

**Chapitre II****Formulation mathématique modélisation par éléments finis****2.1 Introduction**

L'extrusion est le plus importante des procédés de mise en forme des polymères. Le principe de base de l'extrusion mono vis est l'utilisation d'une vis sans fin, qui tourne à l'intérieur d'un fourreau cylindrique. C'est un procédé continu, l'extrusion est utilisée dans la fabrication des produits finis ou des semi-produits de section constante (films, plaques, tubes, profilés...) par passage au travers d'un outillage appelé filière. Dans ce cas, les fonctions principales du procédé sont d'assurer la fusion du polymère solide, puis la mise en pression et le mélange du polymère fondu, afin d'alimenter dans de bonnes conditions la filière, qui donnera sa forme au produit fabriqué.

Le schéma de principe d'une extrudeuse mono vis est présenté dans la figure 2.1. Celle-ci comporte une vis sans fin à filetage trapézoïdale en forme de V qui tourne à l'intérieur d'un fourreau cylindrique F, régulé en température par des systèmes de chauffe et de refroidissement. Le polymère sous forme solide (granulés, poudre) est introduit dans le trémie T située à une extrémité de la machine. La principale fonction de l'extrudeuse est de convoier le polymère, de le fondre et enfin, de le mettre en pression, pour qu'il puisse franchir la filière placée à son extrémité. D'un point de vue industriel, on cherche à obtenir à la sortie de la machine un débit régulier, avec un matériau homogène, à la température contrôlée, et des conditions de production satisfaisantes (débit maximal, consommation énergétique limitée). Pour cela, la compréhension des mécanismes mis en jeu, ainsi que leur modélisation est un point capital.

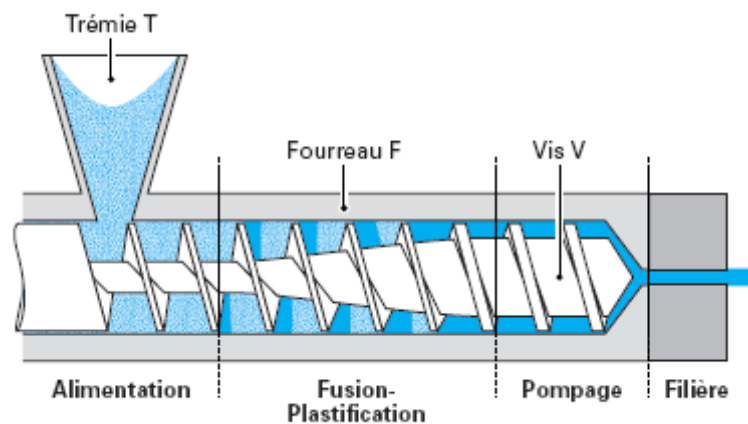
D'après les observations qui ont été faites sur l'état du polymère dans la machine, on peut distinguer trois zones phénoménologiques :

- Zone de convoyage solide, dans laquelle le polymère est entièrement solide ;

- Zone de fusion, dans laquelle coexistent du polymère encore solide et du polymère déjà fondu ;
- Zone de pompage, dans laquelle le polymère est totalement fondu.

L'énergie nécessaire à la fusion et à la mise en pression du polymère est issue de deux sources principales :

- l'énergie mécanique, fournie par la rotation de la vis, qui engendre des déformations au sein d'un milieu très visqueux;
- l'énergie thermique, fournie par la régulation du fourreau.

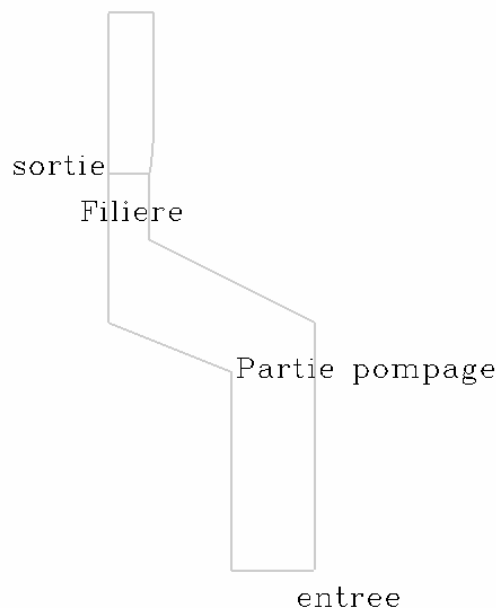


**Figure 2.1:** Présentation de l'extrudeuse

Cette étude s'intéresse à la simulation de l'écoulement d'un polymère fondu au sein d'une filière d'extrusion. L'objectif poursuivi est la prédiction numérique de l'écoulement lors de la mise en oeuvre du procédé. Pour parvenir à atteindre cet objectif on a utilisé le code commercial "Polyflow" pour réaliser l'ensemble des simulations numériques. Les simulations numériques fournissent des résultats sur le champ de vitesse, la contrainte de cisaillement et le champ de pression dans la filière.

Les principes de base qui sont appliqués dans l'analyse numérique de la simulation sont décrits en ce chapitre. La simulation de l'écoulement dans une matrice exige la résolution de l'équation de continuité, et les équations de quantité de mouvement pour un ensemble d'états de frontières, couplées aux équations constitutives reliant la viscosité avec le taux de cisaillement.

Dans ce chapitre on s'intéresse à prédire l'écoulement du polymère dans la partie de pompage- filière de l'extrudeuse (voir la figure 2.1). Dans cette partie le diamètre de la vis reste constant le long de l'axe de rotation. Pour des raisons de symétrie cylindrique le domaine de calcul sera bidimensionnel dans le plan (x-y) et aussi pour simplifier la géométrie du domaine de calcul, le filetage de la vis n'est pas pris en considération. Ainsi le domaine de calcul est représenté dans la figure 2.2.



**Figure 2.2:** Domaine de calcul

## 2.2 Polymère utilisé pour la simulation

Un polymère est une macromolécule, organique ou inorganique, constituée de l'enchaînement répété d'un même motif, le monomère, reliés les uns aux autres par des liaisons covalentes. Un polymère peut être naturel (ex.: polysaccharides, ADN), obtenu par modification chimique d'un polymère naturel (ex.: méthylcellulose), ou bien entièrement synthétisé par voie chimique (ex.: polystyrène, polyisoprène) par une réaction de polymérisation.

Le polyéthylène est probablement le polymère industriel le plus couramment utilisé dans la vie de tous les jours. Le polyéthylène est le plastique le plus populaire du monde. C'est le polymère dont sont faits les sacs, les bouteilles de shampoing, les jouets des enfants, et

même les gilets pare-balle. Et ce matériau qui a des usages aussi variés a une structure très simple, la plus simple de tous les polymères du commerce. Une molécule de polyéthylène n'est rien de plus qu'une longue chaîne d'atomes de carbone, avec deux atomes d'hydrogène attachés à chaque atome de carbone :  $(CH_2 - CH_2)_n$

Quelques fois c'est un petit peu plus compliqué. Parfois les atomes de carbone au lieu d'être liés à des atomes d'hydrogène, sont liés à de longues chaînes de polyéthylène. On appelle cela polyéthylène ramifié, ou PEBD (polyéthylène basse densité), ou LDPE (low density polyethylene). Quand il n'y a pas de ramifications, on appelle cela du polyéthylène linéaire, ou PEHD (polyéthylène haute densité), ou HDPE (high density polyethylene). Le polyéthylène linéaire est beaucoup plus résistant que le polyéthylène ramifié, mais le LDPE est moins cher et plus facile à fabriquer.

La masse moléculaire du polyéthylène linéaire est généralement de l'ordre de 200 000 à 500 000, mais elle peut être beaucoup plus élevée. Le polyéthylène dont la masse moléculaire est de l'ordre de 3 à 6 millions est appelé polyéthylène ultra haute masse moléculaire, ou UHMWPE (ultra high molecular weight polyethylene). L' UHMWPE peut être utilisé pour fabriquer des fibres si solides qu'elles remplacent le Kevlar pour la fabrication des gilets pare-balle. De grandes plaques de UHMWPE sont également utilisées pour remplacer la glace des patinoires.

Dans cette étude on va utiliser le polyéthylène à basse densité LDPE à cause de sa disponibilité et son coût le moins cher. Comme dans notre cas on étudie l'écoulement du polymère dans la zone de pompage et dans la matrice ou est à l'état fondu (liquide). Les caractéristiques de ce matériau à l'état fondu sont :

Masse volumique à l'état fondu	$\rho=760\text{kg/m}^3$
L'indice du coefficient de la loi de puissance	$n=0.70$
Viscosité pour un taux cisaillement égal à zéro.	$\mu_0=85000\text{Pa.s}$
Temps normal	$\lambda=0.20\text{ s}$

**Tableau 2.1:** Caractéristiques du polymère LDPE (Prasad 1999)

## 2.3 Equation régissantes de fluide non newtonien

### 2.3.1 Équation de Navier- stokes

Ces équations sont présentées sous la forme d'équations aux dérivées partielles permettant de déterminer l'évolution, à partir des conditions initiales données, du champ de vitesse et de pression.

#### 2.3.1.2 Equation de Bilan de Matière

L'équation de bilan de matière, également désignée sous le nom de l'équation de continuité, est simplement une formulation du principe de la conservation de la masse est donnée pour un fluide sous la forme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad 2.1$$

Pour le cas d'écoulement du polymère à travers la filière de l'extrudeuse le fluide est considéré comme u fluide incompressible, donc l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad 2.2$$

#### 2.3.1.3 Equation de quantité de mouvement :

Cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \rho \vec{v} + \left[ \nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v} \right] = -[\nabla \cdot \tilde{\pi}] + \rho \vec{g} \quad 2.3$$

Avec  $\pi$  est défini comme étant le tenseur des contraintes :

$$\tilde{\pi} = p\tilde{\delta} + \tilde{\tau} \quad 2.4$$

Où  $\tau$  est la contrainte dynamique ou supplémentaire lié à l'écoulement, P est une grandeur scalaire appelée "pression" et  $\delta$  est le tenseur d'unité (identité):

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Donc, l'équation de quantité de mouvement sera :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \left[ \nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v} \right] = -\nabla p - \left[ \nabla \cdot \vec{\tau} \right] + \rho \vec{g} \quad 2.6$$

Les composantes de l'équation de mouvement dans des coordonnées cartésiennes peuvent s'écrire :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad 2.7$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad 2.8$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad 2.9$$

Dans les systèmes d'écoulement de polymère, les forces d'inertie et de corps sont généralement négligeables en comparaison aux efforts visqueux. Par suite les équations de quantité de mouvement sont données par:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad 2.10$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad 2.11$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad 2.12$$

## 2.4 Rhéologie du polymère

Les polymères sont connus pour leur comportement rhéologique complexe. Pour les écoulements isothermes, la viscosité reste une fonction de la vitesse de cisaillement. Selon la littérature, un grand nombre de lois classiques permettant de décrire les comportements rhéologiques des polymères sont donnés. La loi constitutive pour les fluides Newtoniens généralisés utilisée dans cette étude (Nassehi 2002).

$$\tilde{\tau} = 2\mu D \quad 2.13$$

Où:  $D$  est le tenseur de taux de déformation défini comme suit :

$$D_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 2.14$$

Avec  $x_i$  est la composante cartésienne suivant la direction  $i$  ; tandis que  $u_i$  est la composante du vecteur vitesse suivant la direction  $i$ .

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

D'autre part,  $\mu$  est la viscosité apparente qui peut être une fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , la température  $T$ , ou les deux à la fois. Le taux local de cisaillement :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2tr(D^2)} \quad 2.16$$

Où  $tr$  signifie la trace de la matrice.

Dans un écoulement simple de cisaillement,  $\dot{\gamma}$  réduit au gradient de vitesse.

Plusieurs lois de viscosité sont disponibles pour des écoulements newtoniens généralisés.

### 2.4.1 Viscosité Constante

Pour les fluides newtoniens, une viscosité constante peut être indiquée (Polyflow manual 2001).

$$\mu = \mu_0 \quad 2.17$$

Avec  $\mu_0$  est désignée sous le nom de la viscosité newtonienne.

### 2.4.2 Loi de puissance

La loi de puissance pour la viscosité est de la forme suivante (Polyflow manual 2001):

$$\mu = K(\lambda \dot{\gamma})^{n-1} \quad 2.18$$

Où:  $K$  est le facteur d'uniformité,  $\lambda$  est le temps normal, et  $n$  sont l'indice de la loi de puissance, qui est une propriété du matériel donné.

La loi de puissance est généralement employée pour décrire le comportement visqueux de matériaux polymères, tels que le polyéthylène, elle varie en fonction du cisaillement.

Si le comportement à la base cisaillement évalue les besoins d'être adapté bien, la loi Carreau (2002) ou de croix capturera la zone de plateau de la courbe de viscosité pour le bas taux cisaillement évalue mieux que la loi de puissance.

### 2.4.3 Loi Bird-Carreau

La loi d'Oiseau Carreau pour la viscosité est (Polyflow manual 2001) :

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad 2.19$$

$\mu_\infty$  : Viscosité pour un taux cisaillement à l'infinité.

$\mu_0$  : Viscosité pour un taux cisaillement égal à zéro.

$\lambda$  : Temps normal (c.-à-d., l'inverse du taux de cisaillement pour le quel le fluide change son comportement newtonien à celui de la loi puissance).

$n$  : l'exposant de la loi de puissance.



La loi de Bird-Carreau est généralement utilisée quand il est nécessaire de décrire le comportement de viscosité pour les basses valeurs du taux cisaillement.

#### 2.4.4 Loi de Cross

Elle est définie comme suit (Polyflow manual 2001):

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^m} \quad 2.20$$

$\mu_0$ : Viscosité pour un taux cisaillement égal à zéro.

$\lambda$  : Temps normal (c à d, l'inverse du taux de cisaillement pour le quel le fluide change son comportement newtonien à celui de la loi puissance)

$m$ : l'exposant de la loi de puissance ( $m = 1 - n$  pour de grands taux de cisaillement).

Comme la loi de Carreau, la loi de Cross, est généralement utilisée quand il est nécessaire de décrire le comportement de viscosité pour les basses valeurs du taux cisaillement.

#### 2.4.5 Loi de Cross modifiée

$$\mu = \frac{\mu_0}{(1 + \lambda \dot{\gamma})^m} \quad 2.21$$

Cette loi peut être considérée un cas spécial de la viscosité de la loi Carreau-Yasuda (équation 3.22), où l'exposant " $a$ " à une valeur de 1 (Polyflow manual 2001).

#### 2.4.6 Loi de Bingham

La loi de Bingham pour la viscosité est (Polyflow manual 2001) :

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{pour } \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_c \\ \mu_0 + \tau_0 \frac{(2 - \dot{\gamma} / \dot{\gamma}_c)}{\dot{\gamma}_c} & \text{pour } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad 2.22$$

Où  $\tau_0$  est la contrainte seuil et  $\dot{\gamma}_c$  est le taux de cisaillement critique pour lequel l'équation constitutive de Bingham est appliquée. Pour des taux de cisaillement inférieur  $\dot{\gamma}_c$ , le comportement du fluide est normalisé afin de garantir une continuité pour la courbe de viscosité.

La loi de Bingham est généralement employée pour décrire des matériaux tels que le béton, la boue, la pâte, et la pâte dentifrice.

#### 2.4.7 Loi de Bingham modifiée

Ce modèle est formulé sous la forme (Polyflow manual 2001) :

$$\mu = \mu_0 + \tau_0 \left( \frac{1 - \exp(-m\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \right) \quad 2.23$$

Avec :  $m = 3 / \dot{\gamma}_c$

En comparaison avec la loi de Bingham standard le model modifié de Bingham est écrit sous une formulation analytique simple et qui donne une solution plus stable. La valeur de  $m = 3 / \dot{\gamma}_c$  est choisie pour que le model standard et le model modifié de Bingham se comportent de la même manière à partir de la valeur critique du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_c$ .

#### 2.4.8 Loi De Herschel-Bulkley

$$\mu = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \left( \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right)^{n-1} & \text{pour } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \\ \frac{\tau_0(2 - \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)}{\dot{\gamma}_c} + K \left[ (2-n) + (n-1) \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right] & \text{pour } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad 2.24$$

Où:  $\tau_0$  est la contrainte et  $\dot{\gamma}_c$  est le taux de cisaillement critique et  $K$  est le facteur d'uniformité,  $n$  : l'exposant de la loi de puissance.

La loi de Herschel-Bulkley Généralement utilisée comme la loi de Bingham (Polyflow manual 2001).

#### 2.4.9 Lois de Herschel-Bulkley modifiée

Ce modèle est formulé sous la forme (Polyflow manual 2001) :

$$\mu = \tau_0 \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-3\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)}{\dot{\gamma}} \right) + K \left( \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right)^{n-1} \quad 2.25$$

La loi de Bulkley est une expression analytique, qui signifie que ce peut être plus facile pour calculer en polyflow.

#### 2.4.10 Loi de Log Log

Ce modèle est formulé sous la forme :

$$\mu = \mu_0 10^{a_0 + a_1 [\text{Log}(\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_c)] + a_{11} [\text{Log}(\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_c)^2]} \quad 2.26$$

$a_0$ ,  $a_1$  et  $a_{11}$  être coefficient de l'expression de polymère.

Cette loi de viscosité est simplement empirique, mais fournit parfois aux données expérimentales que les autres (Polyflow manual 2001).

#### 2.4.11 Loi de Carreau-Yasuda

La loi de Carreau-Yasuda pour la viscosité est (Polyflow manual 2001) :

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad 2.27$$

La loi de Carreau-Yasuda est une légère variation sur la loi Bird-Carreau. L'addition de l'exposant à permettre de contrôler la transition du plateau newtonien à la région loi de puissance à la valeur basse ( $a < 1$ ) rallonge la transition, et une valeur élevée

( $a > 1$ ) résultats dans une transition brusque.

Ces modèles peuvent être combinés avec n'importe laquelle des lois suivantes de la dépendance de la température :

## 2.5. Etude de quelques grandeurs caractéristiques de l'écoulement

### 2.5.1 Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds permet de savoir le régime d'écoulement à savoir laminaire ou turbulent. Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. On considère que l'écoulement dans un canal est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 2000 (PUJOS 2006).

$$Re = \frac{\rho \cdot \bar{V} \cdot h}{\mu} \quad 2.28$$

### 2.5.2 Nombre de Stokes

Le nombre de Stokes permet d'avoir une idée de l'importance de la force de gravité par rapport aux contraintes de cisaillement dues à la viscosité de l'écoulement (PUJOS 2006).

$$St = \frac{\mu \cdot \bar{V}}{\rho \cdot g \cdot h^2} \quad 2.29$$

Si le nombre de Stokes est très supérieur à 1, donc les forces de la gravité sont négligeables devant les forces de contraintes visqueuses. Nous pouvons donc simplifier l'équation de Navier Stokes en supprimant le terme lié à la gravité.

## 2.6 Discrétisation par éléments finis

En absence de force de volume, l'équation de continuité et du mouvement représentant l'écoulement de Stokes dans un système de coordonnées cartésiennes bidimensionnelles s'écrivent:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.30)$$

L'équation du mouvement est de la forme:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.31a)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.31b)$$

Pour un fluide généralisé Newtonien, On a:

$$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.32a)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.32b)$$

$$\tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.32c)$$

Après substitution des équations (2.32) dans (2.31), on obtient:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (2.33a)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (2.33b)$$

On utilisant la méthode de Galerkin (2002), les équations (2.30) et (2.33) s'écrivent sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_e} N_i \left[ -\frac{\partial \sum_{i=1}^m M_i p_i}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j u_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \eta \left( \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j v_j}{\partial x} + \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j u_j}{\partial y} \right) \right] dxdy = 0 \\ \int_{\Omega_e} N_i \left[ \frac{\partial \sum_{i=1}^m M_i p_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \eta \left( \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j u_j}{\partial y} + \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j v_j}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \eta \left( \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j v_j}{\partial y} \right) \right] dxdy = 0 \\ \dots \int_{\Omega_e} M_i \left( \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j u_j}{\partial x} + \frac{\partial \sum_{j=1}^n N_j v_j}{\partial y} \right) dxdy = 0 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

L'équation (2.34), présente une discrétisation par éléments finis de la vitesse et de la pression, elle est basée sur les différentes fonctions de formes ( $N_j$   $j=1, n$  et  $M_l$   $l=1, m < n$ ). Après application du théorème de Green (1973) aux dérivées deuxième de la vitesse et les termes de la pression, on obtient un système d'équations algébriques d'écrit ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} A_{ij}^{11} & A_{ij}^{12} & A_{il}^{13} \\ A_{ij}^{21} & A_{ij}^{22} & A_{il}^{23} \\ A_{ij}^{31} & A_{ij}^{32} & A_{il}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ p_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_j^1 \\ B_j^2 \\ B_l^3 \end{Bmatrix}$$

$$A_{ij}^{11} = \int_{\Omega_e} \left( 2\eta \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \eta \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.35a)$$

$$A_{ij}^{12} = \int_{\Omega_e} \left( \eta \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx dy \quad (2.35b)$$

$$A_{il}^{13} = - \int_{\Omega_e} \left( M_l \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) dx dy \quad (2.35c)$$

$$A_{ij}^{21} = \int_{\Omega_e} \left( \eta \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.35d)$$

$$A_{ij}^{22} = \int_{\Omega_e} \left( \eta \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.35e)$$

$$A_{il}^{23} = - \int_{\Omega_e} \left( M_l \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.35f)$$

$$A_{lj}^{31} = - \int_{\Omega_e} \left( M_l \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx dy \quad (2.35g)$$

$$A_{lj}^{32} = - \int_{\Omega_e} \left( M_l \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.35h)$$

$$A_{ll}^{33} = 0 \quad (2.35i)$$

$$B_j^1 = \int_{\Gamma_e} N_i \left[ \left( -p^e + 2\eta \frac{\partial u^e}{\partial x} \right) n_x + \eta \left( \frac{\partial u^e}{\partial y} + \frac{\partial v^e}{\partial x} \right) n_y \right] d\Gamma_e \quad (2.35j)$$

$$B_j^2 = \int_{\Gamma_e} N_i \left[ \eta \left( \frac{\partial u^e}{\partial y} + \frac{\partial v^e}{\partial x} \right) n_x + \left( -p^e + 2\eta \frac{\partial v^e}{\partial y} \right) n_y \right] d\Gamma_e \quad (2.35k)$$

$$B_l^3 = 0 \quad (2.35l)$$

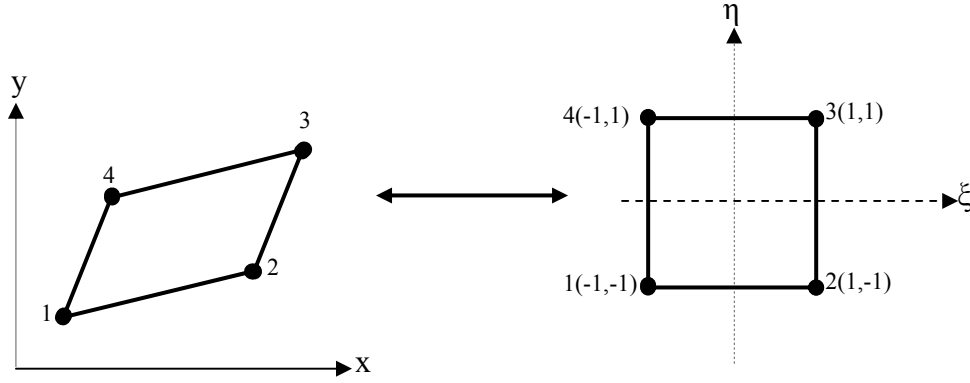
Pour un élément isoparamétrique,  $m=n$ , les fonctions de forme pour un élément quadratique à 4 nœuds s'écrivent sous la forme:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (2.36a)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (2.36b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (2.36c)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (2.36d)$$



**Figure (2.3):** Élément isoparamétrique quadratique à 4 nœuds

Pour calculer la matrice  $A$  et le vecteur  $b$ , on utilise l'intégration numérique de Gauss (1984). Pour le calcul des dérivées des fonctions de formes dans un système de coordonnées cartésien, on utilise la matrice Jacobienne donnée par l'équation suivante :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$A_{ij}^{11} = \int_{\Omega} \left( 2\eta \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \eta \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r W_i W_j \det|J| d\xi d\eta$$

Avec  $W_i$  et  $W_j$  sont les fonctions poids

$r$  est le nombre de points d'intégration numérique, pour un élément quadratique, le nombre  $r$  est égal à 4.

Calcul des dérivées des fonctions par rapport aux coordonnées iso paramétriques.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.37a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.37b)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$J$  est la matrice Jacobienne de transformation de coordonnées.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Les dérivées globales des fonctions peuvent être reliées aux dérivées locales des fonctions de formes sous la forme suivante :



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta) u_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^r N_i(\xi, \eta) u_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

### 2.6.1 Intégration numérique :

La solution par éléments finis des équations différentielles exige l'intégration des fonctions sur le domaine de l'élément. Le calcul des intégrales par la méthode analytique n'est pas pratique. Cependant, la majorité des cas, utilise l'intégration numérique de Gauss (1984).

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r G(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \det|J| d\xi d\eta \quad (2.39)$$

Où:  $\det|J|$  est le déterminant de la matrice Jacobienne.

$W_i, W_j$  sont les poids d'intégration.

Les coordonnées cartésiennes s'écrivent en fonction des fonctions d'interpolation sous la forme suivante :

$$x = \sum_{i=1}^p N_i(\xi_i, \eta_i) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^p N_i(\xi_i, \eta_i) y_i$$

$P$  est le nombre de nœud par élément.

r	$\xi_i$	$W_i$
1	0	2
2	$\pm(\frac{1}{\sqrt{3}})$	1
3	0	0.8888
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	0.55555
4	$\pm 0.33998$	0.65214
	$\pm 0.86113$	0.34785

**Tableau 2.2** : Poids et points d'intégration numériques

## **2.7 Conclusion**

Ce chapitre traite la formulation mathématique des équations de Navier Stokes et les diverses lois rhéologiques d'écoulement des polymères. Les équations de continuité et l'équation du mouvement ont été discrétisées par la méthode des éléments finis. L'élément rectangulaire quadratique à quatre nœuds a été utilisé. L'intégration numérique de Gauss bidimensionnelle a été employée pour le calcul des éléments des matrices et les vecteurs charges.