

Table des matières

Remerciments	i
Résumé	ii
Introduction	1
1 Préliminaire	2
1.1 Notion sur les variétés	2
1.1.1 Variétés topologiques	2
1.1.2 Vecteur tangent :	3
1.1.3 Espace tangent :	3
1.1.4 Champ de vecteurs :	3
1.1.5 Dérivé covariante :	4
1.1.6 Variété différentiable :	4
1.2 Variétés Riemanniennes :	4
1.2.1 Métriques Riemanniennes :	4
1.2.2 La connexion linéaire :	5
1.2.3 La courbure de Ricci :	5
1.2.4 La courbure de Gauss :	5
1.2.5 La courbure moyenne :	6
1.2.6 Connexion d'un sous-variété d'une variété Riemannienne :	6

1.3	Les espaces homogènes de dimension "3" : $\mathbb{R}^3, S^3, S^2 \times \mathbb{R}, H^3, H^2 \times \mathbb{R}, Nil_3, Sol_3, SL(2, \mathbb{R})$:	7
1.3.1	L'espace Euclidien \mathbb{R}^3 :	7
1.3.2	La 3-Sphère S^3 :	7
1.3.3	L'espace $S^2 \times \mathbb{R}$:	8
1.3.4	L'espace Hyperbolique H^3 :	9
1.3.5	L'espace $H^2 \times \mathbb{R}$:	9
1.3.6	L'espace de Heisenberg Nil_3 :	10
1.3.7	L'espace Sol_3 :	10
1.3.8	L'espace $SL(2, \mathbb{R})$:	11
2	Surfaces minimales de translation sur Sol_3 :	12
2.1	Le groupe de Lie Sol_3 :	12
2.2	Classification des surfaces minimales de translation de type I :	15
2.3	Classification des surfaces minimales de translation de type II :	21
2.4	Exemples des surfaces minimales de translation de type III :	25
	Conclusion	30
	Bibliographie	31

Remerciements

Je remercie en premier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience durant toutes ces années d'études.

Je tiens à remercier

Monsieur BELARBI Lakhel, qui a accepté de diriger ce mémoire et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et son présence pendant la réalisation de ce travail,

Mr ANDASMAS Maamar, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Mme HAMMOU Amouria, qui a accepté d'examiner ce travail .

Tous les enseignants que j'ai rencontré durant mon chemin dans l'université sans oublier le personnel administratif.

Mes parents,mes frères et mes soeurs, qui m'a donné le courage pour terminer mes études, celle les plus amies proches Belaidouni Rachida et Amina franchement merci

Enfin j'adresse mes plus sincères remerciements a tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé pendant la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et a toutes.

RÉSUMÉ

L'idée de ce travail est l'étude et la classification des surface minimales de translation sur l'espace Sol_3 .

On dit que M est minimale si et seulement si l'équation est nulle. C'est-à-dire :

$$G\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 \rangle - 2F\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \rangle + E\langle N, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle = 0.$$

pour chacun des trois types de surfaces I , II et on donne seulement des exemples des surfaces minimales pour type III puisque l'équation va être très compliquée.

INTRODUCTION

En géométrie différentielle, une surface est dite minimale quand elle minimise son aire tout en respectant certaines conditions à son bord.

Dans ce mémoire nous avons permis d'obtenir des résultats de classification concernant les surfaces minimales de translation de trois types proprement plongées dans l'espace Sol_3 .

L'espace Sol_3 on peut voir comme \mathbb{R}^3 muni de la métrique

$$\langle ., . \rangle = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2,$$

où (x, y, z) sont des coordonnées habituelles de \mathbb{R}^3 . Cet espace est muni de la multiplication interne

$$(x, y, z) * (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x + e^{-z}\bar{x}, y + e^z\bar{y}, z + \bar{z}).$$

Mon travail est divisé en deux chapitres.

Dans le premier chapitre nous rappelons certains nombres de définitions d'une variété topologique, carte, atlas, ...ect, et nous écrivons aussi les deux applications homéomorphisme et celle difféomorphisme. Nous rappelons aussi la définition d'un vecteur tangent et espace tangent et champs de vecteurs, et la dérivé covariante d'un champ de vecteur le long d'une courbe et à la direction d'un autre champ de vecteurs. Nous introduisons la notion d'une métrique Riemannienne et la connexion linéaire, la connexion de Levi-Civita. Nous écrivons aussi la courbure de Ricci et la courbure de Gauss et celle la courbure moyenne. Puis, nous définissons aussi la connexion d'un sous-variété Riemannienne et la formule de Gauss. En fin, nous présentons les espaces homogène de dimension 3 :

$$\mathbb{R}^3, S^3, S^2 \times \mathbb{R}, H^2 \times \mathbb{R}, H^3, Nil_3, Sol_3, SL(2, \mathbb{R}).$$

Dans le deuxième chapitre nous présente le résultat concernant la classification des surfaces minimales de type *I* et *II* et exemples des surfaces minimales de translation de type *III*, d'après l'article de Lopez et Munteanu.

Préliminaire

1.1 Notion sur les variétés

1.1.1 Variétés topologiques

Définition 1.1.1 Soit M une variété topologique séparé. On dit que M est une variété topologique s'il existe un entier naturel n tel que pour tout point $x \in M$ admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.1.2 Soit M un espace topologique, et u un ouvert de M . Une application :

$$\varphi : u \rightarrow \varphi(u).$$

est homéomorphisme si φ est bijective et continue et l'application

$$\varphi^{-1} : \varphi(u) \rightarrow u.$$

est continue.

Soit M un espace topologique, et u un ouvert de M . Une application :

$$\varphi : u \rightarrow \varphi(u).$$

est difféomorphisme si φ est bijective et continue et de classe C^k ($1 \leq k \leq +\infty$) et l'application

$$\varphi^{-1} : \varphi(u) \rightarrow u.$$

de classe C^k .

Définition 1.1.3 Soit M un espace topologique, et $u \subset M$. On dit que le couple (u, φ) est une carte si :

- 1) u ouvert de M .
- 2) $\varphi : u \rightarrow \varphi(u)$ un homéomorphisme.

Définition 1.1.4 Un atlas de classe C^k ($1 \leq k \leq +\infty$) sur une variété topologique M est une famille de cartes $(u_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telle que :

- 1) $\bigcup_{i=1}^n u_i = M$.
- 2) Les cartes $(u_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sont compatibles deux à deux.

1.1.2 Vecteur tangent :

Définition 1.1.5 La famille de courbes $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ ayant le même tangent au point $x \in M$ est appelée vecteur tangent à M au point x est noté par V_x .

1.1.3 Espace tangent :

Définition 1.1.6 On appelle espace tangent à M au point x , noté $T_x M$, l'ensemble des vecteurs tangents à M en point x

$$T_x M = \left\{ \begin{array}{l} V_x : \mathbb{F}(M) \rightarrow \mathbb{R} / f \in C^\infty \\ f \rightarrow V_x(f) \end{array} \right.$$

L'espace $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension n , les $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, $i = 1, \dots, n$ forment une base de cet espace.

1.1.4 Champ de vecteurs :

Définition 1.1.7 Un champ de vecteurs sur M est toutes application

$$X : M \rightarrow TM$$

de classe C^∞ , qui à tout point $x \in M$ associe un vecteur tangent $V_x \in T_x M$ l'ensemble des champs de vecteur sur M est noté $\chi(M) = \{Y/Y \text{ est une champ de vecteur sur } M\}$.

1.1.5 Dérivé covariante :

Définition 1.1.8 Une dérivation covariante sur une variété différentiable M est une application

$$\nabla : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

telle que $X \in \chi(M)$. L'application $\nabla_X : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ vérifie les propriétés suivantes pour tout $X, Y \in \chi(M)$, $f, g \in \mathbb{F}(M)$

$$1) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$2) \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$$

$$3) \nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y.$$

1.1.6 Variété différentiable :

Définition 1.1.9 Une variété différentiable est un couple (M, A) , où M est une variété topologique et A est un atlas sur M .

Exemple 1.1.1 L'espace \mathbb{R}^n muni l'atlas (\mathbb{R}^n, I_d) est un variété différentiable.

1.2 Variétés Riemanniennes :

1.2.1 Métriques Riemanniennes :

Définition 1.2.1 Soit M une variété différentiable un tenseur métrique ou une métrique Riemannienne est une application qui à chaque couple de vecteur $(X, Y) \in T_p M$ fait correspondre un nombre $g(X, Y) \in \mathbb{R}$. Tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Pour tout $p \in M$, l'application

$$g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \longmapsto g(X, Y).$$

est une forme bilinéaire symétrique et définie positive

2) Si $u \subset M$ est un ouvert de M et $X, Y \in \Psi(u)$. Alors, la fonction

$$p \rightarrow g(X, Y) = g(X(p), Y(p))$$

est différentiable.

Une variété Riemannienne est une couple (M, g) où M est une variété différentiable et g une métrique Riemannienne.

1.2.2 La connexion linéaire :

Définition 1.2.2 Soit M une variété différentiable et une application ∇ (napla) qui a tout $X \in T_p M$ ($p \in M$) et tout $Y \in T_p M$ fait correspondre un vecteur tangent :

$$\begin{aligned} \nabla_x & : T_p M \rightarrow T_p M \\ Y & \longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

On dit que ∇ est une connexion s'elle vérifié les conditions suivantes :

- 1) $\nabla_{(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)} Y = \lambda_1 \nabla_{X_1} Y + \lambda_2 \nabla_{X_2} Y \quad \forall X_1, X_2, Y \in T_p M$
- 2) $\nabla_X (\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \nabla_X Y_1 + \lambda_2 \nabla_X Y_2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- 3) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$ avec $f : M \rightarrow \mathbb{R}(C^\infty)$.

1.2.3 La courbure de Ricci :

Définition 1.2.3 C'est un 2-tenseur symétrique au point m noté $Ric(X, Y) =$ trace de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} T_m M & \rightarrow T_m M \\ v & \rightarrow R(v; X)Y. \end{aligned}$$

Si $\{e_i\}_{i=\{1, \dots, n\}}$ est une base orthonormé de $T_m M$;

$$\begin{aligned} Ric_m(X; Y) &= \sum_{i=1}^n R(X_i e_i, Y_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(X_i e_i) e_i, Y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(X_i e_i) e_i, Y). \end{aligned}$$

En général le tenseur de Ricci n'est pas symétrique.

1.2.4 La courbure de Gauss :

$$K = \frac{EG - F^2}{EG - F^2}$$

Si $K = 0$, on dit que (S) est plane

1.2.5 La courbure moyenne :

$$H = \frac{lG + nE - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

Si $H = 0$, on dit que (S) est minimale.

1.2.6 Connexion d'un sous-variété d'une variété Riemannienne :

Définition 1.2.4 Soit (\tilde{M}, \tilde{g}) une variété Riemannienne, et (M, g) une sous-variété de (\tilde{M}, \tilde{g}) , soit $m \in M$. Il existe une carte (u, φ) de \tilde{M} , $(k \in M)$ au voisinage de m tel que $\varphi(u \cap M) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Si au point $\varphi^{-1}((x; 0))$ nous avons $X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nous définissons \tilde{X}, \tilde{Y} au point $\varphi^{-1}((x; 0))$ par $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n+k} \xi_i \varphi^{-1}((x; 0)) \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^{n+k} \eta_i \varphi^{-1}((x; 0)) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Soient $\tilde{\nabla}$ et ∇ les connexions canoniques de (\tilde{M}, \tilde{g}) et (M, g) respectivement. Soient \tilde{X}, \tilde{Y} et \tilde{Z} des prolongements de X, Y et Z sur un voisinage m de \tilde{M} . i.e :

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n+k} \tilde{\xi}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \tilde{\xi} = \begin{cases} \xi(x) & \text{si } i \leq n. \\ 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Pour tout point m de M . Un calcul en coordonnées locales donne immédiatement $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_m = [X, Y]_m$.

Par ailleurs en pour tout point de M . $g(X, Y) = \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y})$.

Donc $\tilde{X} \tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = Xg(Y, Z)$ sur M par suite, l'équation (de Kozul) appliquée successivement à ∇ et $\tilde{\nabla}$ donne

$$g_m(\nabla_X Y, Z) = \tilde{g}_m(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}).$$

D'où la conclusion $\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^T$.

Remarquons que $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})$ est automatiquement indépendante des prolongements de \tilde{X} et \tilde{Y} choisis.

Proposition 1.2.1 La formule de Gauss

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y)N,$$

où $\tilde{\nabla}$ et ∇ sont les connexions canoniques de (\tilde{M}, \tilde{g}) et (M, g) respectivement ; et Π c'est la deuxième forme fondamentale de M définie par :

$$\forall (X, Y) \in (\chi(M))^2,$$

$$\Pi(X, Y) = \tilde{g}(\nabla_X Y, N) = -\tilde{g}(\nabla_X N, Y).$$

Et N le vecteur normé principale de M .

1.3 Les espaces homogènes de dimension "3" : $\mathbb{R}^3, S^3, S^2 \times \mathbb{R}, H^3, H^2 \times \mathbb{R}, Nil_3, Sol_3, SL(2, \mathbb{R})$:

1.3.1 L'espace Euclidien \mathbb{R}^3 :

La métrique de l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 est

$$g_{\mathbb{R}^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

La base orthonormé de l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 est :

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x}, E_2 = \frac{\partial}{\partial y}, E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

1.3.2 La 3-Sphère S^3 :

$$S^3 = \{(x, y, z, t) / x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.\}$$

on a

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \cos(\varphi) \cos(\Psi). \\ y = \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\Psi). \\ z = \sin(\varphi) \cos(\Psi). \\ t = \sin(\Psi). \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} dx = -\sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\Psi) d\theta - \cos(\theta) \sin(\varphi) \cos(\Psi) d\varphi - \cos(\theta) \cos(\varphi) \sin(\Psi) d\Psi. \\ dy = \cos(\theta) \cos(\varphi) \cos(\Psi) d\theta - \sin(\theta) \sin(\varphi) \cos(\Psi) d\varphi - \sin(\theta) \cos(\varphi) \sin(\Psi) d\Psi. \\ dz = \cos(\varphi) \cos(\Psi) d\varphi - \sin(\varphi) \sin(\Psi) d\Psi. \\ dt = \cos(\Psi) d\Psi. \end{cases}$$

la métrique induite sur S^3 par celle de la métrique de \mathbb{R}^4 est :

$$\begin{aligned} g_{S^3} &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2. \\ &= \cos^2(\varphi) \cos^2(\Psi) d\theta^2 + \cos^2(\Psi) d\varphi^2 + d\Psi^2. \\ &= (d\theta, d\varphi, d\Psi) \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) \cos^2(\Psi) & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \\ d\Psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La base orthonormé de la 3-Sphère S^3 est :

$$E_1 = \frac{1}{\cos \varphi \cos \Psi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad E_2 = \frac{1}{\cos \Psi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial \Psi}.$$

1.3.3 L'espace $S^2 \times \mathbb{R}$:

$$X(\theta, \varphi) = (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))$$

La métrique canonique de $S^2 \times \mathbb{R}$ est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

$$\begin{cases} dx = \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi. \\ dy = \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi. \\ dz = -\sin(\theta) d\theta. \end{cases}$$

La métrique sur S^2 par celle de dS^2 est :

$$\begin{aligned} g &= dS_{s^2}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2 \\ &= (d\theta, d\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

donc la métrique de $S^2 \times \mathbb{R}$ est :

$$g_{S^2 \times \mathbb{R}} = \sin^2(\theta)d\theta^2 + d\varphi^2 + d\Psi^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base orthonormé de $S^2 \times \mathbb{R}$ est :

$$E_1 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial \Psi}.$$

1.3.4 L'espace Hyperbolique H^3 :

$$H^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0.\}$$

L'espace hyperbolique H^3 est muni de la métrique :

$$g_{H^3} = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

La base orthonormé de l'espace hyperbolique H^3 est :

$$E_1 = z \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = z \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = z \frac{\partial}{\partial z}.$$

1.3.5 L'espace $H^2 \times \mathbb{R}$:

$H^2 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y > 0\}$ une variété Riemannienne muni d'une métrique invariante à gauche :

$$g_{H^2 \times \mathbb{R}} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + dz^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base de $H^2 \times \mathbb{R}$ est :

$$E_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

1.3.6 L'espace de Heisenberg Nil_3 :

L'espace de Heisenberg Nil_3 à 3 dimension est un groupe des matrices qui est donné par :

$$Nil_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$[[X, Y], Z] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in Nil_3$$

L'espace de Heisenberg Nil_3 est muni de la métrique invariante à gauche :

$$(g_{ij}) := dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz \right)^2.$$

Et de la base orthonormé :

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Et de la connexion de Levi-Civita :

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= \nabla_{E_2} E_2 = \nabla_{E_3} E_3 = 0, \\ \nabla_{E_1} E_3 &= \nabla_{E_3} E_1 = -\frac{1}{2} E_2, \\ \nabla_{E_2} E_3 &= \nabla_{E_3} E_2 = \frac{1}{2} E_1, \quad \nabla_{E_1} E_2 = -\nabla_{E_2} E_1 = \frac{1}{2} E_3. \end{aligned}$$

1.3.7 L'espace Sol_3 :

L'espace homogène auquel nous intéressons est le groupe de Lie Sol_3 muni d'une métrique invariante à gauche

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2.$$

On peut également définir un repère canonique (E_1, E_2, E_3) sur Sol_3 donné par :

$$E_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

D'où l'expression suivante des termes non nul de la connexion de Levi-Civita ∇ dans ce repère :

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= -E_3, & \nabla_{E_2} E_2 &= E_3. \\ \nabla_{E_1} E_3 &= E_1, & \nabla_{E_2} E_3 &= -E_2. \end{aligned}$$

1.3.8 L'espace $SL(2, \mathbb{R})$:

Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ est défini comme le groupe 2×2 des matrices avec des entrées du champs des nombres réels et du déterminant 1 sous la multiplication matricielle.

$$SL(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

$SL(2, \mathbb{R})$ une variété Riemannienne muni d'une métrique invariante à gauche :

$$g_{SL(2, \mathbb{R})} = \left(\frac{dx}{2y} \right)^2 + \left(\frac{dy}{2y} \right)^2 + \left(\frac{dx}{2y} + dz \right)^2$$

Et de base orthonormé :

$$E_1 = 2y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = 2y \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

Surfaces minimales de translation sur Sol_3 :

2.1 Le groupe de Lie Sol_3 :

L'espace homogène auquel nous intéressons est le groupe de Lie Sol_3 muni d'une métrique invariante à gauche

$$\langle ., . \rangle = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2 .$$

Une base orthonormé invariant à gauche $\{E_1, E_2, E_3\}$ dans Sol_3 est donné par :

$$E_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

La connexion Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de l'espace Sol_3 à l'égard de ce base est

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 &= -E_3 & \tilde{\nabla}_{E_1} E_2 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_1} E_3 &= E_1 \\ \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_2} E_2 &= E_3 & \tilde{\nabla}_{E_2} E_3 &= -E_2 \\ \tilde{\nabla}_{E_3} E_1 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_3} E_2 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned}$$

où (x, y, z) sont des coordonnées habituelles de \mathbb{R}^3 . Cet espace est muni de la multiplication interne

$$(x, y, z) * (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x + e^{-z}\bar{x}, y + e^z\bar{y}, z + \bar{z}).$$

Dans l'espace Sol_3 , la dimension de son groupe d'isométrie est de 3 et la composante de

l'identité est générée par les familles d'isométries suivantes :

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\mapsto (x + c, y, z), \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y + c, z), \\ (x, y, z) &\mapsto (e^{-c}x, e^cy, z + c). \end{aligned} \tag{1}$$

Où $c \in \mathbb{R}$. Les champs Killing associées à ces isométries sont, respectivement,

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Définition 2.1.1 Une surface de translation $M(\alpha, \beta)$ sur l'espace Sol_3 est une surface paramétrisée par :

$$x(\alpha, \beta) = \alpha(s) * \beta(t)$$

Où : $\alpha : I \rightarrow Sol_3$; $\beta : J \rightarrow Sol_3$ sont des courbes dans \mathbb{R}^3 .

Nous soulignons que la multiplication $*$ sur l'espace Sol_3 n'est pas commutative, et par conséquent pour chaque choix de courbes α et β nous pouvons construire deux surfaces de translation, à savoir $M(\alpha, \beta)$ et $M(\beta, \alpha)$, qui sont différents. Le but de ce chapitre est l'étude et la classification des surfaces minimales de translation dans l'espace Sol_3 .

Théorème 2.1.1 Considérons le groupe d'isométries $G = \{T_s, s \in \mathbb{R}\}$, avec Les seules surfaces minimales invariables par G sont les plans $y = y_0$, les plans $z = z_0$ et les surfaces

$$z(x, y) = \log(y + \lambda) + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Voir par exemple [5], [6]. Soit M une surface orientable et $x : M \rightarrow Sol_3$ est une immersion isométrique. Considérons N le champ de vecteurs unitaire normal de M . ∇ est la connexion Levi-Civita induite sur M . Pour une utilisation ultérieure, nous écrivons la formule de Gauss

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y)N. \quad \Pi(X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle. \tag{2}$$

Où X, Y sont des champs de vecteurs tangents sur M et Π est la deuxième forme fondamentale de l'immersion. Pour chaque $p \in M$, nous considérons l'application de Weingarten $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$, défini par

$$A_p(v) = -\tilde{\nabla}_X(N)$$

où T_pM est le plan tangent.

Avec X un champ de vecteurs tangent de M qui est extension de v au point p . La courbure moyenne de l'immersion est définie comme $H(p) = (1/2) \text{trace}(A)$. Nous savons que A est un endomorphisme auto-adjoint par rapport à la métrique sur M , c'est-à-dire, $\langle A_p(u), v \rangle = \langle u, A_p(v) \rangle$, $u, v \in T_pM$. De plus,

$$-\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle. \quad (3)$$

A chaque plan tangent T_pM , nous prenons une base $\{e_1, e_2\}$ et soit écrits

$$\begin{aligned} A_p(e_1) &= -\tilde{\nabla}_{e_1} N = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \\ A_p(e_2) &= -\tilde{\nabla}_{e_2} N = a_{21}e_1 + a_{22}e_2, \end{aligned}$$

Nous multiplions dans les deux identités par e_1 et e_2 et désignons par $\{E, F, G\}$ les coefficients de la première forme fondamentale :

$$E = \langle e_1, e_1 \rangle, \quad F = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad G = \langle e_2, e_2 \rangle.$$

En utilisant (3), nous obtenons ;

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} -\langle \tilde{\nabla}_{e_1} N, e_1 \rangle & F \\ -\langle \tilde{\nabla}_{e_1} N, e_2 \rangle & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} = \frac{\begin{vmatrix} \langle N, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 \rangle & F \\ \langle N, \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \rangle & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} E & -\langle \tilde{\nabla}_{e_2} N, e_1 \rangle \\ F & -\langle \tilde{\nabla}_{e_2} N, e_2 \rangle \end{vmatrix}}{EG - F^2} = \frac{\begin{vmatrix} E & \langle N, \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 \rangle \\ F & \langle N, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle \end{vmatrix}}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Nous concluons alors,

$$H = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{G\langle N, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 \rangle - 2F\langle N, \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \rangle + E\langle N, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle}{EG - F^2}.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, dans ce travail, nous sommes intéressés par des surfaces minimales ; Ainsi, dans l'expression ci-dessus de H , nous pouvons changer N par un autre vecteur proportionnel \bar{N} . Alors M est une surface minimale si et seulement si

$$G\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 \rangle - 2F\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \rangle + E\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle = 0. \quad (4)$$

Pour chaque choix d'une paire de courbes α et β dans des plans de coordonnées, nous obtenons une sorte de surfaces de translation. Nous distinguons les six types comme suit :

$$M(\alpha, \beta) \text{ et } M(\beta, \alpha), \alpha \subset \{z = 0\}, \beta \subset \{y = 0\}, \quad (\text{type } I \text{ et } IV)$$

$$M(\alpha, \beta) \text{ et } M(\beta, \alpha), \alpha \subset \{z = 0\}, \beta \subset \{x = 0\}, \quad (\text{type } II \text{ et } V)$$

$$M(\alpha, \beta) \text{ et } M(\beta, \alpha), \alpha \subset \{y = 0\}, \beta \subset \{x = 0\}, \quad (\text{type } III \text{ et } VI)$$

L'idée dans ce mémoire est de considérer l'équation de surface minimale(4) pour chacun des six types de surfaces soulignées ci-dessus. Pourtant, nous ne discuterons que des cas I , II et III , les calculs pour les trois autres étant analogues. Dans chacun de ces cas, (4) est une équation différentielle ordinaire de l'ordre deux, que nous devons résoudre. Dans ce mémoire, nous sommes en mesure de résoudre l'équation(4) lorsque la première courbe se situe dans le plan de coordonnées $z = 0$ et nous complètent la classification des surfaces minimales de translation de type I et II . En ce qui concerne les surfaces de la famille de type III , l'équation(4) adopte une expression très compliquée et nous donnons seulement des exemples de surfaces minimales. La difficulté de cette affaire reflète l'absence de symétries de l'espace Sol_3 , en particulier le fait Les trois axes de coordonnées ne sont pas interchangeables. Le même problème apparaît lorsque l'on étudie les surfaces invariantes dans Sol_3 , considérant seulement les surfaces invariantes dans les deux premières familles d'isométries dans(1) c'est-à-dire les translations dans les directions x ou y , mais pas par la troisième famille d'isométries dans (1) : Voir par exemple [10] pour le cas des surfaces invariantes ombilicales dans Sol_3 et [8] pour les surfaces invariantes avec une courbure moyenne constante ou une courbure de Gauss constante.

2.2 Classification des surfaces minimales de translation de type I :

Théorème 2.2.1 *Les seules surfaces minimales de translation dans l'espace Sol_3 de type I sont les plans $y = y_0$, les plans $x = x_0$, les plans $z = z_0$ et les surfaces dont la paramétrisation est*

$$x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s + t, f(s), g(t)) \text{ où } f(s) = as + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ et}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m, \quad I(t) = \int^t \sqrt{\cosh \tau d\tau}, c > 0, \quad e^{4m} = a^2.$$

Preuve. Comme notre étude est locale, on peut supposer que chacune des courbes générant la surface $M(\alpha, \beta)$ est le graphique d'une fonction lisse. Considérons deux courbes $\alpha(s) = (s, f(s), 0)$ et $\beta(t) = (t, 0, g(t))$, la surface de translation $M(\alpha, \beta)$

Paramètre comme :

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \alpha(s) * \beta(t) = (s, f(s), 0) * (t, 0, g(t)), \\ &= (s + e^{-z}t, f(s) + e^z 0, g(t)), \\ &= (s + t, f(s), g(t)). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} e_1 &= x_s = \frac{D}{Ds} u(s, t) \\ &= (1, f', 0) = e^g E_1 + f' e^{-g} E_2. \\ e_2 &= x_t = \frac{D}{Dt} u(s, t), \\ &= (1, 0, g') = e^g E_1 + g' E_3. \end{aligned}$$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont :

$$E = \langle e_1, e_1 \rangle = e^{2g} + f'^2 e^{-2g}, \quad F = \langle e_1, e_2 \rangle = e^{2g}, \quad G = \langle e_2, e_2 \rangle = e^{2g} + g'^2.$$

Et un vecteur orthogonal à chaque point est

$$\bar{N} = (f' g' e^{-g}) E_1 - g' e^g E_2 - f' E_3.$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Ds} E_1 &= -e^g E_3 \\ \frac{D}{Ds} E_2 &= f' e^{-g} E_3 \\ \frac{D}{Ds} E_3 &= e^g E_1 - f' e^g E_2 \\ \frac{D}{Dt} E_1 &= -e^g E_3 \\ \frac{D}{Dt} E_2 &= 0 \\ \frac{D}{Dt} E_3 &= e^g E_1 \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{cases} E_1 \wedge E_2 = E_3 \\ E_2 \wedge E_3 = E_1 \\ E_3 \wedge E_1 = E_2 \end{cases}$$

D'où, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= \frac{D}{Ds} (e^g E_1 + f' e^{-g} E_2), \\ &= e^g \frac{D}{Ds} E_1 + f'' e^{-g} E_2 + f' e^{-g} \frac{D}{Ds} E_2, \\ &= f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{e_2}e_2 &= \frac{D}{Dt}(e^g E_1 + g' E_3) \\ &= g' e^g E_1 + e^g \frac{D}{Dt} E_1 + g'' e^g E_3 + g' \frac{D}{Dt} E_3 \\ &= 2g' e^g E_1 + (g'' - e^{2g}) E_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{e_1}e_2 &= \frac{D}{Ds}(e^g E_1 + g' E_3), \\ &= e^g \frac{D}{Ds} E_1 + g' \frac{D}{Ds} E_3, \\ &= g' e^g E_1 - f' g' e^{-g} E_2 - e^{2g} E_3.\end{aligned}$$

avec ;

$$\begin{aligned}\langle N, \tilde{\nabla}_{e_1}e_1 \rangle &= \langle (f' g' e^{-g}) E_1 - g' e^g E_2 - f' E_3, f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3 \rangle, \\ &= -f'' g' - f'^3 e^{-2g} + f' e^{2g}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle N, \tilde{\nabla}_{e_2}e_2 \rangle &= \langle (f' g' e^{-g}) E_1 - g' e^g E_2 - f' E_3, 2g' e^g E_1 + (g'' - e^{2g}) E_3 \rangle, \\ &= 2f' g'^2 - f' g'' + f' e^{2g}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle N, \tilde{\nabla}_{e_1}e_2 \rangle &= \langle (f' g' e^{-g}) E_1 - g' e^g E_2 - f' E_3, g' e^g E_1 - f' g' e^{-g} E_2 - e^{2g} E_3 \rangle, \\ &= 2f' g'^2 + f' e^{2g}.\end{aligned}$$

Selon (4), la surface est minimal si et seulement si

$$\begin{aligned}G\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1}e_1 \rangle - 2F\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1}e_2 \rangle + E\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_2}e_2 \rangle &= 0, \\ -f'' g'^3 - e^{2g}(f'' g' + f' g'^2 + f' g'') + e^{-2g} f'^3 (g'^2 - g'') &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Nous commençons à étudier l'équation (5) dans des cas simples. Si f est constant, $f(s) = y_0$, alors $M(\alpha, \beta)$ est le plan $y = y_0$. Si g est constant, $g(t) = z_0$, la surface est le plan $z = z_0$.

Remarque (2.2.1)

Si nous écrivons les courbes α et β comme $\alpha(s) = (f(s), s, 0)$ et $\beta(t) = (g(t), 0, t)$, alors la paramétrisation de $M(\alpha, \beta)$ est $x(s, t) = (f(s) + g(t), s, t)$. L'équation (5) est maintenant ;

$$f'' g'^3 - e^{2g}(-f'' g' + f'^2 g'^2 + f'^2 g'') + e^{-2g}(g'^2 - g'') = 0.$$

Ensuite, si f et g sont constants, la surface est minimale. Cela signifie que les plans $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, sont des surfaces minimales de translation de type I

Désormais, nous supposons dans (5) que $f' g' \neq 0$; Nous divisons(5) par $f'^3 g'^3$:

$$-\frac{f''}{f'^3} - e^{2g} \left(\frac{f''}{f'^3} \frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2} \frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \frac{1}{f'^2} \right) + e^{-2g} \frac{g'^2 - g''}{g'^3} = 0. \quad (6)$$

Dans (6),le premier et troisième sommets sont la somme d'une fonction sur s et d'autres selon t , respectivement. Ensuite, nous différencions en ce qui concerne s et t , et nous obtenons ;

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[e^{2g} \left(\frac{f''}{f'^3} \frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2} \frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \frac{1}{f'^2} \right) \right] = 0.$$

Ça signifie

$$\left(\frac{f''}{f'^3} \right)' \left(\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} \right) - 2 \frac{f''}{f'^3} - \left(\frac{f''}{f'^3} \right) \left(\left(\frac{g''}{g'^3} \right)' + \frac{g''}{g'^2} \right) = 0. \quad (7)$$

(1) Supposons $f'' = 0$. Alors $f(s) = as + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation(5) implique

$$e^{2g}(g'' + g'^2) = a^2 e^{-2g}(-g'' + g'^2).$$

Nous faisons le changement $g(t) = h(t) + m$, avec $e^{4m} = a^2$ et suivant, $\zeta(t) = 2h(t)$. Ensuite, nous obtenons $2\zeta''(e^\zeta + e^{-\zeta}) = -\zeta^2(e^\zeta - e^{-\zeta})$, où

$$2\zeta'' \cosh(\zeta) = -\zeta^2 \sinh(\zeta).$$

Une première intégration implique

$$\zeta^2 = \frac{c^2}{\cosh(\zeta)}, \quad c > 0.$$

Un deuxième d'intégration obtient $\int^t \sqrt{\cosh \zeta(\tau)} \zeta(t) d\tau = ct + c_1$ où $c_1 \in \mathbb{R}$

Et peut être pris 0. Considérons $I(t) = \int^t \sqrt{\cosh \tau} d\tau$. Qui est strictement fonction croissante.

Par conséquent, l'équation $I(\zeta(t)) = ct$ a une solution unique.

$$\zeta(t) = I^{-1}(ct).$$

(2) Supposons $g'' - g'^2 = 0$. Comme g n'est pas constant, la fonction g est $g(t) = -\log|t + \lambda| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ensuite(5) implique

$$(1 + e^{2\mu}) f''(t + \lambda) - 2e^{2\mu} f' = 0.$$

C'est un polynôme sur t . Alors $f' = f'' = 0$: contradiction.

(3) Considérons $f''(g'' - g'^2) \neq 0$. De(7), nous concluons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\frac{(f''/f'^3)'}{f''/f'^3} = a = \frac{(g''/g'^3)' + g''/g'^2 + 2}{1/g' - g''/g'^3}. \quad (8)$$

(a) Supposons $a = 0$. Alors $f'' = bf'^3$ pour une constante $b \neq 0$. Ensuite, $1/f'^2 = -2bs + c$, $c \in \mathbb{R}$. D'autre part, la deuxième équation dans (8) écrit comme

$$\left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'}\right)' + 2 = 0. \quad (9)$$

Alors ;

$$\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} = -2t + p, \quad p \in \mathbb{R}$$

Avec cette information sur f et g , l'équation(6) écrit comme

$$-b \left(1 + \frac{e^{2g}}{g'^2}\right) + (2bs - c)e^{2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'}\right) - e^{-2g} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'}\right) = 0. \quad (10)$$

Puisque cette expression est une équation polynomiale sur s , et parce que $b \neq 0$, Le coefficient de tête correspondant à s implique

$$\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} = 0.$$

En combinaison avec (9), nous avons $1/g' = t - p/2$ et donc $g(t) = \log(t - p/2) + q$, $q \in \mathbb{R}$.

Maintenant, le coefficient indépendant en (10) est

$$-b \left(1 + e^{2q}(t - p/2)^4\right) + \frac{2e^{-2q}}{t - p/2} = 0.$$

Après quelques manipulations, nous avons une équation polynomiale sur t dont le principal coefficient est be^{2q} . Comme il doit disparaître, nous arrivons à une contradiction.

(b) Supposer $a \neq 0$. A partir de la première équation dans (8), on obtient une première intégrale : il existe $b \neq 0$ tel que

$$\frac{f''}{f'^3} = be^{as}. \quad (11)$$

Ensuite, nous avons cela pour un peu de $c \in \mathbb{R}$,

$$\frac{-1}{2f'^2} = \frac{b}{a}e^{as} + c. \quad (12)$$

Branchement (11) et (12) dans (6), nous avons pour tout s

$$-be^{as} \left[1 + e^{2g} \left(\frac{1}{g'^2} - \frac{2}{a} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) \right) \right] + 2ce^{2g} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) + e^{-2g} \left(\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} \right) = 0.$$

C'est un polynôme sur e^{as} et donc les deux coefficients doivent disparaître. Il s'ensuit que g satisfait les deux équations différentielles suivantes :

$$1 + e^{2g} \left(\frac{1}{g'^2} - \frac{2}{a} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) \right) = 0 \quad (13)$$

$$2ce^{2g} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) + e^{-2g} \left(\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} \right) = 0. \quad (14)$$

Si $c = 0$, alors $g'' - g'^2 = 0$, ce qui est impossible. Par conséquent, nous supposons que $c \neq 0$. Nous étudions la fonction g . De (8), on a une équation différentielle linéaire pour $\varphi = 1/g' - g''/g'^3$, à savoir,

$$\dot{\varphi} + a\varphi - 2 = 0.$$

La solution est

$$\varphi = \frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} = \frac{2}{a} + \lambda e^{-at}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (15)$$

Combinant (15) avec (14) nous avons

$$2ce^{2g} \left(\frac{2}{g'} - \frac{2}{a} - \lambda e^{-at} \right) + e^{-2g} \left(\frac{2}{a} + \lambda e^{-at} \right) = 0.$$

Nous déduisons

$$\frac{1}{g'} = \frac{1}{4ac} e^{-at-4g} (-1 + 2ce^{4g}) (2e^{at} + a\lambda). \quad (16)$$

Remettre cette valeur dans (15) encore, nous avons

$$a\lambda + 4c^2 e^{8g(t)} (2e^{at} + a\lambda) - 4ce^{4g(t)} (3e^{at} + a\lambda) = 0$$

Cela implique

$$e^{4g(t)} = \frac{3e^{at} + a\lambda \pm \sqrt{9e^{2at} + 4a\lambda e^{at}}}{2c(2e^{at} + a\lambda)}.$$

De là, nous avons deux valeurs pour g . Sans perte de généralité, nous prenons le signe plus dans l'expression ci-dessus (le raisonnement est analogue au choix moins). En combinaison avec (16), nous avons :

$$24e^{at} + 11a\lambda + 4\sqrt{9e^{2at} + 4a\lambda e^{at}} + 3a\lambda e^{-at}\sqrt{9e^{2at} + 4a\lambda e^{at}} = 0.$$

Cette identité peut être considérée comme une équation polynomiale sur e^{at} :

$$108e^{3at} + 62a\lambda e^{2at} - 14a^2\lambda^2 e^{at} - 9a^3\lambda^3 = 0.$$

Comme le principal coefficient doit disparaître, nous avons une contradiction. \square

2.3 Classification des surfaces minimales de translation de type II :

Théorème 2.3.1 *Les seules surfaces minimales de translation dans Sol_3 de type II sont les plans $x = x_0$, les plans $z = z_0$ et les surfaces dont la paramétrisation est $x(s, t) = (s, t + f(s), g(t))$, tel que*

$$(1) \quad f(s) = a \text{ et } g(t) = \log |t + \lambda| + \mu, \text{ tel que } a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad f(s) = as + b, a \neq 0 \text{ et } g(t) = (1/2)I^{-1}(ct) + m, \text{ tel que}$$

$$I(t) = \int^t \sqrt{\cosh \tau d\tau}, \quad c > 0, \quad e^{4m} = a^2.$$

Preuve. Considérons α dans le plan $z = 0$ et β dans le plan $x = 0$. Encore une fois, supposons que les deux courbes sont des graphiques de fonctions et nous prenons $\alpha(s) = (s, f(s), 0)$ et $\beta(t) = (0, t, g(t))$. Considérons la surface de translation correspondante $M(\alpha, \beta)$ de paramètre :

$$x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s, t + f(s), g(t)).$$

Des calculs similaires comme dans la preuve du théorème précédente donnent :

$$\begin{aligned} e_1 &= x_s = \frac{D}{Ds}x(s, t) = \frac{D}{Ds} \\ &= (1, f', 0) = e^g E_1 + f' e^{-g} E_2 \\ e_2 &= x_t = \frac{D}{Dt}x(s, t) = \frac{D}{Dt} \\ &= (0, 1, g') = e^{-g} E_1 + g' E_2, \end{aligned}$$

La première forme fondamentale est :

$$E = \langle e_1, e_1 \rangle = e^{2g} + f'^2 e^{-2g}, F = \langle e_1, e_2 \rangle = f' e^{-2g}, G = \langle e_2, e_2 \rangle = e^{-2g} + g'^2.$$

Alors $\bar{N} = (f' g' e^{-g})E_1 - g' e^g E_2 + E_3$ est un vecteur orthogonal à M .

d'autre part :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{Ds} E_1 = \tilde{\nabla}_{e_1} E_1 = e^g \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 + f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 = -e^g E_3, \\ \frac{D}{Ds} E_2 = \tilde{\nabla}_{e_1} E_2 = e^g \tilde{\nabla}_{E_1} E_2 + f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{E_2} E_2 = f' e^{-g} E_3, \\ \frac{D}{Ds} E_3 = \tilde{\nabla}_{e_1} E_3 = e^g \tilde{\nabla}_{E_1} E_3 + f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{E_2} E_3 = e^g E_1 - f' e^{-g} E_2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{Dt} E_1 = \tilde{\nabla}_{e_2} E_1 = e^{-g} \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 + g' \tilde{\nabla}_{E_3} E_1 = -e^g E_3, \\ \frac{D}{Dt} E_2 = \tilde{\nabla}_{e_2} E_2 = e^{-g} \tilde{\nabla}_{E_2} E_2 + g' \tilde{\nabla}_{E_3} E_2 = 0, \\ \frac{D}{Dt} E_3 = \tilde{\nabla}_{e_2} E_3 = e^{-g} \tilde{\nabla}_{E_2} E_3 + g' \tilde{\nabla}_{E_3} E_3 = e^g E_1. \end{array} \right.$$

Les dérivés covariants sont :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= \frac{D}{Ds} (e^g E_1 + f' e^{-g} E_2), \\ &= f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 &= \frac{D}{Dt} (e^{-g} E_2 + g' E_3), \\ &= -2g' e^{-g} E_2 + (g'' + e^{-2g}) E_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 &= \frac{D}{Ds} (e^{-g} E_2 + g' E_3), \\ &= g' e^{-g} E_1 - f' g' e^{-g} E_2 + e^{-2g} f' E_3. \end{aligned}$$

Et leurs produits par \bar{N} sont :

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 \rangle &= \langle (f' g' e^{-g})E_1 - g' e^g E_2 + E_3, f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3 \rangle, \\ &= -f'' g' + f'^2 e^{-2g} - e^{2g}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle &= \langle (f' g' e^{-g})E_1 - g' e^g E_2 + E_3, -2g' e^{-g} E_2 + (g'' + e^{-2g}) E_3 \rangle, \\ &= 2f' g'^2 + g'' + e^{-2g}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \rangle &= \langle (f' g' e^{-g})E_1 - g' e^g E_2 + E_3, g' e^g E_1 - f' g' e^{-g} E_2 + f' e^{-2g} E_3 \rangle, \\ &= 2f' g'^2 + f' e^{-2g}. \end{aligned}$$

En utilisant (4), la surface est minimal si

$$-f''g'^3 + e^{-2g}(f'^2(g'' - g'^2) - f''g') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0 \quad (17)$$

Supposons que $f' = 0$, soit f une fonction constante. L'équation ci-dessus se réduit à $g'' + g'^2 = 0$. Si $g' = 0$, alors $g(t) = z_0$ est constant et la surface $M(\alpha, \beta)$ est le plan $z = z_0$. Les solutions non constantes sont données par $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque (2.3.1) Comme dans les cas de surfaces de translation de type I, nous avons que les plans $x = x_0$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour cela, nous écrivons $\alpha(s) = (f(s), 0, s)$. Ensuite, le calcul de (4) donne

$$f''g'^3 + e^{-2g}(f'(g'' - g'^2) + f''g') + f'^3e^{2g}(g'' + g'^2) = 0$$

Si f est constant, alors il satisfait l'équation ci-dessus, c'est-à-dire que la surface $M(\alpha, \beta)$ est $x(s, t) = (x_0, t + s, g(t))$ c'est-à-dire le plan $x = x_0$ est une surface minimale de translation de type II.

Nous supposons maintenant dans (17) que $f'g' \neq 0$. Nous divisons (17) par g'^3 , et nous obtenons

$$-f'' + e^{-2g}\left(f'^2\left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'}\right) - f''\frac{1}{g'^2}\right) + e^{2g}\left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'}\right) = 0 \quad (18)$$

Étant donné que les premiers et derniers sommets de l'expression ci-dessus sont des fonctions dépendant uniquement de s et t , respectivement, nous différencions par rapport à s et t , et nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[e^{-2g} \left(\frac{f''}{g'^2} + \frac{f'^2}{g'} - f'^2 \frac{g''}{g'^3} \right) \right] &= 0 \\ f' f'' \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' - f' f'' \frac{g''}{g'^2} + f''' \frac{g''}{g'^3} + 2f' f'' + \frac{f'''}{g'} &= 0, \end{aligned}$$

Ou

$$f' f'' \left(\left(\frac{g''}{g'^3} \right)' - \frac{g''}{g'^2} + 2 \right) + f''' \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) = 0. \quad (19)$$

(1) Supposons $f'' = 0$. Alors $f(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. De (17), nous avons

$$a^2 e^{-2g} (g'' - g'^2) + e^{2g} (g'' + g'^2) = 0.$$

Le changement de variables $\zeta(t) = 2(g(t) - m)$, $e^{4m} = a^2$ donne, Alors

$$\zeta'^2 = \frac{c}{\cosh(\zeta)}, \quad c > 0$$

Et cette situation est analogue à celle de la section précédente.

(2) Supposons $g'' + g'^2 = 0$. Parce que g n'est pas constant, alors $g'(t) = \log(t + \lambda) + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors l'équation (17) implique

$$(1 + e^{2\mu})f''(t + \lambda) + 2f' = 0.$$

Ainsi, $f'' = f' = 0$ et f est constant : contradiction

(3) Supposons $f''(g'' + g'^2) \neq 0$. De (19), il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{-f'''}{f'f''} = a = \frac{(g''/g'^3)' - g''/g'^2 + 2}{g''/g'^3 + 1/g'}. \quad (20)$$

(a) Cas $a = 0$. Alors $f'(s) = bs + c$, avec $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Equation (17) obtient

$$-bg'^3 + e^{-2g} \left((bs + c)^2 (g'' - g'^2) - bg' \right) + e^{2g} (g'' + g'^2) = 0. \quad (21)$$

Cette équation polynomiale sur s implique que le coefficient de tête doit disparaître.

Ainsi, $g'' - g'^2 = 0$ et donc, on obtient $g(t) = -\log|pt + q|$, où $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Le coefficient indépendant dans (21) devrait être zéro aussi

$$b \frac{p^3}{(pt + q)^2} + bp(pt + q) + \frac{2p^2}{(pt + q)^4} = 0,$$

Ou

$$2p^2 + bp^3(pt + q) + bp(pt + q)^5 = 0.$$

et donc Cela implique $bp = 0$: contradiction.

(b) Affaire $a \neq 0$. La première équation dans (20) donne $f'''/f'' = -af'$, $a \in \mathbb{R}$ et donc, $f'' = be^{-af}$ avec $b \neq 0$. En multipliant par f , on a $f'f'' = bf'e^{-af}$ et donc

$$f'^2 = \frac{-2b}{a} e^{-af} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nous mettons la valeur de f et leurs dérivés dans (19), et nous obtenons

$$-be^{-af} \left[1 + e^{-2g} \frac{1}{g'^2} + \frac{2}{a} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) \right] + 2ce^{-2g} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) + e^{-2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) = 0.$$

Comme $f, b \neq 0$, nous concluons

$$1 + e^{-2g} \frac{1}{g'^2} + \frac{2}{a} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) = 0 \quad (22)$$

$$2ce^{-2g} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) + e^{2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) = 0. \quad (23)$$

Pour g , nous avons de (20) que si on met $\varphi = g''/g'^3 + 1/g'$, on a une équation différentielle $\varphi' - a\varphi + 2 = 0$. Nous résolvons et on obtient

$$\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} = \frac{2}{a} + \lambda e^{at}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (24)$$

En combinant (23) et (24), nous avons alors

$$2ce^{-2g} \left(\frac{-2}{g'} + \frac{2}{a} + \lambda e^{at} \right) + e^{2g} \left(\frac{2}{a} + \lambda e^{at} \right) = 0.$$

Alors ;

$$\frac{1}{g'} = \frac{(2c + e^{4g})(2 + a\lambda e^{at})}{4ac} = 0. \quad (25)$$

Nous mettons cette valeur de g' dans (24) et on obtient :

$$a\lambda e^{(at+8g)} + 4c^2(2 + a\lambda e^{at}) + 4c(3 + a\lambda e^{at})e^{4g} = 0.$$

Par conséquent

$$g(t) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2ce^{-at}}{a\lambda} \left(-(3 + a\lambda e^{at} \pm \sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}}) \right) \right).$$

Maintenant, nous calculons $1/g'$ et nous comparons avec (25), obtenant :

$$4(6 + \sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}}) + a\lambda e^{at}(11 + 3\sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}}) = 0.$$

Cette expression peut-être écrite comme

$$36a^3\lambda^3e^{3at} + 56a^2\lambda^2e^{2at} - 248a\lambda e^{at} - 432 = 0.$$

Ce qui est une contradiction. □

2.4 Exemples des surfaces minimales de translation de type III :

Théorème 2.4.1 *Des exemples de surfaces minimales de translation dans Sol_3 de type III sont les plans $z = z_0$, les plans $x = x_0$ et les surfaces dont la paramétrisation est $x(s, t) = (s, te^f, f(s) + g(t))$ avec*

1) $f(s) = a$, et $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$, $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2) $f(s) = -\log |s + \lambda| + \mu$, $g(t) = a$, $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) $g(t) = \log |t| + \mu$, f est une fonction arbitraire.

Preuve. Pour les surfaces minimal de translation de type III, nous supposons que les courbes génératrices sont des graphiques de fonctions lisses et que $\alpha(s) = (s, 0, f(s))$ et $\beta(t) = (0, t, g(t))$. La surface de translation $M(\alpha, \beta)$ est donnée par :

$$x(s, t) = (s, te^{f(s)}, f(s) + g(t)).$$

Nous calculons la courbure moyenne de la surface. Les premières dérivées sont :

$$\begin{aligned} e_1 &= x_s = \frac{D}{Ds}x(s, t), \\ &= (1, tf'e^f, f') = e^{f+g}E_1 + tf'e^{-g}E_2 + f'E_3, \\ e_2 &= x_t = \frac{D}{Dt}x(s, t), \\ &= (0, e^f, g') = e^{-g}E_2 + g'E_3. \end{aligned}$$

La première forme fondamentale est :

$$E = e^{2(f+g)} + t^2f'^2 e^{-2g} + f'^2, \quad F = tf'e^{-2g} + f'g', \quad G = e^{-2g} + g'^2.$$

Un vecteur normal \bar{N} est :

$$\bar{N} = f'(1 - tg')e^{-(f+g)}E_1 + g'e^gE_2 - E_3.$$

Les dérivés covariants sont :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1}e_1 &= \frac{D}{Ds}(e^{f+g}E_1 + tf'e^{-g}E_2 + f'E), \\ &= (2f'e^{f+g})E_1 + t(f'' - f')e^{-g}E_2 + (f'' - e^{2(f+g)} + t^2f'^2e^{-2g})E_3. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_2}e_2 &= \frac{D}{Dt}(e^{-g}E_2 + g'E_3), \\ &= -2g'e^{-g}E_2 + (g'' + e^{-2g})E_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1}e_2 &= \frac{D}{Ds}(e^{-g}E_2 + g'E_3), \\ &= g'e^{(f+g)}E_1 - tf'g'e^{-g}E_2 + tf'e^{-2g}E_3. \end{aligned}$$

Et leurs produits par \bar{N} sont :

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1}e_1 \rangle &= \langle f'(1 - tg')e^{-(f+g)}E_1 + g'e^gE_2 - E_3, (2f'e^{f+g})E_1 + t(f'' - f')e^{-g}E_2 \\ &\quad + (f'' - e^{2(f+g)} + t^2f'^2e^{-2g})E_3 \rangle, \\ &= 2f'^2 - 3tf'^2g' + tf''g' - f'' + e^{2(f+g)} - t^2f'^2e^{-2g}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle &= \langle f'(1 - tg')e^{-(f+g)}E_1 + g'e^g E_2 - E_3, -2g'e^{-g}E_2 + (g'' + e^{-2g})E_3 \rangle, \\ &= -2g'^2 - g'' - e^{-2g}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \rangle &= \langle f'(1 - tg')e^{-(f+g)}E_1 + g'e^g E_2 - E_3, g'e^{(f+g)}E_1 - tf'g'e^{-g}E_2 + tf'e^{-2g}E_3 \rangle, \\ &= f'g' - 2tf'g'^2 - tf'e^{-2g}.\end{aligned}$$

Ensuite (4) écrit comme

$$-2e^{(f+g)}(g'' + g'^2) + e^{-2g} \left(t^2 f'^2 g'^2 + f'^2 - t^2 f'^2 g'' - 3tf'^2 g' + tf''g' - f'' \right) - 2f'^2 g'^2 + tf'^2 g'^3 + tf''g'^3 - f''g'^2 - \dots \quad (26)$$

Dans cette section, nous donnons des exemples de surfaces minimales de translation de type III en distinguant certains cas particuliers :

(1) Supposons que f soit constant. Ensuite (26) implique $g'' + g'^2 = 0$. Si g est constant, la surface est un plan horizontal $z = z_0$; la solution non constante est $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En outre, $M(\alpha, \beta)$ est une surface invariante .

(2) Si g est une fonction constante, alors (26) conduit à $e^{-2g}(f'^2 - f'') = 0$ et donc f est constant et la surface est un plan horizontal $z = z_0$; la solution non constante est $f(s) = -\log |s + \lambda| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(3) Supposons que $tg' - 1 = 0$, puis $g(t) = \log |t| + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'équation (26) est satisfaite pour toute fonction f .

(4) Supposons $f'' = 0$, c'est-à-dire $f(s) = bs + c$ pour certaines constantes $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

L'équation (26) écrit comme

$$-2e^{(f+g)}(g'' + g'^2) + b^2(-2g'^2 + tg'^3 - g'') + b^2e^{-2g}(1 - 3tg' + t^2g'^2 - t^2g'') = 0.$$

En particulier, $-2e^{(f+g)}(g'' + g'^2)$ est une fonction qui dépend uniquement de t . Parce que $b \neq 0$, alors $g'' + g'^2 = 0$. et donc, $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Avec ces expressions pour f et g in (26) on obtient $\lambda b^2 e^{2\mu} ((1 + e^{2\mu})t + \lambda(e^{2\mu} - 1)) = 0$.

Il s'agit d'un polynôme sur t , donc $\lambda = 0$. Alors $tg' - 1 = 0$, et ce cas est contenu dans le précédent.

(5) Supposons $g'' + g'^2 = 0$. Parce que g n'est pas constant, alors $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, maintenant (26) écrives comme

$$\lambda((\lambda(-1 + e^{2\mu}) + (1 + e^{2\mu})t)f'^2 + (1 + e^{2\mu})(t + \lambda)f'') = 0.$$

Si $\lambda = 0$, alors $tg' - 1 = 0$ et ce cas a été étudié. Si $\lambda \neq 0$, nous avons un polynôme sur t obtenant quelques équations différentielles, à savoir,

$$(-1 + e^{2\mu})f'^2 + (1 + e^{2\mu})f'' = 0, \text{ et } f'' + f'^2 = 0.$$

Par conséquent $f'^2 = 0$ et f est une fonction constante. Cette affaire est contenue dans la première étude de cette section.

Avant d'indiquer le résultat suivant, nous soulignons que si on considère la courbe 2 donnée par $\alpha(s) = (f(s), 0, s)$, alors la surface paramétrise comme $x(\alpha, \beta) = (f(s), te^s, s + g(t))$.

La condition minimale est maintenant

$$-e^{2(s+g)} f'^3 (g'' + g'^2) + e^{-2g} (f'(t^2 g'^2 - 1 + t^2 g'' - 3tg' - f''(tg' - 1) + f'(-3tg'^3 - g'')) + f'' g'^2(1 - tg')) = 0$$

Pour cette équation, la fonction $f(s) = x_0$ est une solution pour tout g . Cela signifie que la surface est le plan vertical $x = x_0$.

Dans le cas général de (26), c'est-à-dire, si $f''g'(tg' - 1)(g'' + g'^2) \neq 0$, nous divisons l'expression (26) par $f'^2 e^{-2g}(tg' - 1)$, et nous écrivons

$$-\frac{e^{2f}}{f'^2} e^{4g} \frac{g'' + g'^2}{tg' - 1} + \left[\frac{(t^2 g'^2 + 1 + t^2 g'' - 3tg' + e^{2g}(-2g'^2 + tg'^3 - g''))}{tg' - 1} \right] + \frac{f''}{f'^2} (1 + e^{2g} g'^2) = 0. \quad (2.4.1)$$

Nous différencions par rapport à s , et en tenant compte du fait que l'expression entre parenthèses est une fonction sur t , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[-\frac{e^{2f}}{f'^2} e^{4g} \frac{g'' + g'^2}{tg' - 1} + \frac{f''}{f'^2} (1 + e^{2g} g'^2) \right] = 0.$$

Ça signifie

$$-\left(\frac{e^{2f}}{f'^2}\right)' \left(e^{4g} \frac{g'' + g'^2}{tg' - 1}\right) + \left(\frac{f''}{f'^2}\right)' (1 + e^{2g} g'^2) = 0. \quad (28)$$

Puisque f''/f'^2 ne peut pas être constant, on déduit de (28) qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{(e^{2f}/f'^2)'}{(f''/f'^2)'} = a = \frac{1 + e^{2g} g'^2}{e^{4g} \frac{g'' + g'^2}{tg' - 1}}. \quad (29)$$

Si $a = 0$, alors $1 + e^{2g}g'^2 = 0$, ce qui n'est pas possible. Ainsi, $a \neq 0$. De (29), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{e^{2f}}{f'^2} &= a \frac{f''}{f'^2} + b. \\ e^{2g}g'^2 &= ae^{4g} \frac{g'' + g'^2}{tg' - 1} - 1\end{aligned}$$

Avec $b \in \mathbb{R}$ une constante d'intégration. Finalement, en utilisant les deux équations, (27) peut être écrit comme

$$(b - a)g'^2e^{6g} + (a + b - 2atg' + g'^2)e^{4g} + (1 + t^2g'^2)e^{2g} + t^2 = 0. \quad (30)$$

Nous notons que les autres surfaces minimales de translation du type *III* devraient satisfaire l'équation précédente. \square

CONCLUSION

Le but de ce travail est de classifier les surfaces minimales de translation c'est a dire le produit de deux courbes dans l'espace Sol_3 , de trois types de surfaces qu'ont a classifier après Lopèz et Munteanu.

-
- [1] **J. Inoguchi**, Minimal surfaces in 3-dimensional solvable Lie groups, Chinese Ann. Math. Ser. B, **24** (2004), 73-84.
- [2] **J. Inoguchi, T. Kumamoto, N. Ohsugi and Y. Suyama**, Differential geometry of curves and surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces, II, Fukuoka Univ. Sei. Rep., **30** (2000), 17-47.
- [3] **J. Inoguchi and S. Lee**, A Weierstrass type representation for minimal surfaces in Sol. Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 2209-2216.
- [4] **O. Kowalski**, Generalized Symmetric Spaces, Lecture Notes in Math., **805**, Springer-Verlag, 1980.
- [5] **R. Lopèz**, Constant mean curvature surfaces in Sol with non-empty boundary, to appear in Houston J. Math, see also arXiv :0909.2549v2 [math.DG], 2009.
- [6] **R. Lopèz and M. I. Munteanu**, Invariant surfaces in the homogeneous space Sol with constant curvature, to appear in Math. Nachr., See also arXiv : 0909.2550[math.DG], 2009.
- [7] **Rafael Lopèz and Marian Ioan MUNTEANU**, Minimal translation surfaces in Sol₃, J. Math. Soc. Japan. Vol. 64, No. 3 (2012) pp. 985-1003.
- [8] **W. H. Meeks III**, Constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds, preprint, 2009.
- [9] **H. F. Scherk**, Bemerkungen uber die kleinste Flache innerhalb gegebener Grenzen, J. R. Angew. Math., 13 (1835), 185-208.
- [10] **R. Souam and E. Toubiana**, Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds, Comment. Math, Mclv., **84** (2009), 673-704.
- [11] **W. P. Thurston**. Three-dimensional geometry and topology Vol. **1**, Princeton Math, Ser., 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [12] **M. Troyanov**, L'horizon de SOL, Exposition. Math. **16** (1998). 441-479.