mémoire

Présenté à

L'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Par

Menad Abdallah

Pour obtenir le diplôme de
magister en Mathématiques.

Etude de certaines extensions de la théorie des sommes d'opérateurs, DaPrato-Grisvard, cadre commutatif.

Soutenue le *01 Mars 2012*

Devant le jury :

Président : M.Belaidi Benharrat, Professeur, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.
Examinateurs : M.Cheggag Mustapha, Maître de Conférences A, E.N.S.E. Oran
M.Bouaggada Djilali,Maître de Conférences A, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
M.Amir Abdessamed, Maître de Conférences A, Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.
Encadreur : M.Ahmed Medeghri, professeur,Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem.

Table des matières

Introduction

On considère dans ce travail la méthode des sommes d'opérateurs de Da Prato-Grisvard[4] cadre commutatif, Elle donne des conditions sous lesquelles le problème

$$Ax + Bx = y \tag{1}$$

peut être résolu. Ici A et B sont des opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$ denses dans un espace de Banach X. Le second membre de l'équation $y \in X$ est donné. Ces auteurs montrent que l'opérateur somme $A+B$ est **fermable** et que sa fermeture est **inversible**.

En 1975, Ils [4] ; Ont montré que le problème

$$Ax + Bx - \lambda x = y \quad , \; \lambda > 0 \tag{2}$$

admet une solution si on suppose que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \begin{cases} \exists \theta_A, \theta_B \in [0, \pi[\; \text{ tels que :} \\ i) \; \rho(A) \supset \Sigma_A = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \theta_A\} \\ \quad \forall z \in \Sigma_A, \|(A - z)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{C_A(\theta)}{|z|} \\ ii) \; \rho(B) \supset \Sigma_B = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \theta_B\} \\ \quad \forall z \in \Sigma_B, \|(B - z)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{C_B(\theta)}{|z|} \\ iii) \; \theta_A + \theta_B < \pi \end{cases}$$

$$(H_2) \begin{cases} \forall \lambda \in \rho(A), \forall \mu \in \rho(B) \\ (A - \lambda)^{-1}(B - \mu)^{-1} = (B - \mu)^{-1}(A - \lambda)^{-1} \end{cases}$$

(Commutativité au sens de la résolvante)

De plus si y est dans l'espace d'interpolation entre D_A et X noté $D_A(\theta, p)$ avec $\theta \in]0, 1[$ et $1 \leq p \leq +\infty$ (ou $y \in D_B(\theta, p)$) ; alors la solution a la régularité suivante : Ax, $Bx \in D_A(\theta, p)$ (resp $D_B(\theta, p)$).

La résolution de ce problème est basée essentiellement sur une construction explicite de la solution x sous la forme

$$x = S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1} y dz \tag{3}$$

où γ_λ est un contour (infini) dans l'intersection des domaines résolnants $\rho(A - \lambda) \cap \rho(-B)$ et qui sépare les spectres $\sigma(A - \lambda)$ et $\sigma(-B)$.

En 1989 R.Labbas[11] a donné de nouveaux résultats concernant le cas non dense. Ph.Clément, G. Gripenberg, V. Högnäs, et S-O. Londen (voir [2]) ont donné en 1999 une nouvelle démonstration des résultats de Da Prato-Grisvard en précisant les constantes intervenant dans les estimations de la régularité de Ax et Bx.

On utilisera la théorie des sommes d'opérateurs linéaires avec ses différentes approches pour étudier l'existence, l'unicité et la régularité des solutions.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres.

Dans le **chapitre 1** : On expose les principales notions d'analyse fonctionnelle utilisées en théorie des sommes, puis on énonce les résultats de la théorie des semi-groupes, enfin on donne quelques definitions et rappels concernant les espaces d'interpolation.

Au **second chapitre** : On donne des conditions suffisantes pour qu'un opérateur non borné L admette une fermeture, en général il suffit d'une «inégalité a priori» de la forme

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\|$$

pour $x \in D_L$ et pour λ assez grand et de la densité de l'image de $(L - \lambda)$ dans X pour au moins une valeur de λ .

Des résultats sont aussi obtenus pour le cas où D_L n'est pas supposé dense dans X. Le résultat essentiel est le

Theorème 0.1 *Soit L un opérateur linéaire de domaine D_L dense dans X et telle que :*

i) Il existe $N \geq 1$ et $\omega_0 \geq 0$ tels que

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\| \ , \ \forall \lambda > \omega_0 \ , \ x \in D_L$$

ii) Il existe $\omega_1 \geq \omega_0$ tel que $(L - \omega_1)(D_L)$ soit dense dans X. Alors L admet une fermeture $\overline{L}$ avec $\rho(\overline{L}) \supset]\omega_0, +\infty[$ et

$$\left\|(\overline{L} - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \quad , \quad \forall \lambda > \omega_0$$

$$(L - \lambda)(D_L) \text{ est dense dans } X, \ \forall \lambda > \omega_0$$

Dans le **troisième chapitre**, On développe les résultats obtenus par Da Prato-Grisvard [4] sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires. Plus précisement, soit X un espace de Banach complexe, A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$ dans X et leurs ensembles résolvants $\rho(A)$ et $\rho(B)$ non vides.

La somme de ces opérateurs est définie par :

$$\begin{cases} Lx = Ax + Bx \\ x \in D(L) = D(A) \cap D(B) \end{cases}$$

On étudie l'équation

$$\begin{cases} Lx - \lambda x = y \ , \ \lambda > 0, \ y \in X \\ x \in D(L) \end{cases} \tag{4}$$

Cette méthode est un outil puissant pour résoudre l'équation opérationnelle abstraite (1). Elle donne une solution unique et explicite de l'équation sous forme d'une integrale curviligne à valeurs vectorielles complexes :

$$x = \int_\Gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1} y dz$$

pour tout y dans un espace d'interpolation réel noté $D_A(\theta,p)$ (ou $D_A(\theta)$) entre X et $D(A)$, ou y dans un espace d'interpolation réel $D_B(\theta,p)$ (ou $D_B(\theta)$) entre X et $D(B)$. Ici on suppose que $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty]$.Les restrictions qu'on impose à A et B dans le but d'obtenir ce résultats, concernant les angles spectraux ω_A et ω_B de A et B qui doivent vérifier $\omega_A + \omega_B < \pi$. On imposera aussi $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$ et la commutativité des résolvantes de A et B.

Ces conditions garantissent, non seulement l'existence d'une unique solution x pour tout y dans l'un des espaces d'interpolation mentionnés plus haut, mais assurent aussi sa régularité maximale. Par exemple, si $y \in D_A(\theta,p)$, alors on a $x \in D(A) \cap D(B) \subseteq D_A(\theta,p)$; de plus Ax et Bx appartiennent à cet espace d'interpolation.

Proposition 0.1 *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2)*, on a pour tout* $y \in D_B(\theta,\infty)$ *où*

$$D_B(\theta,\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} t^\theta \left\| B(B+t)^{-1}x \right\| < \infty \right\} \ , \ \theta \in]0,1[$$

(respectivement $D_A(\theta,\infty)$*), l'équation* (1) *admet une unique solution* $x \in D(A) \cap D(B)$*. De plus* Ax *et* Bx *appartiennent à* $D_B(\theta,\infty)$ *(respectivement* $D_A(\theta,\infty)$*).*

Remarque 0.1 *C'est la première fois que des résultats de régularité maximale ont été obtenus dans un espace de Banach quelconque.*

Au **quatrième chapitre** ; On donne quelques résultats sur les sommes d'opérateurs linéaires de domaines non denses.(voir[11])

On consière X un espace Banach complexe et A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A)$ et $D(B)$ non nécessairement dense dans X. On considère toujours l'équation

$$Ax + Bx - \lambda x = y \ \ , \ \lambda > 0 \ \ , \ y \in X$$

et on suppose que A et B vérifient les hypothèses (H_1) et (H_2) et $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$. Alors on a les résultats suivants :

i) $A+B$ est **fermable**

ii) Si de plus $D(A)+D(B)$ est **dense** dans X alors :

$$0 \in \rho(\overline{A+B}) \text{ et } (\overline{A+B})^{-1} = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1} dz = S(A,B)$$

De plus, il existe une extension $\widetilde{A+B}$ telle que :

$$S_\lambda = (\lambda - \widetilde{A+B})^{-1} \ , \ \lambda > 0 \ \text{ et } \overline{A+B} \subset \widetilde{A+B}$$

Remarque 0.2 *: Lorsque aucun des deux domaines $D(A)$, $D(B)$ n'est dense dans X, l'opérateur $A+B$ est toujours fermable mais on ne pourra rien dire quand à $\rho(\overline{A+B})$.Ce résultat a été obtenu par R. Labbas [11]*

Dans le **cinquième chapitre** : On s'interesse à une nouvelle démonstration des résultats de Da Prato-Grisvard en précisant les constantes intervenant dans les estimations de la régularité de Ax et Bx.(voir[2]). On donne aussi une extension de quelques résultats de régularité en supposant l'existence d'une solution stricte. En particulier si le second membre de l'équation apparient à un certain espace d'interpolation on a une solution stricte x et Ax et Bx appartiennent au même espace d'interpolation. C'est-à-dire on a une régularité maximale.

Définition 0.1 *Soit X un espace de Banach complexe et soit A un opérateur non négatif sur X.*

Si $\theta \in (0,1)$ et $p \in [1,\infty]$ alors

$$D_A(\theta,p) = \left\{ x \in X : [x]_{D_A(\theta,p)} < \infty \right\}$$

où

$$[x]_{D_A(\theta,p)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^\theta \left\| A(A+tI)^{-1}x \right\|)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{P}} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t>0} ess\ t^\theta \left\| A(A+tI)^{-1}x \right\| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

et

$$D_A(\theta) = D_A(\theta,\infty_0) = \left\{ x \in D_A(\theta,\infty) : \lim_{t \longrightarrow \infty} t^\theta \left\| A(A+tI)^{-1}x \right\| = 0 \right\}$$

avec

$$[.]_{D_A(\theta,\infty_0)} = [.]_{D_A(\theta,\infty)}$$

On a $[x]_{D_A(\theta,p)}$ est (au moins) une semi-norme.

La proposition suivante caractérise les espaces d'interpolation réels entre un espace de Banach et le domaine d'un opérateur linéaire non négatif défini sur cet espace de Banach.

Proposition 0.2 *Soit X un espace de Banach complexe et soit A un opérateur non négatif sur X de domaine $D(A)$. Considérons la norme du graphe sur $D(A)$, soit*

$$\|x\|_{D_A} = \|x\| + \|Ax\| \ \ ou \ \ \|x\|_{D_A} = \|Ax\| \quad (si\ A\ est\ inversible)$$

Supposons que $\theta \in (0,1)$ et $p \in [0,\infty] \cup \{\infty_0\}$. Alors

$$D_A(\theta,p) = (X, D(A))_{\theta,p} \ \ pour\ tout\ x \in X$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+M(A,0)} [x]_{D_A(\theta,p)} &\leq \|x\|_{(X,D(A))_{\theta,p}} \\ &\leq 2\,[x]_{D_A(\theta,p)} + \begin{cases} 0 \ \ si \ \ \|x\|_{D_A} = \|Ax\| \\ M(A,0)^{1-\theta}(p\theta(1-\theta)^{-\frac{1}{p}} \|x\|) \ si \ \|x\|_{D_A} = \|x\| + \|Ax\| \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$M(A,\phi) = \sup_{\substack{|\arg \lambda| = \phi \\ \lambda \neq 0}} \left\| \lambda (A+\lambda I)^{-1} \right\|$$

Le théorème suivant explicite les constantes de la régularité

Theorème 0.2 *Soient A et B deux opérateurs non négatifs à résolvantes commutatives avec $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$ et $\omega_A + \omega_B < \pi$ et soit $x = Sy$ l'unique solution de l'équation $Ax + Bx = y$. Alors si $y \in D_B(\theta, p)$ où $\theta \in (0,1)$ et $p \in [1, \infty]$, on a*

$$Ax \in D_B(\theta, p) \quad et \quad Bx \in D_A(\theta, p) \cap D_B(\theta, p)$$

Si $y \in D_B(\theta)$, alors

$$Ax \in D_B(\theta) \quad et\ Bx \in D_A(\theta) \cap D_B(\theta)$$

De plus on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} [Ax]_{D_B(\theta,p)} &\leq (1 + C_1)\,[y]_{D_B(\theta,p)} \\ [Bx]_{D_B(\theta,p)} &\leq C_1\,[y]_{D_B(\theta,p)} \\ [Bx]_{D_A(\theta,p)} &\leq C_2\,[y]_{D_B(\theta,p)} \end{aligned}$$

Où

$$C_1 := C_1(\sigma, \theta, A, B) = \frac{1}{\pi} M_A(\sigma)(1 + 2\sin(\frac{\sigma}{2}) M_B(\pi - \sigma) \int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta \left| te^{i\sigma} + 1 \right|}$$

$$C_2 := C_2(\sigma, \theta, A, B) = \frac{1}{\pi} M_A(\sigma)(1 + 2\sin(\frac{\sigma}{2}) M_B(\pi - \sigma) \int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta \left| te^{i\sigma} - 1 \right|}$$

pour tout $\sigma \in (\omega_B, \phi_A)$. Le fait qu'on a aussi $Bx \in D_A(\theta, p)$ quand $y \in D_B(\theta, p)$ est un résultat inattendu. On note aussi que si $y \in D_A(\theta, p)$ ou $y \in D_A(\theta)$, on obtient parfaitement des résultats analoques puisque $S(A, B) = S(B, A)$. Ce résultat est du à Ph.Clément, G.Gripenberg, V.Högnäs, S.O. Lonen ([2] et [7])

Chapitre 1

Notions et Rappels

Dans ce chapitre,on rappelle quelques définitions qui concernent les opérateurs linéaires fermés pour plus détails voir [19] et on donne quelques notions de base sur la théorie des semi-groupes [14] de plus on énonce quelques résultas fondamentaux sur la théorie des espaces d'interpolations (voir [15], [4])

Dans ce qui suit,X est un espace de Banach,On rappelle que L est un opérateur linéaire sur X si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(L)$ de X,à valeurs dans X

1.1 Les opérateurs linéaires fermés :

Définition 1.1 *Soit* $L : D(L) \subset X \longrightarrow X$ *un opérateur linéaire(non borné), L est dit* ***fermé*** *si et seulement si il est continu sur son domaine i.e :*

$$\left\{\begin{array}{c} \forall (u_n)_{n\geq 0} \subset D(L) \\ u_n \overset{X}{\longrightarrow} u \\ Lu_n \longrightarrow y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} u \in D(L) \\ Lu = y \end{array}\right.$$

ceci est équivalent à dire que le graphe de L
$G(L) = \{(u, Lu) : u \in D(L)\} \subset X \times X$ est fermé dans $X \times X$

Définition 1.2 *Soit* $L : D(L) \subset X \longrightarrow X$ *un opérateur linéaire(non borné), L est dit* ***fermable*** *si et seulement si L admet une extension fermée ,ceci est équivalent à*

$$\left\{\begin{array}{c} \forall (u_n)_{n\geq 0} \subset D(L) \\ u_n \overset{X}{\longrightarrow} 0 \\ Lu_n \longrightarrow y \end{array}\right. \Longrightarrow y = 0$$

La plus petite extension fermé de L est alors notée $\overline{L}$ est s'appelle la fermeture de L

Rappelons quelques notions concernant l'opérateur fermé L :

1. $\varrho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (L-\lambda)$ est bijective et continue de $D(L)$ dans $X\}$ est appelé l'ensemble résolvant de L et $(L-\lambda)^{-1} \in L(X)$ est sa résolvante
2. $\sigma(L) = \mathbb{C} \diagup \varrho(L)$ est appelé le spectre de L , signalons que $\sigma(L)$ est la réunion de trois ensembles disjoints notés respectivement $\sigma(L)_p, \sigma(L)_c, \sigma(L)_r$ où :

i) $\varrho_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (L-\lambda)$ est non inversible$\}$ est le spectre **ponctuel**

ii) $\varrho_c(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (L-\lambda)^{-1}$ non borné de domaine non dense dans $X\}$ est le spectre **continu**

iii) $\varrho_r(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (L-\lambda)^{-1}$ existe de domaine non dense dans $X\}$ est le spectre **résiduel**

1. L est dit **borné** s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\|Lx\| \leq C\|x\|$, $\forall x \in D(L)$ ou bien $D(L) = X$ et $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Lx\| < +\infty$ et on écrit $L \in \mathcal{L}(X)$
2. Si A et B sont deux opérateurs linéaire dans X ,de domaine respectifs $D(A)$ et $D(B)$,on écrira $A \subset B$ pour signifier que B est un prolongement fermé de A i.e

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ Bx = Ax \text{ si } x \in D(A) \end{cases}$$

Notons que A est fermable, $\overline{A}$ est le plus petit prolongement fermé de A

1.1.1 Quelques proriétés importantes :

Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur **fermé**, Alors

1. $A + B$ (avec le domaine D_A) est **fermé** pour chaque $B \in \mathcal{L}(E, F)$
2. A^{-1} est **fermé** si A est **injectif**
3. A est borné si D_A est fermé dans F ($D_A = E$) (théorème du graphe fermé)
4. un opérateur borné est **fermé** si et seulement si son domaine est **fermé**
5. Un opérateur A est dit **fermable** si la fermeture de son graphe est un graphe (i.e $(0, y) \in \overline{G(A)} \Longrightarrow y = 0$,Alors $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur fermé ,qu'on appelle la fermeture de A et qu'on note $\overline{A}$)
6. Chaque opérateur linéaire **borné** de $E \longrightarrow F$ est **fermable** et sa fermeture $\overline{L}$ est un opérateur linéaire borné avec $\left\|\overline{L}\right\| = \|L\|$
7. Si A est **fermé** et A^{-1} **existe** alors A^{-1} est **fermé**
8. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $D(A) = E$ et A^{-1}**existe ,**alors A^{-1} est **fermé** car si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et A^{-1} **existe** $\Longrightarrow A$ est borné $\Longrightarrow A$ est fermé $\Longrightarrow A^{-1}$est **fermé**
9. Soit A un opérateur linéaire **fermable** sur X ,alors si A est **fermé** $\Leftrightarrow \overline{A} = A$
10. Si A un opérateur linéaire **fermable** sur X alors $D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)}$
11. Soit A un opérateur dans E

i) $\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D_A \longrightarrow E$ est bijectif et $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)\ \}$
ii) $\varrho(A) \neq \varnothing$ implique que A est fermé.Si A est fermé ,alors

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D_A \longrightarrow E \text{ est bijectif }\}$$

par le théorème du graphe fermé

1.2 Les opérateurs commutatifs et les opérateurs à résolvantes commutatives :

Définition 1.3 *Soient A et B deux opérateurs linéaires dans un espace de Banach X.On dit que A et B commutent si*

$$AB = BA \text{ ,}i.e : D(AB) = D(BA) \text{ et } ABx = BAx \quad \forall x \in D(AB)$$

Les opérateurs A et B sont dits à résolvantes commutatives s'il existe $\lambda \in \varrho(A)$ et $\mu \in \varrho(B)$ tels que $(\lambda - A)^{-1}$et $(\mu - B)^{-1}$ commutent, i.e :si on a

$$\forall x \in X \ , (\lambda - A)^{-1}(\mu - B)^{-1} x = (\mu - B)^{-1}(\lambda - A)^{-1} x, \text{ pour } \lambda \in \varrho(A) \text{ et } \mu \in \varrho(B)$$

On définit aussi le commutateur de A et B en posant :

$$[A; B] = AB - BA$$

Cet opérateur est défini dans

$$D\,[A; B] = D(AB) \cap D(BA)$$

.Puisque
$x \in D((\lambda - A)B)$ si et seulement si $x \in D(B)$ et $Bx \in D(A)$,on a $D((\lambda - A)B) = D(AB)$ pour tous opérateurs linéaires A et B et pour chaque λ dans $\mathbb{C}$
Ainsi

$$D([(\lambda - A)\,;(\mu - B)]) = D(A\,(\mu - B)) \cap D(B\,(\lambda - A)).$$

Mais

$$x \in D(A\,(\mu - B)) \cap D(B\,(\lambda - A)) \Longleftrightarrow x \in D(A) \cap D(B)$$

et

$$\mu x - Bx \in D(A)$$

et

$$\lambda x - Ax \in D(B)$$

$$\begin{aligned} Ax \in D(B) \quad &\Longleftrightarrow x \in D(A) \cap D(B) \\ &\Longleftrightarrow x \in D(AB) \cap D(BA) \text{ pour tout } \ x \in X \end{aligned}$$

Par conséquent

$$D([(\lambda - A)\,;(\mu - B)]) = D([A;B]),\ \text{pour chaque}\quad x \in D(AB) \cap D(BA)$$

on a

$$\begin{aligned}(\lambda - A)(\mu - B)\,x - (\mu - B)(\lambda - A)\,x &= \lambda\mu x - \mu Ax - \lambda Bx + ABx - (\mu\lambda x - \lambda Bx - \mu Ax + BAx)\\ &= ABx - BAx\end{aligned}$$

Alors on a le lemme suivant

Lemme 1.1 *Soient Soient A et B deux opérateurs linéaires dans X. Alors*

$$[(\lambda - A)\,;(\mu - B)] = [A;B]\,, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

.

On a aussi le résultat suivant concernant la commutativité au sens de la résolvante

Proposition 1.1 *Soient A et B deux opérateurs linéaires dans un espace de Banach X et supposons que*

$\lambda \in \varrho(A)$ et $\mu \in \varrho(B)$ .Alors les assertions suivantes sont equivalenres :

1. $(\lambda - A)^{-1}$ et $(\mu - B)^{-1}$ commutent
2. Toutes les résolvantes de A et B commutent.
3. $(\lambda - A)$ et $(\mu - B)$ commutent.
4. A commute avec $(\mu - B)^{-1}$sur $D(A)$ et

$$(\mu - B)^{-1}(D(A)) \subseteq D(A)$$

Preuve. :(voir [7]pp18–19) ■

Proposition 1.2 *(identité de la résolvante). Soit A un opérateur linéaire borné,si $\lambda, \mu \in \varrho(A)$ alors :*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A)$$

avec

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

Preuve. : on a

$$\begin{aligned}R_\lambda(A) &= R_\lambda(A)(A - \mu I)R_\mu(A)\\ &= R_\lambda(A)(A - \lambda I + \lambda I - \mu I)R_\mu(A)\\ &= [I + (\lambda - \mu)R_\lambda(A)]\,R_\mu(A)\\ &= R_\mu(A) + (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)\\ &\Longrightarrow R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)\end{aligned}$$

De la meme manière on écrit

$$R_\lambda(A) = R_\mu(A)(A - \mu I)R_\lambda(A)$$

On obtient

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A)$$

■

1.3 Opérateurs sectoriels :

Définition 1.4 *:Soit A un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach E .On dit que A est sectoriel si :*

1. $D(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont denses dans E
2. $KerA = \{0\}$, $]-\infty, 0] \subset \varrho(A)$ et il existe une constante $M \geq 1$ telle que
$$\left\| t(A + It)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq M \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$

Si A est sectoriel,alors il existe un angle θ tel que le secteur

$$\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} \diagup \{0\} : |\arg z| < \theta\}$$

soit contenu dans $\varrho(-A)$ et sur lequel la majoration précèdaente reste vérifiée i.e :

$$\sup_{z \in \Sigma_\theta} \left\| z(z + A)^{-1} \right\| = M_\theta < \infty$$

Définition 1.5 *: A est dit positif si $]-\infty, 0] \subset \varrho(A)$ et il existe $C \geq 0$ telle que*

$$\| (A - t)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{1 + |t|}, \forall t \leq 0$$

1.4 Intégrale de Dunford :

Soit X un espace de Banach complexe,et A un opérateur linéaire fermé,Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions à variable complexe qui sont holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de$A$.La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définit par l'integrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(z - A)^{-1} dz$$

où γ est une courbe simple et $f \in H(A)$.

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas de γ

1.5 Les semi- groupes d'opérateurs linéaires :

1.5.1 Les semi-groupes fortement continus :

Définition 1.6 *:On appelle semi groupe fortement continu G sur un espace de Banach X toute famille $(G(t))_{t\geq 0}$ dans $\mathcal{L}(X)$ vérifiant*

i) $\forall x \in X, G(t)x : R_+ \longrightarrow X$ est fortement continue

ii) $G(0) = I$

iii) $\forall s \geq 0, \forall t \geq 0 : G(t+s) = G(t)G(s)$

Remarque 1.1 *:*

1. Si i) et iii) sont vérifiées pour s, t de signes quelconques ;alors G est un groupe fortement continu .
2. Si $\|G(t)\| \leqslant 1$,alors G est un semi groupe de contraction

Exemple 1.1 *: Soit $A \in \mathcal{L}(X)$;et $\|G(t)\| = e^{tA}$;Alors G est un groupe sur X .*

Exemple 1.2 *: Soit $X = L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ et $(G(t)f)(x) = f(x-t)$;Alors G est un groupe appelé groupe des translations de L^p.*

On a

$$\|f(x-t)\|_{L^p} = \|f(x)\|_{L^p} \Longrightarrow G(t) = 1$$

alors $G(t) \in \mathcal{L}(X)$ et on a

$$(G(t)G(s)f)(x) = (G(t)f)(x-s) = f(x-s-t) = (G(t+s)f)(x)$$

donc

$$G(t+s) = G(t)G(s)$$

Theorème 1.1 *:Soit G un semi groupe,il existe deux constante M et ω telles que*

$$\|G(t)\| \leqslant M.e^{\omega t}$$

Preuve. :$\forall \in X$,la fonction continue $t \longrightarrow G(t)x$ est borné sur $[0,1]$,gràce au théorème de Banach Steinhaus il existe une constante $M \geq 1$(puisque $\|G(0)\| = \|I\| = 1$) telle que

$$\|G(t)\| \leqslant M, \forall t \in [0,1]$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$,en écrivant $t = [t] + \alpha, [t] \in \mathbb{N}, \alpha \in [0,1]$ .Donc

$$\|G(t)\| = \left\|G(1)^{[t]}.G(\alpha)\right\| \leq M^{1+[t]} = M.e^{\omega[t]}$$

avec

$$\omega = \log M$$

D'où

$$\|G(t)\| \leqslant M.e^{\omega t}$$

■

Définition 1.7 *:Le générateur infinitésimal du semi groupe est l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \quad \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \quad \text{existe} \right\} \\ Ax = \quad \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \end{cases}$$

Exemple 1.3 *:Soit B un opérateur borné dans X ,la famille d'opérateurs $G(t) = e^{tB}; t \geq 0$ est un semi groupe uniformément continue et le générateur infinitésimal est l'opérateur B.*

En effet

$$\begin{aligned} \|G(t) - G(t+h)\| &= \|G(t) - G(t).G(h)\| \\ &\leq \|G(t)\| \, \|I - G(h)\| \\ &\leq \|G(t)\| \, (e^{h\|B\|} - 1) \end{aligned}$$

donc $\|G(t) - G(t+h)\| \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$ d"où la continuité uniforme.D'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(G(t) - I) - B \right\| &= \left\| \frac{1}{t}(e^{tB} - I) - B \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n \geq 2} \frac{t^n}{n\,!} B^n \right\| \\ &\leq t \, \|B\|^2 \, .e^{t\|B\|}. \end{aligned}$$

quand $t \to 0^+$,alors $B = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(\ G(t) - I)$ limite uniforme donc forte .

Remarque 1.2 *:*

1. Si A est le générateur infinitésimal d"un semi groupe $G(t))_{t \geq 0}$;alors A est fermé à domaine dense.
2. Le semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal A
3. le semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continu si et seulement si"il est de la forme $(e^{tB})_{t \geq 0}$où B est un opérateur borné dans X.
4. Si A le générateur infinitésimal du semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$, $\|G(t)\| \leqslant M.e^{\omega t}$ pour $\lambda \geq \omega$;l'opérateur

   $$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x dt \qquad \text{est borné}$$

   et

   $$\left\| (\lambda - A)^{-1} x \right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-1}; \lambda \in \rho(A)$$

Theorème 1.2 ***(Hille Yosida) :***

Un opérateur A est le générateur infinitésimal du semi groupe fortement continu $G(t), t \geq 0$; tel que $\|G(t)\| \leqslant M.e^{\omega t}$ si et seulement si

1. Le domaine $D(A)$ est dense dans X
2. $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R} \colon \lambda > \omega\}$ et $(\lambda - A)$ surjectif pour $\lambda > \omega$ avec

$$\left\|(\lambda - A)^{-k}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k}; \text{ pour } k = 1, 2, ...$$

1.5.2 Les semi-groupes analytiques :

Définition 1.8 *On appelle semi groupe analytique de type* α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ *toute application* G *définie sur l''ensemble*

$$\Sigma = \{z\epsilon\mathbb{C} \colon \ |\arg z| < \alpha\}$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(x)$ *telle que :*

1. $z \rightarrow G(z)$ est analytique sur Σ
2. $\forall x \in X, G(0) = I$ et $\lim\limits_{\substack{z \longrightarrow 0 \\ z \in \Sigma}} G(z)x = x$
3. $\forall z_1, z_2 \in \Sigma, G(z_1 + z_2) = G(z_1).G(z_2)$ de plus

$$G(t)x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} e^{tz}(z - A)^{-1} x dz = e^{tA} x$$

Theorème 1.3 ***(de Kato)*** *: Soit* $A \colon D(A) \subset X \rightarrow X$ *un opérateur linéaire borné vérifiant :*

1. A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X
2. $\rho(A) \supset \{\lambda\epsilon\mathbb{C}^*; \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ et $\exists M > 0$ telle que $\forall \lambda > 0$

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique G vérifiant :

i) $\exists C > 0; \forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$

ii) $\forall t < 0; G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ et $\|AG(t)\| \leq \frac{M}{t}$

1.6 Les espaces d'interpolation :

Soient X_0 et X_1 deux espaces de Banach et E un espace topologique séparé avec $X_1 \hookrightarrow E$. Considérons maintenant les espaces de Banach $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ munis des normes

$$\|X\|_{X_0 \cap X_1} = \|X\|_{X_0} + \|X\|_{X_1}$$

et

$$\|X\|_{X_0+X_1} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_i \in X_i}} (\|X\|_{X_0} + \|X\|_{X_1})$$

Le couple $\{X_0, X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.9 *Soit $\{X_0, X_1\}$ un couple d'interpolation.*

On apelle espace intermédiaire entre X_0 et X_1 tout espace de Banach X tel que :

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$$

Exemple 1.4 *Les espaces X_i, $i = 0, 1$ sont des espaces intermédiares*

1.6.1 Théorème de Marcel-Riez :

Theorème 1.4 ***:****Soit $K\colon L^{p_0}(\Omega_0) + L^{p_1}(\Omega_0) \longrightarrow L^{q_0}(\Omega_1) + L^{q_1}(\Omega_1)$ un opérateur linéaire $p_i, q_i \in [1, +\infty]$ et Ω_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1)$ telle que*

$$\left.\begin{array}{c} K/_{L^{p_0}(\Omega_0)} \epsilon \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0}) \\ K/_{L^{p_1}(\Omega_0)} \epsilon \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} K/_{L^{p_\theta}(\Omega_0)} \epsilon \mathcal{L}(L^{p_\theta}, L^{q_\theta}) \\ et\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{array}\right.$$

où

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

et

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Lemme 1.2 ***(lemme de Schur) :***

Soit $K\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mésurable telle que

i) $\exists \alpha > 0, \forall x_2 \in \Omega_2 : \int\limits_{\Omega_1} |K(x_1, x_2)|\, dx_1 \leq \alpha$

ii) $\exists b > 0, \forall x_1 \in \forall x_2 \in \Omega_2 \colon \int\limits_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)|\, dx_2 \leq b$

On définit l'opérateur K par

$$(Kf)(x_2) = \int\limits_{\Omega_1} k(x_1, x_2) f(x_1) dx_1; \forall x_2 \in \Omega_2$$

Alors ;$\forall p \in [1, +\infty]$

$$K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2))$$

Preuve. :On a $K \in \mathcal{L}(L^1(\Omega_1), L^1(\Omega_2))$ et $K \in \mathcal{L}(L^\infty(\Omega_1), L^\infty(\Omega_2))$;alors grâce au théorème de Marcel-Riez on obtient le résultat ■

Les espaces d'interpolation

Définition 1.10 *On appelle espace d'interpolation entre* X_0, X_1*l'espace* $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ *avec* $\theta\epsilon\,]0,1[\,, p \in [1,+\infty]$ *tel que*

D'autres définitions

Theorème 1.5

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} i)\forall y \in \mathbb{R} : x = u_0(y) + u_1(y); u_i \in X_i, i = 0,1 \\ ii)e^{-\theta y}u_0 \in L^p(X_0), e^{(1-\theta)y}u_1 \in L^p(X_1) \end{cases}$$

Preuve. **:**On pose $t = e^y$ dans la définition précédente ∎

Theorème 1.6

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists u : \mathbb{R} \longrightarrow X_0 \cap X_1 \qquad \text{tel que} \\ \quad y \longmapsto u(y) \\ i)x = \int\limits_{\mathbb{R}} u(y)dy \\ ii)e^{-\theta y}u \in L^p(X_0), e^{(1-\theta)y}u \in L^p(X_1) \end{cases}$$

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X_0 \cap X_1 \text{ tel que} \\ \quad t \longmapsto u(t) \\ i)x = \int\limits_0^{+\infty} u(s)\frac{ds}{s} \\ ii)t^{-\theta}u \in L^p_*(X_0), t^{(1-\theta)}u \in L^p_*(X_1) \end{cases}$$

Preuve. **:**On pose $t = e^{-y}$ dans le théorème précédent ∎

Définition 1.11 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé de domaine* $D_A \subset X$ *muni de sa norme du graphe .*

$$\forall x \in D_A, \|x\|_{D_A} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$$

On pose alors ,en suivant les notations de P.Grisvard

$$D_A(\theta, p) = (D_A, X)_{1-\theta,p} \quad \text{où } p \in [1,+\infty] \text{ et } 0 < \theta < 1$$

Theorème 1.7 *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$*

1. Supposant que $\rho(A) \supset]0, +\infty[$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{\lambda}$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : t^{\theta} A(A - tI)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

2. Si A génère un semi-groupe fortement continue et borné dans X ,alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : t^{-\theta}(e^{At} - I)x \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

3. Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X ,alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : t^{1-\theta} A e^{At} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

Ici les opérateurs A et B vérifiant (H_1) et (H_2) et sont donc sctoriels,alors les espaces intermédiares $D_A(\theta, p)$ entre D_A et X (ou D_B et X) sont caractérisé par :

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : t^{\theta} A(A - tI)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

Si $p = +\infty$:

$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{r>0} r^{\theta} \left\| A(A - r)^{-1} x \right\| < \infty \right\}$$

Lemme 1.3

$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{z \in \gamma_\lambda} |z|^{\theta} \left\| (A - \lambda)(A - \lambda - z)^{-1} x \right\| < \infty \right\}$$

Ces espaces sont de Banach et vérifiant la qualité d'espace "intermédiares"

$$D_A \hookrightarrow D_A(\theta, p) \hookrightarrow Xi$$

ils coincident avec les espaces d'interpolation au sens de Lions-Peetre $D_A(\theta, p) = (X, D_A)_{1-\theta, p}$ ∎

1. $X = C([0, 1]\,; \|.\|_\infty)$ l'opérateur A définit par :

$$\begin{cases} D_A = \{\varphi \in C^2([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ A\varphi = \varphi'' \end{cases}$$

Alors pour $p = +\infty$

$$D_A(\theta, +\infty) = \begin{cases} C^{2\theta}([0, 1]) \text{ et } \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \text{ si } 2\theta < 1 \\ C^{1,*}([0, 1]) \text{ et } \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \\ C^{1,2\theta-1}([0, 1]) \text{et } \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

Où $C^{1,*}([0, 1])$ rst l'espace dit de Zugmund des fonctions φ continus sur $[0, 1]$ telles que :

$$\sup \frac{\left|\varphi(x) - 2\varphi(\frac{x+y}{2}) + \varphi(x)\right|}{|x - y|} < \infty$$

2. Soit $X = L^p(]0,1[), p \in [1,+\infty[$ et l'opérateur B définit par :

$$\begin{cases} D_B = \{u \in W^{1,p}(]0,1[)/u(0) = 0\} \\ Bu = \acute{u} \end{cases}$$

Alors

$$D_B(\theta,p) = \begin{cases} W^{\theta,p}(]0,1[) & \text{si } 0 < \theta < \frac{1}{p} \\ W^{\theta,p}_{0,0}(]0,1[) & \text{si } \theta = \frac{1}{p} \\ W^{\theta,p}_{0}(]0,1[) & \text{si } \frac{1}{p} < \theta < 1 \end{cases}$$

On rappelle que :

i) pour $\theta \in]0,1[\,, W^{\theta,p}(]0,1[)$est le sous-espace de $L^p(]0,1[)$ des fonctions u telles que :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{|u(t)-u(s)|^p}{|t-s|^{1+\theta p}}dtds < +\infty \quad \text{(holdérianité integrale)}$$

Pour $p = 2, \theta = \frac{1}{2}$,on retrouve le fameux $H^{\frac{1}{2}}(]0,1[)$

ii) l'espace de Sobolev(dit plûtotde Besov) $W^{\theta,p}_{0,0}(]0,1[)$ est le sous-espace des fonctions u de $L^p(]0,1[)$ telles que

$$\int_0^1 \frac{|u(t)|^p}{t}dt < +\infty \quad \text{(continuité integrale en 0)}$$

iii) On peut d'une manière générale donner :

$$(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega))_{\theta,q} = B^{m(1-\theta)}_{p,q}(\Omega)$$

où Ω est un ouvert à bord de classe C^m et où ici $p \in]1,+\infty[$ et $q \in [1,+\infty]$,$\mathcal{B}^s_{p,q}(\Omega)$ étant les espaces de Besov

Définition 1.12 *Pour $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ on note $D_A(\theta,p)$ le sous-espace de X suivant :*

$$D_A(\theta,p) = \left\{x \in X : \left\|t^\theta A(A-tI)^{-1}x\right\|_X \in L^p_*\right\}$$

où L^p_* est l'espace des fonctions boréliennes de puissances p intégrables pour la mesure $\dfrac{dt}{t}$.

Pour $p = +\infty$

$$D_A(\theta,+\infty) = \left\{x \in X : \sup_{t>0}\left\|t^\theta A(A-t)^{-1}x\right\|_X < \infty\right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta,+\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0}\left\|t^\theta A(A-t)^{-1}x\right\|_X$$

Remarque 1.3 *Ces espaces vérifient*

$$D_A(\theta,p) \subset D_A(\theta,+\infty)$$

pour $p \in [1,+\infty[$ et $\theta \in]0,1[$

1.6.2 Définition discrète d'un espace d'interpolation :

On dit que x est dans l'espace d'interpolation $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\begin{cases} i)\forall n \in \mathbb{Z} : x = u_{0n} + u_{1n}, u_{in} \in X_i; i = 0, 1 \\ ii)\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left\|e^{-\theta n} u_{0n}\right\|_{X_0}^p < +\infty \text{ (ie) } e^{-\theta n} u_{0n} \in L^p(X_0) \\ iii)\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left\|e^{-\theta n} u_{0n}\right\|_{X_1}^p < +\infty \text{ (ie) } e^{(1-\theta)n} u_{1n} \in L^p(X_1) \end{cases}$$

Espaces de traces :

Définition 1.13 *On désigne par $V_m(p_0, \epsilon_0, X_0, p_1, \epsilon_1, X_1)$ l'espace des fonctions u telles que*

$$t^{-\epsilon_0} u \in L_*^p(X_0), t^{\epsilon_1} u^{(m)} \in L_*^p(X_1)$$

où $u^{(m)} = \frac{d^m u}{dt^m}$ et ϵ_0, ϵ_1 deux paramètres réels, muni de la norme

$$\|u\|_{V_m} = \max(\left\|t^{-\epsilon_0} u\right\|_{L^{p_0}(X_0)} ; \left\|e^{\epsilon_1} u^{(m)}\right\|_{L^{p_1}(X_1)})$$

on dira que $u^{(j)}$ admet une trace à l'origine si $u^{(j)}(t)$ converge lorsque $t \longrightarrow 0$,alors trace de $u^{(j)} = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} u^{(j)}(t) = u^{(j)}(0)$

Remarque 1.4 *:*

Si $\frac{1}{p_1} + \epsilon_1 < m - j$, et $1 < J < m - 1$; alors les traces $u^{(k)}(0)$ existent pour $0 < k < j$

Définition 1.14 *On désigne par $T_J^m(p_0, \epsilon_0, X_0, p_1, \epsilon_1, X_1)$ l'espace décrit par $u^{(j)}(0)$ tel que $u \in V_m$,muni de la norme*

$$\|a\|_{T_J^m} = \inf_{u^{(j)}(0)=a} \|u\|_{V_m}$$

les espacesT_J^m sont des espaces de trace

$$x \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E_0 \cap E_1 \\ i)t^\theta u \in L_*^p(E_0), t^\theta u' \in L_*^p(E_1) \\ ii)x = u(0) \text{ trace de } u \text{ en } 0. \end{cases}$$

Muni de la norme

$$\|x\| = \inf \left\{ \int\limits_0^{+\infty} t^{\theta p} \|u(t)\|_{E_0}^p dt + \int\limits_0^{+\infty} t^{\theta p} \left\|u'(t)\right\|_{E_1}^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Propriétés

On donne maintenant quelqes propriétés fondamontales des espaces d'interpolation,pour tout $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty]$ on a

1. Si $0 < \theta \leq \omega < 1$ et $p, q \in [1,+\infty]$,alors
$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\omega,q}$$
2. Si $p \leq q$ alors
$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\theta,q}$$
3. Si $X_0 = X_1$alors $(X_0, X_1)_{\theta,p} = X_0 = X_1$.

1.6.3 Cas particulier $(D_A, E)_{\theta,p}$

Soit A un opérateur linéaire fermé dans X ; posons $X_0 = D_A$ muni de la norme du graphe et $X_1 = X$,alors $X_0 \cap X_1 = D_A$ et $X_0 + X_1 = X$ donc

$$D_A \subset (D_A, X)_{\theta,p} \subset X$$

Theoreme 1.8 ***(de Lions) :****Si A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu $G(t)$;alors*

$$x \in (D_A, X)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} i) x \in X \\ ii) \dfrac{G(t)x - x}{t^{1-\theta}} \in L_*^p(X) \end{cases}$$

avec $p \in [1,+\infty]$ .Donc

$$(D_A, E)_{\theta,p} = \left\{ x \in X : \left\| t^{\theta-1}(G(t) - I)x \right\|_E \in L_*^p \right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D_A,E)_{\theta,p}} = \|x\|_X + \left(\int_0^{+\infty} t^{-(1-\theta)p} \|G(t-I)x\|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec les modifications habituelles si $p = \infty$

Theoreme 1.9 *Si $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ et $\exists C_A > 0$ tel que*

$$\left\| (A - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_A}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0$$

alors

$$_{(D_A,E)_{\theta,p}} = \left\{ x \in X : \left\| t^{1-\theta} A(A - t)^{-1} x \right\|_X \in L_*^p \right\}$$

Chapitre 2

Théorèmes de fermeture (DaPrato-Grisvard)

2.1 Cas dense :

Soit X un espace de Banach et soient A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs D_A et D_B dans X

On définit l'opérateur L (l'opérateur somme)par

$$\begin{cases} D_L = D_A \cap D_B \\ Lx = Ax + Bx, x \in D_L \end{cases}$$

On donnera des conditions suffisantes pour que L admette une fermeture qu'on notera éventuellement $\overline{L}$ et on étudiera l'ensemle résolvant de $\overline{L}$ .Le résultat essentiel est le

Theorème 2.1

Soit L un opérateur linéaire de domaine D_L dense dans X ($\overline{D_L} = X$) et telle que :

1. Il existe $N \geq 1$ et $\omega_0 \geq 0$ tels que

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\|, \quad \lambda > \omega_0 , \quad x \in D_L \tag{2.1}$$

2. Il existe $\omega_1 \geq \omega_0$ tel que $(L - \omega_1)(D_L\ )$ soit dense dans X ,Alors L admet une fermeture $\overline{L}$ avec $\rho(\overline{L}\ ) \supset]\omega_0, +\infty[$ et

$$\left\|(\overline{L} - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \qquad , \lambda > \omega_0 \tag{2.2}$$

$$(L - \lambda)(D_L) \text{ est dense dans } X \quad ,\forall \lambda > \omega_0 \tag{2.3}$$

Preuve. :L'hpothèse (1) implique l'existence de $\overline{L}$,soit $x_n \in D_L, n \in \mathbb{N}^*$ une suite telle que $x_n \longrightarrow 0$ et $Lx_n \longrightarrow y$.On doit vérifier que $y = 0$. pour cela soit $z \in D_L$,d'après(2.1) on a

$$\left\|x_n + \frac{z}{\lambda}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \left\|L(x_n + \frac{z}{\lambda}) - \lambda(x_n + \frac{z}{\lambda})\right\| \quad , n \in \mathbb{N}, \lambda > \omega_0$$

$$\left\| x_n + \frac{z}{\lambda} \right\| \leq \frac{N}{\lambda} \left\| Lx_n - \lambda x_n + \frac{1}{\lambda} Lz - z \right\| \quad , n \in \mathbb{N}, \lambda > \omega_0$$

d'où à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$

$$\left\| \frac{z}{\lambda} \right\| \leq \frac{N}{\lambda} \left\| y + \frac{1}{\lambda} Lz - z \right\| \quad , \lambda > \omega_0$$

puis lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$

$$\|z\| \leq N \|y - z\|$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $z \in D_L$ qui est dense dans X ,on a nécessairement $y = 0$ (en considérant une suite $z_n \in D_L, n \in \mathbb{N}^*$; telle que $z_n \longrightarrow y$) ceci prouve l'existence de $\overline{L}$.Montrons que $\omega_1 \in \rho(\overline{L}\ )$ c'est à dire

$$\forall y \in X, \exists ! x \in D_{\overline{L}} : \overline{L}x - \omega_1 x = y$$

d'après l'hypothèse (2) (la densité),il existe une suite $x_n \in D_L$ telle que $y_n = Lx_n - \omega_1 x_n \longrightarrow y \ \ (n \longrightarrow +\infty)$.En appliquant l'inégalité (2.1) au vecteur $x_n - x_m$ on obtient

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \frac{N}{\omega_1} \|L(x_n - x_m) - \lambda(x_n - x_m)\| \\ &\leq \frac{N}{\omega_1} \|(Lx_n - \lambda x_n) - (Lx_m - \lambda x_m)\| \\ &\leq \frac{N}{\omega_1} \|y_n - y_m\| \end{aligned}$$

donc la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy,et il existe $x \in X$ tel que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } Lx_n \longrightarrow y + \omega_1 x$$

cela veut dire que $x \in D_{\overline{L}}$ et $\overline{L}x = y + \omega_1 x$ (par définition de $\overline{L}$).Maintenant on montre l'unicité de la solution :On a l'inégalité

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \left\| \overline{L}x - \lambda x \right\| \ , \forall \lambda > \omega_0, x \in D_{\overline{L}} \tag{2.4}$$

d'après l'inégalité (2.1) et l'existence de $\overline{L}$ on obtient que $\omega_1 \in \rho(\overline{L}\ )$ et que

$$\left\| (\overline{L} - \omega_1)^{-1} \right\| \leq \frac{N}{\omega_1}$$

On doit prouver que $\rho(\overline{L}\ ) \supset]\omega_0, +\infty[$ La distance de ω_1 à $\rho(\overline{L}\ ) > \frac{\omega_1}{N}$(voir[3]pp566-567)

donc

$$\rho(\overline{L}) \supset \left] \omega_1(1 - \frac{1}{N}); \omega_1(1 + \frac{1}{N}) \right[$$

mais par ailleurs l'inégalité (2.4) implique toujours

$$\left\| (\overline{L} - \omega_1)^{-1} \right\| \leq \frac{N}{\lambda} \ \ , \forall \lambda \in \left] \omega_1(1 - \frac{1}{N}); \omega_1(1 + \frac{1}{N}) \right[$$

par reiteration du lemme précédent on obtient

$$\rho(\overline{L}) \supset \left]\sup(\omega_0, \omega_1(1-\frac{1}{N})^n);\omega_1(1+\frac{1}{N})^n\right[, n \in \mathbb{N}^*$$

par conséquent $\rho(\overline{L}\ ) \supset]\omega_0, +\infty[$ et

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda}\left\|\overline{L}x - \lambda x\right\| \quad , \forall\lambda > \omega_0, x \in D_{\overline{L}}$$

implique

$$\left\|(\overline{L}-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \qquad , \lambda > \omega_0$$

reste à vérifier que $(L-\lambda)(D_L)$ est dense dans X $,\forall\lambda > \omega_0$Soit $x^{'} \in X^{'}$ ($X^{'}$ le dual de X) et $\lambda > \omega_0$ tels que :

$$\left\langle Lx - \lambda x, x^{'}\right\rangle = 0 \ , \ \forall x \in D_L$$

On doit vérifier que $x^{'} = 0$.Puisque $\overline{L}$ existe on a

$$\left\langle \overline{L}x - \lambda x, x^{'}\right\rangle = 0 \quad , \forall x \in D_{\overline{L}}$$

car D_L est dense dans $D_{\overline{L}}$ ($\overline{D_L} = D_{\overline{L}}$) pour la norme du graphe de $\overline{L}$ et puisque $\lambda \in \rho(\overline{L})$,cela veut dire que $x^{'}$ est orthogonal à X donc $x^{'} = 0$ (d'après le théorème de Hahn-Banach) ■

Remarque 2.1 *:*

1. Ce résultat est une variante du résultat de fermabilité de Lumer-Phillips qui est relatif au cas $N = 1$
2. Dans le cas particulier où $\omega_0 = 0$,on a donc $\rho(\overline{L}\ ) \supset \mathbb{R}_+$ c'est aussi le cas lorsque $N = 1$ car on peut alors remplacer ω_0 par **zéro** dans l'inégalité (2.1)

En effet ,soit $x \in D_L, \lambda > 0$ et $Lx - \lambda x = y$, on aussi

$$Lx - \lambda x - \omega_0 x = y - \omega_0 x$$

$$Lx - (\lambda + \omega_0)x = y - \omega_0 x$$

d'où

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \frac{1}{\lambda+\omega_0}\|y - \omega_0 x\ \| \\ &\leq \frac{1}{\lambda+\omega_0}\|y\| + \frac{\omega_0}{\lambda+\omega_0}\|x\| \end{aligned}$$

$$\|x\| - \frac{\omega_0}{\lambda+\omega_0}\|x\| \leq \frac{1}{\lambda+\omega_0}\|y\|$$

$$(1 - \frac{\omega_0}{\lambda+\omega_0})\|x\| \leq \frac{1}{\lambda+\omega_0}\|y\|$$

d'où

$$\|x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|$$

(C'est une preuve de (2.1) en remplaçant ω_0 par **zéro**)

Remarque 2.2 *:*

Un opérateur L satisfaisant (1) du théorème avec $N = 1$ et $\omega_0 = 0$ est appelé opérateur m-accrétif

Corollaire 2.1 *Soit* $(L_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'opérateurs linéaires de domaines respectifs* D_{L_n} *dans* X *,on définit* L *(la "limite") en posant*

$$\begin{cases} D_L = \left\{ x \in \underset{n\geq 1}{\cap} D_{L_n} ; \text{la suite} L_n x \ , \ n \in \mathbb{N}^* \text{ converge dans} X \right\} \\ Lx = \lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} L_n x \qquad \text{pour } \ x \in D_L \end{cases} \tag{2.5}$$

On suppose en outre que :

i) D_L est dense dans$X$ $(\overline{D_L} = X)$

ii) Il existe $N \geq 1$ et $\omega_0 \geq 0$ tels que $\rho(L_n) \supset]\omega_0, +\infty[$ et

$$\left\|(L_n - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda}, \forall\lambda > \omega_0, n \in \mathbb{N}^* \tag{2.6}$$

iii) Il existe $\omega_1 \geq \omega_0$ tel que $(L - \omega_1)(D_L)$ est dense dans X ,alors L admet une fermeture $\overline{L}$ avec $\rho(\overline{L}\ ) \supset]\omega_0, +\infty[$ et

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} (L_n - \lambda)^{-1} = (\overline{L} - \lambda)^{-1}, \forall\lambda > \omega_0 \text{ fortement dans } \mathcal{L}(X) \tag{2.7}$$

Preuve. : On a pour $x \in D_L, x \in D_{L_n}$ et d'après l'hypothèse

$$\left\|(L_n - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda}, \forall\lambda > \omega_0, n \in \mathbb{N}^*$$

On obtient

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|L_n x - \lambda x\|, n \in \mathbb{N}^*$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on aura

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\|, \forall\lambda > \omega_0$$

reste à montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} (L_n - \lambda)^{-1} = (\overline{L} - \lambda)^{-1}, \forall\lambda > \omega_0$$

ou bien

$$(L_n - \lambda)^{-1} y \longrightarrow (\overline{L} - \lambda)^{-1} y \ \ , \forall y \in X \ \ (\lambda \text{fixé} > \omega_0) \tag{2.8}$$

puisque les opérateurs $(L_n - \lambda)^{-1}$ sont uniformément bornés d'après

$$(\left\|(L_n - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda}, \forall\lambda > \omega_0, n \in \mathbb{N}^*)$$

il suffit même de vérifier que :

$$(L_n-\lambda)^{-1}y \longrightarrow (\overline{L}-\lambda)^{-1}y$$

pour $y \in (L-\lambda)(D_L)$ qui est dense dans X.On doit vérifier que :

$$(L_n-\lambda)^{-1}(L-\lambda)x \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$$

pour tout $x \in D_L$,on a d'après la définition de D_L

$$(L_n-\lambda)^{-1}(L-\lambda)x - x = (L_n-\lambda)^{-1}(Lx - L_nx)$$

d'où

$$\left\|(L_n-\lambda)^{-1}(L-\lambda)x - x\right\| \leq \frac{N}{\lambda}\left\|Lx - L_nx\right\| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

Dans la suite on aura à utiliser le théorème (2.1) dans le cas où L est de la forme suivante :

$$\begin{cases} D_L = D_A \cap D_B \\ Lx = Ax + Bx, x \in D_L \end{cases} \tag{2.9}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires de domaines respectifs D_A et D_B dans X .On a le résultat suivant de densité de D_L

Proposition 2.1 *:On suppose que A et B sont fermés et à domaines denses dans X et que :*

i) Il existe deux nombres N et ω tels que :

$$\rho(A) \cap \rho(B) \supset]\omega, +\infty[$$

et que

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \ \ , \left\|(B-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \ \ , \forall \lambda > \omega$$

ii) D_A est stable par $(B-\lambda)^{-1}$ pour tout $\lambda > \omega$.

Alors $D_A \cap D_B$ est dense dans X

Preuve. **:**Soit $x \in X$,considérons la suite $\mathbb{Q}_\lambda, \lambda > \omega$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_\lambda &= \lambda^2(B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1} \ , \lambda > \omega \\ \mathbb{Q}_\lambda x &= \lambda^2(B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}x \ , \lambda > \omega \end{aligned}$$

Puisque D_A est stable par $(B-\lambda)^{-1}$ donc $(A-\lambda)^{-1}x$ est dans l'image de $(B-\lambda)^{-1}$,finalement $\mathbb{Q}_\lambda x \in D_B$ car $\mathbb{Q}_\lambda x \in \mathrm{Im}(B-\lambda)^{-1}$.De la même manière :$D_A$ est stable par $(B-\lambda)^{-1}$,$\forall\lambda > \omega$ puisque $(A-\lambda)^{-1}x \in D_A$ donc $(B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}x \in D_A$(grâce à la stabilité de D_A par $(B-\lambda I)^{-1}$) en fin $\mathbb{Q}_\lambda x \in D_A$,grâce à (i) les opérateurs $\lambda(A-\lambda)^{-1}$ et $\lambda(B-\lambda I)^{-1}$ convergent fortement vers -1 lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$ car

$$\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} \lambda(A-\lambda I)^{-1} = \lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} \lambda(B-\lambda I)^{-1} = -1$$

$$(\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \ \ , \left\|(B-\lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \ \ , \forall\lambda > \omega)$$

En fin

$$\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} \mathbb{Q}_\lambda x = x$$

■

2.2 Cas non dense :

Maintenant on va reprendre l'étude précédente dans le cas où D_L n'est plus nécéssairement dense dans X ,pour cela il est utile de rappeler quelques notions :

Définition 2.1 *On appelle graphe dans X toute partie de $X \times X$ et on identifie tout opérateur linéaire de domaine D_L dans X à son graphe G_L défini comme suit :*

$$G_L = \{(x, y); x \in D_L \quad , y = Lx\}$$

Remarque 2.3 *Si L admet une fermeture $\overline{L}$,on vérifie aisément que $G_{\overline{L}} = \overline{G_L}$,par abus de notation on notera encore $\overline{L}$ le graphe $\overline{G_L}$,lorsque L n'admet pas de fermeture au sens de la théorie des opérateurs ,si G est une graphe dans X on pose*

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \{(x, y); (y, x) \in G\} \\ G - \lambda &= \{(x, y - \lambda x); (x, y) \in G\}. \end{aligned}$$

On introduit la notion de valeur régulière

Définition 2.2 *Soit $A : D(A) \longrightarrow D(A)$ un opérateur linéaire fermé ,un point $\lambda \in \mathbb{C}$ est dit de du type régulier pour A si :*

$$\exists k = k(\lambda) > 0; \forall x \in D(A) : \|(A - \lambda)x\| \geq k \|x\|$$

Remarque 2.4 *λ est régulier pour G si $(G - \lambda)^{-1}$ est le graphe d'un opérateur linéaire continu partout défini dans X .i.e :si $(G-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ par abus de notation .Alors l'ensemble résolvant $\rho(G)$ de G est l'ensemble des valeurs régulières pour G et son complémentaire $\sigma(G)$ est le spectre de (G).Par analogue pour les opérateurs on a l'identité de la résolvante :*

$$(G - \lambda)^{-1} - (G - \mu)^{-1} = (\lambda - \mu)(G - \lambda)^{-1}(G - \mu)^{-1}$$

pour λ et μ dans $\rho(G)$ et par conséquent $\lambda \longrightarrow (G - \lambda)^{-1}$ est une fonction analytique définie dans $\rho(G)$ qui est ouvert et à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$

Lemme 2.1 *Soit G un graphe d'ensenmble résolvant $\rho(G)$ non vide,alors G est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si $(G - \lambda)^{-1}$ est injectif pour une valeur $\lambda \in \rho(G)$*

Dans le cas où D_L n'est pas dense dans X on a le théorème suivant

Theorème 2.2 *Soit L un opérateur linéaire de domaine D_L dans X et telle que :*

1. Il existe $N \geq 1$ et $\omega_0 \geq 0$ tels que :

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\| \quad , \forall \lambda > \omega_0 \quad , x \in D_L$$

2. Il existe $\omega_1 \geq \omega_0$ tel que $(L-\omega_1)(D_L)$ soit dense dans X ,Alors :

$$\rho(\overline{L}) \supset]\omega_0, +\infty[$$

et

$$\left\|(\overline{L}-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \quad ,\forall\lambda > \omega_0 et \overline{(L-\lambda)(D_L)} = X, \forall\lambda > \omega_0$$

Remarque 2.5 *En général $\overline{L}$ est un graphe , cependant $(\overline{L}-\lambda)^{-1}$ est un opérateur pour $\lambda > \omega_0$*

Preuve. $\overline{L}$ existe toujours en tant que graphe .On montre que $\omega_1 \in \rho(\overline{L})$.Soit $y \in X$,d'après (ii) (la densité) il existe $(x_n)_{n\geq 1}$ avec $x_n \in D_L$ et $y_n = Lx_n - \omega_1 x_n \longrightarrow y$,en faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$ et en utilisant (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq \frac{N}{\omega_1}\|L(x_n-x_m) - \lambda(x_n - x_m)\|, \forall\omega_1 > \omega_0, x_n \in D_L \\
\|x_n - x_m\| &\leq \frac{N}{\omega_1}\|Lx_n - \lambda x_n - (Lx_m - \lambda x_m)\|, \forall\omega_1 > \omega_0, x_n \in D_L \\
\|x_n - x_m\| &\leq \frac{N}{\omega_1}\|y_n - y_m\|, \forall\omega_1 > \omega_0, x_n \in D_L
\end{aligned}$$

et par conséquent la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy ,donc il existe $x \in X$ tel que $x_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n = Lx_n - \omega_1 x_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} y$ d'où $Lx_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} y + \omega_1 x$,on a $(x_n, Lx_n) \in G_L$ donc $(x, y+\omega_1 x) \in \overline{L}$, cela veut dire que,$\forall y \in X, \exists x \in X$ tel que $(x,y) \in \overline{L} - \omega_1$.Montrons l'unicité de x :En utilisant l'hypothèse (2.1) on obtient

$$\|x\| \leq \frac{N}{\omega_1}\|y - \omega_1 x\|, \forall(x,y) \in G_L$$

d'où

$$\|x\| \leq \frac{N}{\omega_1}\|y\|, \forall(x,y) \in \overline{L} - \omega_1 \text{ (par passage à la limite)}$$

ça implique que $(\overline{L}-\omega_1)^{-1}$ est le graphe d'un élément de $\mathcal{L}(X)$ partant que $\omega_1 \in \rho(\overline{L})$ et de plus

$$\left\|(\overline{L}-\omega_1)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\omega_1}$$

■

Corollaire 2.2 *:Soit $(L_n)_{n\geq 1}$ une suite d'opérateurs linéaires de domaines respectifs D_{L_n} dans X on définit L par :*

$$\begin{cases} D_L = x \in \left\{\underset{n\geq 1}{\cap} D_{L_n}, (L_n x)_{n\geq 1} \text{ converge dans } X\right\} \\ Lx = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} L_n x \qquad , x \in D_L \end{cases}$$

On suppose en outre que :

1. il existe $N \geq 1$ et $\omega_0 \geq 0$ tels que $\rho(L_n) \supset]\omega_0, +\infty[$ avec

$$\left\|(L_n - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \quad ,\forall \lambda > \omega_0, n \in \mathbb{N}^*$$

2. Il existe $\omega_1 \geq \omega_0$ tel que $(L - \omega_1)(D_L)$ est dense dans X ,alors :

$$\rho(\overline{L}) \supset]\omega_0, +\infty[\quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty}(L_n - \lambda)^{-1} = (\overline{L} - \lambda)^{-1} \ ,\forall \lambda > \omega_0$$

fortement dans $\mathcal{L}(X)$

Preuve. : (voir corollaire 2.1.) ■

Maintenant,on revient à la situation particulière où L est de la
forme (2.9) mais sans supposer que D_A et D_B sont denses dans X par contre on supposera que A et B commutent dans le sens que

$$\left[(A - \lambda)^{-1}; (B - \mu)^{-1}\right] = 0 \quad ,\forall \lambda \in \rho(A) \text{ et } \mu \in \rho(B) \tag{2.10}$$

tels que $\rho(A) \neq \phi$ et $\rho(B) \neq \phi$
on suppose que $\rho(A) \cap \rho(B) \supset]0, +\infty[$ et qu'il existe M_A et $M_B > 0$ tels que

$$\left\|(A - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{M_A}{\lambda} \quad ,\left\|(B - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{M_B}{\lambda}, \forall \lambda > 0 \tag{2.11}$$

Dans ce cas on a l'analogue du théorème (2.1) sans supposer que D_L est dense

Theorème 2.3 *: Sous les hypothèses* (2.10) *et* (2.11)*,on suppose que :*

i) Il existe $N \geq 1$ tel que $\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|Lx - \lambda x\|$ $,\forall \lambda > 0, x \in D_L$

ii Il existe $\omega_1 \geq 0$ tel que $(L - \omega_1)(D_L)$ est dense dans X .Alors L admet une fermeture $\overline{L}$ avec

$$\rho(\overline{L}) \supset]0, +\infty[\ \text{ et } \ \left\|(\overline{L} - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \quad ,\forall \lambda > 0$$

Pour démontrer ce théorème on utilise deux lemmes où C est un opérateur linéaire fermé dans X et $\rho(C) \supset]0, +\infty[$ et il existe $N > 0$ tel que

$$\left\|(C - \lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\lambda} \quad ,\forall \lambda > 0 \tag{2.12}$$

Lemme 2.2 *: On a*

i) $$\overline{D_C} = \left\{x \in X; x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda(C - \lambda)^{-1}x \right\}$$

ii) *D_C est dense dans X ssi $\forall x \in X$ on a*

$$x = -\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda(C - \lambda)^{-1}x$$

Preuve. Considérons

$$Z=\left\{x\in X \quad ; \; x=-\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\lambda(C-\lambda)^{-1}x\right\}$$

L'espace Z est fermé car grâce à l'ypothèse $\|(C-\lambda)^{-1}\|\leq\dfrac{N}{\lambda}$ $,\forall\lambda>0$ les opérateurs $\lambda(C-\lambda)^{-1}$ forment une famille équicontinue pour $\lambda>0$ d'autre part on a $Z\subset\overline{D_C}$ car si $x\in Z,x$ est une limite des éléments $-(C-\lambda)^{-1}x\in D_L$,finalement on a $D_C\subset Z$ (d'où $\overline{D_C}$ $\subset Z$ ce qui montre (i)) car pour $x\in D_C$ on a

$$x+\lambda(C-\lambda)^{-1}x=(C-\lambda)^{-1}Cx$$

et en utilisant (2.12) on obtient

$$\left\|x+\lambda(C-\lambda)^{-1}x\right\|\leq\frac{N}{\lambda}\left\|Cx\right\|\underset{\lambda\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$$

■

Définition 2.3 *Soit Y un sous-espace vectoriel fermé de X ,on dit que Y est stable par rapport à C s'il est invariant par la résolvante de C c'est à dire si*

$$(C-\lambda)^{-1}(Y)\subset Y \quad ;\forall\lambda>0$$

On définit l'opérateur linéaire dans Y par :

$$\begin{cases} D_{C/Y}=\{y\in D_C\cap Y;Cy\in Y\}\\ C_{/Y}y=Cy;y\in D_{C/Y}\end{cases}$$

On a $\rho(C_{/Y})\supset\,]0,+\infty[$ et

$$(C_{/Y}-\lambda)^{-1}=(C-\lambda)^{-1}_{/Y} \quad ;\forall\lambda>0$$

Exemple 2.1 *$\overline{D_C}$ est stable par rapport à C*

Lemme 2.3

i) Le domaine de $C_{/\overline{D_C}}$ est dense dans $\overline{D_C}$

ii) Si D_C est dense dans X alors pour tout sous-espace Y stable par rapport à C ,le domaine de $C_{/Y}$ est dense dans Y

Preuve. :D'après le lemme précédent on a pour $y\in\overline{D_C}$

$$y=\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}-\lambda(C-\lambda)^{-1}y=\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}-\lambda(C_{/\overline{D_C}}-\lambda)^{-1}y$$

et pour $y\in X$ on a

$$y=\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}-\lambda(C-\lambda)^{-1}y=\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}-\lambda(C_{/Y}-\lambda)^{-1}y$$

Preuve. du théorème 2.3 : Les hypothèes du théorème 2.7 sont vérifiées ,il suffit de montrer que $\overline{L}$ est le graphe d'une application linéaire ,pour cela on doit vérifie que $(\overline{L}-\lambda)^{-1}$ est injectif pour un $\lambda > 0$ .En appliquant le lemme 2.6.Considérons les restrictions au sous-espace $Y = \overline{D_A} \cap \overline{D_B}$,le sous-espace $Y = \overline{D_A} \cap \overline{D_B}$ est stable par rapport à A et à B d'après (2.10) (la commutativité des résolvantes),posons

$$A_1 = A_{/Y} \qquad \text{et} \qquad B_1 = B_{/Y}$$

On définit l'opérateur L_1par

$$\begin{cases} D_{L_1} = D_{A_1} \cap D_{B_1} \\ L_1 x = A_1 x + B_1 x \quad , x \in D_{L_1} \end{cases}$$

D'après le lemme 2.4 Le domaine de $A_{/\overline{D_A}}$ est dense dans $\overline{D_A}$,en appliquant (ii) du lemme 2.4 on obtient que D_{A_1}est dense dans Y (en remplaçant X par $\overline{D_A}$) et D_{B_1}est dense dans Y

$(\overline{D_{A_1}} = Y \quad , \quad \overline{D_{B_1}} = Y)$ .Maintenant on applique le théorème 2.1 à l'opérateur L_1,d'après la proposition 2.5 on obtient que D_{L_1} est dense dans Y $(\overline{D_{L_1}} = Y)$ et d'après l'ypothèse (i) du théorème (2.9) on obtient que $\exists N \geq 1$ et $\omega_0 \geq 0$ tels que

$$\|x\| \leq \frac{N}{\lambda} \|L_1 x - \lambda x\|$$

$,\forall \lambda > \omega_0, x \in D_{L_1}$,reste à montrer que $(L_1 - \omega_1)(D_{L_1})$ est dense dans Y .Soit l'ensemble

$$W = \underset{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}}{\cup} (A-\lambda)^{-1}(B-\mu)^{-1}(X)$$

gàce à la commutativité des A et B dans le sens que :

$$\left[(A-\lambda)^{-1}, (B-\mu)^{-1}\right] = 0 \quad ,\forall \lambda \in \rho(A) \text{ et } \ \mu \in \rho(B)$$

On a $\quad W \subset D_A \cap D_B \subset Y$ et d'après le lemme 2.10

$$x = -\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda (W-\lambda)^{-1} x \quad , \forall x \in X$$

cela veut dire que W est dense dans Y ,pour montrer que $(L_1 - \omega_1)(D_{L_1})$ est dense dans Y ,il suffit de montrer $W \subset \overline{(L_1 - \omega_1)(D_{L_1})}$,soit $y \in W$ donc $y = (A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1} x$ avec $x \in X$ d'après le théorème 2.9 ,il existe une suite $(z_n)_n$ avec $z_n \in D_L$ et

$$x_n = (L - \omega_1) z_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$$

d'où

$$(A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1} x_n = (L-\omega_1)(A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1} z_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y$$

puisque

$$y_n = (A-\alpha)^{-1}(B-\beta)^{-1} z_n \in D_A \cap D_B \subset Y$$

et Ay_n et $By_n \in Y$ on a $y_n \in D_{L_1}$ et

$$(L_1 - \omega_1) y_n = (L - \omega_1) y_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y$$

ça implique que $y \in \overline{(L_1 - \omega_1)(D_{L_1})}$ d'ou la densité de $(L_1 - \omega_1)(D_{L_1})$ dans Y ,finalement on déduit que L_1admet une fermeture $\overline{L_1}$ et que

$$\left\|(\overline{L_1} - \omega_1)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{\omega_1} \text{ et } (\overline{L_1} - \omega_1)^{-1} = (\overline{L} - \omega_1)^{-1}_{/Y}$$

$\overline{L}$ est pris au sens des graphes,on vérifie l'injectivité de $(\overline{L} - \omega_1)^{-1}$:Soit $x \in X$ tel que $(\overline{L} - \omega_1)^{-1}x = 0$,on a alors :

$$(A - \alpha)^{-1}(B - \beta)^{-1}x = y \in D_A \cap D_B \subset Y$$

d'où

$$(\overline{L_1} - \omega_1)^{-1}y = (\overline{L} - \omega_1)^{-1}y = 0$$

et $y = 0$ et vu l'injectivité de $(\overline{L_1} - \omega_1)^{-1}$ on obtient que $x = 0$,donc $(\overline{L} - \omega_1)^{-1}$ est injectif ■ ■

Chapitre 3

La théorie des sommes d'opérateurs de Da-prato-Grisvard (cadre commutatif)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on donne quelques rappels sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires. Plus précisément, soit X un espace de Banach complexe , A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaine respectifs D_A et D_B dans X et leurs ensembles résolvants $\rho(A)$ et $\rho(B)$ non vides.

On définit l'opérateur L (l'opérateur somme) par :

$$\begin{cases} D_L = D_A \cap D_B \\ Lx = Ax + Bx \quad , x \in D_L \end{cases}$$

On étudie les équations de la forme :

$$Ax + Bx = y \tag{3.1}$$

y est un vecteur donné de X , $x \in X$ est la solution dont l'existence et la régularité seront exposées, l'équation (3.1) s'écrit : $Lx = y$

Définition 3.1 *une solution* ***stricte*** *de* (3.1) *est un élément* $x \in D_L$ *satisfaisant* (3.1)

Définition 3.2 *On dit que* x *est une solution* **forte** *de* (3.1) *si et seulement si* $\exists(x_n)$ *une suite dans* D_L *telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \quad x \qquad et \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} Lx_n = \quad y$$

1. Une solution **stricte** de (3.1) est une solution **forte** de (3.1)
2. Si L est **fermé** alors les deux notions de solution **stricte** et **forte** sont **équivalentes**
3. La somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécéssairement fermée.
4. Si L est **fermable** alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

i) $\forall y \in X$, $\exists$ une solution **forte** de (3.1)

ii) $0 \in \rho(\overline{L})$ i.e : $\exists(\overline{L} + 0I)^{-1}$ donc $(\overline{L})^{-1}$ existe

$\overline{L}$ c'est le prolongement fermé de L

5. Si L est **fermé** alors les deux assertions suivantes sont **équivalentes**

i) $\forall y \in X$, $\exists$ une solution stricte de (3.1)

ii) $0 \in \rho(L)$ i.e : $\exists(L + 0I)^{-1}$ donc L^{-1} existe

L'interêt de $\overline{L}$ réside dans la notion de solution **forte** de l'équation :

$$Lx - \lambda x = y \ , \ \lambda \text{ étant un paramètre spectral} \tag{3.2}$$

x est une solution **forte** de (3.2) si $\exists(x_n)_n$, $x_n \in D_L$ telle que

$$\begin{cases} x_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x \\ Lx_n - \lambda x_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y \end{cases}$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$ c'est -à -dire $x \in D_{\overline{L}}$ et $\overline{L}x - \lambda x = y$. En conséquence l'équation (3.2) admet une solution forte unique pour tout $y \in X$ si et seulement si λ est un point de l'ensemble résolvant de $\overline{L}$.

Si l'équation (3.2) admet une solution $x \in D_L$, on dit que c'est une solution **stricte** (ou classique).

3.2 Sommes d'opérateurs de type parabolique -elliptique (cadre commutatif)

3.2.1 Introduction

On impose quelques conditions supplémentaires qui conduisent aux problèmes appelés ″**problèmes paraboliques ou elliptiques**″. Ces problèmes seront traité seulement dans le cas où les opérateurs A et B commutent (au sens de la résolvante). Dans ce cas l'opérateur S_λ défini par

$$S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1} (B + z)^{-1} y dz$$

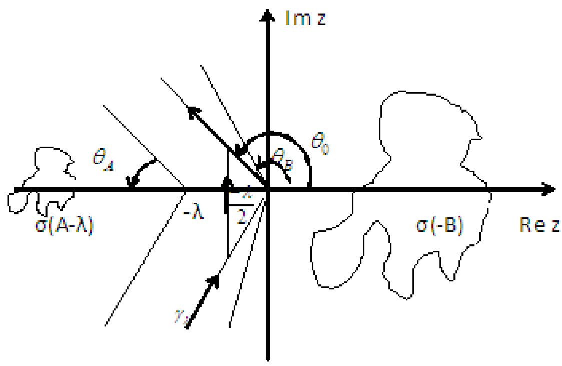
joue un rôle fondamental dans l'expression et l'analyse des solutions de l'équation (3.1).

3.2.2 Hypothèses

Soit $(X; \|.\|_X)$ un espace de Banach complexe quelconque et soient A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaine D_A et D_B dans X ($D_A \subset X$, $D_B \subset X$), On se propose d'étudier :

$$\begin{cases} Ax + Bx - \lambda x = y \quad , y \in X \\ x \in D_A \cap D_B \end{cases} \tag{3.3}$$

(C'est l'équation (3.1) où A est remplacé par $A - \lambda I$)



On suppose les deux hypothèses (H_1) et (H_2) :
(H_1) (parabolicité-ellipcité)

$$\left\{\begin{array}{l} \exists \theta_A, \theta_B \in [0, \pi[\ \text{ tels que} \\ i) \rho(A) \supset \Sigma_A = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \theta_A\} \\ \quad \forall z \in \Sigma_A ; \left\|(A-z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C_A(\theta)}{|z|} \\ ii) \rho(B) \supset \Sigma_B = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \theta_B\} \\ \quad \forall z \in \Sigma_B ; \left\|(B-z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C_B(\theta)}{|z|} \\ \quad C_A \text{ et } C_B \text{ fonctions numeriques paire et convexe} \\ iii) \theta_A + \theta_B < \pi \end{array}\right.$$

Remarque 3.1 *D_A et D_B sont des espaces de Banach munis des normes de graphe*

$$\|x\|_{D_A} = \|x\|_X + \|Ax\|_X \quad et \quad \|x\|_{D_B} = \|x\|_X + \|Bx\|_X$$

(H_2) (cadre commutatif), (commutativité au sens des résolvantes)

$$\left\{\begin{array}{l} \quad \forall z \in \rho(A), \forall z' \in \rho(B) : \left[(A-zI)^{-1}, (B-z'I)\right] = 0 \\ \text{où } \left[(A-zI)^{-1}, (B-z'I)\right] = (A-zI)^{-1}(B-z'I) - (B-z'I)(A-zI)^{-1} \end{array}\right.$$

Remarque 3.2 *L'hypothèse $\theta_A + \theta_B < \pi$ implique que l'un des deux angles θ_A, θ_B est nécessairement plus petit que $\dfrac{\pi}{2}$,ce qui implique que l'opérateur correspondant est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique non fortement continu en* 0 *puisque ni D_A ni D_B n'est supposé dense dans X*

En effet

$$\theta_A + \theta_B < \pi \Longrightarrow \theta_B < \pi - \theta_A \Longrightarrow \exists \theta_0 \text{ tel que } \theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$$

$\blacksquare$

Soit γ_λ la courbe sectorielle (voir figure) infinie de Jordan jonignat $\infty e^{-i\theta_0}$ vers $\infty e^{i\theta_0}$ définie par :

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda &= \left\{z : \arg z = -\theta_0, |z| > \frac{\lambda}{2\,|\cos\theta_0|}\right\} \cup \left\{z : \operatorname{Re} z = -\frac{\lambda}{2}, |z| \le \frac{\lambda}{2\,|\cos\theta_0|}\right\} \\ &\cup \left\{z : \arg z = \theta_0, |z| > \frac{\lambda}{2\,|\cos\theta_0|}\right\}\end{aligned}$$

Remarque 3.3 *La courbe γ_λ demeure dans $(\Sigma_A - \lambda) \cap \Sigma_{-B}$ et sépare les spectres $\sigma(A-\lambda)$ et $\sigma(-B)$*

Les fonctions : $z \longmapsto (A - \lambda - z)^{-1}$ est définie et analytique à droite de γ_λ, et $z \longmapsto (B+z)^{-1}$ est définie et analytique à gauche de γ_λ

3.2.3 Construction de la solution

On cherche une solution x de la forme :

$$x = (A + B - \lambda I)^{-1} y$$

C'est -à-dire on trouve une formule de représentation de $(A + B - \lambda I)^{-1}$

La résolution de (3.3) est basée essentiellement sur une construction explicite de la solution sous la forme

$$x = S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1} (B + z)^{-1} y dz$$

On considère donc dans la suite cet opérateur

$$y (\in X) \longmapsto S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1} (B + z)^{-1} y dz$$

Maintenant on donne quelques propriétés de S_λ.

Proposition 3.1 *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) on a :*

$$S_\lambda \in L(X), \;\; i.e : \exists N > 0 : \|S_\lambda\| \le \frac{N}{\lambda}$$

Preuve. On a

$$\left\|(B+z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{C_B(\theta)}{|z|}$$

et

$$\left\|(A - \lambda - z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{C_A(\theta)}{|\lambda + z|}$$

De ces majorations, on trouve

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(y)\|_X &= \left\| \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1} (B + z)^{-1} y dz \right\|_X \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\lambda} \left\|(A - \lambda - z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\|(B + z)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X \, |dz| \\ &\le \frac{k}{2\pi} \int_{\gamma_\lambda} \frac{|dz|}{|z|\,|\lambda + z|} \|y\|_X\end{aligned}$$

Posons $z = \lambda \acute{z}$ avec $\lambda > 0$, d'où

$$\|S_\lambda(y)\|_X \leq \frac{k}{2\pi\lambda}\int_{\gamma_\lambda} \frac{|d\acute{z}|}{|\acute{z}|\,|1+\acute{z}|}\,\|y\|_X$$

Puisque l'integrale $\int_{\gamma_\lambda} \frac{|d\acute{z}|}{|\acute{z}|\,|1+\acute{z}|}$ est convergente , alors il existe $N > 0$ tel que

$$\|S_\lambda(y)\|_X \leq \frac{N}{\lambda}\,\|y\|_X$$

■

Proposition 3.2 *Soit $\lambda > 0$ sous les hypothèses (H_1) et (H_2) on a*

1. $\forall x \in D(A+B) = D_A \cap D_B$ alors :

$$S_\lambda(Ax + Bx - \lambda x) = x$$

(donc S_λ est inverse à gauche, pour $x \in D_A \cap D_B$)

2. Si $x \in D_A + D_B$ alors :

$$S_\lambda x \in D_A \cap D_B \text{ et } (A + B - \lambda I)S_\lambda x = x$$

(donc S_λ est inverse à droite mais sur D_A ou D_B)

C'est une proposition centrale dans la théorie des sommes.
Pour démontrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 *Supposons que (H_1) et (H_2) sont vérifiées et $x \in D(A) \cap D(B)$, alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz = 0$$

et

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz = x$$

Preuve. *:On écrit*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz = \lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz$$

où

$$\gamma_R = \{z \in \gamma_\lambda : |z| \leq R\}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz &= \lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz \\
&= -\lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R^-} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz
\end{aligned}$$

telle que γ_R^- *est la courbe* γ_R *dans le sens inverse . Posons* $\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$ *avec*

$$C_R = \left\{R\ e^{i\theta} : \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0\right\}$$

et

$$\Gamma'_R = \gamma_R^- \cup C'_R$$

avec

$$C'_R = \left\{R\ e^{i\theta} : -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0\right\}$$

On a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{C_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz$$

La fonction $\dfrac{(B+z)^{-1}Bx}{z}$ *est analytique sur* Γ_R *et décroît comme* $\dfrac{1}{|z|^2}$*, donc*

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz = 0$$

grâce au théorème de Cauchy, de plus

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{C_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz = 0$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz = 0$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_R^-} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz &= -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma'_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz \\ &\quad -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{C'_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz\end{aligned}$$

la fonction $\dfrac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}$ *n'est pas analytique à l'origine et décroît comme* $\dfrac{1}{|z|^2}$ *sur* Γ'_R *, donc d'après la formule des résidus on aura*

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_R'^-} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz = x$$

De plus

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{C'_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz = 0$$

Donc

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz = x$$

■

Preuve. *(de la proposition* 3.2*)*

1. *Soit* $x \in D(L)$*, montrons que* $S_\lambda(Lx-\lambda x) = x$*. On doit calculer pour* $x \in D_A \cap D_B$

$$I = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\left[Ax+Bx-\lambda x\right]dz$$

On écrit :

$$\begin{aligned}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\left[Ax+Bx-\lambda x\right] &= (B+z)^{-1}\left[(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x\right]\\ &\quad+(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\\ &= (B+z)^{-1}x+z(B+z)^{-1}x\\ &\quad+(A-\lambda-z)^{-1}x-z(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x\\ &= (B+z)^{-1}x+(A-\lambda-z)^{-1}x\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{cases}(B+z)^{-1}x = \dfrac{x}{z}-\dfrac{B(B+z)^{-1}x}{z} = \dfrac{x}{z}-\dfrac{(B+z)^{-1}Bx}{z} \ \textit{(car } x \in D_B \textit{)}\\ (A-\lambda-z)^{-1}x = \dfrac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}-\dfrac{x}{z}\end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\left[Ax+Bx-\lambda x\right] &= \frac{-(B+z)^{-1}Bx}{z}+\frac{x}{z}+\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}-\frac{x}{z}\\ &= \frac{-(B+z)^{-1}Bx}{z}+\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}\end{aligned}$$

(gâce à la 1^{ere} *identité des résolvantes) D'où*

$$I = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz$$

$$I = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}dz+\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}dz$$

$I = I_1 + I_2$ *.On montre que :* $I_2 = 0$ *à gauche de* γ_λ*l'application*

$$\begin{aligned} z &\longmapsto \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z}\\ \rho(-B) &\longrightarrow X\end{aligned}$$

est analytique à valeurs dans le Banach X *et est en* $O(\frac{1}{|Z|^2})$*, donc* $I_2 = 0$ *(d'après le théorème de Cauchy)*

En effet , on considère

$$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R = \{z \in \gamma_\lambda : |z| \leq R\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z} dz &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z} dz \\ &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} -\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C_R} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z} dz \quad \textit{(sens -)} \end{aligned}$$

Pour $z \in C_R$ *, on pose :*$z = Re^{i\theta}, \theta \in [\theta_0, 2\pi - \theta_0]$ $\;dz = iRe^{i\theta}d\theta$ *d'où*

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{(B+z)^{-1}Bx}{z} dz = \lim_{R \longrightarrow +\infty} -\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} \frac{(B+Re^{i\theta})^{-1}}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \\ &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} (B+Re^{i\theta})^{-1} Bx d\theta = 0 \end{aligned}$$

Pour I_1*, on utilise le théorème des résidus (à droite) .On écrit que*

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} -\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_{\lambda |z| \leq R}} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z} dz \\ &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} -\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z} dz \end{aligned}$$

$\Gamma_R = \gamma_\lambda \cup C_R$ *,donc*

$$I_1 = -\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z} dz + \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z} dz$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z} dz &= 2\pi i Res \left[\frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z}, z=0 \right] \\ &= 2\pi i x \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z} dz = -x$$

Le $(-)$ *avec le sens de la courbe se compensent ,le pôle* $z = 0$ *étant à droite*
Pour C_R *on a :*

$$\lim_{R \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C_R} \frac{(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda)x}{z} dz = 0 \textit{ (lemme de Jordan)}$$

2) $x \in D_A + D_B \Longrightarrow \exists x_0 \in D_A$ *et* $x_1 \in D_B$: $x = x_0 + x_1$

Puisque les rôles de A *et* B *étant symetrique, il suffit considérer par exemple le cas où* $x \in D_B$ *(ou* D_A*) alors :*

$$S_\lambda x = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1} x dz$$

Montrons que :$S_\lambda x \in D_B$ *(i.e : s'il existe* $BS_\lambda x$ *?)Il suffit de montrer que* $(A - \lambda - z)^{-1}(B+z)^{-1}x \in D_B$*.On a* $(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}x = (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}x \in D_B$*et*

$$B(A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1}x = B(B + z)^{-1}(A - \lambda - z)^{-1}x$$

$$\begin{aligned}
B(B + z)^{-1}(A - \lambda - z)^{-1}x &= (B + z - z)(B + z)^{-1}(A - \lambda - z)^{-1}x \\
&= (A - \lambda - z)^{-1}x - z(B + z)^{-1}(A - \lambda - z)^{-1}x \\
&= (A - \lambda - z)^{-1} \left[x - z(B + z)^{-1}x\right] \\
&= (A - \lambda - z)^{-1} \left[x - (z + B - B)(B + z)^{-1}x\right] \\
&= (A - \lambda - z)^{-1}B(B + z)^{-1}x \\
&= (A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1}Bx
\end{aligned}$$

Donc : $S_\lambda x \in D_B$ *et* $B(S_\lambda x) = S_\lambda(Bx)$*.Il reste à montrer que* $S_\lambda x \in D_A$ *, on a*

$$(B + z)^{-1}x = \frac{x}{z} - \frac{(B + z)^{-1}Bx}{z}$$

D'où

$$\begin{aligned}
S_\lambda x &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1}x dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1} \left[\frac{x}{z} - \frac{(B + z)^{-1}Bx}{z}\right] dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1}Bx\frac{dz}{z} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1}x\frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

et grâce à la formule des résidus on obtient :

$$S_\lambda x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - \lambda - z)^{-1}(B + z)^{-1}Bx\frac{dz}{z} + (A - \lambda)^{-1}x \qquad (**)$$

(le (+) provient dû sens du parcours et du fait qu'on a

$$(A - \lambda - z)^{-1} = -(z - (A - \lambda)^{-1})$$

D'où

$$\begin{aligned}
A(S_\lambda x) &= A(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} A(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\frac{dz}{z} \\
&= A(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (\lambda+z)(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\frac{dz}{z} \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (B+z)^{-1}Bx\frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

L'intégrale $+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}(B+z)^{-1}Bx\frac{dz}{z} = 0$ *(en intégrant à gauche de* γ_λ*)*

$$\begin{aligned}
A(S_\lambda x) &= x + \lambda(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}\frac{Bx}{z}dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bxdz \\
&= x + \lambda\left[(A-\lambda)^{-1}x + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bxdz\right] \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bxdz \\
&= x + \lambda(S_\lambda x) + (-B(S_\lambda x))
\end{aligned}$$

D'où

$$A(S_\lambda x) + B(S_\lambda x) - \lambda(S_\lambda x) = x \qquad \textit{d'après } (**)$$

Donc

$$(A+B-\lambda)(S_\lambda x) = x \quad (S_\lambda \textit{ inverse à droite})$$

■

3.3 Solutions strictes pour un second membre dans un espace d'interpolation

Pour suivre l'étude de l'équation (3.1) on a besoin de certains espaces d'interpolation

On définit des espaces intermédiaires entre D_A et X (ou $D_B$et X) pour des opérateurs ″sectoriels″ A (ou B) vérifiant (H_1)

Définition 3.3 *Soit* $p \in [1, \infty]$

1. *Si $p \in [1,\infty[$, on définit l'espace $L^p_*(\mathbb{R}_+, X)$ par :*

$$f \in L^p_*(\mathbb{R}_+, X) \Longleftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \quad \text{est fortement mesurable et} \\ (\int\limits_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t})^{\frac{1}{p}} = \|f(t)\|_{L^p_*} < \infty \end{cases}$$

2. *On définit l'espace $L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X)$ par :*

$$f \in L^\infty_*(\mathbb{R}_+, X) \Longleftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X \quad \text{est fortement mesurable et} \\ \underset{0<t<\infty}{Supess} \|f(t)\|_X < \infty \end{cases}$$

Définition 3.4 *Soient $(E_0, \|.\|_0)$ et $(E_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach qui s'injectent continûment dans un espace topologique séparé ξ*

pour $p \in [1,\infty]$ et $\theta \in]0,1[$, on définit $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ espace intermédiaire entre $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$ par :

$$x \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1 \text{ tels que } : x = u_0(t) + u_1(t) \\ 2) t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0), t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1) \end{cases}$$

(Notons que $(E_0, E_1)_{\theta,p} = (E_1, E_0)_{1-\theta,p}$)

Proposition 3.3 *: Avec les notations de la définition précédente on pose*

$$\begin{cases} \|x\|_{E_0 \cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1} \quad \text{si } x \in E_0 \cap E_1 \\ \|x\|_{E_0 + E_1} = \inf\limits_{x_i \in E_i, x_0 + x_1 = x} (\|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}) \text{ si } x \in E_0 + E_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \|x\|_{\theta,p} = \quad \inf(\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1)} \\ \qquad u_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E_i, i = 0, 1 \\ \qquad \forall t > 0, \ u_0(t) + \ u_1(t) \ = x \\ \text{Si } x \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \end{cases}$$

Alors :$(E_0 \cap E_1, \|.\|_{E_0 \cap E_1})$; $(E_0 + E_1, \|.\|_{E_0 + E_1})$; $((E_0, E_1)_{\theta,p}, \|.\|_{\theta,p})$ sont des espaces de Banach et de plus

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta,p} \subset E_0 + E_1$$

avec injections continus

Proposition 3.4 *: $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ est un sous-espace vectoriel de $E_0 + E_1$ vérifiant :*

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta,p} \subset E_0 + E_1$$

et

$$x \longmapsto \inf_{\substack{u_0, u_1 \\ u_0 + u_1 = x}} (\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L^p_*(E_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L^p_*(E_1)})$$

est une norme rendant les injections ci-dessus continues

Theorème 3.1 *(Solution stricte)*

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X vérifiant (H_1) et (H_2).Alors pour tout $y \in D_A(\theta,+\infty)+D_B(\theta,+\infty)$ où $\theta \in \,]0,1[$,il existe une unique solution stricte $x = S_\lambda y \in D_A \cap D_B$ de $Ax + Bx - \lambda x = y$

Preuve. On suppose que $y \in D_B(\theta,+\infty)$

$$x = S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz$$

$$\begin{aligned} y \quad &\in \quad D_B(\theta,+\infty) \Longleftrightarrow \sup_{r>0}\left\|r^\theta B(B+r)^{-1}y\right\|_X < +\infty \\ &\Longleftrightarrow \sup_{\substack{|z|>0 \\ z\in\gamma_\lambda}}\left\|z^\theta B(B+z)^{-1}y\right\|_X < +\infty \end{aligned}$$

Montrons que $x = S_\lambda y \in D_B$ c'est à dire :

$$\left\|\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}B(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}ydz\right\| < +\infty$$

On a

$$(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1} = (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y$$

et

$$\begin{aligned} B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y &= (B+z-z)(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y \\ &= (A-\lambda-z)^{-1}y - z(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}y \\ &= (A-\lambda-z)^{-1}y - z(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y \\ &= (A-\lambda-z)^{-1}\left[y - z(B+z)^{-1}y\right] \\ &= (A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y \end{aligned}$$

et

$$\left\|B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y\right\|_X \leq \frac{C}{|z+\lambda|\,|z|^\theta}\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}$$

car

$$\left\|B(B+z)^{-1}y\right\| \leq \frac{\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}}{|z|^\theta}$$

et

$$\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} = \|y\|_X + \sup\left\|z^\theta B(B+z)^{-1}y\right\|_X$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}B(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz$ est absolument convergente de plus $x \in D(B)$ et

$$Bx = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz$$

Pour prouver que $x \in D(A)$ on utilise l'identité de la résolvante suivante

$$(B+z)^{-1}y = \frac{y}{z} - \frac{B(B+z)^{-1}y}{z}$$

On a

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}y dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}\left[\frac{y}{z}-\frac{B(B+z)^{-1}y}{z}\right]dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}y\frac{dz}{z} + \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

en utilisant la formule des résidus on trouve

$$x = (A-\lambda)^{-1}y + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\frac{dz}{z}$$

donc

$$x \in D(A)$$

et

$$\begin{aligned}
(A-\lambda)x &= y + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y\frac{dz}{z} \\
&= y + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}B(B+z)^{-1}y\frac{dz}{z} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}y dz \\
&= y - Bx
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}B(B+z)^{-1}y\frac{dz}{z}$ est nulle , alors on a le résultat. ■

3.3.1 Régularité maximale

Theorème 3.2 *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_1) *et* $y \in D_{_B}(\theta,+\infty)$,

Alors $x = S_\lambda y \in D_A \cap D_B$ et de plus on a Ax et $Bx \in D_{_B}(\theta,+\infty)$
Preuve. On doit montrer :
la régularité

$$Bx \in D_{_B}(\theta,+\infty) \text{ i.e } :\sup_{r>0}\left\|r^\theta B(B-r)^{-1}Bx\right\|_X < +\infty$$

et la régularité

$$Ax \in D_{_B}(\theta,+\infty) \text{ i.e } :\sup_{r>0}\left\|r^\theta B(B-r)^{-1}Ax\right\|_X < +\infty$$

Soit $r > 0$,assez très grand ($r > \lambda$), supposons que γ_λ passe à droite du point $z = -r$.On calcule : $B(B-r)^{-1}x$

On a :

$$\begin{aligned}
B(B-r)^{-1}x &= B(B-r)^{-1}S_\lambda y \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} B(B-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (B-r+r)(B-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} r(B-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} r(B-r)^{-1}(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}ydz
\end{aligned}$$

On utilise la 2^{eme} identité de la résolvante :

$$(B-r)^{-1}(B+z)^{-1} = \frac{1}{r+z}\left[(B-r)^{-1} - (B+z)^{-1}\right]$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
B(B-r)^{-1}x &= x - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz \\
&= x + I + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz
\end{aligned}$$

L'intégrale

$$I = -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz = 0$$

(En integrant à droite de γ_λ, la fonction $\dfrac{(A-\lambda-z)^{-1}y}{r+z}$ est analytique à droite de γ_λ et $r+z \neq 0$) et on a

$$B(B-r)^{-1}x = x + r(B-r)^{-1}x$$

alors $\quad C_R = \gamma_R \cup \Gamma_R$

$$\begin{aligned}
B(B-r)^{-1}x &= x + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{r+z-z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz \\
&= x + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz \\
&= x - x - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$B(B-r)^{-1}x=-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz$$

Posons

$$I=-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz$$

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{R\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz\\
&= \lim_{R\longrightarrow+\infty}\left[(-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_R}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz)-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz\right]\\
&= \lim_{R\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz
\end{aligned}$$

car

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_R}\frac{r}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}(B-r)^{-1}ydz=0$$

Posons $z=Re^{i\theta}\Longrightarrow dz=Rie^{i\theta}d\theta$ et $(B-r)^{-1}=\xi$,on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{R\longrightarrow+\infty}(-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{r}{r+Re^{i\theta}}(A-\lambda-Re^{i\theta})^{-1}\xi Rie^{i\theta}d\theta)\\
&= \lim_{R\longrightarrow+\infty}(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{r}{r+Re^{i\theta}}(A-\lambda-Re^{i\theta})^{-1}\xi Re^{i\theta}d\theta)
\end{aligned}$$

$$\left\|\lim_{R\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{r}{r+Re^{i\theta}}(A-\lambda-Re^{i\theta})^{-1}\xi Re^{i\theta}d\theta\right\|\underset{R\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$$

$\Longrightarrow$

$$B(B-r)^{-1}Bx=-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz$$

$$\begin{aligned}
\left\|B(B-r)^{-1}Bx\right\|_X &= \left\|-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r+z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz\right\|_X\\
&\leq k\int\limits_{\gamma_\lambda}\left|\frac{z}{\lambda+z}\right|.\frac{1}{|r+z|}.\frac{1}{|z|^\theta}\,|dz|\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}\\
&\leq k\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{1}{|r+z|}.\frac{1}{|z|^\theta}\,|dz|\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}
\end{aligned}$$

En remplaçant z par rz $(z \longleftrightarrow rz)$ on obtient

$$\left\|B(B-r)^{-1}Bx\right\|_X \leq k\left[\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{1}{|1+z|}.\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\right]\frac{\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}}{r^\theta}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left\|r^\theta B(B-r)^{-1}Bx\right\|_X &\leq kr^\theta\left[\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{1}{|1+z|}.\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\right]\frac{\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}}{r^\theta} \\ &\leq k\left[\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{1}{|1+z|}.\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\right]\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} \\ &\leq \acute{k}\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} \text{ où } \acute{k} = k\left[\int\limits_{\gamma_\lambda} \frac{1}{|1+z|}.\frac{1}{|z|^\theta}|dz|\right]\end{aligned}$$

Donc

$$Bx \in D_B(\theta,+\infty)$$

■

Remarque 3.4 *On utilise les deux lemmes suivants*

Lemme 3.2 *Pour r assez grand $(r > \lambda), \forall z \in \gamma_\lambda, \exists k > 0$ tels que*

$$|z+r| \geq kr \Longrightarrow |z+r| \geq k|z|$$

et

$$|z-r| \geq kr \Longrightarrow |z-r| \geq k|z|$$

Preuve. *Soit $z \in \gamma_\lambda$ et $r > 0$, D'après le schéma on a :*

$$\begin{aligned}|z \pm r| &\geq ab = r\sin\delta \\ &\geq kr\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|z \pm r| &\geq cd = |z|\sin\delta \\ &\geq k|z|\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3 *Soit $\nu \in]0,1[$ alors il existe $C > 0$ telle que pour $r > 0$*

$$\int\limits_{\gamma} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^\nu} \leq \frac{C}{r^\nu}, \forall z \in \gamma$$

Preuve. *C'est une conséquence du lemme précédent. On pose*

$$\gamma = \gamma_r \cup (\gamma - \gamma_r)$$

avec

$$\gamma_r = \{z \in \gamma : |z| \leq r\}$$
$$\gamma - \gamma_r = \{z \in \gamma : |z| > r\}$$

Alors

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z \pm r|\,|z|^{\nu}} = \int_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r|\,|z|^{\nu}} + \int_{\gamma-\gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r|\,|z|^{\nu}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z \pm r|\,|z|^{\nu}} &= \int_{\substack{z\in\gamma \\ |z|\leq r}} \frac{|dz|}{|z \pm r|\,|z|^{\nu}} \\
&\leq \frac{k}{r} \int_0^r \frac{|dz|}{|z|^{\nu}} \\
&\leq \frac{k}{r} \left[|z|^{1-\nu}\right]_0^r \\
&\leq \frac{k}{r} r^{1-\nu} = \frac{k}{r^{\nu}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma-\gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r|\,|z|^{\nu}} &= \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z \pm r|\,|z|^{\nu}} \\
&\leq k \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z|^{1+\nu}} \\
&\leq k\,|z|^{-\nu}\big]_r^{+\infty} = \frac{k}{r^{\nu}}
\end{aligned}$$

Donc d'après les deux lemmes on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|r^{\theta} B(B-r)^{-1} Bx\right\|_X &\leq kr^{\theta} \int_{\gamma_\lambda} \frac{|z|}{|r+z|} \cdot \frac{1}{|\lambda+z|} \cdot \frac{1}{|z|^{\theta}}\,|dz|\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} \\
&\leq k.r^{\theta} . \frac{k}{r^{\theta}} \|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} \\
&\leq \acute{k}\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} \Longrightarrow Bx \in D_B(\theta,+\infty)
\end{aligned}$$

Alors vu que $x \in D_B \subset D_B(\theta,+\infty)$ *et de l'équation* $Ax = y + \lambda x - Bx$ *et* $y \in D_B(\theta,+\infty)$, *on trouve que* $Ax \in D_B(\theta,+\infty)$ ∎

Proposition 3.5 *(Régularité croisée) :*
Sous les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *et* $y \in D_B(\theta,+\infty)$, *Alors* $Bx \in D_A(\theta,+\infty)$

Preuve.

$$x = S_\lambda y = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz$$

$$Bx = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz$$

On doit montrer :

$$Bx \in D_{_A}(\theta,+\infty)$$

c'est à dire

$$\sup_{r>0}\left\|r^\theta A(A-r)^{-1}Bx\right\| \leq k$$

ou bien

$$\sup_{r>0}\left\|r^\theta (A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx\right\| \leq k$$

$$\begin{aligned}
(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx &= (A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}B(S_\lambda y)\\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz\\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-r+r-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz\\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}r(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)
\end{aligned}$$

D'après la 2eme identité de la résolvante on a :

$$(A-\lambda-r)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1} = \frac{1}{r-z}\left[(A-\lambda-r)^{-1}-(A-\lambda-z)^{-1}\right]$$

donc

$$\begin{aligned}
(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx &= Bx - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{r}{r-z}(A-\lambda-r)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz\\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{r-z+z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx &= Bx + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz\\
&\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz
\end{aligned}$$

donc

$$(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx = -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz$$

$$\begin{aligned}\left\|(A-\lambda)(A-\lambda-r)^{-1}Bx\right\| &= \left\|-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{z}{r-z}(A-\lambda-z)^{-1}B(B+z)^{-1}ydz\right\| \\ &\leq k\int\limits_{\gamma_\lambda}\frac{|z|}{|1-z|}.\frac{1}{|\lambda+z|\,|z|^{\theta}}\,|dz|\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)} \\ &\leq k\frac{\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}}{r^{\theta}} = \frac{k}{r}\,\|y\|_{D_B(\theta,+\infty)}\end{aligned}$$

Donc

$$Bx \in D_A(\theta,+\infty)$$

Theorème 3.3 *(Régularité maximale) Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X vérifiant (H_1) et (H_2).Pour $y \in D_A(\theta,+\infty)$, la solution stricte x de*

$$Ax+Bx-\lambda x = y$$

vérifie :

1. $(A-\lambda)x \in D_A(\theta,+\infty)$
2. $Bx \in D_A(\theta,+\infty)$
3. $(A-\lambda)x \in D_B(\theta,+\infty)$

■

3.4 Exemple et application

3.4.1 Equation de la chaleur :

Soit l'équation de la chaleur

$$(6)\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)-\lambda u(t,x)=f(t,x) \\ u(0,x)=0 \;\;,\;\; x\in(0,1) \\ u(t,0)=u(t,1)=0\;,\;\; t\in(0,1) \end{cases}$$

Où $\lambda > 0$ fixé f donnée $X = L^p(]0,1[)$ et $E = C([0,1]\,;X)$

$$\begin{aligned} f:[0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned} \quad f(t)\in L^p(]0,1[)$$

$$\begin{aligned} f(t):\,]0,1[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightsquigarrow (f(t))(x)=f(t,x) \end{aligned}$$

Et (6) devient le problème de Cauchy abstrait suivant :

$$\begin{cases} -u^{'}(t)+\Lambda u(t)-\lambda u(t)=f(t) \\ u(0)=0 \quad , \quad t\in[0,1] \end{cases}$$

Où

$$\begin{cases} D_\Lambda=\{\varphi\in W^{2,p}(]0,1[):\varphi(0)=\varphi(1)=0\} \\ \Lambda\varphi=\varphi^{''} \end{cases}$$

On définit les opérateurs A et B sur E par :

$$\begin{cases} D_A=\{u\in C^1([0,1]);X)/u(0)=0\} \\ Au=-u^{'} \;\;,\; u\in D_A \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D_B=\{u\in E\in /\forall t\in[0,1]:u(t)\in D_\Lambda\} \\ (Bu)(.)=\Lambda(u(.)) \;\;,\;\; u\in D_B \end{cases}$$

donc le problème (6) s'écrit maintenant :

$$Au+Bu-\lambda u=f\in E$$

Résolvante de Λ :

Λ est un opérateur linéaire fermé et son domaine est dense dans $L^p(]0,1[)$, $p\in[1,+\infty[$ $(\overline{D_\Lambda}=L^p(]0,1[))$

On montre que

$$\rho(\Lambda)=\{\lambda\in\mathbb{C}^*:|\arg(\lambda)|<\pi\}\cup\{0\}$$

(i.e :Λ est inversible). En effet :on résoud

$$\begin{cases} \Lambda\varphi-z\varphi=g\in L^p(]0,1[) \\ \varphi\in D_\Lambda \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \varphi''(x) - z\varphi(x) = g(x = \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

Dans la suite $\sqrt{z}$ désigne la détermination principale de la fonction racine carrée caractérisée par

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\theta)} \quad \text{si} \quad z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[$$

(et donc $\operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0$). On a

$$\varphi(x) = \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,s)g(s)ds = (\Lambda - zI)^{-1}g(x)$$

où

$$K_{\sqrt{z}}(x,s) = \frac{1}{\sqrt{z}sh\sqrt{z}} \begin{cases} sh\sqrt{z}(1-x)sh\sqrt{z}s \ , 0 \le s \le x \\ sh\sqrt{z}xsh\sqrt{z}(1-s) \ \ ,x \le s \le 1 \end{cases}$$

Majoration de la résolvante :

$$\left\|(\Lambda - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^p(]0,1[))}$$

Remarque 3.5 *Comme $K_{\sqrt{z}}$ est symetrique il suffit de vérifier une seule condition ,on a pour tout $z \notin]-\infty, 0]$*

$$\begin{aligned} \left\|(\Lambda - zI)^{-1}\right\|_{L(L^p(]0,1[))} &\le \sup_{0 \le x \le 1} \int_0^1 \left|K_{\sqrt{z}}(x,s)\right| ds \\ &\le \frac{1}{|z|\cos\frac{\theta}{2}} \quad \text{où} \ \ \theta = \arg(z) \end{aligned}$$

Résolvante de B :

B est un opérateur linéaire fermé (car Λ l'est), pour la résolvante de B on procède comme suit

$$\begin{cases} Bu - zu = f \in E \\ u \in D_B \end{cases}$$

s'écrit

$$\begin{cases} \Lambda u(t) - zu(t) = f(t) \in L^p(]0,1[) \\ \Lambda(t) \in D_\Lambda \end{cases}$$

D'où

$$\left\{(B-z)^{-1}f\right\}(t) = (\Lambda - z)^{-1}f(t) \quad , \ \forall t \in [0,1]$$

et pour tout z dans $\rho(\Lambda)$ on a

$$\begin{aligned} \left\|(B-z)^{-1}f\right\|_E &= \max_{0\le t\le 1} \left\|\left\{(B-z)^{-1}f\right\}(t)\right\|_{L^p(]0,1[)} \\ &= \max_{0\le t\le 1} \left\|(\Lambda - z)^{-1}f(t)\right\|_{L^p(]0,1[)} \\ &\le \frac{1}{|z|\cos\frac{\theta}{2}} \max_{0\le t\le 1} \|f(t)\|_{L^p(]0,1[)} \\ &\le \frac{1}{|z|\cos\frac{\theta}{2}} \|f\|_E \end{aligned}$$

D'où

$$\rho(B) \supset \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi\}$$

et donc ici

$$\theta_B = 0$$

Résolvante de A :

A est linéaire et fermé ,on résoud

$$\begin{cases} Au - zu = f \\ u \in D_A \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -u^{'}(t) - zu(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$u(t) = -\int_0^t e^{-z(t-s)} f(s) ds .....(*)$$

$$\begin{aligned} u^{'}(t) &= -f(t) + z\int_0^t e^{-z(t-s)} f(s) ds \\ &= -f(t) - zu(t) \end{aligned}$$

Remarque 3.6 *La représentation* $(*)$ *a un sens pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *d'où* $\rho(A) = \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_X &\leq \int_0^t e^{-\operatorname{Re} z(t-s)} \|f(s)\|_X \\ &\leq \left[\frac{e^{-\operatorname{Re} z(t-s)}}{\operatorname{Re} z}\right]_0^t \|f\|_E \\ &\leq \frac{1 - e^{-(\operatorname{Re} z)t}}{\operatorname{Re} z} \|f\|_E \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Re} z} \|f\|_E \quad si \quad \operatorname{Re} z > 0 \end{aligned}$$

et donc $\rho(A)$ *contient tout secteur de la forme :*

$$S_{\theta_A} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - _{\theta_A}\}$$

avec $\frac{\pi}{2} < _{\theta_A} < \pi$ *et sur ce secteur on a* (H_1)*.Donc pour* $z \in S_{\theta_A}, \arg(z) = \theta$ *,on a*

$$\begin{aligned} \left\|(A - z)^{-1}\right\|_{L(E)} &\leq \frac{1}{\operatorname{Re} z} = \frac{1}{|z| \cos\theta} \\ &\Longrightarrow {}_{\theta_A} + {}_{\theta_B} = \theta_A + 0 = \theta_A < \pi \end{aligned}$$

Donc (H_1) *est vérifée*

Remarque 3.7 *On peut vérifier que dans ce cas :*

1. A génère un semi-groupe continu (sauf en 0). Il n'est pas analytique.
2. B génère un semi-groupe analytique fortement continu en 0 $(\overline{D(B)} = E)$

Commutativité des résolvantes :(Hypothèse $\mathbf{H}_2$)

Soient $z \in \rho(A)$ et $z^{'} \in \rho(B)$. On a

$$(A-z)^{-1}(B-z^{'})^{-1}f = (A-z)^{-1}(\left\{(B-z^{'})^{-1}f\right\})$$

et

$$\begin{aligned}
\left[(A-z)^{-1}(B-z^{'})^{-1}f\right](t) &= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\left\{(B-z^{'})^{-1}f\right\}(s)ds \\
&= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\left\{(\Lambda-z^{'})^{-1}f\right\}(s)ds \\
&= -\int_0^t e^{-z(t-s)}\int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)\left[f(s)\right](\tau)d\tau ds \quad \text{, où } \left[f(s)\right](\tau) = f(s,\tau) \\
&= \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)(-\int_0^t e^{-z(t-s)}(f(s))(\tau)ds)d\tau \\
&= \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)(-\int_0^t e^{-z(t-s)}(f(s))ds)(\tau)d\tau \\
&= \int_0^1 K_{\sqrt{z}}(x,\tau)(\left\{(A-z)^{-1}f\right\}(t))(\tau)d\tau \\
&= \left\{(B-z^{'})^{-1}(\left\{(A-z)^{-1}f\right\})(t)\right\}(x)
\end{aligned}$$

Donc (H_2) est vérifiée

Les résultats

Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$,on précise par exemple $D_B(\alpha,p)$:

$$\begin{aligned}
D_B(\alpha,p) &= C(\left[0,1\right], D_\Lambda(\alpha,p) \\
&= \left\{\begin{array}{ll} C(\left[0,1\right]; W_0^{2\alpha,1}(0,1)) & \text{si } 2\alpha > \frac{1}{p} \\ C(\left[0,1\right]; W_{0,0}^{2\alpha,1}(0,1)) & \text{si } 2\alpha = \frac{1}{p} \\ C(\left[0,1\right]; W^{2\alpha,1}(0,1)) & \text{si } 2\alpha < \frac{1}{p} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

De même

$$D_A(\alpha,+\infty) = C^\alpha(\left[0,1\right]; L^p(0,1)) + u(0) = 0$$

On a le résultat suivant :

Theorème 3.4 *Soit* $f \in C^\alpha(\left[0,1\right]; L^p(0,1))$ *avec* $f(0) = 0$*alors le problème* (6) *admet une unique solution* $u(.,.)$ *vérifiant :*

$$u \in C^1(\left[0,1\right]; L^p(0,1)) \cap C(\left[0,1\right]; W^{2,p}(0,1))$$

er de plus

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C^\alpha([0,1]\,;L^p(0,1))$$

et on a la régularité croisée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C^0([0,1]\,;W^{2\alpha,p}(0,1))$$

Chapitre 4

Résultats de fermeture dans le cas non dense (R.Labbas)

4.1 Quelques Résultats sur les sommes d'opérateurs linéaires de domaines non denses.

4.1.1 Introduction :

Soit X un espace de Banach complexe et A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines D_A et D_B non nécessairement dense dans X . On considère alors l'équation

$$Ax + Bx - \lambda x = y \quad , \ \lambda > 0 \ , \ y \in X \tag{4.1}$$

Définition 4.1 *On dira que l'équation* (4.1) *est de type parabolique si :*

$$\begin{cases} (A-z)^{-1} \ et \ (B-z)^{-1} \ existent \ \forall z \in \Sigma_A \ et \ \forall z \in \Sigma_B \ tels \ que : \\ \Sigma_A = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \theta_A\} \\ \Sigma_B = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \theta_B\} \\ \theta_A + \theta_B < \pi \ et \\ \|(A-z)^{-1}\|_{L(X)} = O(\frac{1}{|z|}) \ \ \forall z \in \Sigma_A \ et \ \|(B-z)^{-1}\|_{L(X)} = O(\frac{1}{|z|}) \ \ \forall z \in \Sigma_B \end{cases}$$

On construit la solution x sous la forme :

$$x = S_\lambda y = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz$$

où γ_λ est une courbe simple joignant $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$ ($\theta_0 \in]\theta_B, \pi - \theta_A[$ et demeurant dans $\Sigma_{A-\lambda} \cap \Sigma_{-B}$.

On définit l'opérateur somme $L = A + B$ par :

$$\begin{cases} D_L = D_A \cap D_B \\ Lx = Ax + Bx \ \ , x \in D_L \end{cases}$$

On se propose de résoudre l'équation abstraite :

$$\begin{cases} Lx - \lambda x = y \quad , \ \lambda > 0 \\ x \in D_A \cap D_B = D_L \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1.2 Les hypothèses sur A et B :

Définition 4.2 *On dira qu'un opérateur linéaire P de domaine $D_P \subset X$ vérifie l'hypothèse $H(\varphi)$ s'il existe $\varphi \in [0, \pi[$ tel que :*

$$H(\varphi)\left\{\begin{array}{l} i)\rho(P) \supset \Sigma_P = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \varphi\} \\ \quad ii) \text{Il existe une fonction numerique paire et convexe } C_P \\ \quad\quad C_P :]-\pi+\varphi, \pi-\varphi[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que :} \\ \|(P-z)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{C_P(\theta)}{|z|} \quad , \quad \forall z \in \rho(P) \text{ et pour } \arg z = \theta \end{array}\right.$$

L'hypothèse du cas parabolique sur A et B est alors la suivante :

$$(H_0)\left\{\begin{array}{l} \quad \exists\ \theta_A \quad \text{et} \quad \theta_B \geq 0 \text{ tels que } A \text{ vérifie } H(\theta_A) \text{ et } B \text{ vérifie } H(\theta_B) \\ \text{et} \quad \theta_A + \theta_B < \pi \end{array}\right.$$

L'hypothèse du cas commutatif c'est :

$$(H_1)\left\{\begin{array}{l} \quad \forall \xi \in \rho(A)\ ,\ \forall \eta \in \rho(B) \\ (A-\xi)^{-1}(B-\eta)^{-1} = (B-\eta)^{-1}(A-\xi)^{-1} \end{array}\right.$$

(commutativité au sens des résolvantes)

La résolution de l'équation (4.2) dans le cas présent repose sur une construction explicite de sa solution sous la forme $x = S_\lambda y$ où

$$S_\lambda = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1} dz \quad , \quad \lambda > 0$$

Où γ une courbe simple joignant $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ reste dans $(\Sigma_{A-\lambda}) \cap (\Sigma_{-B})$ avec $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$

Pour fixer les idées , on prendra $\gamma = \gamma_\lambda$ frontière orienté du domaine situé à gauche des droites

$$\{z, \arg z = -\theta_0\}, \{z, \arg z = \theta_0\}, \left\{z, \operatorname{Re} z = -\frac{\lambda}{2}\right\}$$

En supposant $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\theta_A < \frac{\pi}{2}$, on obtient la figure suivante :(figure 4.1)

4.2 Perturbation de semi-groupes :

Soit X un espace de Banach , on note $G(M, \beta)$ l'ensemble des opérateurs A générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus dans X tels que :

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq M.e^{\beta t}$$

Si $A \in G(1,0)$ alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.

On note par $H(\omega, 0)$ l'ensemble des opérateurs A générateurs infinitésimaux de semi-groupes analytiques tels que :

$$\forall \varepsilon \in [0, \omega], \exists M_\varepsilon > 0 : \left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \delta_{\frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon}$$

avec

$$\delta_{\frac{\pi}{2}+\theta} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq_{\frac{\pi}{2}+\theta}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

De plus

$$H(\omega, \beta) = \{A : A - \beta \in H(\omega, 0)\}$$

Soient A et B deux opérateurs fermés dans X

Définition 4.3 *On dit que B est relativement borné par rapport à A s'il existe $a, b \geq 0$ tels que :*

$$\|Bx\| \leq a \|x\| + b \|Ax\| \quad , \forall x \in D(A)$$

On pose alors

$$\gamma_A(B) = \inf \{b \geq 0, \exists a : \|Bx\| \leq a \|x\| + b \|Ax\| \, , \forall x \in D(A)\}$$

1. On doit avoir $D(A) \subset D(B)$
2. Si $b = 0$ alors B est borné

Perturbation de semi-groupes de contraction :

Lemme 4.1 *Soit A un opérateur dans X , supposons qu'il existe $\omega > 0$ tel que :*

$$\|x\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|\lambda x - Ax\| \quad \forall x \in D(A), \forall \lambda \text{ avec } \operatorname{Re} \lambda > \omega \tag{4.3}$$

alors (4.3) est valable $\forall x \in D(A)$ et $\forall \lambda$ avec $\operatorname{Re} \lambda > 0$

Preuve. Soit $x \in D(A)$ et $\operatorname{Re} \lambda > 0$ avec $y = \lambda x - Ax$ on a :

$$(\lambda + \omega)x - Ax = y + \omega x$$

En utilisant l'hypothèse (4.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda + \omega)} \|y + \omega x\| \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda + \omega)} (\|y\| + \omega \|x\|) \end{aligned}$$

d'où

$$\|x\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|y\| = \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|\lambda x - Ax\|$$

■

Lemme 4.2 *Soit A un opérateur dans X tel que (4.2) ait lieu ,$\forall x \in D(A)$ et $\forall \lambda$ avec* $\operatorname{Re} \lambda > 0$

soit $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$.Alors

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \operatorname{Re}\lambda_0\}$$

De plus $A \in G(1,0)$

Pour la démonstration,on vérifiera que l'on a

$$R(\lambda, A) = R(\lambda_0, A)(1 - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A))^{-1}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)^{-1} &= (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - A)^{-1} \\
&= (\lambda_0 - A)^{-1}\left[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}\right]^{-1} \\
&= (\lambda_0 - A)^{-1}\left[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}\right] \\
&= R(\lambda_0, A)\left[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)\right]^{-1}
\end{aligned}$$

Dans la suite, on donne des conditions permettant d'affirmer que si $A, B \in G(1,0)$ alors $A + B \in G(1,0)$ ■

Proposition 4.1 *Soit $A, B \in G(1,0)$, on a alors :*

$$\|x\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\|\lambda x - Ax - Bx\| \quad \forall x \in D(A) \cap D(B) \text{ et } \forall \lambda \text{ avec } \operatorname{Re}\lambda > 0$$

Preuve. Considérons la suite $B_n = n^2(n - B)^{-1} - n$ d'opérateurs satisfaisant

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} B_n x = Bx$$

On pose

$$\lambda x - Ax - B_n x = y_n$$

alors

$$(\lambda + n)x - Ax = y_n + n^2(n - B)^{-1}x$$

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}(\|y_n\| + n\|x\|) \\
&\leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\|y_n\|
\end{aligned}$$

et puisque

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = \lambda x - Ax - Bx$$

alors on obtient

$$\|x\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\|\lambda x - Ax - Bx\| \ \forall x \in D(A) \cap D(B) \text{ et } \forall \lambda \text{ avec } \operatorname{Re}\lambda > 0$$

■

Proposition 4.2 *Soit $A, B \in G(1,0)$ et B relativement borné par rapport à A avec $\gamma(B) < \frac{1}{2}$. Alors $A + B \in G(1,0)$*

Preuve. On va démontrer que :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \operatorname{Re} \lambda > \lambda_0 \Longrightarrow \lambda \in \rho(A+B)$$

soit λ avec $\operatorname{Re} \lambda > 0$ et $y \in X$. Alors l'équation

$$\lambda x - Ax - Bx = y$$

on peut l'écrire sous la forme

$$z - BR(\lambda, A)z = y$$

avec

$$z = \lambda x - Ax \quad \text{et} \quad R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$$

Puisque B est relativement borné par rapport à A on a :

$$\begin{aligned} \|BR(\lambda, A)z\| &\leq a \|R(\lambda, A)z\| + b \|AR(\lambda, A)z\| \\ &\leq (\frac{a}{\lambda} + 2b) |z| \end{aligned}$$

car

$$A(\lambda - A)^{-1} = (A - \lambda + \lambda)(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - 1$$

et en utilisant le théorème de Hille-Yosida , on obtient

$$\left\| A(\lambda - A)^{-1} \right\| \leq 2$$

et puisque $\gamma(B) < \frac{1}{2}$, alors il existe λ_0 tel que :

$$\frac{a}{\lambda_0} + 2b < 1$$

et les équations

$$z - BR(\lambda, A)z = y \quad \text{et} \quad \lambda x - Ax - Bx = y$$

sont résolubles et

$$\lambda_0 \in \rho(A+B)$$

■

Proposition 4.3 *(amélioration de la proposition précédente dans le cas où X est un espace de Hilbert)*

Soit $X = H$ un espace de Hilbert , $A = iM$, $B = iN$,M et N autoadjoints. Si B est relativement borné par rapport à A avec $\gamma_A(B) < 1$, alors $A + B \in G(1, 0)$

Preuve. On va montrer qu'il y a un point de l'ensemble résolvant de $A+B$ dans $\operatorname{Re} \lambda > 0$ on a

$$\|Bx\| = \|Nx\| \leq a \|x\| + b \|Mx\| \;\; \forall x \in D(M), b < 1$$

En utilisant la relation

$$(f+g)^2 \leq (1 + \frac{1}{\varepsilon}) f^2 + (1 + \varepsilon) g^2 \;\; \forall \varepsilon > 0$$

On a
$$\|Nx\|^2 \leq (1+\frac{1}{\varepsilon})a^2\|x\|^2 + (1+\varepsilon)b^2\|Mx\|^2$$
On pose
$$(1+\frac{1}{\varepsilon})a^2 = \overline{a}^2 \text{ et } (1+\varepsilon)b^2 = \overline{b}^2$$
et en choisissant ε de telle manière que $\overline{b} < 1$

Alors on peut écrire :
$$\|Nx\|^2 \leq \overline{a}^2\|x\|^2 + \overline{b}^2\|Mx\|^2 = \left\|\overline{a}x - i\overline{b}Mx\right\|^2$$
car M et N sont autoadjoints. On obtient alors la relation
$$\|Bx\| \leq \left\|\overline{a}x - \overline{b}Ax\right\|$$
ça implique que
$$\left\|B(\frac{\overline{a}}{\overline{b}} - A)^{-1}\right\| \leq \overline{b} < 1$$
ainsi l'équation
$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}}x - Ax - Bx = y$$
admet une solution unique $\forall y \in X$ et $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} \in \rho(A+B)$, d'après les lemmes (4.1) et (4.2) on a
$$\exists \omega > 0 : \|x\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\frac{\overline{a}}{\overline{b}}}\left\|\frac{\overline{a}}{\overline{b}}x - Ax - Bx\right\| \quad \forall x \in D(A+B), \forall a, b : \operatorname{Re}\frac{\overline{a}}{\overline{b}} > \omega$$
et
$$\exists \lambda_0 \in \rho(A+B) \text{ telle que } \operatorname{Re}\lambda_0 > 0$$
et alors
$$\rho(A+B) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \operatorname{Re}\lambda_0\} \quad (\lambda = \frac{\overline{a}}{\overline{b}})$$
Ainsi
$$A+B \in G(1,0)$$

■

Proposition 4.4 *Soit* A, $B \in G(1,0)$, $D_A \cap D_B$ *dense dans* X. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\exists \omega > 0$ tel que $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ est dense dans X

ii) $A+B$ est fermable et $\overline{A+B} \in G(1,0)$

De plus, si (i) ou (ii) a lieu, on a :
$$R(\lambda, \overline{A+B}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} R(\lambda, A_n + B) \text{ avec } A_n = n^2(n-A)^{-1} - n$$

Preuve. :$i) \Longrightarrow ii)$

On pose
$$X_\lambda = (\lambda - A - B)(D_A \cap D_B), \text{ on a } \overline{X_\lambda} = X$$
Dans X_λ on définit l'opérateur linéaire $F(\lambda)$ en posant :

$$F(\lambda)(\lambda x - Ax - Bx) = x \quad \forall x \in D_A \cap D_B$$

En effet,si
$$\lambda x - Ax - Bx = \lambda x' - Ax' - Bx' \quad \forall \lambda > \omega$$
d'après la proposition (4.1) on a :

$$\|x\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \|\lambda x - Ax - Bx\| \quad \forall x \in D_A \cap D_B$$

$$\left\|x'\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \left\|\lambda x' - Ax' - Bx' \right\| \quad \forall x' \in D_A \cap D_B$$

d'où
$$x = x' \text{ et } \|F(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda \text{ tel que } \operatorname{Re}\lambda > \omega$$

on peut donc prolonger $F(\lambda)$ à X

Soit
$$y = \lambda x - Ax - Bx \quad , \quad \lambda > \omega \text{ et } x \in D_A \cap D_B$$
on a :

$$\begin{aligned} R(\lambda, A + B_n)y &= R(\lambda, A + B_n)(\lambda x - Ax - B_n x + B_n x - Bx\ ) \\ &= x + R(\lambda, A + B_n)(B_n x - Bx) \end{aligned}$$

car
$$A + B_n \in G(1, 0)$$
Alors puisque
$$\|F(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$
on obtient :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} R(\lambda, A + B_n)y = x = F(\lambda)y$$
et vu que $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B\ )$ est dense dans X on obtient

$$R(\lambda, \overline{A + B}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} R(\lambda, A_n + B) \quad , A_n = n^2(n - A)^{-1} - n$$

Ainsi $F(\lambda)$ est une pseudo-résolvante et satisfait l'identité de la résolvante

$$F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu)$$

d'où
$$\mu F(\lambda)F(\mu)x = \lambda F(\lambda)F(\mu)x + F(\lambda)x - F(\mu)x$$
et puisque
$$\|F(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda \text{ tel que } \operatorname{Re}\lambda > \omega$$

on obtient :

$$\lim_{\mu \longrightarrow +\infty} \mu F(\mu)F(\lambda)x = F(\lambda)x \quad \forall x \in X$$

Maintenant on veut démontrer que $F(\lambda)$ est la résolvante du prolongement de $A+B$

Montrons tout d'abord que $F(\lambda)$ est injectif

Procédons par l'absurde :

Soit $\lambda_0 > \omega$ et $x_0 \in X$ tel que $F(\lambda_0)x_0 = 0$

$$F(\lambda)x_0 = F(\lambda_0)x_0 + (\lambda_0 - \lambda)F(\lambda)F(\lambda_0)x_0 = 0$$

d'où

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda F(\lambda)x_0 = 0$$

Puisque $F(\lambda)(X) \supset (D_A \cap D_B)$ dense dans X

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda F(\lambda)x_0 = 0$$

contredit

$$\lim_{\mu \longrightarrow +\infty} \mu F(\mu)F(\lambda)x = F(\lambda)x \quad \forall x \in X$$

Donc $F(\lambda)$ est injectif et il existe un opérateur L tel que

$$F(\lambda) = R(\lambda, L) = (\lambda - L)^{-1}$$

(d'après le lemme 2.6 p313 [4])

Montrons que $L = \overline{A+B}$:

on a

$$F(\lambda)(\lambda x - Ax - Bx) = x \ \ \forall x \in D_A \cap D_B$$

donc

$$L \supset A+B$$

Soit $y \in D(L)$ et $\lambda > \omega$,et puisque

$$\overline{D_A \cap D_B} = X \quad , \ \overline{(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)} = X$$

il existe deux suites

$$(y_n) \subset (\lambda - A - B)(D_A \cap D_B) \ \text{ et } \ (x_n) \subset D_A \cap D_B$$

telles que :

$$y_n = \lambda x_n - Ax_n - Bx_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} y$$

d'où

$$x_n = F(\lambda)y_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} F(\lambda)x$$

et

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow F(\lambda)x \\ (A+B)x_n \longrightarrow \lambda x - y \end{cases}$$

Comme L est fermé,que $A+B \subset L$, il s'ensuit que $A+B$ fermable et

$$F(\lambda)x \in D(\overline{A+B})$$

Alors

$$\overline{A+B}(F(\lambda)x) = (\overline{A+B})y = \lambda x - y = Ly$$

et d'après le lemme (4.2) on déduit que $\overline{A+B} \in G(1,0)$

Montrons $ii) \Longrightarrow i)$: On montre par l'absurde si

$$(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B) \quad , \lambda > 0 \text{ n'est pas dense dans } X$$

il existe $x^{'} \in X^{'}$(le dual de$X$) tel que :

$$\left\langle \lambda x - Ax - Bx, x^{'} \right\rangle = 0 \quad \forall x \in D_A \cap D_B$$

et on pose

$$x = R(\lambda, \overline{A+B})y$$

on obtient :

$$\left\langle y, x^{'} \right\rangle = 0 \quad \forall y \in X \quad \text{d'où} \quad x^{'} = 0$$

■

Theorème 4.1 *Soit A générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe (M, ω) et $B \in \mathcal{L}(X)$, alors $(A+B)$ est générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(M, \beta = \omega + M \|B\|_{\mathcal{L}(X)})$*

Preuve. On suppose que $M = 1$,on a donc

$$\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$$

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \quad , \operatorname{Re}\lambda > \omega$$

Pour $\operatorname{Re}\lambda > \omega + \|B\|$:

$$\left\|B(A-\lambda)^{-1}\right\| < 1$$

donc

$$\exists (I - B(A-\lambda)^{-1})^{-1} \text{ pour } \operatorname{Re}\lambda > \omega + \|B\|$$

On pose

$$R = (\lambda - A)^{-1}(I - B(A-\lambda)^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - A)^{-1}(B(A-\lambda)^{-1})^k$$

Alors :

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A - B)R &= (I - B(A-\lambda)^{-1})^{-1} B(\lambda - A)^{-1}(I - B(A-\lambda)^{-1})^{-1} \\
&= (I - B(A-\lambda)^{-1})^{-1}\left[I - B(A-\lambda)^{-1}\right] \\
&= I
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R(\lambda I - A - B) &= (\lambda - A)^{-1}(\lambda I - A - B) + \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - A)^{-1}(B(A-\lambda)^{-1})^k \quad (\lambda I - A - B) \\
&= I - (\lambda - A)^{-1}B + \sum_{k=0}^{+\infty}(B(\lambda - A)^{-1})^k \sum_{k=0}^{+\infty}((\lambda - A)^{-1}B)^k \\
&= I
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B^{k+1}((\lambda - A)^{-k-1})^k = \sum_{k=2}^{+\infty}((\lambda - A)^{-1}B)^k$$

donc R est l'opérateur résolvant de l'opérateur $(A+B)$ de plus :

$$\begin{aligned}
\|R\| &= \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - A)^{-1}(B(A-\lambda)^{-1})^k \right\| \\
&\leq (\operatorname{Re}\lambda - A)^{-1}(1 - \left\|B(A-\lambda)^{-1}\right\|)^{-1} \\
&\leq [\operatorname{Re}\lambda - (\omega + \|B\|)]^{-1}
\end{aligned}$$

alors $A+B$ générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $H(t)$ vérifiant

$$\|H(t)\| \leq e^{(\omega + \|B\|)t}$$

■

4.3 Résultat principal

Remarque 4.1 *Le corollaire suivant assure que si $\mathcal{D}(A) + \mathcal{D}(B)$ est dense dans X, alors $(\overline{A+B})$ est un opérateur linéaire inversible d'inverse*

$$S(A,B) = \frac{-1}{2i\pi}\int (-B+z)^{-1}(z+A)^{-1}dz \in \mathcal{L}(X)$$

Corollaire 4.1 *Soient A et B deux opérateurs linéaires vérifiant l'hypothèse (H_1) dans un espace de Banach X.Supposons que*

$$\theta_A + \theta_B < \pi \text{ et } 0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$$

Alors :

i) $A+B$ est fermable

ii) Si de plus $D(A)+D(B)$ est dense dans X alors :

$$0 \in \rho(\overline{A+B}) \text{ et } (\overline{A+B})^{-1} = \frac{-1}{2i\pi}\int (-B+z)^{-1}(z+A)^{-1}dz = S(A,B)$$

Preuve.

i) Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A) \cap D(B)$ telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x \\ \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (Ax_n + Bx_n) = y \in X \end{cases}$$

Alors

$$Sy = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S(Ax_n + Bx_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x$$

Donc $(A+B)$ est fermable et

$$S(\overline{A+B})x = x \quad \text{quand } x \in D(\overline{A+B})$$

il s'ensuit aussi que $\overline{A+B}$ est injectif

ii) Si $D(A)+D(B)$ est dense dans X, alors pour chaque $y \in X$ on peut trouver deux suites $(a_n)_{n\geq 1} \subset D(A)$ et $(b_n)_{n\geq 1} \subset D(B)$ avec

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty}(a_n+b_n) = y$$

Alors la continuité de S implique que

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} S(a_n+b_n) = Sy$$

On a aussi

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty}(A+B)S(a_n+b_n) = \lim_{n\longrightarrow +\infty}(a_n+b_n) = y$$

et par conséquent

$$\overline{A+B}Sy = y$$

c'est-à-dire $\overline{A+B}$ est surjectif , $\overline{A+B}$ est aussi injectif finalement on conclut que

$$(\overline{A+B})^{-1} = S(A,B) = \frac{-1}{2i\pi}\int (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}dz$$

■

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses* (H_0) , (H_1) *on a :*

i) $S_\lambda \in L(X)$ et il existe $N>0$ tel que :

$$\|S_\lambda\| \leq \frac{N}{\lambda} \quad ,(\lambda>0)$$

ii) Il existe une extension $\widetilde{A+B}$ telle que :

$$S_\lambda = (\lambda - \widetilde{A+B})^{-1} \ , \ (\lambda>0)$$

Preuve. Soit $z \in \gamma_\lambda$, pour la convergence de l'intégrale, il suffit de raisonner avec $|z|$ grand et donc $|\arg z| = \theta_0$.Alors

$$|\arg(-z)| = \pi - \theta_0 < \pi - \theta_B \qquad (\text{car } \theta_B < \theta_0)$$

et

$$\left\|(B+z)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \max_{-\pi+\theta_0\leq\theta\leq\pi-\theta_0} \frac{C_B(\pi-\theta_0)}{|z|} \leq \frac{C}{|z|} \quad (\text{d'après } (H_0))$$

D'autre part, on a aussi pour tout $z \in \gamma_\lambda$

$$|\arg(z+\lambda)| < \theta_0 \quad (\text{car } \lambda > 0)$$

d'où

$$\left\|(A-\lambda-z)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \max_{-\theta_0\leq\theta\leq+\theta_0} \frac{C_A(\theta)}{|z+\lambda|} \leq \frac{C}{|z+\lambda|} \quad (\text{d'après } (H_0))$$

De ces majorations on déduit la suivante :

$$\|S_\lambda\| \leq \frac{C^2}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z|\,|z+\lambda|} \quad , \forall\lambda>0$$

avec C independante de λ, en remplaçant z par λz on obtient :

$$\|S_\lambda\| \leq \frac{C^2}{2\pi\lambda} \int_{\gamma_\lambda} \frac{|dz|}{|z|\,|z+1|} = \frac{N}{\lambda}$$

donc il suffit de prendre

$$N = \frac{C^2}{2\pi} \int_{\gamma_\lambda} \frac{|dz|}{|z|\,|z+1|}$$

Pour montrer $ii)$ il suffit de montrer que l'opérateur S_λ est injectif et vérifie l'identité de la résolvante :

$$S_\lambda - S_\mu = -(\lambda-\mu) S_\lambda S_\mu$$

Montrons que S_λ est injectif, i.e :

$$S_\lambda x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

On suppose que

$$\rho(A) \cap \rho(B) \supset]0, +\infty[$$

alors soit

$$\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B) \Longrightarrow \lambda_0 \in \rho(A) \text{ et } \lambda_0 \in \rho(B)$$

$$\Longrightarrow \text{ les résolvantes } (A-\lambda_0)^{-1} \text{ et } (B-\lambda_0)^{-1} \text{ existent}$$

$$S_\lambda x = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1} x dz$$

$$(A-\lambda_0)^{-1}(B-\lambda_0)^{-1} S_\lambda x = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda_0)^{-1}(B-\lambda_0)^{-1}(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1} x dz$$

On pose :

$$\omega = (A-\lambda_0)^{-1}(B-\lambda_0)^{-1} S_\lambda x$$

alors

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(A-\lambda_0)^{-1}(B-\lambda_0)^{-1} x dz \quad \text{(d'après } (H_1)) \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1} \xi dz \quad \text{avec } \xi = (A-\lambda_0)^{-1}(B-\lambda_0)^{-1} x \in D(A) \cap D(B) \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1} \xi dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1} \left[\frac{\xi}{z} - \frac{(B+z)^{-1} B\xi}{z} \right] dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1} \xi \frac{dz}{z} + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1} B\xi \frac{dz}{z} \\
&= (A-\lambda)^{-1}\xi + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1} B\xi \frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

car

$$\frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1} \xi \frac{dz}{z} = (A-\lambda)^{-1}\xi \quad \text{(appliquant théorème de résidu)}$$

D'où

$$\begin{aligned}(A-\lambda)\omega &= \xi+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}B\xi\frac{dz}{z}\\ &= \xi+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (B+z)^{-1}B\xi\frac{dz}{z}+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}B\xi dz\end{aligned}$$

l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (B+z)^{-1}B\xi\frac{dz}{z}=0$$

car la fonction $(B+z)^{-1}B\frac{\xi}{z}$ est holomorphe à gauche de γ ,donc

$$(A-\lambda)\omega=\xi+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}B\xi dz$$

et alors

$$\begin{aligned}(A-\lambda)\omega &= \xi-B\omega\\ &\Longrightarrow (A+B-\lambda)\omega=\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B-\lambda)\omega=\xi=0 &\Longrightarrow (A-\lambda_0)^{-1}(B-\lambda_0)^{-1}x=0\\ &\Longrightarrow x=0\end{aligned}$$

D'où S_λ est injectif. Montrons que :

$$S_\lambda-S_\mu=-(\lambda-\mu)S_\lambda S_\mu$$

On a

$$\begin{aligned}S_\lambda S_\mu &= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}\left\{\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma'}(B+z')^{-1}(A-\mu-z')^{-1}dz'\right\}dz\\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'}(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z')^{-1}(A-\mu-z')^{-1}dz'dz\\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'}(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(A-\mu-z')^{-1}(B+z')^{-1}dz'dz\end{aligned}$$

Mais

$$(A-\lambda-z)^{-1}(A-\mu-z')^{-1}=\frac{(A-\lambda-z)^{-1}-(A-\mu-z')^{-1}}{\lambda-\mu};\lambda\neq\mu$$

donc

$$
\begin{aligned}
S_\lambda S_\mu &= \frac{1}{\lambda-\mu}\left[\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'}(B+z)^{-1}((A-\lambda-z)^{-1}-(A-\mu-z')^{-1})(B+z')^{-1}dz'dz\right] \\
&= \frac{1}{\lambda-\mu}(\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'}(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}(B+z')^{-1}dz'dz \\
&\qquad -\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'}(B+z)^{-1}(A-\mu-z')^{-1}(B+z')^{-1}dz'dz) \\
&= \frac{1}{\lambda-\mu}(\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}dz\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'}(B+z')^{-1}dz' \\
&\qquad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(B+z)^{-1}(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'}(B+z')^{-1}(A-\mu-z')^{-1}dz'dz) \\
&= \frac{1}{\lambda-\mu}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}dz-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'}(B+z')^{-1}(A-\mu-z')^{-1}dz'\right] \\
&= \frac{1}{\lambda-\mu}(-S_\lambda+S_\mu)=\frac{-1}{\lambda-\mu}(S_\lambda-S_\mu)
\end{aligned}
$$

D'où

$$S_\lambda - S_\mu = -(\lambda-\mu)S_\lambda S_\mu$$

■

Lemme 4.4 *Sous les hypothèses* (H_0) *et* (H_1) *on a :*
$A+B$ *est fermable et* $\overline{A+B}\subset \widetilde{A+B}$

Preuve. Montrons que $A+B$ est fermable :Soit $(x_n)\in D(A+B)=D_A\cap D_B$ telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = 0 \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(A+B)x_n = y \end{cases}$$

On doit montrer que $y=0$, on a

$$S_\lambda(A+B-\lambda)x_n = x_n$$

puisque S_λ est continu on trouve :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_\lambda(A+B-\lambda)x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = S_\lambda y = 0$$

$$
\begin{aligned}
S_\lambda y &= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma(B+z)^{-1}(A-\lambda-z)^{-1}ydz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}ydz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma(A-\lambda-z)^{-1}\left[\frac{y}{z}-\frac{(B+z)^{-1}By}{z}\right]dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma(A-\lambda-z)^{-1}\frac{dz}{z}+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}By\frac{dz}{z} \\
&= (A-\lambda)^{-1}y+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}By\frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(A-\lambda)S_\lambda y &= y+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-\lambda)(A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}By\frac{dz}{z}\\ &= y+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (B+z)^{-1}By\frac{dz}{z}+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A-\lambda-z)^{-1}(B+z)^{-1}Bydz\end{aligned}$$

l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (B+z)^{-1}By\frac{dz}{z}=0$$

car la fonction $\frac{(B+z)^{-1}By}{z}$ est holomorphe à gauche de γ_λ,ona donc

$$(A-\lambda)S_\lambda y = y - BS_\lambda y$$

d'où

$$(A+B-\lambda)S_\lambda y = y$$

$$S_\lambda y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Montrons que $\overline{A+B} \subset \widetilde{A+B}$: On montre que $D_{\overline{A+B}} \subset D_{\widetilde{A+B}}$, soit $x \in D_{\overline{A+B}}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A \cap D_B$ telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty}(A+B)x_n = (\overline{A+B})x$$

puisque

$$x_n = S_\lambda(A+B-\lambda)x_n$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_\lambda(A+B-\lambda)x_n$$

d'où

$$x = S_\lambda(\overline{A+B}-\lambda) = (\lambda-\widetilde{A+B})^{-1}(\overline{A+B}-\lambda)x$$

on a

$$(\overline{A+B}-\lambda)x \in X$$

et

$$(\lambda-\widetilde{A+B})^{-1} : X \longrightarrow D_{\widetilde{A+B}}$$

donc

$$(\lambda-\widetilde{A+B})^{-1}(\overline{A+B}-\lambda)x \in D_{\widetilde{A+B}}$$

D'où

$$x \in D_{\widetilde{A+B}}$$

ainsi

$$D_{\overline{A+B}} \subset D_{\widetilde{A+B}}$$

■

Rappel : *Rappelons quelques notions importantes*

Corollaire 4.2 *:Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq E$.Alors il existe $f \in E'$ (E' le dual de E),$f \neq 0$ tel que*

$$\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in E$$

Remarque 4.2 *On aplique ce corollaire pour montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est dense*

on considère une forme linéaire et continu f sur E telle que $f = 0$ sur F et on prouve que f est identiquement nulle sur E

Theorème 4.2 *Soit A un opérateur linéaire , continu et surjectif de X sur Y ,les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A admet un inverse à droite

ii) $N(A) = A^{-1}(0)$ admet un supplémentaire topologique dans X

$N(A)$ le Noyau de A

$$N(A) = \{x \in D(A); Ax = 0\} \subset X$$

Theorème 4.3 *Soit A un opérateur linéaire ,continu et surjectif de X sur Y ,les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A admet un inverse à gauche

ii) $R(A) = A(E)$ est fermé et admet un supplémentaire topologique dans Y

$R(A)$ image de A

$$R(A) = \underset{x \in D(A)}{\cup} Ax \subset Y$$

Theorème 4.4 *:(Hahn Banach) Soit X un e.v.n*

Si $x, y \in X$ et $\langle \phi, x \rangle = \langle \phi, y \rangle$ pour tout $\phi \in X^*$,alors $x = y$
(le dual d'un e.v.n X sépare les points de X)

Lemme 4.5 *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $S_\lambda = (\lambda - \overline{A + B})^{-1}$

ii) $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ est dense dans X

$i) \Longrightarrow ii)$ on suppose que $S_\lambda = (\lambda - \overline{A + B})^{-1}$ et on montre que $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ est dense dans X

on a

$$S_\lambda = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (B + z)^{-1}(A - \lambda - z)^{-1} dz = (\lambda - \widetilde{A + B})^{-1} = (\lambda - \overline{A + B})^{-1}$$

Soit $\varphi \in X^*$ le dual de ($X^* = \left\{ \substack{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \langle \varphi, x \rangle}, \varphi \text{ linéaire} ; \text{continu} \right\}$) telle que

$$(Ax + Bx - \lambda x)_{X, X^*} = 0 \;\; \forall x \in D_A \cap D_B$$

On va vérifier que $\varphi = 0$

Si $v \in X$ alors $S_\lambda v \in D_{\overline{A+B}}$ et il existe une suite $v_n \in D_A \cap D_B$ telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = S_\lambda v \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (A+B-\lambda)v_n = v \end{cases}$$

d'où

$$((A+B-\lambda)v_n, \varphi) = 0$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$ on obtient $(v, \varphi) = 0 \;\; \forall v \in X \Longrightarrow \varphi = 0$

En effet :l'existance de $\overline{A+B}$ implique que :

$$((\overline{A+B}-\lambda)v_n, \varphi) = 0 \;\; \forall (v_n) \subset \overline{D_A + D_B}$$

car D_{A+B} est dense dans $D_{\overline{A+B}}$ pour la norme du graphe de $\overline{A+B}$ et on sait que $\lambda \in \rho(\overline{A+B})$ ceci prouve que φ est orthogonal à X $(v, \varphi) = 0$ donc $\varphi = 0$ (d'après le théorème de Hahn-Banach)

pour l'autre implication $ii) \Longrightarrow i)$ on applique le théorèmes de fermeture 2.2 et la proposition 4.4

Lemme 4.6 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X alors :*

$$\overline{D(A)} = \overline{D(\sqrt{-A})}$$

Preuve. *On rappelle que $D(A) \subset D(\sqrt{-A})$,donc $\overline{D(A)} \subset \overline{D(\sqrt{-A})}$ cette inclusion est évidente .*

D'autre part soit $x \in \overline{D(\sqrt{-A})}$;alors il existe une suite $(x_n)_n \subset D(\sqrt{-A})$ telle que $x = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n$,où

$$x_n = (-A)^{\frac{1}{2}} y_n \in D(\sqrt{-A})$$

et

$$x_n = (-A)^{\frac{1}{2}} y_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma z^{-\frac{1}{2}} (A-z)^{-1} y_n dz$$

alors

$$x_n = (-A)^{\frac{1}{2}} y_n \in \overline{D(A)}$$

et vu que l'integrale existe et dont les éléments à l'interieur sont dans $D(A)$ par conséquent

$$x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n \in \overline{D(A)}$$

Pour continuer on a besoin de certains espaces d'interpolation : ∎

pour $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty[$ on note $D_A(\theta, p)$ le sous-espace de X suivant :

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : \int_0^\infty \left\| t^\theta A(A-t)^{-1} x \right\|_X^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\} \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty$$

et

$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \left\| t^\theta A(A-t)^{-1} x \right\|_X \frac{dt}{t} < +\infty \right\} \quad \text{pour } p = +\infty$$

Ces espaces vérifent :

$$D_A(\theta^{'}, q) \subset D_A(\theta, p) \quad \text{si} \;\; \theta^{'} \leq \theta \;\; (p, q \text{ qcq})$$

Ces espaces sont muni des normes :

$$\|x\|_{D_A(\theta,p)} = \|x\|_X + (\int\limits_0^{+\infty} \left\|t^{\theta} A(A-t)^{-1} x\right\|_X^p \frac{dt}{t})^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_{D_A(\theta,+\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0} (\left\|t^{\theta} A(A-t)^{-1} x\right\|_X)$$

Theoreme 4.5 *(Théorème de densité) :*
pour $p \in [1, +\infty[$ *et* $\theta \in]0, 1[$, $E_0 \cap E_1$ *est dense dans* $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ $\;(\overline{E_0 \cap E_1} = (E_0, E_1)_{\theta,p})$

Theoreme 4.6 *:Si* (H_0) *est vérifiée on a :*
$(D_A, X)_{\theta,p}$ *est le sous-espace des* $x \in X$ *tels que :*

$$t^{1-\theta} A(A+t)^{-1} x \in L_*^p(X)$$

avec la norme associe à x :

$$x \longmapsto \|x\|_X + (\int\limits_0^{+\infty} \left\|t^{1-\theta} A(A+t)^{-1} x\right\|_X^p \frac{dt}{t})^{\frac{1}{p}}$$

Remarque 4.3 $(D_{A^m}; X)$ *est le sous-espace de* X *définie :*

$$t^{m(1-\theta)} A^m (A+t)^{-m} x \in L_*^p(X)$$

pour $\alpha \in]0, 1[$ *l'opérateur* A^{α} *est caractérisé par :*

$$x \longmapsto \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha} A(A+t)^{-1} x \frac{dt}{t} \quad \textit{pour} \;\; x \in D_A$$

Alors on obtient :

$$(D_A, X)_{\theta,1} \subseteq D_{A^{1-\theta}} \subseteq (D_A, X)_{\theta,+\infty}$$

Remarque 4.4

$$(D_{A^2}, X)_{\frac{1}{2},2} = D_A$$

dans le cas général $(D_{A^2}, X)_{\frac{1}{2},p}$ *est l'espace définie par :*

$$tA^2(A+t)^{-2} x \in L_*^p(X)$$

et on en déduit l'inclusion suivant :

$$(D_{A^2}, X)_{\frac{1}{2},1} \subseteq D_A \subseteq (D_{A^2}, X)_{\frac{1}{2},\infty}$$

et si l'opérateur A *est inversible on a :*

$$\left\|tA^2(A+t)^{-1} x\right\|_X \leq C \|Ax\|_X \quad \textit{et} \;\; Ax = \int\limits_0^{\infty} tA^2(A+t)^{-1} x dt$$

Remarque 4.5 *Si* $D_A = \overset{n}{\underset{k=1}{\cap}} D_{A_k}$ *,* $k = 1, 2, ..., n$ *tel que* A_k *un opérateur définit dans* X *,alors on a :*

$$(D_A, X)_{\theta,p} \subseteq \overset{n}{\underset{k=1}{\cap}} (D_{A_k}; X)_{\theta,p}$$

Theorème 4.7 *:Soient* E, F *deux espace de Banach tels que* $F \subseteq E$ *(injection continu) et soit* A *un opérateur défini dans* E *tel que :*$(A + t)$ *est inversible pour tout* $t > 0$ *et* $(A + t)^{-1}F \subseteq F$ *et existe* C *telle que :*

$$\left\|(A+t)^{-1}\right\|_E + \left\|(A+t)^{-1}\right\|_F \leq \frac{C}{t} \quad pour \quad t > 0$$

alors

$$(D_A \cap F, E)_{\theta,p} = (D_A, E)_{\theta,p} \cap (F, E)_{\theta,p}$$

Preuve. *(voir[8])* ■

Proposition 4.5 *Sous les hypothèses* $(H_0), (H_1)$ *on a :*

$$D_{\widetilde{A+B}}(\theta, p) = D_{\overline{A+B}}(\theta, p) = D_A(\theta, p) \cap D_B(\theta, p)$$

pour tout $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *;* $1 \leq p \leq \infty$

pour montrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.7 *On suppose que* $(H_0), (H_1)$ *sont vérifiées, Alors il existe* $C > 0$ *telle que pour tout* $r > 0$ *on a :*

$$rh\left\|(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_X + r^{\frac{1}{2}}\left\|(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_{D_B(\frac{1}{2},\infty)} \leq C\left\|f\right\|_X$$

et

$$r\left\|(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_X + r^{\frac{1}{2}}h\left\|(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_{D_B(\frac{1}{2},\infty)} \leq C\left\|f\right\|_X$$

Preuve. On considère le cas $p = \infty$, les autres cas sont des conséquences des propriétés d'interpolation. Il suffit de montrer l'estimation

$$r^{\frac{1}{2}}\left\|(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_{D_B(\frac{1}{2},\infty)} \leq C\left\|f\right\|_X$$

On a

$$(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (B+z)^{-1}(A-z-r)^{-1}f dz \quad ,r > 0$$

On sait que

$$(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f \in D_{\sqrt{-B}}$$

et puisque

$$\left\|\sqrt{-B}(B+z)^{-1}\right\| = o(\frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}}})$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{-B}(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_X &\leq C\int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{|z-r|}\,|dz|\,\|f\|_X\\ &\leq \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}\,\|f\|_X\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$D_{\sqrt{-B}} \hookrightarrow D_B(\frac{1}{2},\infty)$$

On obtient

$$r^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{-B}(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_X \leq C\,\|f\|_X$$

D'où

$$\begin{aligned}r^{\frac{1}{2}}\left\|(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_{D_B(\frac{1}{2},\infty)} &\leq r^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{-B}(r-(\widetilde{A+B}))^{-1}f\right\|_X\\ &\leq C.\,\|f\|_X\end{aligned}$$

■

Preuve. (de la proposition 4.5)

On pose $\widetilde{A+B}=\widetilde{L}$, alors pour $f\in D_{\widetilde{L}}(\theta,\infty)$ et $0<r\leq 1$, On doit prouver qu'il existe une constante $K>0$ ne dépend pas de r telle que :

$$\sup_{r\longrightarrow 0^+}\left\|\left(\frac{1}{r^2}\right)^\theta B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}f\right\|_X \leq K$$

Pour $\sigma\geq 1$ on a :

$$f=\widetilde{L}(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f-\sigma(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f$$

Alors

$$\begin{aligned}B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}f &= B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}\widetilde{L}(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f-B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}\sigma(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f\\ &= I-J\end{aligned}$$

Tels que :

$$I=B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}\widetilde{L}(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f$$

$$J=B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}\sigma(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f$$

L'estimation de I :

$$\|I\|_X=\left\|B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}\widetilde{L}(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f\right\|_X \leq \frac{K}{\sigma^\theta}\,\|f\|_{D_{\widetilde{L}}(\theta,\infty)}$$

(D'après le lemme 4.7)

L'estimation de $\|J\|_X$: On peut écrire

$$\sigma(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f=(\widetilde{L}-1)^{-1}f+\int_1^\sigma(\widetilde{L}-\tau)^{-1}\widetilde{L}(\widetilde{L}-\tau)^{-1}f\,d\tau$$

et puisque

$$\frac{d}{d\tau}(\widetilde{L}-\tau)^{-1}f=(\widetilde{L}-\tau)^{-1}\widetilde{L}(\widetilde{L}-\tau)^{-1}f$$

Alors

$$\begin{aligned}\|J\|_X &= \left\|B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}\sigma(\widetilde{L}-\sigma)^{-1}f\right\|_X \\ &\leq \left\|B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}(\widetilde{L}-1)^{-1}f\right\|_X+\left\|\int_1^\sigma B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}(\widetilde{L}-\tau)^{-1}\widetilde{L}(\widetilde{L}-\tau)^{-1}fd\tau\right\|_X \\ &\leq \left\|B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}(\widetilde{L}-1)^{-1}f\right\|_X+\int_1^\sigma \left\|B(B-\frac{1}{r^2})^{-1}(\widetilde{L}-\tau)^{-1}\widetilde{L}(\widetilde{L}-\tau)^{-1}f\right\|_X d\tau\end{aligned}$$

En utilisant les estimations du lemme précédent on obtient :

$$\begin{aligned}\|J\|_X &\leq K(rh\|f\|_X+r\int_1^\sigma \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}+\theta}}d\tau\,\|f\|_{D_{\widetilde{L}}(\theta,\infty)}) \\ &\leq K(r^{2\theta}+r\sigma^{\frac{1}{2}-\theta})\|f\|_{D_L(\theta,\infty)}\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\sigma=\frac{1}{r^2}$, De la même manière on peut montrer que $f\in D_A(\theta,\infty)$. Enfin on a montrer que :

$$D_{\widetilde{L}}(\theta,\infty)\subset D_A(\theta,\infty)\cap D_B(\theta,\infty)$$

Pour l'autre inclusion et plus de détails voir ([4] Da Prato,G,Grisvard)

Il reste à montrer

$$D_{\overline{A+B}}(\theta,\infty)=D_{\widetilde{A+B}}(\theta,\infty)$$

Puisque

$$D_{\overline{A+B}}\subset D_{\widetilde{L}}=D_{\widetilde{A+B}}$$

On a

$$D_{\overline{A+B}}(\theta,\infty)\subset D_{\widetilde{L}}(\theta,\infty)$$

D'autre part on a

$$(D_A\cap D_B;X)_{\theta,\infty}=(D_A;X)_{\theta,\infty}\cap(D_B;X)_{\theta,\infty}$$

Et puisque

$$D_{\overline{A+B}}\subset D_A\cap D_B$$

on a

$$(D_{\overline{A+B}};X)_{\theta,\infty}\subset(D_A\cap D_B;X)_{\theta,\infty}=D_{\widetilde{L}}(\theta,\infty)$$

(pour plus de détails voir [9]) ■

En conclusion :

1. Lorsque les domaines $D(A)$ et $D(B)$ sont denses dans X,l'opérateur $A+B$ est fermable et de plus la fermeture $\overline{A+B}$ (La plus petite extension fermée de $A+B$) a un ensemble résolvant non vide (On montre même que $\rho(\overline{A+B})$ contient l'axe réel positif).
2. Lorsque aucun des deux domaines $D(A),D(B)$ n'est dense dans X ,l'opérateur $A+B$ est toujours fermable mais on ne pourra rien dire quant à $\rho(\overline{A+B})$.

Chapitre 5

Autres résultats sur les sommes d'opérateurs (cadre commutatif),(Clément,Gripenberg, Högnäs,Londen)

5.1 Introduction

On considère dans ce chapitre la méthode des sommes d'opérateurs de Daprato et Grisvard, elle donne des conditions sous lesquelles le problème

$$Ax + Bx = y \tag{5.1}$$

peut être résolu, Ici A et B sont des opérateurs linéaire fermés de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$ dans un espace de Banach X et $y \in X$ donné.

En général l'existence de la solution est garantie mais si cette solution x appartient à $D(A)$ ou $D(B)$ elle est forte.

En particulier si y appartient à un certain espace d'interpolation on a une solution stricte x et Ax et Bx appartient au même espace d'interpolation, c'est-à-dire on a une régularité maximale. On donne dans ce chapitre une extension de la methode des sommes qui donne quelques résultats de régularité en supposant l'existence d'une solution stricte.

Cette methode donne une nouvelle approche qui explicite les constantes de la régularité.

5.2 Opérateurs non négatifs et opérateurs positifs :

5.2.1 Définitions :

Définition 5.1 *Un opérateur linéaire fermé A dans un espace de Banach X est dit admissible dans la direction $\alpha \in]-\pi, \pi]$ si $\rho(A)$ contient le rayon*

$$\left\{te^{i\alpha}, t > 0\right\} \quad et \quad \sup_{t>0} t \left\|(te^{i\alpha} - A)^{-1}\right\|_{L(X)} < \infty \tag{5.2}$$

Si $-A$ est admissible dans la direction $\alpha \in]-\pi, \pi]$ alors on définit $N_A(\alpha)$ par :

$$N_A(\alpha) = \sup\left\{t \left\|(te^{i\alpha} + A)^{-1}\right\|_{L(X)} \quad , \, t > 0\right\} \tag{5.3}$$

Si $\alpha \in [0, \pi]$ *et* $-A$ *est admissible dans les directions* α *et* $-\alpha$ *alors on pose*

$$\begin{aligned} M_A(\alpha) &= \max(N_A(\alpha), N_A(-\alpha)) \\ &= \sup_{|\arg\lambda|=\alpha, \lambda\neq 0} \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{L(X)} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Définition 5.2 *Un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach est dit* ***non négatif*** *si* $-A$ *est admissible dans la direction* $\alpha = 0$ *i .e :si*

$$(0, \infty) \subseteq \rho(-A) \quad et \quad N_A = \sup_{t>0} t \left\|(t + A)^{-1}\right\|_{L(X)} < \infty \tag{5.5}$$

Si de plus $0 \in \rho(-A)$ *i.e : si* A *a un inverse borné dans* X *, alors* A *est dit* ***positif***

Remarque 5.1 A *est admissible dans la direction* α *si et seulement si* $-e^{i\alpha}A$ *est non négatif*

Exemple 5.1 *dans un espace de Banach complexe* $\mathbb{C}$ *l'opérateur donné par l'application* αI *, ou* I *est l'application identité dans* X *et* $\alpha \in \mathbb{C} / (-\infty, 0)$ *est un opérateur non négatif.*
Il est positif si $\alpha \neq 0$

La proposition suivante caractérise les opérateurs non négatifs

Proposition 5.1 *Un opérateur* A *dans un espace de Banach* X *est non négatif si et seulement si :*

i) Il existe une constante N telle que :

$$\|x\| \leq \frac{N}{t} \|tx + Ax\| \tag{5.6}$$

pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in D(A)$

ii) Il existe $\omega_1 > 0$ tel que $\mathrm{Im}(\omega_1 + A) = X$

Preuve.

Les conditions de la proposition sont presque identiques aux hypothèses du théorème (2.1) de fermeture.Sous ses conditions le théorème de fermeture garantit l'existence d'une constante positive N telle que

$$t \in \rho(-\overline{A}) \text{ et } t \left\|(t + \overline{A})^{-1}\right\| \leq N \quad \text{pour tout } t > 0$$

et d'après la seconde condition $D((\omega_1 + A)^{-1}) = X$ et comme $(\omega_1 + \overline{A})^{-1} \supseteq (\omega_1 + A)^{-1}$ est une fonction,on doit avoir $(\omega_1 + \overline{A})^{-1} = (\omega_1 + A)^{-1}$, par suite $A = \overline{A}$ et donc A est non négatif.

D'autre part, si A est non négatif, alors $(0, \infty) \subseteq \rho(-A)$ et il existe une constante N telle que (5.5) et par suite (5.6) sont vérifiées, pour tout $t > 0$.

Donc

$$\mathrm{Im}(t + A) = D((t + A)^{-1}) = X \quad \text{pour tout} \quad t > 0$$

■

1. Si la condition (i) de la proposition est vraie avec $N = 1$, alors A est m-accrétif

2. Si A est positif, alors la fonction

$$t \longmapsto f(t) = (1+t)\left\|(t+A)^{-1}\right\|$$

est continu sur $[0,\infty)$ borné sur $[0,1]$ par une constante N_1. D'autre part, puisque A est non négatif, il existe une constante N_2 telle que

$$t\left\|(t+A)^{-1}\right\| \leq N_2 \quad \text{pour tout } t > 0$$

par conséquent

$$(1+t)\left\|(t+A)^{-1}\right\| \leq 2N_2 \quad , \forall t > 1$$

il s'ensuit que avec $N = \max(N_1, 2N_2)$ on a :

$$(1+t)\left\|(t+A)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq N \quad \text{pour tout } t > 0 \tag{5.7}$$

On définit parfois un opérateur linéaire A comme étant positif si $[0,\infty) \subseteq \rho(-A)$ et s'il existe une constante $N > 0$ telle que (5.7) soit satisfaite pour tout $t \geq 0$.

5.2.2 Angle spectral

Soit A un opérateur linéaire fermé, non négatif dans un espace de Banach X. De la majoration

$$N_A = \sup_{t>0} t\left\|(t+A)^{-1}\right\|_{L(X)} < \infty$$

On en déduit qu'il existe $\phi > 0$ tel que

$$\rho(-A) \supset \Sigma_\phi = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg z| < \phi\} \tag{5.8}$$

et

$$\sup_{z\in\Sigma_\phi} \left\|z(z+A)^{-1}\right\| < \infty \tag{5.9}$$

Définition 5.3 *Soit A un opérateur non négatif dans un espace de Banach complexe X . On pose*

$$\phi_A = \sup\{\phi \in (0,\pi] : \phi \text{ vérifie } (5.8) \text{ et } (5.9)\} \tag{5.10}$$

$$M_A^*(\phi) = \sup_{|\alpha|\leq\phi} N_A(\alpha) \quad \forall\phi \in [0,\phi_A) \tag{5.11}$$

et

$$\omega_A = \pi - \phi_A \tag{5.12}$$

On appelle ω_A l'angle spectral de A

Si A est non négatif, alors $0 < \phi_A \leq \pi$, $0 \leq \omega_A < \pi$ et $M_A^*(\alpha) \in [0,\infty)$ pour tout α avec $|\alpha| \leq \phi_A$ (voir Högnäs, V[7]).

5.2.3 Approximation de Yosida d'un opérateur non négatif :

On considère ici l'approximation de Yosida d'un opérateur non négatif.

Définition 5.4 *Si A est un opérateur linéaire non négatif dans un espace complexe X. On pose pour tout $t > 0$.*

$$\begin{aligned} I_t &= t(t+A)^{-1} \\ A_t &= AI_t = tA(t+A)^{-1} \end{aligned}$$

On appelle A_t l'approximation de Yosida de A. On voit que I_t, $A_t : X \longrightarrow X$ et ils sont borné, puisque

$$\|I_t\| = t\left\|(t+A)^{-1}\right\| \leq N_A(0)$$

et

$$\|A_t\| = t\,\|I - I_t\| \leq t(1 + N_A(0))$$

Propriétés de convergence :

Dans le cas où $D(A)$ est dense dans X , les familles d'opérateurs $\{I_t\}_{t>0}$ et $\{A_t\}_{t>0}$ ont quelques propriétés de convergence quand $t \longrightarrow \infty$

Proposition 5.2 *Soit A un opérateur linéaire non négatif dans un espace de Banach complexe X. Alors*

i) $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} I_t x = x$ dans X ssi $x \in \overline{D(A)}$

ii) $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} A_t x$ existe ssi $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$ auquel cas $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} A_t x = Ax$ En particulier, si $D(A)$ est dense dans X, alors $I_t x \longrightarrow Ix$ pour tout $x \in X$ et $A_t x$ converge ssi $x \in D(A)$ auquel cas $Ax = \lim\limits_{t \longrightarrow \infty} A_t x$

Preuve. :puisque $I_t x \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in X$ il est clair que $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} I_t x = x$ implique que $x \in \overline{D(A)}$.

Soit x un élément choisi arbitrairement dans X, on a

$$I_t x - I_x = -A(t+A)^{-1}x \text{ et pour tout } y \in X$$

$$\begin{aligned} \left\|A(t+A)^{-1}x\right\| &= \left\|A(t+A)^{-1}(x-y+y)\right\| \\ &\leq \left\|A(t+A)^{-1}(x-y)\right\| + \left\|A(t+A)^{-1}y\right\| \\ &\leq (1+N_A)\,\|x-y\| + \left\|A(t+A)^{-1}y\right\| \end{aligned}$$

Suposons que $x \in \overline{D(A)}$. Alors on peut choisir $y_0 \in D(A)$ tel que

$$\|y - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2(1+N_A)}$$

comme $y_0 \in D(A)$, on a aussi

$$A(t+A)^{-1}y_0 = (t+A)^{-1}Ay_0$$

de sorte que

$$\left\|A(t+A)^{-1}y_0\right\| \leq \frac{N_A \|Ay_0\|}{t}$$

Ainsi, on peut choisir N suffisamment grand tel que

$$\left\|A(t+A)^{-1}y_0\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour chaque } t > N$$

Par conséquent pour un tel t, $\|A(t+A)^{-1}x\| < \varepsilon$, qui implique que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|I_t x - I_x\| = \lim_{t\longrightarrow\infty} \left\|A(t+A)^{-1}x\right\| = 0$$

Maintenant, prenons $x \in D(A)$ tel que $Ax \in \overline{D(A)}$. Alors

$$A_t x - Ax = A(I_t - I)x = (I_t - I)Ax$$

ce qui tend vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$, donc $x \in D(A)$ et $y = Ax$ puisque A est fermé, il s'ensuit aussi que $A_t x = I_t Ax \in D(A)$ pour tout $t > 0$, de sorte que $Ax = \lim_{t\longrightarrow\infty} A_t x \in \overline{D(A)}$

Finalement, si $D(A)$ est dense dans X alors $\overline{D(A)} = X$ et $Ax \in D(A)$ pour tout $x \in D(A)$ et le dernier énoncé du lemme s'ensuit. ■

Non négativité uniforme

D'après la définition (5.3) un opérateur non négatif satisfait l'inégalité

$$t\left\|(te^{i\phi} + A)^{-1}\right\| \leq M_A^*(\phi)$$

pour chaque ϕ avec $0 \leq \phi \leq \phi_A$ et tout $t > 0$.

On peut montrer que pour chaque $t > 0$,les approximations de Yosida A_t sont non négatives, que $\phi_{A_t} \geq \phi_A$ et que pour tout ϕ avec $0 \leq \phi < \phi_A$, il existe une constante $\hat{M}_A(\phi) > 0$ telle que $M_{A_t}^*(\phi) \leq \hat{M}_A(\phi)$ c'est-à-dire

$$\left\|(\lambda + A_t)^{-1}\right\| \leq \frac{\hat{M}_A(\phi)}{|\lambda|} \quad \text{pour tout } \lambda \text{ avec } |\arg\lambda| \leq \phi$$

$$\hat{M}_A(\phi) = \frac{(1 + M_A^*(\phi))}{\sin(\max\left\{\frac{\pi}{2}, \phi\right\})}$$

En effet

$$\begin{aligned}
(\lambda + A_t)^{-1} &= \left\{\lambda + tA(t+A)^{-1}\right\}^{-1} \\
&= \left\{(\lambda(t+A) + tA)(t+A)^{-1}\right\}^{-1} \\
&= \left\{(t\lambda + (\lambda+t)A)(t+A)^{-1}\right\}^{-1} \\
&= \frac{1}{\lambda+t}\left\{(\frac{t\lambda}{\lambda+t} + A)(t+A)^{-1}\right\}^{-1} \\
&= \frac{1}{\lambda+t}(t+A)(\frac{t\lambda}{\lambda+t} + A)^{-1} \\
&= \frac{1}{\lambda+t}\left\{1 + (t - \frac{t\lambda}{\lambda+t})(\frac{t\lambda}{\lambda+t} + A)^{-1}\right\} \\
&= \frac{1}{\lambda+t}\left\{1 + \frac{t^2}{\lambda+t}(\frac{t\lambda}{\lambda+t} + A)^{-1}\right\}
\end{aligned}$$

si $t \in \rho(-A)$ et $\dfrac{t\lambda}{\lambda+t} \in \rho(-A)$ C'est le cas pourvu que $\lambda \in \Sigma_{\phi_A}$,car

$$\Sigma_{\phi_A} \subseteq \rho(-A)\ ,\ \arg(\frac{t\lambda}{\lambda+t}) = \arg(\frac{\lambda}{\lambda+t})$$

et

$$0 \leq \arg(\frac{t\lambda}{\lambda+t}) = \arg\lambda - \arg(\lambda+t) \leq \arg\lambda$$

ou

$$0 \geq \arg(\frac{t\lambda}{\lambda+t}) = \arg\lambda - \arg(\lambda+t) \geq \arg\lambda$$

et puisque

$$\left|\arg(\frac{t\lambda}{\lambda+t})\right| \leq |\arg\lambda|$$

et par conséquent

$$\frac{t\lambda}{\lambda+t} \in \overline{\Sigma_\phi}\backslash\{0\}$$

D'où pour tout λ avec $|\arg\lambda| \leq \phi$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|(\lambda+A_t)^{-1}\right\| &\leq \frac{1}{|\lambda+t|}\left\|1+\frac{t^2}{\lambda+t}(\frac{t\lambda}{\lambda+t}+A)^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda+t|}(1+\frac{t^2}{|\lambda+t|}\left\|(\frac{t\lambda}{\lambda+t}+A)^{-1}\right\|) \\
&\leq \frac{1}{|\lambda+t|}(1+\frac{t^2}{|\lambda+t|}\frac{M_A^*(\phi)\,|\lambda+t|}{|t\lambda|}) \\
&= \frac{1}{|\lambda+t|}(1+\frac{tM_A^*(\phi)}{|\lambda|}) \\
&= \frac{1}{|\lambda|}.\frac{|\lambda|+tM_A^*(\phi)}{|\lambda+t|}
\end{aligned}$$

Si $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, on a $|\lambda+t| > |\lambda|$ et $|\lambda+t| \geq t$, dans ce cas on obtient

$$\left\|(\lambda+A_t)^{-1}\right\| \leq \frac{(1+\hat{M}_A(\phi))}{|\lambda|}$$

d'autre part si $\operatorname{Re}\lambda < 0$ alors

$$|\lambda+t| \geq |\lambda|\sin(\arg\lambda) \ \text{ et } \ |\lambda+t| \geq t\sin(\arg\lambda)$$

et puisque $\dfrac{\pi}{2} < \arg\lambda < \phi$ on obtient

$$\left\|(\lambda+A_t)^{-1}\right\| \leq \frac{(1+M_A^*(\arg\lambda))}{|\lambda|\sin(\pi-\phi)}$$

on écrit donc

$$\hat{N}_A(\phi) = \frac{(1+M_A^*(\phi))}{\sin(\max\left\{\frac{\pi}{2},\phi\right\})}$$

et on obtient

$$\frac{|\lambda|+tM_A^*(\phi)}{|\lambda+t|} \leq \hat{N}_A(\phi)$$

Un lemme de densité :

Soient A et B deux opérateurs linéaires dans un espace vectoriel X.Rappelons que la somme $L = A + B$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lx = Ax + Bx \quad ,x \in D(L) \end{cases}$$

On a le résultat suivant concernant la densité du domaine de la somme des opérateurs non négatifs de domaines dense dans un espace de Banach complexe.

Lemme 5.1 *Soient A et B deux opérateurs linéaires non négatifs denses dans X tels que $(t+B)^{-1}(D(A)) \subseteq D(A)$ pour chaque $t > 0$(on dit que $D(A)$ est stable sous $(t+B)^{-1}$).Alors $L = A + B$ est de domaine dense dans X.*

Preuve. On choisit x arbitrairement dans X et $t > 0$, considérons

$$x_t = t^2(t + B)^{-1}(t + A)^{-1}x \in X$$

Alors $x_t \in D(B)$. De plus on a

$$(t + A)^{-1}x \in D(A)$$

et par suite $x_t \in D(A)$ car $D(A)$ est stable sous $(t + B)^{-1}$par hypothèse. Cela montre que $x_t \in D(L)$ quand $t \longrightarrow \infty$. Il est démontré dans la proposition (5.2) que

$$t(t + A)^{-1} \longrightarrow I \text{ et } t(t + B)^{-1} \longrightarrow I \text{ fortement quand } t \longrightarrow \infty$$

Alors puisque $t(t + B)^{-1}$ est uniformement borné, on a la convergence forte

$$t^2(t + B)^{-1}(t + A)^{-1} \longrightarrow I \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

par suite

$$x_t \longrightarrow x \text{ quand } t \longrightarrow \infty$$

■

Corollaire 5.1 *Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines denses dans X. Supposons qu'il existe deux nombres positifs N et ω tels que :*

i) $(\omega; \infty) \subseteq \rho(-A) \cap \rho(-B)$

ii $\|(t + A)^{-1}\| \leq \frac{N}{t}$; $\|(t + B)^{-1}\| \leq \frac{N}{t}$ $\forall t > \omega$

iii) $(t + B)^{-1}(D(A)) \subseteq D(A)$ $\forall t > \omega$, Alors $L = A + B$ est de domaine dense dans X.

Preuve. Si les hypothèses du corollaire sont satisfaites alors $\omega + A + B$ sont de domaines denses et non négatifs

$$D((\omega + A)) = D(A) \text{ et } (t + A + B)^{-1}(D(A)) \subseteq D(A) \; \forall t > 0$$

donc le lemme (5.1) implique $2\omega + A + B$ et par suite $A + B$ est de domaine dense. ■

Remarque 5.2 *La condition* (*iii*) *du corollaire* (5.1) *est satisfaite si les résolvantes de A et B commutent (cf prop 1.10, chapitre1)*

Définition 5.5 *Soit X un espace de Banach complexe et soit*

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

un opérateur linéaire.

On dit que A est **non négatif** si

$$(-\infty, 0) \subseteq \rho(A) \text{ et } \sup_{t>0} \left\| t(A+tI)^{-1} \right\| < \infty$$

Si A est non négatif dans X, on pose :

$$\phi_A \overset{Def}{=} \sup \left\{ \phi \in [0, \pi] : \sup_{\substack{|\arg \lambda| \leq \phi \\ \lambda \neq 0}} \left\| \lambda(A + \lambda I)^{-1} \right\| < \infty \right\}$$

et

$$M(A, \phi) \overset{Def}{=} \sup_{\substack{|\arg \lambda| = \phi \\ \lambda \neq 0}} \left\| \lambda(A + \lambda I)^{-1} \right\|$$

1. Dans la définition précédente on prend

$$\left\| (A + \lambda I)^{-1} \right\| = \infty \quad \text{si} \quad -\lambda \notin \rho(A) \text{ i.e : } A + \lambda I \quad \text{non inversible}$$

2. Si A est un opérateur non négatif et

$$\phi_A \geq \arcsin(\frac{1}{M(A,0)})$$

alors $\pi - \phi_A$ est l'angle spectrale de A.

5.3 Espace d'interpolation réel entre X et D(A) :

5.3.1 Définitions

Définition 5.6 *:Soit X un espace de Banach complexe et soit A un opérateur non négatif sur X.*

Si $\theta \in (0,1)$ et $p \in [1, \infty]$ alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : [x]_{D_A(\theta,p)} < \infty \right\}$$

où

$$[x]_{D_A(\theta,p)} = \begin{cases} (\int\limits_0^\infty (t^\theta \left\| A(A+tI)^{-1}x \right\|)^p \frac{dt}{t})^{\frac{1}{p}} & , \ 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{t>0} ess t^\theta \left\| A(A+tI)^{-1}x \right\| & , \ p = \infty \end{cases}$$

et

$$D_A(\theta) = D_A(\theta, \infty_0) = \left\{ x \in D_A(\theta, \infty) : \lim_{t \longrightarrow \infty} t^\theta \left\| A(A+tI)^{-1}x \right\| = 0 \right\}$$

avec

$$[.]_{D_A(\theta,\infty_0)} = [.]_{D_A(\theta,\infty)}$$

on a $[.]_{D_A(\theta,p)}$ est (au moins) une semi-norme

Définition 5.7 *:Les espaces d'interpolation entre X et $D(A)$ définis par exemple par la k-méthode sont notés par $(X, D(A))_{\theta,p}$ où $0 < \theta \leq 1$ et $p \in [1, \infty] \cup \{\infty_0\}$, on pose aussi*

$$(X, D(A))_{\theta,\infty_0} = (X, D(A))_\theta$$

On a la proposition suivante qui caractérise les espaces d'interpolation réels entre un espace de Banach et le domaine d'un opérateur linéaire non négatif défini sur cet espace de Banach.

Proposition 5.3 *:Soit X un espace de Banach complexe et soit A un opérateur non négatif sur X de domaine $D(A)$.*

Considérons la norme du graphe sur $D(A)$

soit

$$\|x\|_{D_A} = \|x\| + \|Ax\| \quad \text{où} \quad \|x\|_{D_A} = \|Ax\| \quad \text{(si } A \text{ est inversible)}$$

Supposons que $\theta \in (0, 1)$ et $p \in [0, \infty] \cup \{\infty_0\}$.Alors

$$\mathcal{D}_A(\theta, p) = (X, \mathcal{D}(A))_{\theta,p} \quad \text{pour tout} \quad x \in X$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + M(A, 0)} [x]_{D_A(\theta,p)} &\leq \|x\|_{(X,\mathcal{D}(A))_{\theta,p}} \\ &\leq 2\,[x]_{D_A(\theta,p)} + \begin{cases} 0 \ \text{si} \ \ \|x\|_{D_A} = \|Ax\| \\ M(A, 0)^{1-\theta}(p\theta(1-\theta)^{-\frac{1}{p}} \|x\|) \ \ \text{si} \ \ \|x\|_{D_A} = \|x\| + \|Ax\| \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$M(A, \phi) = \sup_{\substack{|\arg\lambda| = \phi \\ \lambda \neq 0}} \left\| \lambda(A + \lambda I)^{-1} \right\|$$

Preuve. Rappelons que si X et Y son deux espaces de Banach muni des normes $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$ respectivement et si $X \hookrightarrow Y$,on définit

$$K(\tau, x) = \inf_{\substack{a+b=x \\ a\in X, b\in Y}} (\|a\|_X + \tau \|b\|_Y) \text{ où } x \in X \text{ et } \tau > 0$$

Si $p \in [1, \infty]$

$$(X, Y)_{\theta,p} \overset{Def}{=} \left\{ x \in X : \|x\|_{(X,Y)_{\theta,p}} < \infty \right\}$$

où

$$\|x\|_{(X,Y)_{\theta,p}} = \begin{cases} (\int\limits_0^\infty (\tau^{-\theta} K(\tau, x)^p \frac{d\tau}{\tau})^{\frac{1}{p}} \ , \ 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \tau^{-\theta} K(\tau, x) \ \ , \ p = \infty \end{cases}$$

et

$$(X, Y)_{\theta,\infty_0} = \left\{ x \in (X, Y)_{\theta,\infty} : \lim_{\tau \longrightarrow 0} K(\tau, x) = 0 \right\}$$

avec

$$\|.\|_{(X,Y)_{\theta,\infty_0}} = (X, Y)_{\theta,\infty}$$

Supposons d'abord que $x \in (X, \mathcal{D}(A))_{\theta,p}$ et que $\tau > 0$

si $\varepsilon > 0$, il existe $a \in X$ et $b \in \mathcal{D}(A)$ tels que $x = a + b$

$$\|a\|_X \leq (1+\varepsilon)K(\tau, x) \quad , \tau \|b\|_X \leq \tau \|b\|_{\mathcal{D}(A)} \leq (1+\varepsilon)K(\tau, x)$$

si $t = \dfrac{1}{\tau}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|A(A+t)^{-1}x\right\|_X &\leq \left\|A(A+t)^{-1}a\right\|_X + \left\|A(A+t)^{-1}Ab\right\|_X \\
&\leq \|a\|_X + \left\|A(A+t)^{-1}a\right\|_X + \left\|t(A+t)^{-1}\tau Ab\right\|_X \\
&\leq (1+M(A,0))(1+\varepsilon)K(\tau, x)
\end{aligned}$$

cela montre que

$$x \in \mathcal{D}_A(\theta, p)$$

Puisque $\varepsilon > 0$ arbitraire, un changement de varible dans l'integrale montre que

$$[x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} \leq (1 + M(A,0)) \|x\|_{(X,\mathcal{D}(A))_{\theta,p}}$$

Maintenant, prenons $x \in \mathcal{D}_A(\theta, p)$ et supposons d'abord que la norme dans $\mathcal{D}_A$ est $\|x\|_{\mathcal{D}_A} = \|Ax\|$ (A inversible)

si $\tau > 0$ est donné, prenons

$$t = \frac{1}{\tau} \ , \ b = t(A+tI)^{-1}x \ \text{ et } \ a = x - b$$

Alors

$$\begin{aligned}
K(\tau, x) &\leq \left\|A(A+tI)^{-1}x\right\| + \frac{1}{t}\left\|t(A+tI)^{-1}x\right\| \\
&= 2\left\|A(A+tI)^{-1}x\right\|
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que

$$x \in \mathcal{D}_A(\theta, p) et \|x\|_{(X,\mathcal{D}(A))_{\theta,p}} \leq 2\,[x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$$

Finalement, on considère le cas où la norme dans $\mathcal{D}(A)$ est

$$\|x\|_{\mathcal{D}_A} = \|Ax\|_X + \|x\|_X$$

Par le même choix de a et b que précédement on obtient :

$$\begin{aligned}
K(\tau, x) &\leq 2\left\|A(A+tI)^{-1}x\right\| + \tau\left\|t(A+tI)^{-1}x\right\| \\
&\leq 2\left\|A(A+tI)^{-1}x\right\| + \tau M(A,0)\|x\|
\end{aligned}$$

cela veut dire que

$$x \in (X, \mathcal{D}(A))_{\theta,p}$$

et les calculs donnent

$$\|x\|_{(X,\mathcal{D}(A))_{\theta,p}} \leq 2\,[x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} + M(A,0)^{1-\theta}(p\theta(1-\theta))^{-\frac{1}{p}}\|x\|$$

■

5.3.2 Des normes équivalentes :

Définition 5.8 *Soit A un opérateur non négatif dans un espace de Banach X et supposons que*

$$(\theta, p) \in (0,1) \times [1, \infty] \cup \{(0, \infty), (1, \infty)\}$$

on pose alors

$$\|x\|_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} = \|x\|_X + [x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$$

où

$$[x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} = \left\| t^\theta A(t+A)^{-1}x \right\|_{L^p_*((0,\infty);X)}$$

Cette norme sera souvent utilisée dans ce chapitre. On a le résultat suivant qui est de grande utilité pour expliciter les constantes de la régularité maximale.

Lemme 5.2 *:Supposons que $(-A)$ est admissible dans deux directions α et β Alors*

$$\left\| A(te^{i\alpha} + A)^{-1}x \right\|_X \leq (1 + 2 \left| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right| N_A(\alpha)) \left\| A(te^{i\alpha} + A)^{-1}x \right\|_X$$

pour tout $x \in X$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} A(te^{i\alpha} + A)^{-1} &= A(te^{i\alpha} + A)^{-1} \left[A(te^{i\beta} + A)^{-1} + te^{i\beta}(te^{i\beta} + A)^{-1} \right] \\ &= \left[A(te^{i\alpha} + A)^{-1} + te^{i\beta}(te^{i\beta} + A)^{-1} \right] A(te^{i\beta} + A)^{-1} \\ &= \left[t(e^{i\beta} - e^{i\alpha})(te^{i\alpha} + A)^{-1} + 1 \right] (te^{i\beta} + A)^{-1} \end{aligned}$$

Et puisque

$$\left\| t(e^{i\beta} - e^{i\alpha})(te^{i\alpha} + A)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq 2 \left| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right| N_A(\alpha)$$

■

Supposons que A est non négatif avec $\phi_A > \phi > |\alpha|$, On a alors

$$N_A(\alpha) \leq M_A^*(\phi)$$

Il s'ensuit que

$$\left\| A(te^{i\alpha} + A)^{-1}x \right\| \leq (1 + 2M_A^*(\phi)) \left\| A(te^{i\phi} + A)^{-1}x \right\|_X \quad \text{pour tout } x \in X$$

Alors on peut prendre

$$\|x\|_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} = \|x\|_X + \sup_{|\alpha| \leq \phi} \left\| t^\theta A(te^{i\alpha} + A)^{-1}x \right\|_{L^p_*((0,\infty);X)}$$

comme définition de la norme dans $\mathcal{D}_A(\theta, p)$.

En particulier si $p = \infty$ on peut utiliser la définition

$$\|x\|_{\mathcal{D}_A(\theta,\infty)} = \|x\|_X + \sup_{|\arg \lambda| \leq \phi} \left\| \lambda^\theta A(\lambda + A)^{-1}x \right\|_X$$

5.3.3 L'opérateur $\mathbf{A}_\lambda = \lambda + A$

Positivité :

Soit A un opérateur non négatif d'angle spectral ω_A. Alors pour chaque $\lambda > 0$, l'opérateur $A_\lambda = \lambda + A$ est positif et d'angle spectral $\omega_{A_\lambda \leq} \omega_A$.

En fait on a le résultat suivant :

Proposition 5.4 *Soit A un opérateur non négatif et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\phi = |\arg \lambda| \leq \phi_A$$

Alors A_λ est positif

$$\phi_{A_\lambda} \geq (\phi_A, \pi - \phi)$$

et

$$\begin{aligned} M_A^*(\alpha) &\leq \frac{M_A^*(\alpha + \phi)}{\sin(\max\left\{\frac{\pi}{2}, \alpha + \phi\right\})} \qquad (5.13) \\ \text{pout tout} \quad 0 &\leq \alpha < \min(\phi_A, \pi - \phi) \ \text{ et } \ |\arg \lambda| \leq \alpha \end{aligned}$$

En particulier

$$M_{A_\lambda}^*(\alpha) \leq \frac{M_A^*(\alpha)}{\sin(\max\left\{\alpha, \frac{\pi}{2}\right\})} \qquad (5.14)$$

Convergence des semi-normes $[x]_{A_\varepsilon(\theta,p)}$:

On a

$$\|x\| + \|\varepsilon x + Ax\| \leq (1 + |\varepsilon|)(\|x\| + \|Ax\|)$$

et

$$\|x\| + \|Ax\| \leq (1 + |\varepsilon|)(\|x\| + \|Ax\|)$$

donc les normes du graphe des opérateurs A et $\varepsilon + A$ sont équivalentes. Par suite les espaces d'interpolation $\mathcal{D}_A(\theta, p)$ et $\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta, p)$ doivent être identiques avec équivalence des normes. Il en est de même pour $\mathcal{D}_A(\theta)$ et $\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta)$. On a aussi la convergence des semi-normes $[x]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)}$ vers $[x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

(Rappelons que $[x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} = \left\| t^\theta A(t + A)^{-1} x \right\|_{L_*^p((0,\infty),X)}$).

Proposition 5.5 *Soit A un opérateur non négatif et soit $\varepsilon \in \Sigma_{\phi_A}$. Alors*

$$\mathcal{D}_A(\theta, p) = \mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta, p) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_A(\theta) = \mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta)$$

avec équivalence des normes, si $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq \infty$. De plus

$$[x]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} \longrightarrow [x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0 \text{ dans } \Sigma_\alpha \text{ pour un certain } \alpha < \pi - \omega_A$$

Preuve. En utilisant l'identité de la résolvante

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu)$$

où

$$R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1} \text{ résolvante de } A \text{ en } \lambda \in \rho(A)$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon(t + A_\varepsilon)^{-1} - A(t + A)^{-1} &= (\varepsilon + A)(t + \varepsilon + A)^{-1} - A(t + A)^{-1} \\
&= \varepsilon(t + \varepsilon + A)^{-1} + A\left[(t + \varepsilon + A)^{-1} - (t + A)^{-1}\right] \\
&= \varepsilon(t + \varepsilon + A)^{-1} - \varepsilon A(t + \varepsilon + A)^{-1}(t + A)^{-1} \\
&= \varepsilon(t + \varepsilon + A)^{-1} - \varepsilon(1 - t(t + A)^{-1})(t + \varepsilon + A)^{-1}(t + A)^{-1} \\
&= \varepsilon t(t + A_\varepsilon)^{-1}(t + A)^{-1}
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\left|t^\theta \left\|A_\varepsilon(t + A_\varepsilon)^{-1}x\right\|_X - t^\theta \left\|A(t + A)^{-1}x\right\|_X\right| &\leq t^\theta \left\|\varepsilon t(t + A_\varepsilon)^{-1}(t + A)^{-1}x\right\|_X \\
&\leq N_A(0)N_{A_\varepsilon}(0)\frac{\varepsilon t^\theta}{t + \varepsilon} \|x\|_X
\end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned}
\left|[x]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} - [x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}\right| &= \left|\left\|t^\theta A_\varepsilon(t + A_\varepsilon)^{-1}x\right\|_{L^p_*((0,\infty),X)} - \left\|t^\theta A(t + A)^{-1}x\right\|_{L^p_*((0,\infty),X)}\right| \\
&\leq \left\|t^\theta A_\varepsilon(t + A_\varepsilon)^{-1}x - t^\theta A(t + A)^{-1}x\right\|_{L^p_*((0,\infty),X)} \\
&\leq N_A(0)N_{A_\varepsilon}(0) \|x\|_X \left|\frac{\varepsilon t^\theta}{t + \varepsilon}\right|_{L^p_*(0,\infty)} \\
&\leq N_A(0)N_{A_\varepsilon}(0)\varepsilon^\theta \left|t^\theta(t + 1)^{-1}\right|_{L^p_*(0,\infty)} \|x\|_X
\end{aligned}$$

Cela implique que si l'une des semi-normes $[x]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)}$ ou $[x]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$ est finie,il en est de même pour l'autre .

De plus

$$\frac{1}{C} \|x\|_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} \leq \|x\|_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} \leq C \|x\|_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$$

Où

$$C = C(\theta, p, \varepsilon, A) = 1 + N_A(0)N_{A_\varepsilon}(0)\varepsilon^\theta \left|\frac{t^\theta}{t + \varepsilon}\right|_{L^p_*}$$

Par conséquent, $\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta, p) = \mathcal{D}_A(\theta, p)$ avec équivalence des normes. Il est aussi clair de (5.13) que $C \longrightarrow 1$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $\overline{\Sigma_\alpha}$ où $\alpha < \pi - \omega_A$, ce qui implique que $\|x\|_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)}$ converge vers $\|x\|_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$ dans $\overline{\Sigma_\alpha}$ pour chaque x quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

On voit aussi que si $t^\theta \|A(t + A)^{-1}x\|_X$ tend vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$ il en est de même de $t^\theta \|A_\varepsilon(t + A_\varepsilon)^{-1}x\|_X$ par suite, $\mathcal{D}_A(\theta) = \mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta)$ ■

Maintenant on revient à l'étude de l'équation de la forme

$$Ax + Bx = y \tag{5.15}$$

où A et B sont des opérateurs non négatifs dans un espace de Banach X,$y \in X$ et $x \in X$ est la solution dont l'existence et la régularité seront éxposées. On impose quelques conditions supplémentaires qui conduisent aux problèmes paraboliques.

Ce problème parabolique sera traité dans le cas où les opérateurs A et B commutent au sens de la résolvante.

Dans ce cas l'opérateur $S(A,B)$ qui sera défini ci-dessous jouera un rôle fondamental dans l'expréssion et l'analyse des solutions de l'équation (5.15) et aussi $S(A,B)y$ s'avère en fait être l'unique solution de l'équation (5.15) pouvu que A et B satisfassent des conditions "raisonables".

5.3.4 L'opérateur S(A,B) :

On présente d'abord un calcul formel pour déterminer les solutions probables de l'équation $Ax + Bx = y$, en l'occurence faire introduire l'opérateur $S(A,B)$ .On traite ensuite quelques conditions sous lesquelles cet opérateur est bien défini, ainsi que quelques unes de ses propriétés de base.

Dérivation (déduction) formelle :

Reécrivons l'équation $Ax + Bx = y$ sous la forme

$$(z + A)x - (z - B)x = y$$

où z un nombre complexe.

Supposons que $z \in \rho(-A) \cap \rho(B)$ et que les résolvantes de $-A$ et B commutent.

On peut multiplier cette équation par $(z + A)^{-1}(z - B)^{-1}$pour avoir que

$$(z - B)^{-1}x - (z + A)^{-1}x = (z + A)^{-1}(z - B)^{-1}y$$

Alors en observant que :

$$(z - B)^{-1} = \frac{1}{z}(1 + B(z - B)^{-1})$$

et

$$(z + A)^{-1} = \frac{1}{z}(1 - A(z + A)^{-1})$$

On obtient que

$$\frac{1}{z}(z + A)^{-1}Ax + \frac{1}{z}(z - B)^{-1}Bx = (z + A)^{-1}(z - B)^{-1}y \tag{5.16}$$

Ici on a utilisé le fait que

$$\begin{aligned} A(z + A)^{-1}x &= (z + A)^{-1}Ax \\ B(z - B)^{-1}x &= (z - B)^{-1}Bx \end{aligned}$$

pour $x \in D(A + B) = D(A) \cap D(B)$

Maintenant, on intègre les deux termes,celui du côté gauche le long d'une courbe γ contenu complément dans $\rho(-A) \cap \rho(B)$ et orienté de $\infty e^{-i\theta}$ vers $\infty e^{i\theta}$, où θ est un angle convenable.

On suppose aussi qu'elle (la courbe) traverse l'axe des réels à gauche de l'origine, que la région à gauche de γ est inclue dans $\rho(B)$ et que celle à droite de γ est inclue dans $\rho(-A)$. Ci-dessous on discutera les conditions sous lesquelles une telle courbe existe.

On suppose aussi que
$$(z+A)^{-1}Ax \quad \text{et} \quad (z-B)^{-1}Bx$$
sont d'ordre $z^{-\theta}$ à l'infini pour certain $\theta > 0$ ($\theta = 1$ si A et B sont non négatif).Ainsi $\frac{1}{z}(z-B)^{-1}Bx$ sera d'ordre $z^{-1-\theta}$ à l'infini . Par conséquent, en utilisant les méthodes connues de l'analyse complexe, on voit facilement que :

$$\int_{\gamma}(z-B)^{-1}Bx\frac{dz}{z} = 0$$

Pour l'expréssion $(\frac{1}{z})(z+A)^{-1}Ax$, elle aussi d'ordre $z^{-1-\theta}$ à l'infini est n'est pas analytique à l'origine, mais en supposant que $\rho(-A)$ contienne γ et la région à droite de γ et le calcul des résidus montre que
$$\int_{\gamma}(z+A)^{-1}Ax\frac{dz}{z} = -2i\pi x$$
où le signe négatif provient du fait qu'on intègre d'abord le long de la partie de γ où $|z| \leq R$ et quelques courbes de γ de sorte qu'on obtient une courbe fermé qui encercle l'origine.

Faisant tendre R vers l'infini , l'integrale le long du cercle s'annule. Alors on peut aussi integrer le second membre de (5.16) le long de γ et on obtient

$$x = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma}(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}ydz$$

Le membre de droite de cette dernière équation est ce qu'on définira comme $S(A,B)y$.

Définition de S .Bornitude :

Supposons que A et B sont non négatif et que leurs angles spectraux ω_A et ω_B satisfassent l'inégalité
$$\omega_A + \omega_B < \pi$$
où d'une manière équivalente $\omega_B < \phi_A$.Supposons aussi que

$$0 \in \rho(-A) \cap \rho(B)$$

Ces hypothèses garantissent que $\rho(-A) \cap \rho(B)$ couvre une certaine portion du plan complexe incluant des courbes simples de $\infty e^{-i\sigma}$ vers $\infty e^{i\sigma}$, où $\sigma \in (0, \pi)$ est un angle convenable.

Définition 5.9 *pour chaque $r > 0$ et $0 < \sigma < \pi$, on définit les courbes simples $\gamma^-_{\sigma,r}$; $\gamma^+_{\sigma,r}$ et γ_σ par :*

$$\gamma^-_{\sigma,r} = \left\{te^{-i\sigma}/r < t < \infty\right\} \cup \left\{re^{i\tau}/\sigma \leq \tau \leq 2\pi - \sigma\right\} \cup \left\{te^{-i\sigma}/r < t < \infty\right\}$$

$$\gamma^+_{\sigma,r} = \left\{te^{-i\sigma}/r < t < \infty\right\} \cup \left\{re^{i\tau}/-\sigma \leq \tau \leq \sigma\right\} \cup \left\{te^{-i\sigma}/r < t < \infty\right\}$$

et
$$\gamma_\sigma = \left\{te^{-i\sigma}/0 < t < \infty\right\} \cup \left\{te^{-i\sigma}/0 \leq t < \infty\right\}$$

Définition 5.10 *:Posons*

$$r_1 = \begin{cases} \sup\{r > 0 : B(0,r) \subseteq \rho(A)\} & si \ \ 0 \in \rho(A) \\ \sup\{r > 0 : B(0,r) \subseteq \rho(B)\} & si \ \ 0 \in \rho(B)/\rho(A) \end{cases}$$

On prend alors

$$r_0 = \min(1, \frac{r_1}{2}) \quad et \quad \sigma_0 = \frac{\phi_A + \omega_B}{2}$$

de telle sorte que $\omega_B < \sigma_0 < \phi_A$*, puisqu'on a supposé* $\omega_B < \phi_A$ *pour chaque* $y \in X$ *on obtient une fonction analytique* $f : \rho(-A) \cap \rho(B) \longmapsto L(X)$ *en posant* $f(z) = (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}$ *pour* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\omega_B < \sigma = |\arg z| < \phi_A$ *on a*

$$\left\|(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{M_A(\sigma) M_B(\pi - \sigma)}{|z|^2} \tag{5.17}$$

Alors cette fonction est integrable le long de $\gamma^-_{\sigma,r}$ *ou* $\gamma^+_{\sigma,r}$

Définition 5.11 *On pose*

$$S(A,B)y = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1} y dz$$

où $\gamma = \gamma^-_{\sigma_0,r_0}$ *si* $0 \in \rho(A)$ *et* $\gamma = \gamma^+_{\sigma_0,r_0}$ *si* $0 \in \rho(B)/\rho(A)$

Ici σ_0, r_0 sont définis comme précédement. Quand il n'y a pas risque de confusion. On écrit seulement S à la place de $S(A,B)$

Puisque

$$\|Sy\|_X \leq \frac{1}{2\pi} \|y\| \int_\gamma \left\|(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}\right\|_{L(X)} |dz|$$

l'estimation (5.17) montre que $S(A,B)$ est un opérateur linéaire borné sur X.

Proposition 5.6 *Soient* A *et* B *deux opérateurs non négatifs dans un espace de Banach complexe* X*. On suppose*

i) $\omega_A + \omega_B < \pi$

ii) $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$

Alors $S(A,B) \in L(X)$

Indépendance du choix du chemin γ :

Le résultat qui va suivre montre que la courbe γ dans la définition précédente de $S(A,B)$ peut être remplacée par toute une classe de courbes simples.

Lemme 5.3 *Soient* A *et* B *deux opérateurs non négatifs dans un espace de Banach complexe* X*. Supposons que* $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$ *et que les angles spectraux* ω_A *et* ω_B *satisfaissent l'inégalité* $\omega_A + \omega_B < \pi$.

Posons $\omega_B < \sigma_1 \leq \sigma_2 < \phi_A$ et notons $\gamma = \gamma(\tau) \quad (-\infty < \tau < \infty)$un chemin simple dans $\rho(-A) \cap \rho(B)$, qui peut être continûment déformé en $\gamma_\sigma$sans passer par aucun point des spectres de $-A$ ou B, tel que :

i) $\lim\limits_{|\tau|\longrightarrow\infty} \gamma(\tau) = +\infty$

ii) $\exists \tau_0 \geq 0$ tel que :

$$\tau \geq \tau_0 \Longrightarrow \sigma_1 \leq \arg(\gamma(\tau)) \leq \sigma_2$$
$$\tau \leq -\tau_0 \Longrightarrow -\sigma_2 \leq \arg(\gamma(\tau)) \leq -\sigma_1$$

Alors

$$S(A,B) = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}dz$$

Une conséquence simple du lemme précédent est que les courbes $\gamma^-_{\sigma_0,r_0}$ ou $\gamma^+_{\sigma_0,r_0}$ dans la définition de $S(A,B)$ peuvent être remplacées par $\gamma^-_{\sigma_0,r'}$ ou $\gamma^+_{\sigma_0,r'}$ respectivement.Où

$$\omega_B < \sigma < \phi_A \text{ et } B(0,r) \subseteq \rho(A) \text{ ou } B(0,r) \subseteq \rho(B)$$

respectivement pour un certain $r' > r$

Lemme 5.4 *Soit X, A, B et γ comme dans le lemme précédent. On considère un élément $x \in X$ et un opérateur P linéaire fermé sur X. Supposons que*

$$(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}Px = P(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}x \quad \forall z \in \gamma$$

alors

$$SPx = PSx$$

En particulier, si A et B commutent (au sens de la résolvante) on a

$$SAx = ASx \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

et

$$SBx = BSx \quad \forall x \in \mathcal{D}(B)$$

quand A et B sont à résolvantes commutatives, on a

$$S(A,B) = S(B,A)$$

Lemme 5.5 *:Supposons que A et B satisfassent les hypothèses de la proposition* (5.6) *et supposons de plus qu'ils sont à résolvantes commutatives. Alors*

$$S(B,A) = S(A,B)$$

Preuve. On a

$$S(B,A) = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}xdz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}xdz$$

où $\gamma' = -\gamma$,$\omega_A < \sigma < \phi_B$ et le signe dans $\gamma_{\sigma,r}$ est $''+''$(resp $''-''$) si A (resp B) est inversible $\sigma' = \pi - \sigma$, on obtient

Si on pose $\sigma' = \pi - \sigma$, on obtient $\omega_B < \sigma' < \phi_A$.

Maintenant, en changeant la direction de $\gamma' = -\gamma_{\sigma,r}$, on obtient $\gamma'' = \gamma^{-+}_{\sigma',r}$, cela conduit à changer le signe dans la dernière integrale, et

$$S(B,A)x = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma''} (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}xdz = S(A,B)x$$

■

5.3.5 L'opérateur $S_\lambda(A,B)$:

Supposons que A et B sont deux opérateurs non négatifs d'angles spectraux $\omega_A+\omega_B<\pi$.

On a vu que si A est un opérateur linéaire non négatif d'angle spectral ω_A. Alors l'opérateur $A_\lambda=\lambda+A$ est positif $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*$: $|\arg\lambda|<\phi_A$ et $\omega_{A_\lambda}\leq\max(\omega_A,|\arg\lambda|)$.Donc si $|\arg\lambda|<\min(\phi_A,\phi_B)$,alors l'opérateur A_λ est positif et $\omega_{A_\lambda}<\pi-\omega_B$.

Par conséquent l'opérateur $S_\lambda(A,B)=S(A_\lambda,B)$ est bien définit(il en est de même pour $S(A,B_\lambda)$.quand il n'y a pas de risque de confusion, on note simplement cet opérateur par S_λ.

Si $\lambda>0$ par le lemme (5.3) des exemples de chemin d'integration γ sont donnés par

$$\gamma^+_{\sigma,r}-\lambda\ ,\ \gamma_\sigma-\lambda^{'}\text{ et }\gamma_{\sigma,r}\text{ ou }\omega_B<\sigma<\phi_A\quad,0<\lambda^{'}<\lambda\text{ et }r>0$$

Suffisamment petit de telle sorte que la courbe considérée soit contenue dans $\rho(-A)\cap\rho(B)$

Proposition 5.7 *Soient A et B deux opérateurs non négatifs avec $\omega_A+\omega_B<\pi$ et soit $\lambda>0$. Alors il existe une constante positive m_0 qui dépend de M_A,M_B,ϕ_A et ϕ_B mais indépendante de λ telle que :*

$$\|S_\lambda\|_{L(X)}\leq\frac{m_0}{|\lambda|}$$

Où

$$m_0=\frac{2}{\pi}M_A^*(\sigma)M_B^*(\pi-\sigma)\int_0^\infty\frac{dr}{|r^2e^{2i\sigma}-1|}\text{ et }\omega_B<\sigma<\pi-\omega_A$$

Si de plus, A ou B est positif, alors

$$\lim_{\substack{\lambda\longrightarrow 0\\ \lambda\in\overline{\Sigma_\phi}}}\|S_\lambda(A,B)-S(A,B)\|=0\ \forall\phi:0<\phi<\min(\phi_A,\phi_B)$$

Remarque 5.3 *:On étudie dans ce chapitre l'existence , l'unicité et la régularité maximale des sulutions de l'équation $Ax+Bx=y$ dans le cas où les résolvantes de A et B commutent grâce aux observation de* (5.3.4), *on peut penser que*

$$x=Sy=S(A,B)y$$

est une "bonne candidate" pour la solution de l'équation.

Dans la suite on suppose que A et B sont (au moins) des opérateurs linéaires non négatifs dans X , leurs angles spectraux satisfaient $\omega_A+\omega_B<\pi$ et $0\in\rho(A)\cup\rho(B)$. Donc l'opérateur linéaire $S=S(A,B)\in\mathcal{L}(X)$, on doit aussi supposer que γ est une courbe simple orienté de $\infty e^{-i\sigma}$ à $\infty e^{i\sigma}$ pour $\sigma\in\,]\omega_B,\phi_A[$.

De plus A et B sont fréquement considérés à résolvantes commutatives.

Toute fois cette condition ne sera pas nécessaire dans tous les lemmes et théorèmes qui vont suivre (voir Da prato Grisvard section 6)

Quelques integrales usuelles :

Ce lemme sera fréquement utilisé dans la suite

Lemme 5.6 *Soit A un opérateur non négatif dans un espace de Banach X. si $0 < \sigma < \phi_A$ et $r > 0$, alors*

$$\int_{\gamma^+_{\sigma,r}} \frac{1}{z}(z+A)^{-1}dz = 0 \tag{5.18}$$

et

$$\int_{\gamma^+_{\sigma,r}} \frac{1}{z}A(z+A)^{-1}xdz = 0 \tag{5.19}$$

pour tout $x \in \mathcal{D}_A(\theta,+\infty)$, $(0 < \theta < 1)$

Plus,si A est positif et r est suffisamment petit de sorte que $\gamma^+_{\sigma,r}$ soit contenu dans $\rho(-A)$ alors

$$\int_{\gamma^-_{\sigma,r}} \frac{1}{z}(z+A)^{-1}dz = -2i\pi A^{-1} \tag{5.20}$$

et

$$\int_{\gamma^-_{\sigma,r}} \frac{1}{z}A(z+A)^{-1}xdz = -2i\pi x \tag{5.21}$$

pour tout $x \in \mathcal{D}_A(\theta,+\infty)$, $(0 < \theta < 1)$.

Preuve. Sous les hypothèses du lemme, la fonction $f : \rho(-A) - \{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}(z+A)^{-1}$ est analytique.Elle est absolument integrable le long de $\gamma^+_{\sigma,r}$ puisqu'elle est borné d'ordre $|z|^{-2}$ à l'infini dans chaque secteur Σ_ϕ où $0 \leq \phi < \phi_A$.

En ″fermant″ la courbe $\gamma^+_{\sigma,r}$ de l'infini par

$$C_R = \left\{Re^{-i\tau} : -\sigma \leq \tau \leq \sigma\right\}$$

le théorème de Cauchy donne (5.18)

En faisant tendre R vers l'infini, pour $x \in \mathcal{D}_A(\theta,+\infty)$, on définit $g : \rho(-A) - \{0\} \longrightarrow X$ par $g(z) = \frac{1}{z}A(z+A)^{-1}x$, alors g est borné d'ordre $|z|^{-1-\theta}$ à l'infini dans chaque secteur Σ_ϕ,quand $0 \leq \phi \leq \phi_A$. Un argument comme le précédent, donne (5.19)

(5.20) et (5.21) s'obtiennent par le théorème des résidus. ■

L'unicité :

On doit montrer que pour tout $y \in X$, $x = Sy$ est l'unique solution possible de l'équation $Ax + Bx = y$, pourvu que A et B soient à résolvantes commutatives.

On rappelle que

$$S = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}dz$$

Theorème 5.1 *(Unicité) :*

Supposons que $y \in X$ et que $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ est solution de l'équation $Ax+Bx = y$ où A et B sont des opérateurs linéaires non négatifs tels que $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$ et $\omega_A + \omega_B < \pi$.

Alors on a

$$S(A,B)y = x + J(A,B)x$$

où

$$J(A,B)x = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma \left[(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}(z+A)x - (z-B)^{-1}x\right] dz \tag{5.22}$$

En particulier si A et B sont à résolvantes commutatives, alors $J(A,B)$ s'annule et l'équation a au plus une solution x donnée par

$$x = S(A,B)y$$

Preuve. Supposons que $y = Ax + Bx$ et posons

$$D: \ = (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}$$

On a alors

$$\begin{aligned} Dy &= (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}((z+A)x + (B-z)x) \\ &= (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}(z+A)x - (z+A)^{-1}x \\ &= -(z+A)^{-1}x + (z-B)^{-1}x + \left\{(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}(z+A)x - (z-B)^{-1}x\right\} \end{aligned}$$

mais

$$\begin{cases} -(z+A)^{-1}x = \frac{1}{z}((z+A)^{-1}Ax - x) \\ (z-B)^{-1}x = \frac{1}{z}(x + (z-B)^{-1}Bx) \end{cases}$$

Par conséquent

$$(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}y = \frac{1}{z}(z+A)^{-1}Ax + \frac{1}{z}(z-B)^{-1}Bx + \left\{(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}(z+A)x - (z-B)^{-1}x\right\} ...(*)$$

Puisque $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$,alors A ou B ont un inverse borné défini sur tout X . Si $0 \in \rho(A)$, on prend la courbe γ de la forme $\gamma^-_{\sigma,r}$ et on obtient

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}Ax\frac{dz}{z} = x \quad \text{par le lemme (5.6)}$$

le même lemme donne aussi

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z-B)^{-1}Bx\frac{dz}{z} = 0$$

D'autre part, si $0 \notin \rho(A)$, alors $0 \in \rho(B)$ et par le lemme argument que le précédent on aura

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}Ax\frac{dz}{z} = 0$$

et

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z-B)^{-1}Bx\frac{dz}{z} = x \text{ (dans ce cas on doit prendre } \gamma = \gamma^+_{\sigma,r})$$

On a montré que les trois premières expressions de $(*)$ sont absolument integrable le long de γ, ainsi il en est de même du quatrième terme , i.e :que l'integrale définissant $Jx: \ = J(A,B)x$ converge absolument et

$$x + Jx = Sy$$

■

Remarque 5.4 *Dans le cas commutatif on a $Jx = 0$ et par suite $x = Sy$*

L'existence :

On montrera que $x = Sy$ est effectivement une solution de l'équation $Ax+Bx = y$ quand A et B sont à résolvantes commutatives.

Plus précisement, on doit montrer que

$$(A+B)Sy = y \quad \text{pour } y \in \mathcal{D}(A) + \mathcal{D}(B)$$

et plus généralement pour

$$y \in \mathcal{D}_A(\theta, p) + \mathcal{D}_B(\theta, p) \ \text{ où } 0 < \theta < 1 \ \text{ et } \ 1 \leq p \leq \infty$$

Notons que puisque

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}_A(\theta, p) \subset \mathcal{D}_A(\theta) \subset \mathcal{D}_A(\theta, \infty)$$

et

$$\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}_B(\theta, p) \subset \mathcal{D}_B(\theta) \subset \mathcal{D}_B(\theta, \infty)$$

il suffit de considérer le cas où $y \in \mathcal{D}_A(\theta, \infty) + \mathcal{D}_B(\theta, \infty)$

En premier lieu, on présente les idées de la preuve à travers une suite de calculs formels.En deuxième étape on donne la preuve de quelques lemmes qui précisent les calculs de la première étape.

Supposons que $y \in \mathcal{D}_A(\theta, \infty)$ ou $y \in \mathcal{D}_B(\theta, \infty)$ et que $0 \in \rho(A)$

En utilisant l'identité

$$\begin{aligned}
(z-B)^{-1}y &= \frac{1}{z}((z-B)+B)(z-B)^{-1}y \\
&= \frac{1}{z}y + \frac{1}{z}B(z-B)^{-1}y
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
Sy &= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma \left[(z+A)^{-1}y + (z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\right]\frac{dz}{z} \\
&= A^{-1}y + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

En appliquant A à cette expression de S on obtient

$$\begin{aligned}
ASy &= y + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma A(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\frac{dz}{z} \\
&= y + \frac{1}{2i\pi}B\int_\gamma ((z+A)-z)(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}y\frac{dz}{z} \\
&= y + \frac{1}{2i\pi}B\int_\gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}ydz - \frac{1}{2i\pi}B\int_\gamma (z-B)^{-1}y\frac{dz}{z} \\
&= y - BSy
\end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient de (5.18) (appliqué à B) et de la définition de S

Donc

$$AS(A,B)y + BS(B,A)y = y$$

si $0 \notin \rho(A)$,alors $0 \in \rho(B)$ et l'argument précédent montre que

$$AS(A,B)y + BS(B,A)y = y$$

Mais puisque les résolvantes de A et B commutent on a

$$S(B,A) = (A,B)$$

Précisons maintenant ces calculs, En fait la commutativité au sens de la résolvante peut être utilisée pour obtenir des relations algébriques entre A, B et S (qui soient vraies sur tout X et non seulement sur un espace d'interpolation entre $\mathcal{D}(A)$ ou $\mathcal{D}(B)$ et X).

Proposition 5.8 *Soient A et B deux opérateurs linéaires non négatifs dans un espace de Banach complexe X tels que $\omega_A + \omega_B < \pi$, alors si $0 \in \rho(A)$ on a*

$$S = A^{-1} + \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}\frac{dz}{z} \tag{5.23}$$

si de plus A et B sont à résolvantes commutatives et $0 \in \rho(A)$ alors

$$S + BA^{-1}S = A^{-1} \tag{5.24}$$

Si A et B sont à résolvantes commutatives et $0 \in \rho(B)$ alors

$$S + AB^{-1}S = B^{-1} \tag{5.25}$$

Preuve. Supposons d'abord que $0 \in \rho(A)$.Alors on doit supposer que la courbe γ dans la définition de S coupe l'axe des réels à gauche de l'origine. En utilisant l'identité

$$\begin{aligned}(z-B)^{-1}y &= \frac{1}{z}\{(z-B)+B\}(z-B)^{-1}y \\ &= \frac{1}{z}y + \frac{1}{z}B(z-B)^{-1}y\end{aligned}$$

on obtient

$$(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}y = \frac{1}{z}(z+A)^{-1}y + \frac{1}{z}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y \tag{5.26}$$

par le lemme (5.6) on a

$$\frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}y\frac{dz}{z} = A^{-1}y$$

Donc (5.23) est démontrée

Concernant la second partie,supposons que $0 \in \rho(A)$, on note que si les résolvantes de A et B commutent alors

$$\begin{aligned}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1} &= B(z-B)^{-1}(z+A)^{-1} \\ &= B(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}\end{aligned}$$

Puisque B est fermé , la relation (5.23) peut s'écrire

$$S = A^{-1} + \frac{1}{2i\pi}B\int_\gamma (z+A)^{-1}(z-B)^{-1}\frac{dz}{z}$$

Par l'identité de la résolvante on a

$$(z+A)^{-1} = -zA^{-1}(z+A)^{-1} + A^{-1}$$

En l'insérant dans la première integrale et en plaçant A^{-1} devant le signe integral on obtient

$$S = A^{-1} + \frac{1}{2i\pi} BA^{-1} \int_\gamma \left[(z+A)^{-1}(z-B)^{-1} - \frac{1}{z}(z-B)^{-1} \right] dz$$

mais le lemme (5.6) donne

$$\int_\gamma (z-B)^{-1} \frac{dz}{z} = 0$$

D'où (5.24),la formule (5.25) s'obtient en échangeant A et B sachant que $S(A,B) = S(B,A)$. ■

Corollaire 5.2 *Soient A et B deux opérateurs linéaires dans X à résolvantes commutatives tels que $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ et $\omega_A + \omega_B < \pi$.Alors si $y \in X$ et $Sy \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$, on a*

$$Sy \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \text{ et } ASy + BSy = y$$

Preuve. Supposons que $0 \in \rho(A)$, alors

$$S + BA^{-1}S = A^{-1}$$

Ainsi si $Sy \in \mathcal{D}(B)$, alors $Sy \in \mathcal{D}(BA^{-1})$ et $BA^{-1}Sy = A^{-1}BSy$
(par la proposition 1.10), par conséquent

$$Sy + A^{-1}BSy = A^{-1}y$$

et par suite

$$Sy \in \mathcal{D}(A) \text{ et } ASy + BSy = y$$

Si $Sy \in \mathcal{D}(A)$, puisque $A^{-1}y \in \mathcal{D}(A)$, alors $BA^{-1}Sy \in \mathcal{D}(A)$
Donc

$$ASy + ABA^{-1}Sy = y$$

Notons que A commute avec $(\mu + B)$ pour chaque $\mu \in \rho(-B)$
Prenons un tel μ,ainsi

$$\mathcal{D}(BA) = \mathcal{D}((\mu + B)A) = \mathcal{D}(A(\mu + B))$$

ce qui implique

$$\mathcal{D}(BA) = \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(A) \text{ et } ABx = BAx \quad \forall x \in \mathcal{D}(BA)$$

Puisque $A^{-1}y \in \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(A)$,on a $ABA^{-1}Sy = BSy$ et ainsi

$$ASy + BSy = y$$

Le cas $0 \in \rho(B)$ s'ensuit du cas précédent, puisque $S(A,B) = S(B,A)$

En utilisant les résultats précédent, on est maintenant en mesure de prouver que dans le cas commutatif $(A+B)Sy = y$ pour tout y dans l'un des espaces d'interpolation réels $\mathcal{D}_A(\theta,p), \mathcal{D}_A(\theta), \mathcal{D}_B(\theta,p)$ et $\mathcal{D}_B(\theta)$, puisque on a pour chaque opérateur linéaire fermé L

$$\mathcal{D}_L(\theta,p) \hookrightarrow \mathcal{D}_L(\theta) \hookrightarrow \mathcal{D}_L(\theta,\infty) \quad \forall\theta \in (0,1), \forall p \in [1,\infty]$$

il suffit de considérer les espaces $\mathcal{D}_A(\theta,\infty)$ ou $\mathcal{D}_B(\theta,\infty)$ ■

Theorème 5.2 *(Existence) :*

Supposons que les résolvantes de A et B commutent

Si

$$y \in \mathcal{D}_A(\theta,\infty) + \mathcal{D}_B(\theta,\infty) \ \text{où} \ \ 0 < \theta < 1$$

on pose $x = Sy$.Alors

$$x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$$

et x est l'unique solution de l'équation

$$Ax + Bx = y$$

Preuve. L'unicité des solutions x de l'équation $Ax+Bx = y$ est démontrée dans le théorème (5.1).Donc on montre seulement l'existence.

Soit $y \in \mathcal{D}_A(\theta,\infty) \cup \mathcal{D}_B(\theta,\infty)$,on montre d'abord que si $0 \in \rho(A)$ et $x = Sy$, alors $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ et $Ax + Bx = y$

Par la proposition (5.8)on a

$$Sy = A^{-1}y - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\frac{dz}{z} \tag{5.27}$$

Montrons que l'hypothèse $y \in \mathcal{D}_A(\theta,\infty) \cup \mathcal{D}_B(\theta,\infty)$ implique que l'integrale de la formule précédente appartienne à $\mathcal{D}(A)$ et que A peut être appliqué sous le signe integral. On a

$$A(z+A)^{-1} = I - z(z+A)^{-1}$$

et

$$B(z-B)^{-1} = z(z-B)^{-1} - I$$

de sorte que

$$\left\|A(z+A)^{-1}\right\| \leq (1 + M_A(\sigma))$$

$$\left\|B(z-B)^{-1}\right\| \leq (1 + M_B(\pi-\sigma)) \ \ \text{pour } z \in \gamma_\sigma$$

Maintenant si $y \in \mathcal{D}_B(\theta,\infty)$ alors le lemme (5.2) montre que

$$\left\|B(z-B)^{-1}y\right\| \leq (1 + M_B(\pi-\sigma))\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,\infty)}\,\frac{1}{|z|^\theta}$$

sur γ_σ excepté en $z = 0$.Ainsi $f(z) = \dfrac{1}{z}A(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y$ est analytique sur $\gamma_{\sigma,r}^-$ et bornée d'ordre $|z|^{-1-\theta}$ à l'infini. Donc elle est absolument integrable le long de $\gamma_{\sigma,r}^-$ et puisque A est fermé on a

$$A\int_\gamma (z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\frac{dz}{z} = \int_\gamma A(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\frac{dz}{z} \tag{5.28}$$

si $y \in \mathcal{D}_A(\theta,\infty)$, on note que

$$A(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y = B(z-B)^{-1}A(z+A)^{-1}y$$

par la commtativité au sens de la résolvante, ce qui donne (5.28). Ainsi $Sy \in \mathcal{D}(A)$ et

$$ASy = y + \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma A(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\frac{dz}{z} \tag{5.29}$$

pour tout $y \in \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$, par le corollaire (5.2)

$$ASy + BSy = y$$

Si $0 \notin \rho(A)$ alors $0 \in \rho(B)$. D'où

$$AS(B,A)y + BS(B,A)y = y$$

par l'argument précédent. Mais $S(B,A) = S(A,B)$ et le résultat du théorème s'ensuit.

Finalement si $y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in \mathcal{D}_A(\theta,\infty)$ et $y_2 \in \mathcal{D}_B(\theta,\infty)$, On pose $x_i = Sy_i$ pour $i = 1,2$ et on obtient

$$x_i \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \text{ et } Ax_i + Bx_i = y_i \quad \text{pour } i = 1,2$$

Donc

$$x = x_1 + x_2 = Sy \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$$

et

$$Ax + Bx = (A+B)x_1 + (A+B)x_2 = y_1 + y_2$$

■

5.3.6 Régularité maximale :

Considérons toujours l'équation $Ax + Bx = y$. On a vu que si $y \in \mathcal{D}_A(\theta,p)$, alors il existe une (unique) solution

$$x = Sy \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}_A(\theta,p)$$

La question qui se pose maintenant, a t-on Ax, $Bx \in \mathcal{D}_A(\theta,p)$? La réponse est affirmative, i.e :on a la régularité maximale.

La régularité maximale de l'équation $Ax + Bx = y$ par rapport à l'espace $Y \hookrightarrow X$, signifie quand pour $y \in Y$ et $x \in X$ solution de l'équation, on a x, Ax, et $Bx \in Y$. On commence par le lemme usuel suivant :

Lemme 5.7 *Soit*

$$D(z) = (z+A)^{-1}B(t+B)^{-1}(z-B)^{-1}, \text{où } \ z \in \rho(-A) \cap \rho(B)$$

et γ *une courbe comme dans le lemme* (5.3). *Supposons que* γ *coupe l'axe des réels à droite de* $z = -t$. *Alors*

$$\int_\gamma D(z)y dz = \int_\gamma \frac{z}{z+t}(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}y dz \quad \textit{pour tout } y \textit{ dans } X$$

Si $y \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$, *alors on a aussi*

$$\int_\gamma (z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y dz = \int_\gamma \frac{1}{2i\pi}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y dz$$

Dans le cas où A et B sont à résolvantes commutatives, les formules précédentes s'écrivent :

$$B(t+B)^{-1}Sy = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z}{z+t}(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}ydz$$

$$BSy = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z}{z+t}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz$$

Preuve. Voir [Da Prato-Grisvard [4]] ■

Par le lemme (5.7) on a

$$BSy = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma (z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz \quad \forall y \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$$

alors il existe une constante M telle que

$$\|BSy\| \leq M\,\|y\|_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

pour chaque $y \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$. Cependant, il existe moins facile de trouver une ″bonne″expression de M , puisque l'integration ne peut être effectuée le long de la courbe γ_σ qui passe par l'origine. Avec la semi-norme $[.]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$ la situation est différente, c'est-à-dire on peut expliciter les constantes de la régularité.

Theorème 5.3 *Soient A et B deux opérateurs non négatfs à résolvantes commutatives avec $0 \in \rho(A) \cup \rho(B)$ et $\omega_A + \omega_B < \pi$ et soit $x = Sy$ l'unique solution de l'équation $Ax + Bx = y$. Alors si $y \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$ où $(\theta,p) \in (0,1) \times [1,\infty]$, on a*

$$Ax \in \mathcal{D}_B(\theta,p) \quad et \quad Bx \in \mathcal{D}_A(\theta,p) \cap \mathcal{D}_B(\theta,p)$$

Si $y \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$, alors

$$Ax \in \mathcal{D}_B(\theta) \quad et \quad Bx \in \mathcal{D}_A(\theta) \cap \mathcal{D}_B(\theta)$$

De plus on a les estimations suivantes :

$$[Ax]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq (1+C_1)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \tag{5.30}$$

$$[Bx]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq C_1\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \tag{5.31}$$

$$[Bx]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} \leq C_2\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \tag{5.32}$$

Où

$$C_1 : \ = C_1(\sigma,\theta,A,B) = \frac{1}{\pi}M_A(\sigma)(1+2\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma)\int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta\,|te^{i\sigma}+1|} \tag{5.33}$$

$$C_2 : \ = C_2(\sigma,\theta,A,B) = \frac{1}{\pi}M_A(\sigma)(1+2\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma)\int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta\,|te^{i\sigma}-1|} \tag{5.34}$$

pour tout $\sigma \in (\omega_B, \phi_A)$

Le fait qu'on a aussi $Bx \in \mathcal{D}_A(\theta,p)$ quand $y \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$ est un résultat inattendu.On note aussi que si $y \in \mathcal{D}_A(\theta,p)$ ou $y \in \mathcal{D}_A(\theta)$, on obtient parfaitement des résultats analogues puisque $S(A,B) = S(B,A)$

Preuve. On doit estimer $[BSy]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$, $[ASy]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$et $[BSy]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$. Commençons par $[BSy]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$, grâce au lemme (5.7) on a

$$B(t+B)^{-1}BSy = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\sigma}\frac{z}{z+t}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz \tag{5.35}$$

i.e :

$$B(t+B)^{-1}BSy = \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty \left[\frac{re^{2i\sigma}}{re^{i\sigma}+t}\Psi_\sigma(r) + \frac{re^{-2i\sigma}}{re^{-i\sigma}+t}\Psi_{-\sigma}(r)\right]\frac{dr}{r} \tag{5.36}$$

pour chaque $t>0$, où

$$\Psi_\sigma(r) :=\Psi_\sigma(r,A,B) = r(re^{i\sigma}+A)^{-1}B(re^{i\sigma}-B)^{-1}y \tag{5.37}$$

Posons $r=ts$ dans (5.37) on obtient

$$B(t+B)^{-1}BSy \;=\; \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty \left[\frac{se^{2i\sigma}}{se^{i\sigma}+1}\Psi_\sigma(st) + \frac{se^{-2i\sigma}}{se^{-i\sigma}+1}\Psi_{-\sigma}(st)\right]\frac{ds}{s} \tag{5.38}$$

chaque terme de ses integrales est de la forme exigée dans les hypothèses du corollaire (1.2). Il est aussi clair que

$$\left\|s^{-\theta}\frac{se^{\pm 2i\sigma}}{se^{\pm i\sigma}+1}\right\|_{L^1_*(0,\infty)} = \int_0^\infty \frac{ds}{s^\theta\left|se^{i\sigma}+1\right|} < \infty$$

En ce qui concerne $\Psi_{\pm\sigma}(t)$ on a par le lemme (5.2) l'estimation

$$\|\Psi_{\pm\sigma}(t)\| \leq C(\sigma)\left\|B(t+B)^{-1}y\right\| \tag{5.39}$$

où

$$C(\sigma) :=C(\sigma,A,B) = M_A(\sigma)(1+\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma))$$

Il s'ensuit de l'hypothèse $y\in\mathcal{D}_B(\theta,p)$ que

$$[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} = \left\|t^\theta B(t+B)^{-1}\right\|_{L^p_*((0,\infty);X)} < \infty$$

Ainsi

$$\left\|t^\theta\Psi_{\pm\sigma}(t,A,B)\right\|_{L^p_*((0,\infty);X)} \leq C(\sigma,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \tag{5.40}$$

par conséquent, on peut appliquer le corollaire (1.2) et obtenir

$$\left[B(t+B)^{-1}BSy\right]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq C_1(\sigma,\theta)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \tag{5.41}$$

où

$$C_1(\sigma,\theta) :=C(\sigma,\theta,A,B) = \frac{1}{\pi}C(\sigma,A,B)\int_0^\infty\frac{dt}{t^\theta\left|te^{i\sigma}+1\right|}$$

En particulier, si $y \in \mathcal{D}_B(\theta)$ alors $y \in \mathcal{D}_B(\theta,\infty)$ et

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} r^{\theta}\left\|B(r+B)^{-1}y\right\| = 0$$

En utilisant (5.38) et (5.39) on obtient

$$t^{\theta}\left\|B(t+B)^{-1}Bx\right\| \leq \frac{1}{\pi}C(\sigma)\int_0^{\infty}\frac{s^{-\theta}}{|se^{i\sigma}+1|}\,|ts|^{\sigma}\left\|B(ts+B)^{-1}y\right\|ds \tag{5.42}$$

puisque

$$(ts)^{\theta}\left\|B(ts+B)^{-1}y\right\| \leq [y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$
$$(ts)^{\theta}\left\|B(ts+B)^{-1}y\right\| \underset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (s>0)$$

et

$$\int_0^{\infty}\frac{s^{-\theta}}{|se^{i\sigma}+1|}ds < \infty$$

On peut appliquer le théorème de covergence dominée à la formule (5.42) et obtenir

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{\theta}\left\|B(t+B)^{-1}Bx\right\| = 0$$

i.e :$Bx \in \mathcal{D}_B(\theta)$. En utilisant l'égalité $Ax = y - Bx$,où $y, Bx \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$, on déduit que $Ax \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$. De plus on a

$$\|Ax\|_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq (1 + C_1(\sigma,\theta,A,B))\,\|y\|_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

On a aussi

$$(t+A)^{-1}(z+A)^{-1} = \frac{1}{t-z}((z+A)^{-1} - (t+A)^{-1})$$

de sorte que

$$(t+A)^{-1}Bx = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_{\sigma,r}}\frac{1}{t-z}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz$$

puisque

$$\int_{\gamma_{\sigma,r}}\frac{1}{t-z}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz = (t+A)^{-1}B\int_{\gamma_{\sigma,r}}\frac{1}{t-z}(z-B)^{-1}ydz = 0$$

pourvu que $r < t$

Comme

$$A(t+A)^{-1} = 1 - t(t+A)^{-1}$$

On obtient alors

$$A(t+A)^{-1}Bx = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_{\sigma,r}}\frac{z}{z-t}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz$$

A présent, le chemin d'integration peut être déformé en γ_σ, sans changer la valeur de l'integrale. Ainsi

$$A(t+A)^{-1}BSy = \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty \left[\frac{re^{2i\sigma}}{re^{i\sigma}-t}\Psi_\sigma(r) + \frac{re^{-2i\sigma}}{re^{-i\sigma}-t}\Psi_{-\sigma}(r)\right]\frac{dr}{r} \tag{5.43}$$

où $\Psi_\sigma(r,A,B)$ est définie plus haut. On pose $r = st$ et on obtient

$$A(t+A)^{-1}BSy \quad = \quad \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty \left[\frac{se^{2i\sigma}}{se^{i\sigma}-1}\Psi_\sigma(st) + \frac{se^{-2i\sigma}}{se^{-i\sigma}-1}\Psi_{-\sigma}(st)\right]\frac{ds}{s} \tag{5.44}$$

par conséquent, comme précédemment on a

$$[Bx]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} \leq C_2(\sigma,\theta)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

où

$$C_2(\sigma,\theta) \colon = C_2(\sigma,\theta,A,B) = \frac{1}{\pi}C(\sigma,A,B)\int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta(te^{i\sigma}-1)}$$

Si $y \in \mathcal{D}_B(\theta)$ alors

$$y \in \mathcal{D}_B(\theta,\infty) \text{ et } \lim_{r\longrightarrow\infty} r^\theta \left\|B(r+B)^{-1}y\right\| = 0$$

compte tenu de (5.44) et (5.39) on a

$$t^\theta \left\|A(t+A)^{-1}BSy\right\| \quad \leq \quad \frac{1}{\pi}C(\sigma)\int_0^\infty \frac{1}{s^\theta(se^{i\sigma}-1)}(ts)^\theta \left\|B(ts+B)^{-1}y\right\| ds \tag{5.45}$$

puisque

$$(ts)^\theta \left\|B(ts+B)^{-1}y\right\| \leq [y]_{\mathcal{D}_B(\theta,\infty)}$$

alors

$$(ts)^\theta \left\|B(ts+B)^{-1}y\right\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (s>0)$$

et

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^\theta(se^{i\sigma}-1)} < \infty$$

on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la formule (5.45) et obtenir

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^\theta \left\|A(t+A)^{-1}Bx\right\| = 0 \text{ i.e : } Bx \in \mathcal{D}_A(\theta)$$

■

5.3.7 Extension de la méthode des sommes :

Corollaire 5.3 *:Soient A et B deux opérateurs à résolvantes commutatives avec angles spectraux ω_A et ω_B respectivement satisfaisant à l'inégalité $\omega_A + \omega_B < \pi$. Supposons que $Ax + Bx = y$*

Alors si $y \in \mathcal{D}_B(\theta, p)$ on a

$$Ax \in \mathcal{D}_B(\theta, p) \text{ et } Bx \in \mathcal{D}_A(\theta, p) \cap \mathcal{D}_B(\theta, p)$$

pour tout $(\theta, p) \in (0, 1) \times [1, \infty]$

D'une manière analogue si $y \in \mathcal{D}_B(\theta)$, alors

$$Ax \in \mathcal{D}_B(\theta) \quad \text{et} \quad Bx \in \mathcal{D}_A(\theta) \cap \mathcal{D}_B(\theta)$$

De plus on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
[Ax]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} &\leq (1 + C_1)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \\
[Bx]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} &\leq C_1\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \\
[Bx]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} &\leq C_2\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}
\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont comme dans le théorème (5.3).

On donne maintenant une extension de la méthode des sommes qui donne quelques résultats de régularité en supposant l'éxistence d'une solution stricte (voir [2]).

Supposons que A et B soient à résolvantes commutatives et non négatifs avec $\omega_A + \omega_B < \pi$. Cependant on laisse tomber l'hypothèse que l'un au moins des opérateurs soit positif. Soit x une solution de l'équation $Ax + Bx = y$ où $y \in \mathcal{D}_B(\theta, p)$, Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$Ax + Bx + \varepsilon x = y + \varepsilon x \;\text{ et }\; y + \varepsilon x \in \mathcal{D}_B(\theta, p) \text{ (puisque } x \in \mathcal{D}(B)$$

par suite

$$x = S_\varepsilon(A, B)(y + \varepsilon x)\;,\; Ax \in \mathcal{D}_B(\theta, p) \text{ et } Bx \in \mathcal{D}_A(\theta, p) \cap \mathcal{D}_B(\theta, p)$$

(voir théorème 5.3), En particulier si $y \in \mathcal{D}_B(\theta)$ alors

$$Ax \in \mathcal{D}_B(\theta) \text{ et } Bx \in \mathcal{D}_A(\theta) \cap \mathcal{D}_B(\theta)$$

on a

$$Bx = BS_\varepsilon y + \varepsilon BS_\varepsilon x \tag{5.46}$$

par (5.31) on a

$$[BS_\varepsilon x]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq C_1(\sigma, \theta, A, B)\,[x]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \;\text{ où } \omega_B < \sigma < \phi_A$$

et

$$\begin{aligned}
C_1(\sigma, \theta, A, B) &= \frac{1}{\pi} M_{A_\varepsilon}(\sigma)(1 + 2\sin(\frac{\sigma}{2}) M_B(\pi - \sigma)) \int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta\,|te^{i\sigma} + 1|} \\
&\leq \frac{M_A(\sigma)(1 + 2\sin(\frac{\sigma}{2}) M_B(\pi - \sigma))}{\pi \sin\left[\max\left\{\frac{\pi}{2}, \sigma\right\}\right]} \int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta\,|te^{i\sigma} + 1|}
\end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon\,[BS_\varepsilon x]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}=0 \tag{5.47}$$

Pour traiter $[BS_\varepsilon y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$, on note d'abord que (5.38) implique que

$$B(t+B)^{-1}BS_\varepsilon y \quad = \quad \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty\left[\frac{se^{2i\sigma}}{se^{i\sigma}+1}\Psi_\sigma(st,A_\varepsilon,B)+\frac{se^{-2i\sigma}}{se^{-i\sigma}+1}\Psi_{-\sigma}(st,A_\varepsilon,B)\right]\frac{ds}{s} \tag{5.48}$$

et

$$[BS_\varepsilon y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}\leq C(\sigma,\theta,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

par la preuve précédente

$$\begin{aligned}\Psi(t)\colon \quad &= \quad \Psi(t,A,B)\colon = \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty \frac{z}{z+t}(z+A)^{-1}(z-B)^{-1}ydz\\ &= \quad \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty\left[\frac{se^{2i\sigma}}{se^{i\sigma}+1}\Psi_\sigma(st,A,B)+\frac{se^{-2i\sigma}}{se^{-i\sigma}+1}\Psi_{-\sigma}(st,A,B)\right]\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

qui converge pour tout $t>0$ et

$$\left\|t^\theta\Psi(t)\right\|_{L^p_*((0,\infty);X)}\leq C_1(\sigma,\theta,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

L'identité de la résolvante donne

$$\Psi_{\pm\sigma}(t,A_\varepsilon,B)-\Psi_{\pm\sigma}(t,A,B)=-\varepsilon t(te^{\pm i\sigma}+\varepsilon+A)^{-1}(te^{\pm i\sigma}+A)^{-1}B(te^{\pm i\sigma}-B)^{-1}y$$

de telle sorte

$$\|\Psi_{\pm\sigma}(t,A_\varepsilon,B)-\Psi_{\pm\sigma}(t,A,B)\|\leq M_A(\sigma)M_A^*(\sigma)(1+M_B(\pi-\sigma))\,\|y\|\,\frac{\varepsilon}{|te^{i\sigma}+\varepsilon|}$$

mais

$$\left\|\frac{\varepsilon t^\theta}{te^{i\sigma}+\varepsilon}\right\|_{L^p_*(0,\infty)}=\varepsilon^\theta\left\|\frac{t^\theta}{te^{i\sigma}+\varepsilon}\right\|_{L^p_*(0,\infty)}$$

par conséquent, la formule $(**)$ du corollaire (1.2) donne

$$\left\|t^\theta B(t+B)^{-1}BS_\varepsilon y-t^\theta\Psi(t)\right\|_{L^p_*(0,\infty)}\leq C\varepsilon^\theta$$

Où

$$C\colon = M_A(\sigma)M_A^*(\sigma)(1+M_B(\pi-\sigma))\,\|y\|\int_0^\infty\frac{dt}{t^\theta\,|te^{i\sigma}+1|}\left\|\frac{t^\theta}{te^{i\sigma}+1}\right\|_{L^p_*(0,\infty)}$$

Enfin, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left\|t^\theta B(t+B)^{-1}BS_\varepsilon y-t^\theta\Psi(t)\right\|_{L^p_*(0,\infty)}=0$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[BS_\varepsilon y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} &= \left\|t^\theta\Psi(t)\right\|_{L^p_*((0,\infty);X)}\\ &\leq C_1(\sigma,\theta,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}\end{aligned}$$

les équations $(5.46),(5.47),(5.49)$ impliquent que

$$\begin{aligned}[Bx]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[BS_\varepsilon y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon\,[BS_\varepsilon y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}\\ &= \left\|t^\theta\Psi(t)\right\|_{L^p_*((0,\infty);X)} \leq C_1(\sigma,\theta,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}\end{aligned}$$

puisque $Ax = y - Bx$, on déduit que

$$[Ax]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq (1 + C_1(\sigma,\theta,A,B))\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

Concernant l'estimation de $[Bx]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)}$ on a

$$[Bx]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} \leq [BS_\varepsilon y]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} + \varepsilon\,[BS_\varepsilon x]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} \tag{5.49}$$

En tenant compte de (5.32), on obtient

$$[BS_\varepsilon x]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} \leq C_2(\sigma,\theta,A_\varepsilon,B)$$

où

$$\begin{aligned}C_2(\sigma,\theta,A_\varepsilon,B) &= \frac{1}{\pi}M_{A_\varepsilon}(\sigma)(1+2\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma))\int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta\left|te^{i\sigma}-1\right|}\\ &\leq \frac{M_A(\sigma)(1+2\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma))}{\pi\sin\left[\max\left\{\frac{\pi}{2},\sigma\right\}\right]}\int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta\left|te^{i\sigma}-1\right|}\end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon\,[BS_\varepsilon x]_{\mathcal{D}_{A_\varepsilon}(\theta,p)} = 0 \tag{5.50}$$

La relation (5.43) donne

$$A_\varepsilon(t+A_\varepsilon)^{-1}BSy = \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty\left[\frac{re^{2i\sigma}}{re^{i\sigma}-1}\Psi_\sigma(r,A_\varepsilon,B) + \frac{re^{-2i\sigma}}{re^{-i\sigma}-1}\Psi_{-\sigma}(r,A_\varepsilon,B)\right]\frac{dr}{r}$$

La preuve du théorème (5.3) montre que

$$\begin{aligned}\Psi(-t) &= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{z}{z-t}(z+A)^{-1}B(z-B)^{-1}y\,dz\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_0^\infty\left[\frac{se^{2i\sigma}}{se^{i\sigma}-1}\Psi_\sigma(st,A,B) + \frac{se^{-2i\sigma}}{se^{-i\sigma}-1}\Psi_{-\sigma}(st,A,B)\right]\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

est convergente pour tout $t > 0$

et

$$\left\|t^{\theta}\Psi(-t)\right\|_{L_*^p((0,\infty);X)} \leq C_2(\sigma,\theta,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

Où $C_2(\sigma,\theta,A,B)$ est donnée par (5.34)

Un raisonnement analogue au précédent donne

$$\left\|t^{\theta}B(t+B)^{-1}BS_{\varepsilon}y - t^{\theta}\Psi(-t)\right\|_{L_*^p((0,\infty);X)} \leq C'\varepsilon^{\theta}$$

où

$$C' :\ = M_A(\sigma)M_A^*(\sigma)(1+M_B(\pi-\sigma))\,\|y\| \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{\theta}\left|te^{i\sigma}-1\right|} \left\|\frac{t^{\theta}}{te^{i\sigma}+1}\right\|_{L_*^p(0,\infty)}$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[BS_{\varepsilon}y]_{\mathcal{D}_{A_{\varepsilon}}(\theta,p)} &= \left\|t^{\theta}\Psi(-t)\right\|_{L_*^p((0,\infty);X)} \\ &\leq C_2(\sigma,\theta,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \end{aligned}$$

La proposition (5.5) et les équations (5.50), (5.51) et (5.52) donnent

$$\begin{aligned} [Bx]_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[Bx]_{\mathcal{D}_{A_{\varepsilon}}(\theta,p)} \\ &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[BS_{\varepsilon}y]_{\mathcal{D}_{A_{\varepsilon}}(\theta,p)} + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon\,[BS_{\varepsilon}x]_{\mathcal{D}_{A_{\varepsilon}}(\theta,p)} \\ &= \left\|t^{\theta}\Psi(-t)\right\|_{L_*^p((0,\infty);X)} \\ &\leq C_2(\sigma,\theta,A,B)\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \end{aligned}$$

Déduction de la résolution de $\lambda x + Ax + Bx = y$:

On a vu précédemment que si A et B sont non négatifs, si $\omega_A + \omega_B < \pi$ et si $|\arg\lambda| < \min(\phi_A,\phi_B)$,alors

$$A_{\lambda} = \lambda + A \ \text{ et } \ B_{\lambda} = \lambda + B$$

sont positifs et on a

$$\omega_{A_{\lambda}} + \omega_B < \pi \ \text{ et } \ \omega_A + \omega_{B_{\lambda}} < \pi$$

Par suite tout les résultats précédents sur $S(A,B)$ et sur l'équation $Ax + Bx = y$ sont applicables aux paires (A_{λ},B) et (A,B_{λ})

Par conséquent

$$S_{\lambda}(A,B)y :\ = S(A_{\lambda},B)y :\ = S(A,B_{\lambda})y$$

est l'unique solution de l'équation

$$\lambda x + Ax + Bx = y \text{ pour chaque } y \in \mathcal{D}_A(\theta,\infty) + \mathcal{D}_B(\theta,\infty) \text{ où } \theta \in (0,1)$$

5.3.8 Régularité supplémentaire de S_{λ} :

Voici un résultat de régularité concernant l'opérateur S_{λ}qui confirme et renforce la proposition (5.7).

Theorème 5.4 *:Soient A et B deux opérateurs à résolvantes commutatives et soit* $\lambda > 0$*. Alors* S_λ *est un opérateur linéaire borné appliquant* X *dans* $\mathcal{D}_A(\theta,p) \cap \mathcal{D}_B(\theta,p)$ *pour chaque* $\theta \in (0,1)$ *et chaque* $p \in [1,\infty]$*. De plus on a*

$$\|S_\lambda x\|_X \leq m_0 \lambda^{-1} \|x\|_X \tag{5.51}$$

$$\|S_\lambda x\|_{\mathcal{D}_A(\theta,p)} \leq m_1 \lambda^{-(1-\theta)} \|x\|_X \tag{5.52}$$

$$\|S_\lambda x\|_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq m_2 \lambda^{-(1-\theta)} \|x\|_X \tag{5.53}$$

Où

$$m_0 := \frac{2}{\pi} M_A^*(\sigma) M_B(\pi - \sigma) \int_0^\infty \frac{dt}{|t^2 e^{2i\sigma} + 1|} \tag{5.54}$$

$$m_1 := \frac{2}{\pi} M_A(\sigma) M_B^*(\pi - \sigma) \left\| \frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma} - 1} \right\|_{L_*^1} \left\| \frac{t^\theta}{te^{i\sigma} - 1} \right\|_{L_*^p} \tag{5.55}$$

$$m_2 := \frac{2}{\pi} M_A^*(\sigma) M_B(\pi - \sigma) \left\| \frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma} + 1} \right\|_{L_*^1} \left\| \frac{t^\theta}{te^{i\sigma} + 1} \right\|_{L_*^p} \tag{5.56}$$

Preuve.

L'estimation (5.53) est celle de la proposition (5.7)

Montrons que (5.55) est vraie pour tout $x \in X$,Par le lemme (5.4) on a

$$B(t+B)^{-1} S_\lambda x = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\sigma} \frac{z}{z+t} (z + \lambda + A)^{-1} (z - B)^{-1} x dz$$

Sur $\gamma_\sigma / \{0\}$ on a $z = re^{\pm i\sigma}$ et l'estimation suivante est vérifiée

$$\left\| \frac{z}{z+t} (z + \lambda + A)^{-1} (z - B)^{-1} x \right\| \leq \frac{M_A^*(\sigma) M_B(\pi - \sigma)}{|re^{i\sigma} + t| \, |re^{i\sigma} + \lambda|} \|x\|$$

où on a utilisé le fait que

$$\left|e^{-ia} + b\right| = \left|e^{ia} + b\right| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

par suite, posant

$$C := \frac{1}{\pi} M_A^*(\sigma) M_B(\pi - \sigma)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left\|B(t+B)^{-1} S_\lambda x\right\| &\leq C \|x\| \int_0^\infty \frac{dr}{|re^{i\sigma} + t| \, |re^{i\sigma} + \lambda|} \\ &= C \|x\| \int_0^\infty \frac{s}{|se^{i\sigma} + 1| \, |tse^{i\sigma} + \lambda|} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

prenant

$$f(t) := t \left|te^{i\sigma} + t\right|^{-1} \quad \text{et} \quad g(t) := \left|te^{i\sigma} + \lambda\right|^{-1}$$

dans le corollaire (1.2).On en déduit

$$\|S_\lambda x\|_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq C \left\| \frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}+1} \right\|_{L^1_*} \left\| \frac{t^{\theta}}{te^{i\sigma}+\lambda} \right\|_{L^p_*} \|x\|$$

Mais

$$\left\| \frac{t^{\theta}}{te^{i\sigma}+\lambda} \right\|_{L^p_*} = \lambda^{-(1-\theta)} \left\| \frac{t^{\theta}}{te^{i\sigma}+1} \right\|_{L^p_*}$$

et on a

$$\|S_\lambda x\|_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq m_2 \lambda^{-(1-\theta)} \|x\|$$

où

$$m_2 : = \frac{1}{\pi} M_A^*(\sigma) M_B(\pi-\sigma) \left\| \frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}+1} \right\|_{L^1_*} \left\| \frac{t^{\theta}}{te^{i\sigma}+1} \right\|_{L^p_*}$$

Cela signifie que $S_\lambda(A,B)$ applique continûment X dans $\mathcal{D}_B(\theta,p)$ pour chaque $\theta \in (0,1)$ et tout $p \in [1,\infty]$

Puisque $S_\lambda(A,B) = S_\lambda(B,A)$,l'opérateur $S_\lambda(A,B)$ applique continûment X dans $\mathcal{D}_A(\theta,p)$.De plus on a $\omega_A < \pi - \sigma < \phi_B$ de sorte qu'en échangeant les rôles de A et B et en remplaçant σ par $\pi - \sigma$ dans la formule (5.58)

On voit qu'on peut choisir

$$m_1 : = m_2(B,A) = \frac{2}{\pi} M_A^*(\sigma) M_B(\pi-\sigma) \left\| \frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}-1} \right\|_{L^1_*} \left\| \frac{t^{\theta}}{te^{i\sigma}-1} \right\|_{L^p_*}$$

■

5.3.9 Constantes de régularité pour l'équation :$\lambda x + Ax + Bx = y$

En appliquant le théorème (5.3) à A_λ et B ,on obtient quelques résultats concernant la régularité maximale de l'équation $\lambda x + Ax + Bx = y$

Théorème 5.5 : Soient A et B deux opérateurs non négatifs à résolvantes commutatives avec $\omega_A + \omega_B < \pi$ et $\lambda > 0$

Theorème 5.5 *Posons $\omega_B < \sigma < \phi_A$ et $x = S_\lambda y$*

i) *Si $y \in \mathcal{D}_B(\theta,p)$ où $(\theta,p) \in (0,1) \times [1,\infty]$, alors $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ et est l'unique solution de l'équation $\lambda x + Ax + Bx = y$ et on a*

$$Ax \in \mathcal{D}_B(\theta,p) \text{ et } Bx \in \mathcal{D}_A(\theta,p) \cap \mathcal{D}_B(\theta,p)$$

ii) *Si $y \in \mathcal{D}_B(\theta)$ où $\theta \in (0,1)$, alors*

$$Ax \in \mathcal{D}_B(\theta) \text{ et } Bx \in \mathcal{D}_A(\theta) \cap \mathcal{D}_B(\theta)$$

iii) *De plus on a les estimations*

$$\|x\| \leq m_0 \lambda^{-1} \|y\|$$

$$\|Ax\| \leq (1+m_0) \|y\| + \widetilde{C_1} \lambda^{-\theta} [y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

$$\|Bx\| \leq \widetilde{C_1} \lambda^{-\theta} [y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

$$[Bx]_{\mathcal{D}_{A_\lambda}(\theta,p)} \leq C_2' [y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

$$[x]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \le C_0\lambda^{-1}\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

$$[Ax]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \le (1 + C_0 + C_1^{'})\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$
$$[Bx]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \le C_1^{'}\,[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

Ici m_0 est donné par la proposition (5.7)

$$C_1^{'} = \frac{C_1}{\sin\sigma}\ ,\ C_2^{'} = \frac{C_2}{\sin\sigma}$$

avec C_1 et C_2 donnés par le théorème (5.3)

$$C_0 = \frac{M_A^*(\sigma)(1+\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma)}{\pi\sin\sigma}\left\|\frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}+1}\right\|_{L_*^1}$$

et $\widetilde{C_1}\colon = \frac{M_A^*(\sigma)(1+\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma)}{\pi\sin\sigma}\left\|\frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}+1}\right\|_{L_*^q}$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Remarque : Puisque $S_\lambda(A,B) = S_\lambda(B,A)$, en échangeant les rôles de A et B dans le théàrème précédent, on obtient un ensemble d'estimations analogues

Preuve. Par la proposition (5.3)

$$\mathcal{D}_{A_\lambda}(\theta,p) = \mathcal{D}_A(\theta,p) \text{ et } \mathcal{D}_{A_\lambda}(\theta) = \mathcal{D}_A(\theta)$$

Alors tous les énoncés du théorème s'ensuit directement du théorème (5.3),exepté les estimations de iii). Par la proposition (5.7) on a

$$\|\lambda x\|_X \le m_0\,\|y\|_X$$

et le lemme (5.7) donne

$$B(t+B)^{-1}x = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z+t}(z+\lambda+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz \tag{5.57}$$

sur $\gamma_\sigma/\{0\}$on a $z = re^{\pm i\sigma}$, et par le lemme (5.7) on obtient

$$\left\|\frac{1}{z+t}(z+\lambda+A)^{-1}B(z-B)^{-1}\right\| \le \frac{C}{|re^{i\sigma}+1|\,|re^{i\sigma}+\lambda|}\left\|B(r+B)^{-1}\right\|$$

où

$$C\colon = M_A^*(\sigma)(1+\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma)$$

Cela montre que l'integrand reste borné dans $\rho(A)\cap\rho(B)$ quand $z \longrightarrow 0$. Par conséquent le chemin d'integration peut être déformé en γ_σ. En utilisant le fait que

$$\left|re^{i\sigma}+\lambda\right| \ge \lambda\sin\sigma$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
\left\|B(t+B)^{-1}x\right\| &= \left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\sigma}\frac{1}{z+t}(z+\lambda+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz\right\| \\
&\leq \frac{C}{2\pi}\int_{\gamma_\sigma}\frac{\|B(r+B)^{-1}y\|}{|z+\lambda|\,|z+t|}d\,|z| \\
&= \frac{C}{\pi\lambda\sin\sigma}\int_0^\infty \frac{r}{|re^{i\sigma}+t|}\left\|B(t+B)^{-1}y\right\|\frac{dr}{r} \\
&= \frac{C}{\pi\lambda\sin\sigma}\int_0^\infty \frac{s}{|se^{i\sigma}+1|}\left\|B(ts+B)^{-1}y\right\|\frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

(on a posé ici $r = ts$)

Prenons

$$f(t):\ = \frac{t}{te^{i\sigma}+1}\ ,\ g(t):\ = \left\|B(t+B)^{-1}y\right\|$$

dans le corollaire (1.2) on a alors

$$\left\|t^\theta\left\|B(t+B)^{-1}x\right\|_X\right\|_{L^p_*} \leq C_0\lambda^{-1}\left\|t^\theta\left\|B(t+B)^{-1}y\right\|_X\right\|_{L^p_*} \tag{5.58}$$

i.e :

$$[x]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq C_0\lambda^{-1}[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

où C_0 est donné dans le théorème

L'estimation de $\|Bx\|$:par le lemme (5.7) on a

$$Bx = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\sigma}(z+\lambda+A)^{-1}B(z-B)^{-1}ydz$$

par suite, en utilisant l'inigalité de Hölder et la formule

$$\left\|\frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}+\lambda}\right\|_{L^q_*} = \lambda^{-\theta}\left\|\frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}+1}\right\|_{L^q_*}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\|Bx\| &\leq \frac{1}{\pi}M^*_A(\sigma)(1+2\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma))\int_0^\infty \frac{t^{1-\theta}}{te^{i\sigma}+\lambda}\left\|t^\theta B(t+B)^{-1}y\right\|\frac{dt}{t} \\
&\leq \widetilde{C_1}\lambda^{-\theta}[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}
\end{aligned}$$

par ailleurs le théorème (5.3) donne

$$[BS_\lambda y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq C'[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

où

$$C':\ = \frac{1}{\pi}M_{\lambda+A}(\sigma)(1+\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma))\int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta\,|te^{i\sigma}+1|}$$

Mais

$$M_{\lambda+A}(\sigma) \leq \frac{M_A^*(\sigma)}{\sin\sigma} \quad \text{par} \quad (5.14)$$

alors

$$[BS_\lambda y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq C_1^{'} [y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

Puisque

$$Ax = y - \lambda x - Bx$$

on a aussi

$$\|AS_\lambda y\| \leq (1+m_0)\|y\| + \widetilde{C_1}\lambda^{-\theta}[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

$$[AS_\lambda y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)} \leq (1+C_0+C_1^{'})[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

Finalement, par (5.52) on a

$$[Bx]_{\mathcal{D}_{A_\lambda}(\theta,p)} \leq C[y]_{\mathcal{D}_B(\theta,p)}$$

où

$$C: \ = \frac{1}{\pi}M_{A_\lambda}(\sigma)(1+\sin(\frac{\sigma}{2})M_B(\pi-\sigma))\int_0^\infty \frac{dt}{t^\theta|te^{i\sigma}-1|}$$

et

$$M_{A_\lambda}(\sigma) \leq \frac{M_A^*(\sigma)}{\sin\sigma}$$

■

5.3.10 Généralisation de la méthode des sommes :

Comme conséquence de la proposition (5.4) on note que si A et B sont non négafifs avec $\omega_A+\omega_B<\pi$ et si $|\arg\lambda|<\min(\phi_A,\phi_B)$, alors $A_\lambda$et B sont à résolvantes commutatives et non négatifs,A est positif et $\omega_A+\omega_B<\pi$, par suite en utilisant le corollaire (5.3) et la proposition (5.7) on arrive au théorème suivant.

Theorème 5.6 *:Soient A et B deux opérateurs non négatifs à résolvantes commutatives avec $\omega_A+\omega_B<\pi$.On suppose que $\mathcal{D}(A)+\mathcal{D}(B)$ est dense dans X. Alors $\overline{A+B}$ est non négatifs et $\omega_{\overline{A+B}} \leq \max(\omega_A,\omega_B)$*

(i.e : $\phi_{\overline{A+B}} \geq \min(\phi_A,\phi_B)$ et $S_\lambda = (\lambda+\overline{A+B})^{-1}$pour tout λ tel que $|\arg\lambda|<\min(\phi_A,\phi_B)$)▌

Remarque 5.5 *Ce théorème peut être utilisé dans la généralisation de la méthode des sommes à la somme de plus de deux opérateurs non négatifs.*

5.3.11 Cas d'un espace de Hilbert

Corollaire 5.4 *Soient A et B deux opérateurs non négatifs à domaines denses dans un espace de Hilbert X tels que $\omega_A+\omega_B<\pi$ et $0\in\rho(A)\cup\rho(B)$. Supposons qu'il existe $\theta>0$ tel que $\mathcal{D}_B(\theta,2)=\mathcal{D}_{B^*}(\theta,2)$. Alors l'équation $\lambda x+Ax+Bx=y$ admet une solution unique pour tout y dans X et*

$$(\lambda+A+B)^{-1} = S_\lambda \ ,\forall\lambda>0$$

Bibliographie

[1] **Brezis,H** : *Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson, Paris, Newyork, Bercelone, Milan, Mexico, Sao Paulo(1983).*

[2] **Clément,Ph.,G.Gripenberg, V.Högnäs, Londen, S.O** : *Some remarks on the methode of the sums,Research reports,Helsinki Univ.,1999.*

[3] **Dunford-Schwartz** : *Linear Operators, part I, Interscience Publication.*

[4] **G.Da Prato et P.Grisvard** : *Sommes d'opérateurs Linéaires et équations et équations Différentielles Opérationnelles, J.Maths.Pures et Appl IX Ser.54(1975),305-387.*

[5] **H.B Stewart** :*Generation of analytic semi-group by strongly elliptic operator under general boundary conditions.Trans.Amer.Maths.Soc.,259(1980) 299-310.*

[6] **H.Tanabe** :*Equations of Evolution,Pitman,London,1979.*

[7] **Högnäs, V :** *Nonnegative operators and the methode of sums, Research reports, Helsinki Univ., 2001*

[8] **P.Grisvard** : *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications.J.M.Pures et appli. 45 (1966) 144-290.*

[9] **P.Grisvard** :*Spazi di Trace e applicazioni,Rendiconti di Matematica (4), vol.5,série VI (1972),657-729.*

[10] **P.L.Butzer,H.Berens** :*Semi-groups of Operators and Approximation,Springer-Verlag,Berlin,1967*

[11] **Labbas, R :***Some Results on the Sum of Linear Operator with Nondense Domains. Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), Vol. CLIV (1989), pp. 91-97*

[12] **Labbas, R.,Terreni, B** :*Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique et elliptique,1*$^{\text{ère}}$partie :Bollettino V.M.I.(7) 1-B (1987) ;pp545-569.

[13] **Labbas, R.,Terreni, B :***Sommes d'opérateurs lineaires de type parabolique.2*$^{\text{ème}}$ partie, Boll. Un. Mat. Italina, (7), 2-B : 141-162 (1988).

[14] .**Lions,J.L** :*Semi-groupes applications ;Notes rédiges par.Tissier,secrétariat Mathématique de l'école Normale Superieur Paris.1966.*

[15] **Lions,J.L., Peetre,J.,** :*Sur une classe d'espaces d'interpolation,Inst.Hautes Etudes sci.publ.Math,vol,19 (1964) ;5-86.*

[16] **Lunardi,A.** :*Interpolation betweenspaces of continueous funtions,in :Trends in the Theory and the practise of non linear analysis,V.Lakshmikantham (Editor),North Holland, Amsterdam (1985).*

[17] **Tosio.Kato** :*Perturbation Theory for Linear Operators. ISBN 3-540-58661-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*

[18] **S.G.Krein :***Linear differential equation in Banach spaces.Moscou, 1967.*

[19] **Triebel, H., :***Interpolation theory,function spaces,differential operators. Amsterdam, New York, Oxford Holland (1978).*