] \|f(s,y(s))\| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{r-1} \|f(s,y(s))\| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{R\|p\|_\infty}{\Gamma(r+1)} \left[t_2^r - t_1^r\right],
\end{aligned}$$

donc
$$\|(Fy)(t_2) - (Fy)(t_1)\| \longrightarrow 0 \quad lorsque \;\; t_1 \to t_2,$$
c'est à dire, $F(D_R)$ est équicontinue.
Maintenant, soit V un sous ensemble de D_R tel que :
$$V \subset \overline{cov}(F(V) \cup \{0\}).$$

V est borné et équicontinu.
En plus, la fonction $t \to \vartheta(t) = \alpha(V(t))$ est continue dans J. En utilisant (H2)-(H3), Lemme 1.1 et les propriétés de la mesure, on a pour tout $t \in J$
$$\begin{aligned} \vartheta(t) &\leq \alpha(F(V)(t) \cup \{0\}) \\ \\ &\leq \alpha(F(V)(t)) \end{aligned}$$
car $\alpha(F(V)(t) \cup \{0\}) = \max\{\alpha(F(V)(t), \alpha(\{0\})\}$. On a
$$\begin{aligned} F(V)(t) &= \Big\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} f(s, y(s))ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)} f(s, y(s))ds \\ &- \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)} f(s, y(s))ds, y \in V \Big\}, \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \alpha(F(V)(t)) &= \alpha\Big\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} f(s, y(s))ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^r}{(2-bT)\Gamma(r+1)} f(s, y(s))ds \\ &- \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{(2-bT)\Gamma(r)} f(s, y(s))ds, y \in V \Big\}. \end{aligned}$$
Alors
$$\begin{aligned} \alpha(F(V)(t)) &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} p(s)\alpha(V(s))ds + \int_0^T \frac{|b|(T-s)^r}{|2-bT|\Gamma(r+1)} p(s)\alpha(V(s))ds \\ &+ \int_0^T \frac{(T-s)^{r-1}}{|2-bT|\Gamma(r)} p(s)\alpha(V(s))ds \end{aligned}$$
. d'où,
$$\alpha(F(V)(t)) \leq \frac{\alpha(V(t))\|p\|_{L^\infty} t^r}{\Gamma(r+1)} + \frac{|b|\alpha(V(t))\|p\|_{L^\infty} T^{r+1}}{|2-bT|)\Gamma(r+2)} + \frac{\alpha(V(t))\|p\|_{L^\infty} T^r}{|2-bT|)\Gamma(r+1)}.$$
Cela signifie que :
$$\|\vartheta\|_{L^\infty} \left(1 - \frac{\|p\|_{L^\infty} T^r}{\Gamma(r+1)} + \frac{|b|\|p\|_{L^\infty} T^{r+1}}{|2-bT|\Gamma(r+2)} + \frac{\|p\|_{L^\infty} T^r}{|2-bT|\Gamma(r+1)}\right) \leq 0.$$
D'après (2.10), $\|\vartheta\|_\infty = 0$, c'est à dire $\vartheta = 0$ pour tout $t \in J$. Donc $V(t)$ est relativement compact dans E.
Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, V est relativement compact dans D_R (car $V \subset D_R$ est borné et équicontinu).
Puisque toutes les hypothèses du théorème de Mönch sont vérifiées, l'application F admet par conséquent des points fixes qui sont des solutions du problème (2.1)–(2.2). $\square$

2.3 Exemple

On considère le problème aux limites suivant :

$$^{C}D^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{t\sqrt{\pi}-1}{16}\left|y(t)\right|, \quad \forall (t,y) \in ([0,T],\mathbb{R}), \tag{2.11}$$

$$y(0)+y(1) = \int_0^1 y(s)ds. \tag{2.12}$$

On a $r = \frac{1}{2}$, $T = 1$ et

$$f(t,y) = \frac{t\sqrt{\pi}-1}{16}\left|y(t)\right|.$$

Alors

$$|f(t,y)| = |\frac{t\sqrt{\pi}-1}{16}y(t)| \leq \frac{t\sqrt{\pi}}{16}|y(t)|.$$

En choisissant $p(t) = \dfrac{t\sqrt{\pi}}{16}$, on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(\|I^r p\| + \frac{|b|\,(I^{r+1}p)(T)}{|2-Tb|} + \frac{I^r p(T)}{|2-Tb|}\right) \\ = \;& I^{\frac{1}{2}}p(1) + (I^{\frac{3}{2}}p)(1) + I^{\frac{1}{2}}p(1) \\ = \;& \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{12} < 1. \end{aligned}$$

Puisque toutes les hypothèses de théorème (2.4) sont satisfaites, alors notre problème admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Chapitre 3

Problème aux Limite Concernant les Equations Différentielles Fractionnaires avec la Dérivée de Hadamard

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'interesse à donner des conditions assurant l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites pour les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Hadamard.

3.2 Problème aux Limites avec une Condition Non locale

[1]

3.2.1 Introduction

Les conditions non locales ont été initiées par Byszewski [18] qui a prouvé l'existence et l'unicité de solution de problèmes de Cauchy non locaux. Comme le fait remarquer par Byszewski [19], [20], la condition non locale peut être plus utile que la condition initiale standard pour décrire certains phénomènes physiques.

1. **W. Benhamida**, S. Hamani, and J. Henderson, A Boundary Value Problem for Fractional Differential Equations with Hadamard Derivativeand Nonlocal Conditions, *Pan.Amer. Math*, **26**(2016), No.3, 1 - 11.

Dans la suite, notre objectif est de montrer l'existence et l'unicité de la solution pour une équation différentielle fractionnaire avec la dérivée de Hadamard satisfaisant une condition non locale. On considère alors le problème :

$$^{H}D^{r}y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J = [1, T], \quad 1 < r \leq 2, \tag{3.1}$$

$$y(1) = 0, y(T) = g(y), \tag{3.2}$$

où $^{H}D^{r}$ est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre r, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace de Banach.

3.2.2 Existence de Solutions

Définition 3.1 *Une fonction $y \in C([1.T], \mathbb{R})$ est dite une solution du problème(3.1)-(3.2) , si elle satisfait l'équation différentielle (3.1) et les conditions (3.2).*

Lemme 3.1 *Soit $h : [1; +\infty) \to R$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation integrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} h(s) \frac{ds}{s} + \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}} \left[g(y) - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-1} h(s) \frac{ds}{s} \right] \tag{3.3}$$

si et seulement si y est une solution de problème fractionnaire

$$^{H}D^{r}y(t) = h(t) \quad \textit{pour } t \in J = [1, T], 1 < r \leq 2 \tag{3.4}$$

$$y(1) = 0, y(T) = g(y). \tag{3.5}$$

Preuve : D'après le lemme 1.5, on peut écrire la solution de l'équation (3.4) comme suit :

$$y(t) = c_1(\log t)^{r-1} + c_2(\log t)^{r-2} +_H I^r h(t). \tag{3.6}$$

Les conditions (3.5) permettent d'effectuer le calcul des constantes, on a

$$c_2 = 0,$$

et

$$c_1 = \frac{1}{(\log T)^{r-1}} [g(y) -_H I^r h(T)].$$

En substitiant les valeurs c_1, c_2 dans l'équation (3.6), on obtient(3.3).
Inverssement, on pose

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{r-1} h(s) \frac{ds}{s} + \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}} \left[g(y) - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-1} h(s) \frac{ds}{s} \right],$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} D^r y(t) &= \frac{D^r (\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}} g(y) + D^r \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{r-1} h(s) \frac{ds}{s} \\ &= h(t), \end{aligned}$$

car $D^r I^r h(t) = h(t)$ et $D^r (\log t)^{r-1} = 0$.
On note que le problème (3.1) - (3.2) a une solution si et seulement si l'opérateur

$$\begin{aligned} (N_1 y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{r-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}} \left[g(y) - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{r-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s} \right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

a au moins un point fixe dans $C([1,T], \mathbb{R})$
On considère les hypothèses suivantes :
($\grave{H}1$) Il existe une constante $k > 0$ tel que

$$|f(t,u) - f(t,u^*)| \leq k\,|u - u^*| \quad \text{pour } t \in J, u, u^* \in \mathbb{R}$$

($\grave{H}2$) Il existe une constante $k^* > 0$ tel que

$$|g(u) - g(u^*)| \leq k^*\,|u - u^*| \quad \text{pour } u, u^* \in \mathbb{R}$$

($\grave{H}3$) La fonction $f : [1,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue
($\grave{H}4$) Il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|f(t,u))| \leq M \quad \forall t \in J \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

($\grave{H}5$) Il existe une constante $M^* > 0$ telle que :

$$|g(u)| \leq M^* \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

($\grave{H}6$) Il existe $\phi_f \in L^1(J, R_+)$, et $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ continue et croissante telles que

$$|f(t,u)| \leq \phi_f(t)\psi(|u|) \quad \text{pour chaque } (t,u) \in J \times \mathbb{R}.$$

($\grave{H}7$) Il existe $\psi^* : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ continue et croissante telle que :

$$|g(u)| \leq \psi^*(|u|\ ) \text{ pour touts } u \in \mathbb{R}.$$

($\grave{H}8$) Il existe un nombre $M' > 0$ tel que :

$$\frac{M'}{2\psi(M') I^\alpha \phi_f(T) + \psi^*(M')} > 1.$$

Le premier résultat est basé sur le théorème de point fixe de Banach.

Théorème 3.1 *Si les hypothèses $(\grave{H}1)$-$(\grave{H}2)$ et la condition*

$$\left[\frac{2k(\log T)^r}{\Gamma(r+1)} + k^*\right] < 1$$

sont vérifiées, alors le problème (3.1)-(3.2)admet une seule solution dans $C([1,T],\mathbb{R})$.

preuve : On transforme le problème (3.1) - (3.2) en un problème du point fixe, où l'opérateur N_1 est défini comme dans (3.7).
On doit montrer que N_1 est une application contractante, pour cela, on applique le principe de contraction de Banach.

Soient $x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [1,T]$

$$\begin{aligned}
|(N_1x)(t) - (N_1y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}} \Big[|g(x) - g(y)| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \Big] \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ |g(x) - g(y)| \\
&\leq \left[\frac{2k(\log T)^r}{\Gamma(r+1)} + k^*\right] \|x - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|N_1(y_n) - N_1(y)\|_\infty \leq \left[\frac{2k(\log T)^r}{\Gamma(r+1)} + k^*\right] \|x - y\|_\infty.$$

On en déduit que N_1 a un point fixe qui est une solution unique du problème (3.1)-(3.2).

Le théorème suivant établit l'existence des solutions du problème (3.1)-(3.2). Ce résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 3.2 *On suppose que les hypothèses $(\grave{H}3)$-$(\grave{H}4)$-$(\grave{H}5)$ sont satisfaites, alors le problème (3.1)-(3.2) admet au moin une solution dans $C([1,T],\mathbb{R})$.*

Preuve. La preuve sera donnée en quatre étapes

.

Étape 1 : *Continuité de N_1 .*

Soit $\{y_n\}$ est une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors, $\forall t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|(N_1y_n)(t)-(N_1y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\frac{ds}{s}] \\
&+ \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\Big[|g(y_n-g(y)| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\Big] \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}\sup_{s\in[1,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\frac{ds}{s} \\
&+ \sup|g(y_n)-g(y)| \\
&\leq \frac{2(\log T)^r}{\Gamma(r+1)}\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty+\|g(y_n)-g(y)\|_\infty,
\end{aligned}$$

puisque f et g sont continues, on a

$$\|N_1(y_n)-N_1(y)\|_\infty \to 0 \text{ lorsque } n\to\infty.$$

Étape 2 : N_1 *transforme un ensemble borné au un ensemble borné dans* $C([1,T],\mathbb{R})$.

En effet, il suffit demontrer que pour toute $\mu^*>0$, il existe une constante positive l telle que pour chaque $y\in B_{\mu^*}=\{y\in C([1,T],R):\|y\|_\infty\leq\mu^*\}$, on a $\|N_1(y)\|_\infty<l$.
On a donc

$$\begin{aligned}
|N_1(y)(t)| &\leq |g(y)|+\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s} \\
&\leq M^*+2M\frac{(\log T)^r}{\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|N_1(y)(t)\|_\infty \leq M^*+2M\frac{(\log T)^r}{\Gamma(r+1)}=l.$$

Étape 3 : N_1 *transforme un ensemble borné au un ensemble equicontinu on* $C([1,T],\mathbb{R})$.

Soient $t_1,\ t_2\in J,\ t_1<\ t_2,\ B_{\mu^*}$. Soit un ensemble bornée de $C([1,T],\mathbb{R})$ comme à l'étape 2.

Soit $y \in B_{\mu^*}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
|(N_1y)(t_2)-(N_1y)(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}-\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right]|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\
&+ \tfrac{1}{\Gamma(r)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{(\log t_2)^{r-1}-(\log t_1)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\Big(|g(y)|\\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^{T}\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\Big)\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}-\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right]\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{M}{\Gamma(r)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{(\log t_2)^{r-1}-(\log t_1)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\left(M^*+\frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^{T}\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s}\right)\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(r+1)}\left[(\log t_2)^r-(\log t_1)^r\right]\\
&+ \frac{(\log t_2)^{r-1}-(\log t_1)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\left(M^*+\frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r\right).
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \longrightarrow t_2$, le second membre de cette dernière inégalité tend vers zéro. A la suite des étapes 1,2,3 et d'après le theorème d' Arzelà -Ascoli , on peut conclure que N_1 est un opérateur continu et complètement continu .

Étape 4 :
Il reste à montrer que l'ensemble

$$\Phi_2=\{y\in C(J,\mathbb{R}) : y=\lambda N_1(y)\text{pour certain } 0<\lambda<1\}$$

est borné.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lambda\Big[\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{(\log t)^{r-1}}{(\log T)^{r-1}}\left(g(y)-\frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^{T}\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}\right)\Big].
\end{aligned}$$

Pour $\lambda\in[0,1]$, soit y tel que $\forall t\in[1,T]$

$$\begin{aligned}
|(N_1y)(t)| &\leq 2\frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^{T}\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s}+M^*\\
&\leq 2\frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r+M^*.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|N_1(y)\|_\infty \leq 2\frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r + M^* = R.$$

Cela montre que l'ensemble Φ_2 est borné.
Comme une consequence du théorème de point fixe de Scheafer, nous en déduisons que N_1 a un point fixe qui est la solution du problème (3.1)-(3.2)

Théorème 3.3 *Si les hypothèses($\grave{H}6$),($\grave{H}7$)et($\grave{H}8$) sont vérifiées :*
Alors le problème (3.1)–(3.2) admet au moins une solution dans $C([1,T],\mathbb{R})$.

Preuve. On applique l'alternative non linéaire de Leary-Schauder pour prouver que N_1 dfini par (3.7) a des points fixes. Comme indiqué dans le théorème (3.5), on voit que l'opérateur N_1 est continu, uniformément borné et équicontinu alors par le théorème d'Arzelà Ascoli N_1 est complètement continu.
$\forall\lambda \in [0,1]$, $\forall t \in [1,T]$

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{2}{\Gamma(r)}\int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1} \phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s} \\ &+ \psi^*(|y|) \\ &\leq 2\psi(\|y\|_\infty)I^\alpha\phi_f(T) + \psi^*(\|y\|_\infty). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|y\|_\infty}{2\psi(\|y\|_\infty)I^\alpha\phi_f(T) + \psi^*(\|y\|_\infty)} \leq 1.$$

Soit

$$B_{M'} = \{y \in C([1,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty < M'\}.$$

alors, d'après la condition ($\grave{H}8$), il existe M' tel que $\|y\|_\infty \neq M'$ L'opérateur N_1 est continu et complètement continu. Du choix de $B_{M'}$ il n'y a pas de $y \in \partial B_{M'}$ tel que $y = \lambda N_1(y)$, pour certain $\lambda \in (0,1)$. Comme conséquence de l'alternative non linéaire de Leary-Schauder, on déduit que N_1 a un point fixe $y \in B_{M'}$, ce qui est une solution du problème. Ce qui complète notre preuve.

3.2.3 Exemples

Dans cette section, on présente quelques exemples pour illustrer nos résultats.

Exemple.1

On considère le problème suivant :

$$^{H}D^{\frac{3}{2}}y(t) = \frac{1}{t^2+8}\sin y, \quad \forall(t,y) \in ([1,e],\mathbb{R}), \tag{3.8}$$

$$y(1) = 0,\ y(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i), \tag{3.9}$$

où $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < 1$, $(c_i)_{i=1,\dots,n}$ sont des constantes positives et

$$\sum_{i=1}^{n} c_i < \frac{1}{9}.$$

On a

$$|f(t,y)| = |\frac{1}{t^2+8}\sin y| \leq \frac{1}{9},$$

et

$$|g(y)| \leq \frac{1}{9}.$$

En considérant $M = \frac{1}{9}$ et $M^* = \frac{1}{9}$, on obtient

$$\|N_1(y)\|_\infty \leq 2\frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r + M^*$$

$$\leq 2\frac{1/9}{\Gamma(3/2+1)} + 1/9 = \frac{8+3\sqrt{\pi}}{27\sqrt{\pi}}$$

est borné. Alors par le théorème 3.2, le problème (3.8)-(3.9) possède au moins une solution dans $C([1,e],\mathbb{R})$.

Exemple.2

On considére le problème suivant :

$$^{H}D^{\frac{3}{2}}y(t) = (\log t)^2\frac{|y|}{8|y|+1}, \text{ pour touts. } (t,y) \in ([1,e],\mathbb{R}), \tag{3.10}$$

$$y(1) = 0,\ y(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i), \tag{3.11}$$

tel que $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < 1$, $(c_i)_{i=1,\dots,n}$ sont des constantes positives et

$$\sum_{i=1}^{n} c_i < \Gamma(\frac{5}{2}).$$

Soit

$$f(t,y) = (\log t)^2\frac{|y|}{8|y|+1},$$

et

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i).$$

Alors, on a

$$|f(t,y)| = |(\log t)^2\frac{|y|}{8|y|+1}| \leq \frac{|y|}{8}(\log t)^2,$$

et

$$|g(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} c_i|x| \leq \Gamma(\frac{5}{2})|y|$$

on pose $p(t) = (\log t)^2$ et $I^{\frac{3}{2}}p(e) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{9}{2})}$, et on trouve

$$\frac{M'}{2\psi(M')I^{\alpha}\phi_f(T) + \psi^*(M')} = \frac{1}{\frac{\Gamma(3)}{4\Gamma(\frac{5}{2})} + \Gamma(\frac{5}{2})} = 0.7288 < 1,$$

est satisfait. D'après le théorème 3.3, le problème (3.10)-(3.11) admet au moins une solution dans $C([1, e], \mathbb{R})$. $\square$

3.3 Problème aux Limites avec une Condition Non Locale de Points Multiples

[2] .

3.3.1 Introduction

Beaucoup de problèmes réels peuvent être modélisés par une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites non locales de points multiples, l'étude de ce type des problèmes a attiré l'attention de nombreux chercheurs, on cite par exemple, Benchohra et Hamani [8], Cui, Yu, et Mao [23], El-Sayed et Bin-Taher[24], et Houas et Dahmani[40].
Cette section est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire soumis à une condition non locale des points multiples de la forme :

$$D^r y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J = [1, T], \quad 1 < r \leq 2, \tag{3.12}$$

$$y(1) = 0, D^p y(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^p y(\mu_i), \ \ 0 < p < 1, \tag{3.13}$$

où D^r et D^p sont des dérivées fractionnaires de Hadamard , $f : [1, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 < \mu_i \leq T$, $i = 1, ..., n$, $n \geq 2$ tel que :

$$(\log T)^{r-p-1} \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\log \mu_i)^{r-p-1}.$$

3.3.2 Existence de Solutions

On introduit maintenant la définition de la solution du problème (3.12)–(3.13).

Définition 3.2 *Une fonction $y \in C([1, T], \mathbb{R})$ est dite la solution de(3.12)–(3.13) si y satisfies l'équation $D^r y(t) = f(t, y(t))$ dans J, et les conditions (3.13).*

Pour l'existence de la solution du problème (3.12)–(3.13), on a besoin du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 3.2 *Soit $(\log T)^{r-p-1} \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\log \mu_i)^{r-p-1}$, et $h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire suivante :*

$$\begin{aligned} y(t) = {} & \frac{(\log t)^{r-1}}{\Gamma(r)[(\log T)^{r-p-1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\log \mu_i)^{r-p-1}]} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} (\log \frac{\mu_i}{s})^{r-p-1} h(s) \frac{ds}{s} \\ & - \int_1^{T} (\log \frac{T}{s})^{r-p-1} h(s) \frac{ds}{s} \Big) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^{t} (\log \frac{t}{s})^{r-1} h(s) \frac{ds}{s}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

2. **W. Benhamida**, J.R. Graef, and S. Hamani , Boundary value problems for Hadamard fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions,Frac.Diff.Cal, **8**(2018), No.1, 165-176

si et seulement si, y est une solution de problème suivant :

$$D^r y(t) = h(t), 1 < r \leq 2 \tag{3.15}$$

$$y(1) = 0, \;\; D^p y(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^p y(\mu_i) \;\; 0 < p \leq 1 \tag{3.16}$$

Preuve : On suppose y satisfait (3.15), alors le lemme 1.5 implique que :

$$y(t) = I^r f(t) + c_1 (\log t)^{r-1} + c_2 (\log t)^{r-2}. \tag{3.17}$$

la première condition implique que :

$$c_2 = 0.$$

Maintenant, on veut trouver c_1. On dérive l'équation (3.17) avec $t = T$

$$\begin{aligned} D^p y(t) &= D^p I^r f(t) + c_1 D^p (\log t)^{r-1} \\ &= I^{r-p} f(t) + c_1 \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r-p)} (\log t)^{r-p-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$D^p y(T) = I^{r-p} f(T) + c_1 \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r-p)} (\log T)^{r-p-1},$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D^p y(\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I^{r-p} f(\mu_i) + c_1 \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r-p)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\log \mu_i)^{r-p-1}. \tag{3.18}$$

en utilisant la deuxième condition, on trouve

$$c_1 = \frac{\Gamma(r-p)(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i I^{r-p} f(\mu_i) - I^{r-p} f(T))}{\Gamma(r)((\log T)^{r-p-1} - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (\log \mu_i)^{r-p-1})}.$$

En substituant les valeurs c_1 et c_2 dans(3.17), on obtient la solution (3.14).
Inverssement, on pose

$$\begin{aligned} y(t) \;\; &= \;\; \frac{\Gamma(r-p)(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i I^{r-p} f(\mu_i) - I^{r-p} f(T))}{\Gamma(r)\left[(\log T)^{r-p-1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\log \mu_i\right)^{r-p-1}\right]} \left(\log t\right)^{r-1} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{r-1} h(s) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

on applique la dérivée de Hadamard sur l'égalité précédente et puisque $D^r \left(\log t\right)^{r-1} = 0$, on trouve

$$D^r y(t) = h(t)$$

Pour plus de simplicité dans la suite, on pose

$$\Omega = (\log T)^{r-p-1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\log \mu_i)^{r-p-1}.$$

□

Maintenant, on transforme le problème (3.12)-(3.13) en un problème du point fixe, pour cela, on considère l'oprateur $N_2 : C([1,T],R) \to C([1,T],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (N_2 y)(t) &= \frac{(\log t)^{r-1}}{\Gamma(r)\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_1^{\mu_i} (\log \frac{\mu_i}{s})^{r-p-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s} \\ &- \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{r-p-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s}\Big) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{r-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

et on va prouver des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème aux limites (3.12)-(3.13) en utilisant divers théorèmes de points fixes .

Théorème 3.4 *Soit* $(\log T)^{r-p-1} \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\log \mu_i)^{r-p-1}$, *. On suppose que l'hypothèse* $(\grave{H}1)$ *est vérifiée . Si*

$$\frac{(\log T)^{r-1} k}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \frac{(\log \mu_i)^{r-p}}{r-p} + \frac{(\log T)^{r-p}}{r-p}\Big) + \frac{k}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r < 1,$$

alors le problème (3.12)–(3.13) admet une solution unique dans $C([1,T],\mathbb{R})$.

Preuve. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution, il suffit de montrer que l'opérateur N_2 défini par (3.19) admet un point fixe. dans $C([1,T],R)$. On applique le principe de contraction de Banach et on démontre que N_2 est un contraction.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\forall\ t \in J$ on a :

$$\begin{aligned} |(N_2 x)(t) - (N_2 y)(t)| &\leq \frac{(\log T)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \int_1^{\mu_i} \left(\log \frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\frac{ds}{s} \\ &+ \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-p-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\Big) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{(\log T)^{r-1} k \|x-y\|_\infty}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \int_1^{\mu_i} \left(\log \frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1} \frac{ds}{s} \\ &+ \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-p-1} \frac{ds}{s}\Big) + \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

$$\leq \left[\frac{(\log T)^{r-1} k}{\Gamma(r)\,|\Omega|} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \frac{(\log \mu_i)^{r-p}}{r-p} + \frac{(\log T)^{r-p}}{r-p} \right) + \frac{k}{\Gamma(r+1)} (\log T)^r \right] \|x-y\|_\infty \,,$$

donc

$$\|N_2(y_n) - N_2(y)\|_\infty \leq \Big[\frac{(\log T)^{r-1} k}{\Gamma(r)|\Omega|} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \frac{(\log \mu_i)^{r-p}}{r-p} + \frac{(\log T)^{r-p}}{r-p} \Big) + \frac{k}{\Gamma(r+1)} (\log T)^r \Big] \|x-y\|_\infty.$$

comme

$$\Big[\frac{(\log T)^{r-1} k}{\Gamma(r)|\Omega|} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \frac{(\log \mu_i)^{r-p}}{r-p} + \frac{(\log T)^{r-p}}{r-p} \Big) + \frac{k}{\Gamma(r+1)} (\log T)^r \Big] < 1,$$

alors N_2 est contractant, on déduit, par le principe de contraction de Banach, que N_2 admet un seul point fixe qui est la solution unique du problème(3.12)-(3.13).

Notre deuxième résultat de l'existence des solutions du problème(3.12)-(3.13) est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.5 *On suppose que les hypothèses ($\grave{H}3$)-($\grave{H}4$) sont vérifiées.*
Alors le problème (3.12)–(3.13) admet au moins une solution dans $C([1,T],\mathbb{R})$.

Preuve. La preuve sera donnée en 4 étapes. .

Étape 1 : *Continuité de N_2.*
Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(J,\mathbb{R})$, alors $\forall\ t \in J$,

$$\begin{aligned} |(N_2 y_n)(t) - (N_2 y)(t)| \;\leq\;& \frac{(\log t)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \int_1^{\mu_i} \left(\log \frac{\mu_i}{s} \right)^{r-p-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \right. \\ &+ \left. \int_1^{T} \left(\log \frac{T}{s} \right)^{r-p-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^{t} \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\ \leq\;& \left[\frac{(\log t)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \frac{(\log \mu_i)^{r-p}}{r-p} + \frac{(\log T)^{r-p}}{r-p} \right) + \frac{(\log T)^r}{\Gamma(r+1)} \right] \\ & \times \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty \,. \end{aligned}$$

Puisque f est continue, alors $\|(N_2 y_n)(t) - (N_2 y)(t)\|_\infty \to 0$, *quand* $n \to \infty$, ce qui prouve la continuité de N_2.

Étape 2 : N_2 *transforme un ensemble borné en un ensemble borné dans $C([1,T],\mathbb{R})$.*
En effet, il suffit démontrer que pour tout $\mu^* > 0$, il existe une constante positive l tel que

pour tout $y \in B_{\mu^*} = \{y \in C([1,T],R) : \|y\|_\infty \leq \mu^*\}$, on a $\|N_2(y)\|_\infty < l$.
On a :

$$\begin{aligned}|N_2(y)(t)| &\leq \frac{(\log t)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \int_1^{\mu_i} \left(\log\frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1} |f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\ &+ \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-p-1} |f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\Big) + \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s,y(s))|\frac{ds}{s},\end{aligned}$$

donc

$$\|N_2(y)(t)\|_\infty \leq \Big[\frac{(\log T)^{r-1}M}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \frac{(\log \mu_i)^{r-p}}{r-p} + \frac{(\log T)^{r-p}}{r-p}\Big) + \frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r\Big] = l.$$

D'où $N_2(B_{\mu^*})$ est borné.

Étape 3 : *N_2 transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C([1,T],\mathbb{R})$.*
Soient t_1, $t_2 \in J$, $t_1 < t_2$, B_{μ^*} est un ensemble borné dans $C([1,T],\mathbb{R})$ comme l'étape 2 et soit $y \in B_{\mu^*}$, alors :

$$\begin{aligned}|(N_2y)(t_2) - (N_2y)(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1} - \left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right]|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\ &+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\ &+ \frac{(\log t_2)^{r-1} - (\log t_1)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \int_1^{\mu_i}\left(\log\frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s}\\ &+ \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-p-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s}\Big)\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1} - \left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right]\frac{ds}{s}\\ &+ \frac{M}{\Gamma(r)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s} + \frac{M[(\log t_2)^{r-1} - (\log t_1)^{r-1}]}{\Gamma(r)|\Omega|}\\ &\Big(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \int_1^{\mu_i}\left(\log\frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1}\frac{ds}{s} + \int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-p-1}\frac{ds}{s}\Big)\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(r+1)}[(\log t_2)^r - (\log t_1)^r] + \frac{M\Big((\log t_2)^{r-1} - (\log t_1)^{r-1}\Big)}{\Gamma(r)|\Omega|}\\ &\Big(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \int_1^{\mu_i}\left(\log\frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1}\frac{ds}{s} + \int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-p-1}\frac{ds}{s}\Big).\end{aligned}$$

Passant à la limite lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$, on trouve que

$$\|(N_2y)(t_2) - (N_2y)(t_1)\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Donc $N_2(B_{\mu^*})$ est équicontinu. D'après le théorème de Arzelà -Ascoli , on conclut que $N_2(B_{\mu^*})$ est un opérateur complètement continu.

Étape 4 : *On montre que l'ensemble*

$$\Phi_3 = \{y \in C(J,R) : y = \mu N_2(y) pour certain 0 < \mu < 1\}$$

est borné.
Soit $y \in \Phi_3$, alors $y = \mu N_2 y$, pour$0 < \mu < 1$, on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mu\Big[\frac{(\log t)^{r-1}}{\Gamma(r)\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_1^{\mu_i}\left(\log\frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s} - \int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-p-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}\Big) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{r-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}\Big]. \end{aligned}$$

Grâce a$(\grave{H}3)$, on obtient

$$\begin{aligned} |(N_2y)(t)| &\leq \frac{M(\log t)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\int_1^{\mu_i}\left(\log\frac{\mu_i}{s}\right)^{r-p-1}\frac{ds}{s} + \int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-p-1}\frac{ds}{s}\Big) \\ &+ \frac{M}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{M(\log T)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\frac{(\log\mu_i)^{r-p}}{r-p} + \tfrac{(\log T)^{r-p}}{r-p}\Big) + \frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r \\ &= R. \end{aligned}$$

Donc

$$\|N_2(y)\|_\infty \leq R.$$

On a ainssi démontre que N_2 est borné.
Par le théorème de point fixe de Schaefer, on conclut que N_2 admet au moins un point fixe qui est une solution de problème(3.12)-(3.13).

□

Théorème 3.6 *On suppose que l' hypothèse $(\grave{H}6)$ est vérifiée.*
Si il existe un constante $M^* > 0$ tel que :

$$\frac{\Gamma(r)|\Omega|M^*}{\Gamma(r)|\Omega|\psi(M^*)I^r\phi_f(T) + \Gamma(r-p)\psi(M^*)(\log T)^{r-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|I^{r-p}\phi_f(\mu_i) + I^{r-p}\phi_f(T)\Big)} > 1, \tag{3.20}$$

alors le problème (3.12)–(3.13) admet au moins une solution dans $C([1,T],\mathbb{R})$.
Preuve. On utilise l'alternative non linéaire de Leary-Schauder pour prouver que N_2 défini par (3.19) admet des points fixes. Comme dans le théorème 3.5, on voit que l'opérateur N_2 est continu uniformément borné et équicontinu alors par le théorème d'Arzelà Ascoli N_2 est

complètement continu. $\forall t \in [1,T]$

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \frac{(\log T)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\int_1^{\mu_i}(\log\frac{\mu_i}{s})^{r-p-1}\phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s}+\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{r-p-1}\phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s}\Big)\\
&+ \frac{1}{\Gamma(r)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{r-1}\phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s}\\
&\leq \frac{\Gamma(r-p)\psi(\|y\|_\infty)(\log T)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|I^{r-p}\phi_f(\mu_i)+I^{r-p}\phi_f(T)\Big)+\psi(\|y\|_\infty)I^{\alpha}\phi_f(T).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\Gamma(r)|\Omega|\|y\|_\infty}{\Gamma(r)|\Omega|\psi(\|y\|_\infty)I^r\phi_f(T)+\Gamma(r-p)\psi(\|y\|_\infty)(\log T)^{r-1}\Big(\sum_{i=1}^n|\lambda_i|I^{r-p}\phi_f(\mu_i)+I^{r-p}\phi_f(T)\Big)}\leq 1,$$

alors par la condition (3.20) , il existe M^* tel que $\|y\|_\infty \neq M^*$.
Soit $B_{M^*} = \{y \in C([1,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty < M^*\}$. L'opérateur N_2 est continu et complètement continu.Du choix de B_{M^*} il n'y a pas de $y \in \partial B_{M^*}$tel que $y = \mu N_2(y)$, pour $\mu \in (0,1)$. Par conséquence de l'alternative non linéaire de type Leary-Schauder, on déduit que N_2 a au moins un point fixe $y \in B_{M^*}$, qui est une solution du problème (3.12)-(3.13) .

3.3.3 Exemples

Dans cette section, on présente quelques exemples pour illustrer nos résultats.

Exemple.1

On considère le problème suivant :

$$D^{\frac{3}{2}}y(t)=\frac{1}{t^2+8}\sin y \quad \forall(t,y)\in([1,e],\mathbb{R}_+), \tag{3.21}$$

$$y(1)=0, D^{\frac{1}{2}}y(e)=D^{\frac{1}{2}}y(e)+2D^{\frac{1}{2}}y(e), \tag{3.22}$$

où $r=\frac{3}{2}, p=\frac{1}{2}, T=e,\ n=2, \lambda_1=1, \lambda_2=2, \mu_1=\mu_2=e$

on a

$$|f(t,y)|=\Big|\frac{1}{t^2+8}\sin y\Big|\leq\frac{1}{9}.$$

On choisit $M=\dfrac{1}{9}$,

donc

$$\begin{aligned}\|N(y)\|_\infty &\leq \frac{M}{\Gamma(r+1)}(\log T)^r + \frac{M(\log T)^{r-1}}{\Gamma(r)|\Omega|} \\ &\times\Big(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\frac{(\log \mu_i)^{r-p}}{r-p} + \frac{(\log T)^{r-p}}{r-p}\Big) \\ &= \frac{M}{\Gamma(r+1)} + \frac{2M}{\Gamma(r)} \\ &= \frac{4M}{\Gamma(r+1)} \\ &= \frac{16}{27\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Grâce au théorème 3.5,on a l'existence de solution.

Exemple.2

On considère le problème aux limites suivant :

$$^{H}D^{\frac{3}{2}}y(t) = (\log t)^2\frac{y^2}{8|y|+1}, \quad \forall(t,y) \in ([1,e],\mathbb{R}), \tag{3.23}$$

$$y(1) = 0, D^{\frac{1}{2}}y(e) = D^{\frac{1}{2}}y(e) + 2D^{\frac{1}{2}}y(e), \tag{3.24}$$

où $r = \frac{3}{2}$, $,p = \frac{1}{2},\ T = e, \quad n = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \mu_1 = \mu_2 = e,$
et

$$f(t,y) = (\log t)^2\frac{y^2}{8|y|+1},$$

alors

$$|f(t,y)| = |(\log t)^2\frac{y^2}{8|y|+1}| \leq (\log t)^2\frac{1}{8}|y|,$$

on prend $\psi(|y|) = \dfrac{1}{8}|y|,\phi_f(t) = (\log t)^2\ ,I^1\phi_f(t) = \dfrac{(\log t)^3}{3}$ et $I^{\frac{3}{2}}\phi_f(e) = \dfrac{32}{35\sqrt{\pi}}$.
Si

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(r)|\Omega|M^*}{\Gamma(r)|\Omega|\psi(M^*)I^r\phi_f(T) + \Gamma(r-p)\psi(M^*)(\log T)^{r-1}\Big(\sum_{i=0}^{n}|\lambda_i|I^{r-p}\phi_f(\mu_i) + I^{r-p}\phi_f(T)\Big)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}M^*}{\sqrt{\pi}\psi(M^*)I^{\frac{3}{2}}\phi_f(e) + \psi(M^*)\Big(\sum_{i=1}^{2}|\lambda_i|I^1\phi_f(\mu_i) + I^1\phi_f(e)\Big)} \\ &= \frac{8\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}I^{\frac{3}{2}}\phi_f(e) + \Big(\sum_{i=1}^{2}|\lambda_i|I^1\phi_f(\mu_i) + I^1\phi_f(e)\Big)} \\ &= \frac{840\sqrt{\pi}}{209} > 1,\end{aligned}$$

alors les conditions de théorème (3.6) sont satisfaites, ainsi il existe au moins une solution du problème (3.23)-(3.24) dans $C([1,e],\mathbb{R})$.

Chapitre 4

Problème Aux Limites Concernant les Equations Différentielles Fractionnaires avec la Dérivée de Caputo-Hadamard

[1]

4.1 Introduction

Notons qu'en 2008, Benchohra, Hamani et Ntouyas [5] ont étudié l'existence des solutions pour le problème aux limites suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad t \in J = [0, T]$$

$$ay(0) + by(T) = c,$$

où $^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a, b et c sont des constantes réels tels que $a + b \neq 0$.
Motivés par le travail cité ci-dessus, on va consacré ce chapitre à l'étude du problème différentielle fractionnaire suivant :

$$^{c}_{H}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad t \in J = [1, T] \tag{4.1}$$

$$ay(1) + by(T) = c, \tag{4.2}$$

où $^{c}_{H}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard, a, b et c sont des constantes réels tels que $a + b \neq 0$, et $f : [1, T] \times R \to R$ est une fonction donnée.

1. **W. Benhamida**, S. Hamani, and J. Henderson, Boundary Value Problems for Caputo-Hadamard Fractional Differential Equations, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*. 2 (2018) No. 3, 138-145

4.2 Existence de Solutions

Définition 4.1 *Une fonction $y \in AC^1_\delta([1,T],\mathbb{R})$ est dite une solution du probème (4.1)–(4.2) si elle satisfait l'équation différentielle ${}^c_H D^r y(t) = f(t, y(t))$, pour $t \in J$, ainsi que la condition (4.2).*

La solution intégrale de problème (4.1)–(4.2) est donnée par le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Soit $h : [1, +\infty) \to R$ une fonction continue. La fonction y est une solution de l'équation d'intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} - \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} + \frac{c}{(a+b)} \tag{4.3}$$

si et seulement si y est une solution du problème

$${}^c_H D^\alpha y(t) = h(t) \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{4.4}$$

$$ay(1) + by(T) = c. \tag{4.5}$$

Preuve :

En utilisant le lemme (1.7), on peut écrire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} + y(1). \tag{4.6}$$

La condition (4.5) permet d'éffectuer le calcul de y(1), on a :

$$ay(1) + by(T) = b\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} + (a+b)y(1) = c,$$

ainsi

$$y(1) = \frac{c - b\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s}}{(a+b)}.$$

En remplaçant $y(1)$ dans (4.6) et on trouve la formule (4.3).

Inversement, on suppose que y satisfait (4.3). En suite, en utilisant le fait que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard d'une constante est nulle, et on obtient

$${}^c_H D^\alpha y(t) = {}^c_H D^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s}\right],$$

grâce à la propriété ${}^c_H D^\alpha I^\alpha h(t) = h(t)$,on obtient

$${}^c_H D^\alpha y(t) = h(t).$$

Par conséquent , l'équation intégrale (4.3) est équivalente au problème (4.4)-(4.5) □

En vue d'établir nos résultats ,on définit l'opérateur intégral suivant :

$$\begin{aligned} (G_1 y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s))\frac{ds}{s} \\ &- \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s))\frac{ds}{s} + \frac{c}{(a+b)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2.1 Premiers Résultats

On va montrer que le problème (4.1)-(4.2) possède une solution unique, en utilisant le principe de la contraction de Banach.

Théorème 4.1 *Si l'hypothèse*

(B1) : La fonction f est k-lipshitzienne , c'est à dire il existe un constante $k > 0$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y| \quad \textit{pour tout } t \in J \textit{ et } x,y \in \mathbb{R}.$$

et la condition

$$\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \frac{k(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq 1,$$

sont satisfaites, alors le problème (4.1)–(4.2) admet une solution unique sur $[1,T]$.

Preuve. On considère l'opérateur $G_1 : C([1,T],\mathbb{R}) \to C([1,T],\mathbb{R})$ défini par(4.7).
Les points fixes de G_1 sont des solutions du problème(4.1)–(4.2).
On veut montrer que G_1 possède un point fixe unique. Pour cela, on va prouver que G_1 est un opérateur contractif.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [1,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(G_1x)(t) - (G_1y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \frac{k(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty,
\end{aligned}$$

donc

$$\|G_1(y_n) - G_1(y)\|_\infty \leq \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \frac{k(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_\infty.$$

Finalement et grâce au principe de la contraction, l'unicité de la solution de problème (4.1)-(4.2) est assurée.

Notre deusième résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 4.2 *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*
(B2) :La fonction f est continue sur $[1, T] \times \mathbb{R}$.
(B3) : Il existe une constante positive M, telle que :

$$|f(t, y)| \leq M \quad \forall t \in [1, T], y \in \mathbb{R}.$$

alors le probleme (4.1)–(4.2) admet au moins une solution dans $C([1, T], \mathbb{R})$.

Preuve.
La preuve de ce théorème consiste à montrer que l'opérateur $G_1 : C([1; T], \mathbb{R}) \to C([1; T], \mathbb{R})$ donné par(4.7) a au moins un point fixe .
On applique le théorème de point fixe de Schaefer et la démonstration sera donnée en 4 étapes .

Étape 1 : *Continuité de G_1*

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C([1, T], \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in [1, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(G_1 y_n)(t) - (G_1 y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \left[1 + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\right] \frac{(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Comme f est continue, on a

$$\|G_1(y_n) - G_1(y)\|_\infty \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

ainsi G_1 est continu.

Étape 2 : *l'image d'un ensemble borné par G_1 est un ensemble borné dans $C([1, T], \mathbb{R})$.*
Soit l'ensemble $B_{\mu^*} = \{y \in C([1, T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \mu^*\}$, on considère $y \in B_\mu$, alors pour tout $t \in [1, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|G_1(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

donc

$$\|G_1(y)(t)\|_\infty \leq \frac{M(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[1 + \frac{|b|}{|a+b|}] + \frac{|c|}{|a+b|} < \infty.$$

Par conséquent $G_1(B_{\mu^*}) \subset B_{\mu^*}$.

Étape 3 : *l'image d'un ensemble borné par G_1 est un ensemble équicontinu dans $C([1,T],\mathbb{R})$.*

Soient t_1, $t_2 \in [1,T]$, $t_1 < \ t_2$ et B_{μ^*} l'ensembles borné défini comme dans l'étape 2, et soit $y \in B_{\mu^*}$, alors

$$\begin{aligned}
|(G_1y)(t_2)-(G_1y)(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\left[\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\log\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}\right]|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\log\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(\log t_2)^{\alpha}-(\log t_1)^{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \longrightarrow t_2$, le second membre de l'inégalité tend vers zéro. Alors , en combinant les étapes 1,2,3 et d'aprés le théorème d' Arzelà -Ascoli, on conclut que G_1 est complètement continu.

Étape 4 :
On va montrer que l'ensemble

$$\Phi_4=\{y\in C(J,\mathbb{R}) : y=\mu G_1(y) \ \text{ pour certain } \ 0<\mu<1\}$$

est borné.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mu\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}-\frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{c}{(a+b)}\Big].
\end{aligned}$$

Soit donc $y \in \Phi_4$. Alors $y = \mu G_1(y)$, pour un certain μ compris strictement entre 0 et 1 , on a :

$$\begin{aligned}
|(G_1y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_1^T(\log\frac{T}{s})^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{|c|}{|a+b|}\\
&\leq \frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+\frac{|b|}{|a+b|}\right]+\frac{|c|}{|a+b|}\\
&= R.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|G_1(y)\|_{\infty}\leq R.$$

D'où, G_1 est borné.
D'aprés le théorème du point fixe de Schaefer, on constate que G_1 admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (4.1)-(4.2). □
Un autre résultat d'existence de solutions est basée sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder,il est caractérisé par le théorème suivant :

Théorème 4.3 *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(B4) : Il existe $\phi_f \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$, $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *continue et croissante tel que*

$$|f(t,u)| \leq \phi_f(t)\psi(|u|) \quad \textit{pour tout} \quad t \in J \ \textit{et} \ u \in \mathbb{R}.$$

(B5) : Il existe un nombre $M^* > 0$ *tel que*

$$\frac{M^*}{[1 + \frac{|b|}{|a+b|}]\psi(M^*)I^\alpha \phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|}} > 1,$$

alors le problème (4.1)–(4.2) a au moins une solution dans $C([1;T], \mathbb{R})$.

Preuve D'après le théorème 4.2, l'opérateur G_1 est continu, uniformément borné, et envoie les ensembles bornés dans des ensembles équicontinus. Donc, une application du théorème d'Arzelà- Ascoli mène à déduire que G_1 est un opérateur complètement continu.
$\forall t \in [1, T]$, on a

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \phi_f(s)\psi(|y|)\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)(|a+b|)} \int_1^T (\log \frac{T}{s})^{\alpha-1} \phi_f(s)\psi(|y|)\frac{d}{ds} + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \psi(\|y\|_\infty) I^\alpha \phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\|y\|_\infty}{[1 + \frac{|b|}{|a+b|}]\psi(\|y\|_\infty)I^\alpha \phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|}} \leq 1.$$

D'après la condition (B5), il existe M^* tel que $\|y\|_\infty \neq M^*$,
et soit

$$B_{M^*} = \{y \in C([1,T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty < M^*\},$$

ce qui contredit le fait que $y \in \partial B_{M^*}$tel que $y = \mu G_1(y)$, pour certain $\mu \in (0,1)$. D'après l'alternative nonlineaire de Leray-Schauder, on peut conclure que G_1 admet au moins un point fixe qui est une solution de problème (4.1)-4.2), ce qui achève la démonstration.

4.2.2 Exemples

Dans cette section, on présente deux exemples pour illustrer non résultats.

Exemple.1

On considère le problème suivant :

$$D^{\frac{1}{2}} y(t) = \cos^2 t(e^{-t} + 3)^2 |y(t)|, \quad \forall (t, y) \in ([1, e], \mathbb{R}), \tag{4.8}$$

$$y(1) + y(e) = 0, \tag{4.9}$$

où $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = e,\ a = b = 1, et\ \ c = 0$
on a

$$|f(t,y)| = |\frac{\cos^2 t}{(e^{-t}+3)^2|y(t)|}| \leq \frac{1}{9}.$$

on pose $M = \frac{1}{9}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\|N(y)(t)\|_\infty &\leq \frac{M(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[1+\frac{|b|}{|a+b|}] + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

est borné, alors par conséquence de théorème 4.2, le problème (4.8)-(4.9) admet des solution sur $[1, e]$.

Exemple.2

On considère le problème suivant :

$${}^H D^{\frac{3}{2}} y(t) = (\log t)^4 y^2 e^{-y} 2|y|(e^{-y}+2)^2,\ \ \forall (t,y) \in ([1,e], \mathbb{R}_+), \tag{4.10}$$

$$y(1) + 2y(e) = -1, \tag{4.11}$$

où $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = e,\ a = 1,\ b = 2,\ \ c = -1$ et

$$f(t,y) = (\log t)^4 \frac{y^2 e^{-y}}{2|y|(e^{-y}+2)^2},$$

alors

$$|f(t,y)| = |(\log t)^4 \frac{y^2 e^{-y}}{2|y|(e^{-y}+2)^2}| \leq (\log t)^4 \frac{|y|}{8}.$$

On pose $\psi(|y|) = \frac{|y|}{8}$,$\phi_f(t) = (\log t)^4$, et $I^{\frac{1}{2}}\phi_f(e) = \frac{256}{63\sqrt{\pi}}$. Si

$$\begin{aligned}&\frac{M^*}{[1+\frac{|b|}{|a+b|}]\psi(M^*)I^\alpha\phi_f(T) + \frac{|c|}{|a+b|}} \\ &= \frac{M^*}{\frac{5}{24}M^* 25663\sqrt{\pi} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{M^*}{M^* \frac{1280}{1512\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3}} > 1\end{aligned}$$

on trouve que pour $M^* > m \approx 0.638$ les conditions de théorème 4.3 sont verifiées ,alors il exist ou moin une solution de problème (4.10)-(4.11) sur $[1, e]$.

[2]

4.2.3 Deuxième Résultat

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence de solutions pour le problème (4.1)-(4.2), dans lequel La fonction f est définie par $f : [1,T] \times E \to E$ tel que $(E, |.|)$ espace de Banach. Dans ce qui suit, la mésure de noncompacité associée au théorème de point fixe de Mönch vont nous permettre d'établir l'existence de solutions de problème (4.1)-(4.2).

Théorème 4.4 *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées*

(B6) La fonction $f : J \times E \longrightarrow E$ satisfait la Condition de Carathèodory.

(B7) Il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$, tel que :

$$\|f(t,y)\| \leq p(t)\|y\| \;\; \forall t \in J \textit{ et chaque } y \in E.$$

(B8) Pour tout $t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$, on a

$$\lim_{k \to 0^+} \alpha(f(J_{t,k} \times B)) \leq p(t)\alpha(B).$$

où α est la mesure de non compacité de Kuratowski et $J_{t,k} = [t-k, t]$.

et la condition :

$$\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)({}_H I^r p)(T) < 1, \tag{4.12}$$

sont vérifiées, alors le probème (4.1)(4.2) admet au moins une solution dans $C(J,B)$.

Preuve :

On transforme le problème (4.1)(4.2) en un problème au point fixe, en considérant l'opérateur $G_2 : C(J,E) \to C(J,E)$ défini par (4.7). En utilisant le théorème de Mönch, on montre que l'opérateur G_2 admet des points fixes qui sont des solutions de problème (4.1)(4.2). Soit :

$$R \geq \frac{\dfrac{|c|}{|a+b|}}{1 - \left(1 + \dfrac{|b|}{|a+b|}\right)({}_H I^r p)(T)},$$

on considère l'ensemble

$$D_R = \{y \in C(J,E) \, : \|y\|_\infty \leq R\}.$$

il est clair que le sous ensemble D_R est fermé, borné et convexe. On doit montrer queG_2 satisfait les hypothèses du théorème (1.5). La preuve se fait en trois étapes

2. **W. Benhamida**, S. Hamani,Measure of Noncompactness and Caputo-Hadamard Fractional Differential Equations in Banach Spaces, *Eurasian Bulletin of Mathematics* . EBM (2018) vol.1, NO 3, 98-106.

Étape 1 : *continuité de G_2.*

Soit $\{y_n\}$une suite telle que $y_n \to y$ dans $C([1,T], D_R)$. Alors,$\forall t \in [1,T]$,

$$\begin{aligned} |(G_2y_n)(t) - (G_2y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

Soit

$$\|y_n\|_\infty \leq R \text{ and } \|y\|_\infty \leq R.$$

Par (B7), on a

$$\|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| \leq 2Rp(s) := \sigma(s);\ \sigma \in L^1(J, \mathbb{R}_+).$$

Puisque f est de Carathéodory et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on aura :

$$\|G_2(y_n) - G_2(y)\|_\infty \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Étape 2 : *G_2 applique D_R dans D_R.*

$\forall y \in D_R$, par (B7) et 4.12 , on a $\forall t \in J$,

$$\begin{aligned} |G_2(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s}. + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) R({}_H I^r p)(T) + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Étape 3 : *Bornitude et équicontinuité de $G_2(D_R)$.*

Par l'étape 2, il est évident que $G_2(D_R) \subset C(J, E)$ est borné. Pour l'équicontinuité de $G_2(D_R)$. Soient $t_1,\ t_2 \in [1,T]$, $t_1 <\ t_2$, et $\forall y \in D_R$, on a

$$\begin{aligned} |(G_2y)(t_2) - (G_2y)(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{r-1} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right] |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{r-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{R}{\Gamma(r)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{r-1} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{r-1}\right] p(s) \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{R}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{r-1} p(s) \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{R\|p\|_{l^\infty}}{\Gamma(r+1)} \left[(\log t_2)^r - (\log t_1)^r\right]. \end{aligned}$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité tend vers zéro. D'où l'équicontinuité de $G_2(D_R)$.
Soit V un sous ensemble de D_R tel que $V \subset \overline{cov}(G_2(V) \cup \{0\})$.
De l'étape (3) V est borné et équicontinu, par conséquent la fonction $\vartheta \to \vartheta(t) = \alpha(V(t))$ est continue sur $[1, T]$. Par (B7)-(B8) et le Lemme 1.1 et les propertiés de la mesure de Kuratowski, on a, $\forall t \in [1, T]$

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) &\leq \alpha(G_2(V)(t) \cup \{0\}) \\
&\leq \alpha(G_2(V)(t)) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} p(s)\alpha(V(s))\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-1} p(s)\alpha(V(s))\frac{ds}{s} \\
&\leq \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \int_1^T \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\log \frac{T}{s}\right)^{r-1} p(s)\alpha(V(s))\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Cela veut dire que

$$\|\vartheta\|_\infty \left(1 - \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) ({}_H I^r p)(T)\right) \leq 0.$$

Par (4.12),il se suit que $\|\vartheta\|_\infty = 0$, c'est à dire, $\vartheta(t) = 0 \; \forall t \in [1, T]$,,alors $V(t)$ est relativement compact dans $\mathbb{E}$. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, V est relativement compact dans D_R. En appliquant le théorème 4.3, on conclue que G_2 admet un point fixe qui est une solution du probème(4.1)(4.2). $\square$

Conclusion :

L'objectif de cette thèse est de présenter plusieurs résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes de problèmes concernant les équations différentielles fractionnaires .

Dans un premier temps, deux résultats d'existence des solutions ont été dérivés cela concene un problème aux limites pour les equations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo et des conditions intégrales et anti-périodiques, les premiers ont été trouvé à partir des théorèmes de point fixe de Banach, de Schaefer et l'alternative non linéaire de Leary-Schauder ; le deuxième a été obtenu en utilisant le théorème de point fixe de Mönch combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski .

Dans un second temps, nous avons établit des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions de deux équations différentielles fractionnaires qui ont été engendrées par la dérivée de Hadamard, l'une soumise à une condition non locale et l'autre soumise à une condition non locale de points multiples.

Par la suite, et dans la partie qui suit, les techniques du point fixe (de Banach , de Scheafer et de Leaury-Schauder) ont été appliquées pour établir des résultats d'existence et d'unicité de solutions d'un problème pour une équation différentielle fractionnaire avec la dérivée de Caputo-Hadamard . Un autre résultat d'existence des solutions en utilisant la mesure de non compacité de kuratowski avec le theorème de point fixe de Mönch a été cependant introduit.
.

En outre, on prévoit d'étudier l'existence et l'uninité de solutions des problèmes similaires avec la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard et des conditions non locales, des conditions intégrales et des conditions anti-périodiques. D'autres perspectives sont de même prévues à l'étude et demeurent nombreuses.

Annexe

1.Concepts de Bases

Définition 4.2 *([29])(***Suite de Cauchy***) Soient S un espace vectoriel muni de la norme $\|.\|_S$ et $(u_n)_n; n \in \mathbb{N}$; une suite de S. On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N, p \geq N \Rightarrow \|u_n - u_p\|_S < \epsilon.$$

Définition 4.3 *([29])(***Espace de Banach***) On dit que l'éspace vectoriel normé S est complet pour la norme$\|.\|_S$si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Théorème 4.5 *[30](***Convergence dominée dans** L^p*) Soit $(\mathbb{E}, T, m)$ un éspace mesuré et $1 \leq p < \infty$, f_n suite d'éléments de L^p telle que :*

1. *$f_n \to f$ p.p,*
2. *$F \in L^p$ telle que $|f_n| \leq F$ p.p, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors $f \in L^p$ et

$$\int |f_n - f|^p dm \to 0, quand \ n \to \infty.$$

2.Principe de point fixe

Le principe de contraction de Banach est essentiellement basé sur les définitions suivantes :

Définition 4.4 *([35]) Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_{\mathbb{E}}$ et T une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$: On appelle point fixe de T tout point u tel que :*

$$Tu = u.$$

Définition 4.5 *([35]) Soit S un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|_S$. Une application f de S dans S est dite Lipschitzienne de constante $L > 0$ si elle vérifie :*

$$\forall u, v \in S, \|f(u) - f(v)\|_S \leq L \|u - v\|_S$$

Définition 4.6 *([35]) L'application Lipschitzienne f est dite une contraction si $L \in]0; 1[$.*

3.Mesure

Dans cette partie on rappelle les notions et les résultats fondamentaux de la théorie de la mesure qui représentent un outil indispensable dans notre étude.

Définition 4.7 *[30](***Tribu ou σ-algèbre***) Soit $\mathbb{E}$ un ensemble, T une famille de parties de $\mathbb{E}$ (i.e. $T \subset P(\mathbb{E})$). La famille T est une tribu sur $\mathbb{E}$ si T vérifie :*

1. *$\varnothing \in T$,*

2. *T est stable par passage au complémentaire, c'est à dire que pour tout $A \in T$, on a : $A^c \in T$.(On rappelle que $A^c = \mathbb{E} \setminus A$).*
3. *T est stable par union dénombrable, c'est à dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a : $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.*

Définition 4.8 *[30](***Espace mesurable***) Soient $\mathbb{E}$ un ensemble et T une tribu sur $\mathbb{E}$. Le couple $(\mathbb{E}, T)$ est appelé espace mesurable.*

Définition 4.9 *[30](***Mesure***) Soit $(\mathbb{E}, T)$ un espace mesurable .On appelle mesure une application :$m : T \to \bar{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*

1. *$m(\varnothing) = 0$*
2. *m $\sigma-$additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T disjoints deux à deux (i.e.$A_n \cap A_m = \varnothing$, si $n \neq m$), on a :*

$$m(\cup_1^\infty A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_n)$$

Définition 4.10 *[30] (***Fonction mesurable***) Soient $(\mathbb{E}, T)$ et $(\mathbb{F}, T')$ des espaces mesurables. Une fonction $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est dite mesurable si :*

$$\forall A \in T', f^{-1}(A) \in T.$$

Bibliographie

[1] R. P Agarwal, M. Benchohra, and S. Hamani, A survey on existence results for Boundary value problems for nonlinear fractional differential equations and inclusions, Acta Appl. Math. 109 (2010), 9731033.

[2] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. ORegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[3] B. Ahmed and V. Otero Espiner, Existence of solutions for fractional inclusions with antiperiodic boundary conditions,Bound. Value. Problems 11 (2009) : Art ID 625347.

[4] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenski, A. S. Patapov, A. E. Rodkina and B. N. Sadovski, Measure of noncompactness and condensing operators, (Translated from the 1986 Russian original by A. Iacop), Operator theory : advances and applications 55, BirhhauserVerlag, Basel, 1992.

[5] J. Banas and K. Goebel, Measure of noncompactness in Banach spaces, In lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol 60, Marcel Dekker, New York, 1979.

[6] J. Banas and K. Sadarangani, On some measures of noncompactness in the space of continous functions, Nonlinear Anal. 60 (2008), 377383.

[7] M. Benchohra, J. R. Graef, and S. Hamani, Existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with integral conditions, Appl. Anal. 87 (2008), 851863.

[8] M. Benchohra and S. Hamani, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 71 (2009), 23912396.

[9] M. Benchohra, S. Hamani, and S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 112.

[10] **W. Benhamida**, S. Hamani, and J. Henderson, A Boundary Value Problem for Fractional Differential Equations with Hadamard Derivativeand Nonlocal Conditions, *PanAmerican Math*, **26**(2016), No3, 1 - 11.

[11] **W. Benhamida**, J. R. Graef, and S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations with integral and anti-periodic conditions in a Banach space,Progr.Frac.Differ.Appl,**4**(2018),No2, 65-70.

[12] **W. Benhamida**, J.R. Graef, and S. Hamani , Boundary value problems for Hadamard fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions,,fractional differential calculus, **8**(2018),No1, 165-176.

[13] **W. Benhamida**, S. Hamani, and J. Henderson, Boundary Value Problems for Caputo-Hadamard Fractional Differential Equations, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*. 2 (2018) No. 3, 138-145.

[14] **W. Benhamida**, S. Hamani,Measure of Noncompactness and Caputo-Hadamard Fractional Differential Equations in Banach Spaces, *Eurasian Bulletin of Mathematics* . EBM, **1** (2018), NO 3, 98-106.

[15] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, Composition of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), 387400.

[16] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals, J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), 127.

[17] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals, J. Math. Anal. Appl. 270 (2002), 115.

[18] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, Appl. Anal. 40 (1991), 11-19.

[19] L. Byszewski, Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem,J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 494-505

[20] L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-dierential evolution nonlocal Cauchy problem. Selected problems of mathematics, 25-30, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, 6, Cracow Univ. Technol, Krakw, 1995

[21] T. Chen and W. Liu, An anti-periodic boundary value problem for the fractional differential equations with a p-Laplacian operator, Appl. Math. Lett. 25 (2012), 1671-1675.

[22] I.Chalendar,E.Fricain, Complèments en analyse cours exercices

[23] Z. Cui, P. Yu, and Z. Mao, Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, Advanc. Dyn. Sys. Appl. 7 (2012), 3140

[24] A. M. A. EL-Sayed et E. O. Bin-Taher, Positive solutions for a nonlocal multi-point boundaryvalue problem of fractional and second order, Electron. J. Differential Equations 2013 (2013), no. 64, pp. 18

[25] D. Delbosco and L. Rodino, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 204 (1996), 609-625.

[26] K. Diethelm and A. D. Freed,On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, Scientifice Computing in Chemical Engineering II. Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties (F. Keil, W. Mackens, H. Voss and J. Werther, eds.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, pp. 217-224.

[27] K. Diethelm and N. J. Ford Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 265 (2002), 229-248.

[28] K. Diethelm and G. Walz, Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation, Numer. Algorithms16 (1997), 231-253

[29] Fabian,M ,Habala,P, Hajek,P , Montesinos Santalucia, V, Zizler, V , Banach space theory, Springer, 2011.

[30] T.Gallouet,R.Herbin, Mesure, Intergration, Probabilies,Ellipses Edition Marketing, 2013.

[31] R.Garra ; A.Giusti ; F.Mainardi ; G.Pagnini.Fractional relaxation with time-variying coefficient .Fract.Cal. Appl.Anal.2014,17,424-439.

[32] R.Garra, E.Orsingher et F.Polito A Note on Hadamard Fractional Differential Equations with Varying Coefficients and Their Applications in Probability 2017,1-10

[33] R.Garra, F.Mainardi, Et G.Spada. A Generalization of the lomnitz logarithmic creep law via Hadamardfractional Calculus.Chaos, Solitons and Fractals 102 (2017) 333-338.

[34] R. Goreno and F. Mainardi : Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order, Springer Verlag, Wien, 1997, pp. 223-276.

[35] A. Granas and J. Dugundji : Fixed Point Theory, Springer-Verlas, New York. 2003.

[36] D. Guo, V. Lakshmikantham, and X. Liu , Nonlinear integral equations in abstract spaces, Mathematics and its Applications, 373, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[37] J. Hadamard, Essai sur letude des fonctions donnees par leur development de Taylor, J. Mat. Pure Appl. Ser. 8 (1892), 101-186

[38] J. K. Hale and S. V. Lunel, Introduction to functional dierential equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[39] R. Hilfer : Applications Of Fractional Calculus In Physics, World Scientific, River Edge., New Jersey, (2000).

[40] M. Houas and Z. Dahmani, On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions, Lobachevskii J. Math. 37 (2016), 120-127

[41] F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, Adv. Differ. Equ. 2012, No.1 (2012),1-8.

[42] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Differ. Equ. 41, 8489 (2005).

[43] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[44] V. Lakshmikantham and S. Leela, Nonlinear differential equations in abstract spaces, Interna- tional Series in Mathematics : Theory, Methods and Applications, 2, Pergamon Press, Oxford, UK, 1981.

[45] F. Mainardi, Fractional calculus : some basic problems in continuum and statistical mechanics, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (A. Carpinteri and F. Mainardi, eds.), Springer-Verlag, Wien, 1997, pp. 291348.

[46] M. Matar, On existence of solutions to nonlinear fractional differential equations for $0 < \alpha \leq 3$, *J. Fractional Calculus Appl.* **3** (2011), 1-7.

[47] M. Matar, Boundary value problem for some fractional integrodifferential equations with nonlocal conditions, *International J. Nonlinear Sciences* **11** (2011), 3-9.

[48] M. Matar, Existence of integral and anti-periodic boundary value problem of fractional order $0 < \alpha \leq 3$, Bull.Malays. Math. Sci. Soc , 40(2017), 959-973.

[49] K.S. Miller, B. Ross : An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations, Wiley, New York, (1993).

[50] S. M. Momani, S. B. Hadid and Z. M. Alawenh, Some analytical properties of solutions of differential equations of noninteger order, Int. J. Math. Math. Sci. 2004 (2004), 697-701.

[51] H. Mönch, Boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces, Nonlinear Anal. 4, 985-999 (1980).

[52] K.B. Oldham and J. Spanier : *The Fractional Calculs*, Acadimic Press, New York. 1974.

[53] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego, 1999.

[54] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, Fract. Calculus Appl. Anal. 5 (2002), 367-386.

[55] I. Podlubny, I. Petr, B. M. Vinagre, P. OLeary and L. Dorcak, Analogue realizations of fractional-order controllers. Fractional order calculus and its applications, Nonlinear Dynam. 29 (2002), 281296.

[56] Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova : Applications Of Fractional Calculus To Dynamic Problems Of Linear And Nonlinear Hereditary Mechanics Of Solids, Applied Mechanics Reviews., 50, (1997), pp. 15-67.

[57] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev : Fractional Integrals And Deriva- tives : Theory And Applications, Gordon And Breach Science Publishers., Switzerland, (1993).

[58] D.R. Smart : Fixed point Theorems, Cambridge University Press., (1980).

[59] J. Spanier, K.B. Oldham : The Fractional Calculus, Academic Press., New York, (1974).

[60] S. Szufla, On the application of measure of noncompactness to existence theorems, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 75, 1-14 (1986).

[61] V.E. Tarasov : Fractional Dynamics, Applications Of Fractional Calculus To Dynamics of particles, Fields And Media, Springer, Heidelberg, (2010).

[62] P. Thiramanus, S. K. Ntouyas, and J. Tariboon, Existence and uniqueness results for Hadamard-type fractional differential equations with nonlocal fractional integral boundary conditions, Abstr. Appl. Anal. (2014), Art. ID 902054, 9 pp.

[63] K.Yosida, Functional Analysis, 6 th edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[64] S.Zhang,Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations.Electron.J.Differential Equations36(2006),1-12.

PUBLICATIONS

1. **W. Benhamida**, S. Hamani, and J. Henderson, A Boundary Value Problem for Fractional Differential Equations with Hadamard Derivativeand Nonlocal Conditions, *PanAmerican Math.*26(2016), 1 - 11

2. **W. Benhamida**, J. R. Graef, and S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations with integral and anti-periodic conditions in a Banach space.

3. **W. Benhamida**, J.R. Graef, and S. Hamani , Boundary value problems for Hadamard fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions .

4. **W. Benhamida**, S. Hamani, and J. Henderson, Boundary Value Problems for Caputo-Hadamard Fractional Differential Equations, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications.* 2 (2018) No. 3, 138-145

5. **W. Benhamida**, S. Hamani,Measure of Noncompactness and Caputo-Hadamard Fractional Differential Equations in Banach Spaces, *Eurasian Bulletin Of Mathelatics* . EBM (2018) vol.1, NO 3, 98-106.