REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

THESE DE DOCTORAT LMD

=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Option : Optimisation, Ondelette et Calcul Fractionnaire.

Intitulé

Intégrales et Dérivées d'Ordre Arbitraire

Présentée par : **Louiza TABHARIT**

Soutenue le :

Composition du Jury

Président	:	Benharrat BELAIDI	Prof. Université de Mostaganem
Examinateur	:	Abdelkader SENOUCI	Prof. Université de Tiaret
Examinateur	:	Berrabah BENDOUKHA	Prof. Université de Naama
Co-directeur	:	Mohand OULD ALI	MCA. Université de Mostaganem
Directeur	:	Zoubir DAHMANI	Prof. Université de Mostaganem

Année Universitaire : **2015 – 2016** .

Remerciements

بسم الله الرحمن الرحيم

*J'aimerais en premier lieu remercier **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, le professeur Zoubir DAHMANI pour l'aide compétente qu'il m'a apportée, pour sa patience et son encouragement à finir un travail commencé il y a 4 ans. Je lui suis également reconnaissante pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrant de thèse, M. Mohand OULD ALI, pour son attention sur mes travaux.

Je remercie également M. Benharrat BELAIDI Professeur à l'université de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

De même je remercie M. Abdelkader SNOUCI, Professeur à l'université de Tiaret d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Qu'il trouve ici mon profond respect.

Mes remerciements vont à M. Berrabah BENDOUKHA, Professeur à l'université de Naama qui fera l'honneur de juger ce travail.

Enfin, je remercie mes parents ainsi que mes soeurs et mon frère pour leur soutien au cours de toutes ces années.

Résumé

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser aux intégrales et aux dérivées d'ordre non entier. Après avoir rappelé les différentes approches fractionnaires qui existent, nous étudions un problème aux limites d'ordre fractionnaire assez élevé avec conditions intégrales de type *Riemann-Liouville*.

Nous nous intéressons ensuite aux systèmes différentiels selon l'approche de Caputo avec et /ou sans conditions de *Riemann-Liouville*. Nous étudions une première classe de systèmes dont le second membre contient des dérivées de Caputo.

La représentation intégrale ainsi que l'existence et l'unicité sont étudiés et bien illustrés dans cette partie. Un autre problème, relativement complexe, sera aussi traité ; il s'agit de systèmes fractionnaires d'ordre assez élevé dont les nonlinéarités des seconds membres généralisent le travail précédent.

Une autre piste de recherche, qui semble absente des intérêt des chercheurs de ce domaine, sera aussi explorée dans cette thèse, nous traitons une classe de systèmes différentiels telle que les second membres contiennent une infinité de termes liés aux non linéarités. La théorie des points fixes et d'autres outils du calcul fractionnaire et de l'analyse fonctionnelle seront appliqués pour les démonstrations de nos résultats.

Abstract

In this thesis, we are concerned with integrals and derivaitves of arbitrary order. We begin by studing a boundary value problem of fractional order derivaitve in the sens of Caputo such that its initiale conditions contain some RL integrals.

Then, we investigate the differential systems using Caputo approch in the case where the conditions may contain some RL integrals. We present recent results for some high order differential systems with nonlinearities that contain some derivatives in the sens of Caputo combined with some other conditions.

Another important class of problems will be studied in this project. This class involves infinite terms of nonlinearities. The fixed point theory, the fractional calculus and some technics of functional analysis are used to prove our main results.

Table des matières

Introduction

"*Can the meaning of derivatives with integer order be generalized to derivatives with non-integer order?*", était la question clé posée en 1695 par *Gottfried Leibniz* [40] à *l'Hôpital*, ce dernier a répondu le 30 septembre 1695, par une autre s'intérogeant sur la possibilité que la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ d'une fonction peut avoir un sens mathématique. Ainsi, le calcul fractionnaire marque son début par quelques travaux de *G. W. Leibniz* et *Leonhard Euler.* Dès lors, motivé par cette initiative un grand nombre de mathématiciens, physiciens et ingénieurs a contribué au dévellopement de ce champs de recherche [47], nous pouvons citer : *N. H. Abel* (1832), *M. A. Al-Bassam* (1963), *J. Cross, H. T. Davis* (1936), *M. M. Djrbashjan, A. Erdélyi* (1940), *W. Feller* (1955), *J. B. J. Fourrier* (1821) , *A. Gemant* (1946), *A. N. Gerasimov, G. H. Hardy*(1903), *O. Heariside* et *S. F. Lacroix* (1918). De nombreuses définitions du concept de la dérivée non entière ont coexisté, suite aux travaux de *J. Liouville* (1832) et *B. Riemann* (1847) .

En 1819, le mathématicien français *S. F. Lacroix* [38] publie l'article intitulé "*Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Integral* ", où il trouve la dérivée d'ordre m de $y = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}.$$

Puis, en utilisant la fonction *Gamma* Γ et en remplaçant m par $\frac{1}{2}$ et n par n'importe quel entier positif a, il obtient la formule :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}},$$

qui représente l'expression de la dérivée non entière d'ordre un demi de la fonction x^n. Comme exemple, *Lacroix* calcule la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction $y = x$, il obtient

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},$$

ce résultat est obtenu aussi par la définiton de *Riemann-Liouville* utilisée actuellement.

En 1832, *N. H. Abel* [3] applique le Calcul Fractionnaire pour la résolution d'une équation intégrale dans un problème dit "Tautochrone" modélisant la trajectoire nommée aussi "Cycloïde" d'une masse glissante sous l'influence uniforme de la gravité jusqu'à son point le plus bas. La solution d'Abel a attiré l'attention de Liouville qui a fait le premier grand pas en introduisant une définition logique de la dérivée d'ordre non entier. Il publie trois longs mémoires en 1832 [42] .

Entre 1835 et 1850, une controverse consernait deux différentes définitions de la dérivées d'ordre arbitraire, *George Peacock* [63] favorisait la généralisation de *Lacroix*, autres mathématiciens favorisaient la définition de *Liouville*, alors que *Augustus De Morgan* [63] déclare que les deux versions peuvent être très probablement partie d'un système plus général. Mais, en 1850, *William Center* [63] observe que la différence entre les deux formule est égale à la dérivée fractionnaire d'une constante. Selon la version de *Peacock-Lacroix* la dérivée non entière d'une constante donne un résultat différent de zéro, contrairement à celle de *Liouville* qui montre que la dérivée d'une constante s'annulle car $\Gamma(0) = \infty$.

L'absence d'une interprétation géométrique ou physique a fait que cette théorie reste dans l'ombre durant le $XVIII^{ème}$ et $XIX^{ème}$ siècle. Pour plus de détails historique nous invitons les lecteurs à consulter les références suivantes :[19, 20, 62, 66, 58] .

Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul fractionnaire est redevenu un sujet d'études dans la deuxième moitié du $XX^{ème}$ siècle. De nouvelles recherches sont lancées par les grands fondateurs de cette théorie, tels que : *J. E. Littlewood*, *E. R. Love* [45], *P. A. Nekrasov* (1888), *Y. N. Rabotnov, M. Riesz, B. Ross, G. W. Scott-Blair, G. E. Shilov, I. N. Sneddon* (1967), *D. V. Widder, K. Nishimoto* [53].

L'organisation des conférences et des colloques internationaux participait à attirer l'attention de nouveaux chercheurs partout dans le monde. Cette modeste idée de *Leibniz* prend petit à petit du poids et manifèste, de façons croissante, son intérêt aussi par : le nombre d'articles publiés, les revues spécialisées et les phénomènes faisant appels au calcul fractionnaire.

Le calcul fractionnaire a été longtemps considéré comme une question de mathématiques pûres sans intérêt pour les ingénieurs contrairement à ce qu'on voit durant ces trois dernières décenies, la modélisation fractionnaire a suscité l'intérêt de la communauté scientifique qui a compris l'importance des *Equations Différentielles Fractionnaires* (EDF) décrivant des processus chimiques, physiques, econnomiques, éléctromagnétiques et dans les sciences des matériaux [49] . Aussi, il y a eu plusieurs ouvrages fondamentaux sur les dérivées et les équations différentielles fractionnaires, écrits par : *Oldham et Spanier* [56], *Miller et Ross* [52], *Samko et al.* [65], *Podlubny* [60] ; *Kilbas, Srivestava et Trujillo* [36].

L'existence et l'unicité des solutions des EDFs constitue un grand champs d'investigation étudié par des méthodes de résolutions analytiques faisant intervenir la fonction fractionnaire de Green, les transformées de Mellin, Laplace et celle de Fourrier. Des méthodes basées sur la formule intégrale de Laguerre, les polynômes orthogonaux et la méthode symbolique de Babenko. Mais, ces méthodes calculent des solutions approximatives seulement, ce qui mène à chercher des méthodes numériques avec plus de précision telles que : l'approche matricielle, les formules quadratiques, le principe de la mémoire courte, la solution directe basée sur l'approximation de Grünwald-Letnikov.

La méthode de décomposition ADM, introduite par *Adomian* en 1980, fournit une procédure efficace pour trouver des solutions explicites et numériques d'une catégorie plus large et générale de systèmes différentiels représentant des problèmes physiques réels. Cette méthode [4] fonctionne efficacement pour : les problèmes aux limites, les équations linéaires et non-linéaires, pour les équations différentielles partielles comme pour les équations différentielles ordinaires. De manière similaire, une résolution d'équations différentielles fractionnaires moyennant ADM a été développée et utilisée dans de nombreux travaux [15, 24, 34].

Les systèmes différentiels d'ordres fractionnaires (SEDFs) sont des systèmes décrits par des équations différentielles d'ordre non entier, des équations intégrales fractionnaires ou les deux en même temps. Dans toutes les sciences appliquées, il est souvent nécéssaire de décrire le comportement d'un système par un modèle mathématique. Ainsi, ces systèmes sont utilisés dans la rheologie, la biologie quantitative , la diffusion, la théorie du transport, les probabilités, l'élasticité, l'analyse seismique, la théorie de contrôl et le robotique...etc. Nos lecteurs peuvent trouver des études intéréssantes dans ce sens dans les publications suivante : [14, 23, 30, 32, 37, 41, 44, 46, 48, 51, 59].

Organisation de la thèse

Cette thèse se compose d'une introduction, de quatre chapitres et d'une conclusion avec quelques perspectives.

Le **Chapitre 1** comporte quelques notions de base. Nous commençons par donner les notations d'ensembles, fonctions, opérateurs et espaces utilisés dans ce manuscrit, ainsi qu'un rappel sur les fonctions essentielles du calcul fractionnaire. Aussi, Nous introduisons les définitions existantes dans la littérature de l'intégration d'ordre non entier, suivies par quelques propriétés de l'intégrale arbitraire de Riemann-Liouville.

La seconde partie est consacrée aux dérivées fractionnaires. Nous introduisons d'abord l'approche de Grünwal-Letnikov qui est basée sur la définition de la dérivée d'ordre entier. Puis, nous définissons la dérivée au sens de Riemann-Liouville pour un ordre réel strictement positif.

Ce chapitre se termine par : des petits rappels sur la dérivée arbitraire de Caputo.

Dans le **Chapitre 2,** nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions à dérivée et intégrale ordinnaires, après avoir cité quelques définitions, lemmes et théorèmes mis en oeuvre pour cette étude.

Le **Chapitre 3** a pour objectif l'étude des systèmes différentiels d'ordres arbitraires. Dans la première section, nous présenterons un système couplé à deux équations différentiels faisant intervenir des dérivées de type Caputo et une condition intégrale classique. Ce chapitre porte aussi sur un autre problème différentiel à m composantes avec des linéarités un peu compliquées vu l'ordre des dérivées $(\gamma_i)_{i=\overline{1,m}}$ et les conditions initiales non nulles de type Riemann-Liouville.

Le **Chapitre 4** porte sur une nouvelle classe d'équations différentielles fractionaires impliquants des suites convergentes. Dans ce sens, nous évaluerons une étude d'éxistence et unicité de la solution.

Chapitre 1

INTEGRALES ET DERIVEES FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous présenterons des rappels nécessaires. La deuxième section introduit deux fonctions de base pour le calcul fractionnaire ainsi que leurs propriétés. Par la suite, quelques définitions de l'intégration non entière serons considérés. Le chapitre se termine par des exemples d'applications.

1.1 Espaces Fonctionnels et Notations

Nous désignons par :

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$: $\mathbb{N} - \{0\}$.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\|.\|_\infty$: Norme infinie, $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$.

$\|.\|_E$: Norme de l'espace de Banach E.

J_a^α : Intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville.

D_a^α : Dérivée fractionnaire à gauche au sens Caputo.

D_{RL}^α : Dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville.

$\Gamma(.)$: La fonction Gamma d'Euler.

$B(.,.)$: La fonction Bêta d'Euler.

$L^1[a,b]$: Espace des fonctions intégrables sur $[a,b]$. i.e $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$.

$C([a,b],\mathbb{R})$: Espace de Banach des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie .

C_μ : Espace des fonctions continues avec poids. On dit que $f \in C_\mu([a,b])$ si : $\exists s > \mu$, $f(x) = x^s g(x)$, *où* $g \in C([a,b])$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

C_μ^n : Espace de Banach de toutes les fonctions continues différentiables à l'ordre n-1 sur $[a,b]$. On dit que $f \in C_\mu^n([a,b])$ si $f^{(n)} \in C_\mu([a,b])$ avec $n \in \mathbb{N}$.

BVP : Boundray Value Problem (Problème aux limites).

EDF : Equation Différentielle Fractionnaire.

$SEDF$: Système d'Equations Différentielles Fractionnaires.

1.2 Fonctions Spéciales du Calcul Fractionnaire

Dans cette section, nous exposons deux fonctions principales pour le calcul non entier. Nous définissons la fonction Gamma et Bêta d'Euler, puis nous introduisons quelques propriétés liées à ces fonctions.

1.2.1 Fonction Gamma

En 1729, *Euler* publie *Institutionum calculi integralis* étudiant la fonction gamma, qu'il note Π (la notation Γ est dûe à Legendre) . Permetant à n de prendre des valeurs non entières dans $(n!)$, la fonction Gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée. Il l'introduit par la forme intégrale suivante [25] :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \ \ \alpha > 0 \ . \tag{1.1}$$

Proporiétés de la fonction Gamma :

Proposition 1.1 *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, \ -1, \ -2, ...\}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

(i)

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \ , \tag{1.2}$$

(ii)

$$\Gamma(\alpha+n)=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha)\ , \tag{1.3}$$

(iii)

$$\Gamma(n)=(n-1)!\ ,\ n\geq 1. \tag{1.4}$$

Preuve.

$\circ$**Propriété** (i) : La démonstration de cette propriété se fait par une simple intégration par partie de l'intégrale qui définit $\Gamma(\alpha)$. nous avons

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du,\\ &= \left[\frac{e^{-u}u^{\alpha}}{\alpha}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha}du,\\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1).\end{aligned}$$

D'où la formule (1.2) .

$\circ$**Propriété** (ii) : nous savons que

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1),\\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)\right],\\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+2}\Gamma(\alpha+3)\right].\end{aligned}$$

En répétant le processus n fois, nous obtenons la relation suivante :

$$\Gamma(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\frac{1}{\alpha+3}\cdots\frac{1}{\alpha+n-1}\Gamma(\alpha+n).$$

Ce qui achève la démonstration de (1.3) .

$\circ$**Propriété** (iii) : Pour prouver que $\Gamma(n)=(n-1)!$, nous utilisons la récurrence.
-Pour $n=1$ nous avons :

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{1-1}du=1=0!.$$

-Supposons que $\Gamma(n)=(n-1)!$.
-Montrons que la propriété est vraie pour l'ordre $n+1$, d'après la **Propriété** (i) , nous avons

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\\ &= n(n-1)!\\ &= (n)!.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est démontrée. ■

Quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$

* $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{1-1} du = 1.$

* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$, (intégrale de Gauss).

* $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!}\sqrt{\pi}.$

1.2.2 Fonction Bêta

Cette fonction est l'un des outils essentiels du calcul fractionnaire. Définie pour tous nombres réels strictement positifs α et β, la fonction Bêta a été étudiée par Euler et Legendre et doit son nom à *Jacques Binet.*

Définition 1.1 [25] *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \ \ \alpha > 0, \ \ \beta > 0 \ . \tag{1.5}$$

Propriétés de la fonction Bêta

Proposition 1.2 *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, nous avons :*

(i)

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha) \ , \tag{1.6}$$

(ii)

$$B(\alpha, \beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta) \ , \tag{1.7}$$

(iii)

$$B(\alpha, \alpha) = 2^{1-2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) \ . \tag{1.8}$$

(iv) *La fonction Bêta est liée à Gamma par la relation suivante :*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \ \ \forall \alpha, \ \ \beta; \ \ \alpha > 0, \ \ \beta > 0 \ . \tag{1.9}$$

Preuve.

$\circ$**Propriété** *(i)* : En utilisant le changement de variable $u = 1 - t$, nous aurons (1.6).

$\circ$**Propriété** *(iv)* : Par définition, nous avons :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{\alpha-1} dv$$

En posant $(u, v) = (rs, r(1-s))$, dont la matrice jacobienne est $J = \begin{pmatrix} s & r \\ 1-s & -r \end{pmatrix}$ et le jacobien en valeur absolue est égal à r, alors $dudv = rdrds$. Puis, en appliquant le théorème de Fubini nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{\alpha+\beta-1} dr \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds \\ &= \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

1.3 Intégration d'Ordre Arbitraire

1.3.1 Définitions Existantes dans la Littérature

L'intégration usuelle a été généralisée à l'ordre non entier par plusieurs mathématiciens, d'où l'existence de différentes définitions de l'intégrale fractionnaire, à titre d'exemple nous citons [11, 61] :

N.H. Abel (1823 – 1826) introduit l'intégrale d'ordre α, en considérant la fonction :

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{s'(\eta)\, d\eta}{(x-\eta)^{\alpha}}, \alpha > 0, x > 0$$

par

$$s(x) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \tfrac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \psi(x) \;.$$

J. Liouville (1832 – 1855) définit l'intégrale fractionnaire d'ordre μ de la fonction $\varphi(x)$ par :

$$\int^{\mu} \varphi(x)\, dx^{\mu} = \tfrac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{x} (x-\tau)^{\mu-1} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

$$\int^{\mu} \varphi(x)\, dx^{\mu} = \tfrac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)} \int_{x}^{\infty} (\tau-x)^{\mu-1} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

G.F.B. Riemann (1847 – 1876) : A partir d'une généralisation de la formule Taylor, Riemann propose l'intégrale fractionnaire suivante :

$$D^{-\upsilon} f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\upsilon-1} f(t) dt + \phi(x) \;;$$

où $\phi(x)$ est une "fonction complémentaire" figurant, en fait, dans ses travaux ultérieurs.

H. Weyl (1885 – 1955) définit l'opérateur d'intégration d'ordre réel positif α par :

$${}_{x}W_{\infty}^{\alpha} f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \;.$$

1.3.2 Intégrale de Riemann-Liouville

La définition de *Riemann-Liouville* est la plus courante et se fait en remplaçant la factorielle dans la formule intégration successive de *Cauchy* par la fonction Gamma et l'entier n par le réel positif α. La formule de Cauchy $(1789 - 1857)$ est obtenue comme suit :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, notons : $J^1 f(x) = \int_a^x f(\tau)\,d\tau$ (une primitive d'ordre 1 de f).

Une double intégration donne :

$$J^2 f(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(\tau)\,d\tau \right) dt = \int_a^x (x-t)\, f(t)\,dt \ . \tag{1.10}$$

En répétant le processus $(n-1)$ fois, nous obtenons la relation classique suivante :

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \ , n \geq 1. \tag{1.11}$$

Ainsi,

$$J^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \ . \tag{1.12}$$

Et pour un ordre plus général α, nous avons la définition suivante :

Définition 1.2 [39] *L'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction $f \in C_\mu([a,b])$, $(\mu \geq -1)$ est défini par :*

$$\begin{cases} J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt; \ \ \alpha > 0, \\ \\ J_a^0 [f(x)] = f(x). \end{cases} \tag{1.13}$$

Remarque 1.1 *Dans la formule* (1.13) :
1. En prennant $a = 0$, J_a^α sera notée J^α.

2. En remplaçant a par $-\infty$, nous récupérons l'intégrale non entière de Liouville et J_a^α sera donc $J_{-\infty}^\alpha$.

1.3.3 Quelques Propriétés et Exemples

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés liées à l'intégrale fractionnaire au sens de R-L qui serons suivies par des exemples explicatifs.

Proposition 1.3 *Soit une fonction continue* $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, *pour tout* $x \in [a, b]$ *nous avons :*

(i)

$$J^{\alpha}[af(x) + bg(x)] = aJ^{\alpha}f(x) + bJ^{\alpha}g(x) \ , \tag{1.14}$$

(ii)

$$J^{\alpha}x^{\beta} = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}, \beta > -1, \tag{1.15}$$

(iii)

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(x) = J^{\beta}J^{\alpha}f(x) = J^{\alpha+\beta}f(x) \ . \tag{1.16}$$

Preuve. ◦ **Propriété** (ii) : Par définition nous avons :

$$\begin{aligned} J^{\alpha}x^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\beta}dt, \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^{\beta}dt. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Posons $t = xu$ où $dt = xdu$, alors :

$$\begin{aligned} J^{\alpha}x^{\beta} &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\beta+1}u^{\beta}du, \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta}du, \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha, \beta+1), \end{aligned} \tag{1.18}$$

en utilisant la relation (1.9), nous obtenons (1.15).

◦ **Propriété** (iii) : En appliquant la définition 1.2, nous avons

$$\begin{aligned} J^{\alpha}J^{\beta}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} J^{\beta}f(t)\,dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x\int_0^t (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\,d\tau dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(\tau)\left[\int_{\tau}^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}dt\right]d\tau. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Posons $t - \tau = u(x - \tau)$, alors $dt = (x - \tau)\,du$

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}J^{\beta}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(\tau)\left[\int_0^1 (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du\right]d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\,d\tau \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du, \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\,d\tau. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Par la relation (1.9), nous obtenons

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}J^{\beta}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\,d\tau, \\
&= J^{\alpha+\beta}f(x). \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Puis,

$$J^{\alpha+\beta}f(x) = J^{\beta+\alpha}f(x) = J^{\beta}J^{\alpha}f(x), \qquad (1.22)$$

ce qui achève la démonstration.

Exemple 1.1 *Calculons l'intégrale au sens de R-L d'ordre* $\frac{3}{4}$ *de la fonction* $f(x) = (x-2)^{\sqrt{5}}$. ▌
Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
J^{\frac{3}{4}}f(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\int_0^x (x-t)^{\frac{3}{4}-1}(t-2)^{\sqrt{5}}\,dt, \\
&= \frac{x^{\frac{-1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}(t-2)^{\sqrt{5}}\,dt. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$J^{\frac{3}{4}}(x-2)^{\sqrt{5}} = \frac{\Gamma\left(\sqrt{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\sqrt{5}\right)}(x-2)^{\frac{3}{4}+\sqrt{5}}.$$

Exemple 1.2 *Maintenant, nous allons calculer la double intégration suivante :* $J^{\frac{5}{2}}J^{\frac{3}{4}}(x-2)^{\sqrt{5}}$. ▌
De l'exemple précédent on a :

$$J^{\frac{3}{4}}(x-2)^{\sqrt{5}} = \frac{\Gamma\left(\sqrt{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\sqrt{5}\right)}(x-2)^{\frac{3}{4}+\sqrt{5}}.$$

En appliquant la propriété (ii), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
J^{\frac{5}{2}}J^{\frac{3}{4}}(x-2)^{\sqrt{5}} &= \frac{\Gamma\left(\sqrt{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\sqrt{5}\right)}J^{\frac{5}{2}}(x-2)^{\frac{3}{4}+\sqrt{5}}, \\
&= \frac{\Gamma\left(\sqrt{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\sqrt{5}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\sqrt{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}+\sqrt{5}\right)}(x-2)^{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left[\Gamma\left(\sqrt{5}+1\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\sqrt{5}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}+\sqrt{5}\right)}(x-2)^{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}+\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.9) , *nous pouvons écrire :*

$$\begin{aligned}
J^{\frac{5}{2}}J^{\frac{3}{4}}(x-2)^{\sqrt{5}} &= \frac{\Gamma\left(\sqrt{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{4}+\sqrt{5}\right)}(x-2)^{\frac{13}{4}+\sqrt{5}} \\
&= J^{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}}(x-2)^{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

■

1.4 Dérivées d'Ordre Non Entier

Introduction

La dérivation "opérateur inverse" de l'intégrale, peut être considérée comme une intégrale d'ordre "*moins un*". Dans cette partie, nous exposerons l'existence de l'équivalent en calcul fractionnaire. La notion de dérivée d'ordre non entier est trop ancienne, de grands pionniers des mathématiques ont essayé de lever les ambiguïtés qui entourent ce concept.

Nous entamons ce chapitre par l'introduction des 3 célèbres approches de la dérivée fractionnaire : l'approche de *Grünwald-Letnikov* (1868), de *Riemann-Liouville* (1847) et enfin celle de *Caputo* (1967).

1.4.1 Dérivée Fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Cette approche s'appuie sur la définition de la dérivée d'ordre entier. Considérons une fonction continue f. La dérivée d'ordre 1 de f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \tag{1.24}$$

En appliquant cette définition une seconde fois, nous récupèrons :

$$\begin{aligned}
f^{''}(x) &= \frac{df'}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x)-f(x-h)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}. \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

De (1.24) et (1.25) , nous avons :

$$f^{(3)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-3f(x-h)+3f(x-2h)-f(x-3h)}{h^3}. \qquad (1.26)$$

Pour un ordre non nul n, nous obtenons :

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_i^n f(x-ih), \qquad (1.27)$$

où $C_i^n = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, alors $(-1)^i C_i^n$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$(-1)^i C_i^n = \frac{-n(1-n)(2-n)\cdots(i-n-1)}{i!}. \qquad (1.28)$$

Pour le passage au cas fractionnaire, *A.K. Grünwald* $(1838-1920)$ et *A.V. Letnikov* $(1837-1888)$ remplacent n par un ordre arbitraire $\alpha\in\mathbb{R}$, ainsi (1.28) devient :

$$\frac{-n(1-n)(2-n)\cdots(i-n-1)}{i!} = \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-\alpha)}. \qquad (1.29)$$

D'où la définition suivante :

Définition 1.3 [25] *Pour toute fonction $f\in C^{m+1}([a,b])$ où $m<\alpha<m+1$, la dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction f au sens de Grünwald-Letnikov est définie par :*

$$G^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-\alpha)}f(x-ih). \qquad (1.30)$$

Définition 1.4 [25] *Une intégration par partie de la formule* (1.30) *donne :*

$$G^{\alpha}f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(x-a)^{i-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)}\int_{a}^{x}(x-a)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(t)\,dt. \quad (1.31)$$

(i) Si $f^{(i)}(a) = 0$ avec $i = 0, \cdots, l-1$, alors la dérivée non entière au sens de G-L, vérifie la propriété suivante :

$$G^{\alpha}G^{\beta}f(x) = G^{\beta}G^{\alpha}f(x) = G^{\alpha+\beta}f(x), \quad (1.32)$$

où $l = \max(m,n)$ telque $0 \leq m < \alpha < m+1$ et $0 \leq n < \beta < n+1$.

(ii) La composition avec la dérivée d'ordre entier n mène à l'expression suivante :

$$G^{\alpha}D^{n}f(x) = G^{\alpha+n}f(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha-n+1)}(x-a)^{i-\alpha-n}. \quad (1.33)$$

1.4.2 Dérivée Fractionnaire de Riemann-Liouville

L'approche de *B. Riemann* et *J. Liouville* de la dérivée fractionnaire est donnée par l'intégrale suivante :

[61] Soit une fonction $f \in C^{n+1}([0,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville de f est :

$$\begin{aligned} D_{RL}^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt,\ n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^*, \\ &= D^{n}J^{n-\alpha}f(x). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Proposition 1.4

- Composition intégrale/dérivée de R-L :

  (i) $D_{RL}^{\alpha}J^{\alpha}f(x) = f(x)$.

  (ii) $D_{RL}^{\beta}J^{\alpha}f(x) = D^{\beta-\alpha}f(x), \qquad \beta > \alpha.$

  (iii) $J^{\alpha}D_{RL}^{\alpha}f(x) \neq f(x)$.

- Composition avec la dérivée entière :

  (iv) $D^{n}D_{RL}^{\alpha}f(x) = D^{n+\alpha}f(x)$.

(v) $D_{RL}^{\alpha} D^{n} f(x) = D^{n+\alpha} f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha-n+1)} (x-a)^{i-\alpha-n}.$

∘ La propriété du semi-groupe n'est pas toujours vérifiée :

(vi) $D_{RL}^{\alpha} D_{RL}^{\beta} f(x) \neq D_{RL}^{\beta} D_{RL}^{\alpha} f(x) \neq D_{RL}^{\alpha+\beta} f(x).$

1.4.3 Dérivée Fractionnaire au Sens de Caputo

En 1967, *M. Caputo* introduit une nouvelle approche de dérivée d'ordre arbitraire $\alpha \geq 0$, voir [56].

Définition 1.5 *Soit* $f \in C_{-1}^{n}([0,b])$, $n \in \mathbb{N}^{*}$. *La dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha \geq 0$ *au sens de Caputo de la fonction* f *est féfinie comme suit :*

$$D^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt, & n-1 < \alpha < n, \\ \frac{d^{n}}{dt^{n}} f(x), & \alpha = n. \end{cases} \tag{1.35}$$

$$= J^{n-\alpha} D^{n} f(x).$$

Proposition 1.5 *Soit* $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ *et* $\alpha > 0$, *nous avons :*

(i) *La relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$D^{\alpha} f(x) = D_{RL}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}. \tag{1.36}$$

(ii) *Si* $f(x) = (x-a)^{p}$, *avec* $p > n-1$, *alors*

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha}, \qquad 0 \leq n-1 < \alpha < n.$$

(iii) *La dérivée de Caputo d'une constante est nulle.*

$$D^{\alpha} C = 0, C \in \mathbb{R}. \tag{1.37}$$

Chapitre 2

EQUATIONS AUX DERIVEES D'ORDRES ARBITRAIRES

2.1 Introduction

Avec le développement du calcul fractionnaire et ses applications dans différents domaines, une grande attention a été attribuée à l'étude des équations différentielles fractionnaires. Plus particulièrement, les mathématiciens se sont penchés sur l'étude de l'existence d'une solution d'un problème aux limites (BVP) en utilisant les théorèmes du point fixe, et les les inégalités fractionnaires. Les ouvrages de *Samko* et *al.* [65], de *Lakshmikantham* [39] , et celui de *Bitsadze* [10] représentent d'exéllentes ressources de l'utilisation de la théorie du point fixe pour cette étude. Pour plus de détails nous invitons le lecteurs à consulter les références suivantes : $[5, 8, 12, 18, 21, 28, 54]$

2.2 Outils Essentiels

2.2.1 Théorèmes du Point Fixe

Dans cette partie du manuscrit, nous présentons quelques définitions liées aux deux théorèmes du point fixe assurant l'existence et l'unicité de la solution d'un problème à une ou plusieurs équations différentielles impliquants des dérivées d'ordres non-entiers.

Définition 2.1 [30] (*Espace de Banach*) *Un espace E est dit complet si toute suite de cauchy converge pour la norme $\|.\|_E$. E est nomé aussi espace de Banach.*

Définition 2.2 (*Suite de Cauchy*) *Soient un espace vectorel normé E et (x_n) une suite de E. Si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0; \forall p > N \text{ et } \forall q \geq N \text{ nous avons : } \|x_{p+q} - x_p\|_E < \varepsilon,$$

alors (x_n) est une suite de Cauchy.

Définition 2.3 [30] (*Opérateur contractant*) *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé. Une application* $T : E \to E$, *est dite*

1/ Lipschitzienne avec $k > 0$. *i.e : pour tout* x, y *de* E, *nous avons :*

$$\|Tx - Ty\|_E \leq k \|x - y\|_E .$$

La constante k *est dite de Lipschitz.*

2/ Contractante si elle est $k-$*Lipschitzienne avec* $0 \leq k < 1$, *ici* k *est appellée constante de contraction.*

Définition 2.4 [26] (*Point Fixe*) *Soit* T *une appliaction dans un espace vectoriel* E *dans lui même. Un élément* $x \in E$ *est un point fixe de* T *si :* $x = Tx$.

Lemme 2.1 [56] (*Arzela-Ascoli*) *Un sous ensemble* H *de* E, *uniformément borné et équi-continu est relativement compacte dans* E.

Théorème de Schaefer :

Ce théorème est un cas particulier du théorème établi par Leray et Schauder (*Leray − Schauder theorem*), utilisé particulièrement pour prouver l'existence de solutions d'équations différentielles non linéaires.

Théorème 2.1 [56] *Soit* E *un espace de Banach et l'opérateur complètement continu* $T : E \to E$. *Si l'ensemble* $V = \{x \in E : x = \mu Tx,\ 0 < \mu < 1\}$ *est borné, alors* T *ademet au moins un point fixe dans* E.

Principe de Contraction de Banach :

Cetrtainement, le principe de contraction de Banach qui garantit l'existence d'un point fixe pour une contraction, est le plus connu des théorèmes de point fixe.

Enoncé par le mathématicien *Stefan Banach* en 1922 [14, 19, 26], ce théorème élémentaire a eu de nombreuses applications dans la théorie des Fractales et celle des Equations Différentielles.

Théorème 2.2 *Tout opérateur contractant* T *d'un espace de Banach* E *possède un point fixe unique* x *appartenant à* E *et vérifiant :* $x = Tx$.

En ce qui conserne l'unicité, remarquons que toute contraction a au plus un point fixe, nous pouvons le montrer par la supposition de l'existence de deux point fixe x_1 et x_2, alors :

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|_E &= \|Tx_1 - Tx_2\|_E \\
&\leq k \|x_1 - x_2\|_E , \\
&< \|x_1 - x_2\|_E ,
\end{aligned}$$

cette contradiction prouve que le point fixe est unique.

2.2.2 Lemmes Auxilières

Les deux lemmes suivants [47] sont utilisés dans les démonstrations de nos résultats .

Lemme 2.2 *Soit $f \in L^1([0,b])$. L'équation différentielle fractionnaire*

$$D^{\alpha} f(t) = 0, \qquad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{2.1}$$

admet une solution sous la forme :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j, \qquad c_j \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Lemme 2.3 *Soit $f \in C^n_{-1}([0,b])$. Nous avons*

$$J^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j, \tag{2.3}$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, n-1}$ et $n = [\alpha] + 1$.

2.3 Equations aux Dérivées Fractionnaires

L'apparition du calcul fractionnaire a généré une nouvelle vision sur la modélisation mathématique des phénomènes : physiques, chimiques, viscoelastiques, éléctriques...etc [6, 9, 19]. Cet outil a permi de construire des modèles précis, d'ordres réduits et de nombres limités de paramètres nécessaires à la caractérisation de chaque phénomène. Cette déscription est associées à des dispositifs dont le comportement peut être régi par des équations aux dérivées fractionnaires, s'avère trés utile. Pour plus d'informations sur les EDFs consutez les ouvrages [22, 29, 35] .

Motivés par l'ensemble des travaux fait dans ce sens, nous avons consacré cette section à l'étude du problème fractionnaire suivant [17] :

$$\begin{gathered} D^{\alpha} u(t) + f(t,\ u(t)) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, \quad u^{(n-2)}(1) = \int_0^{\eta} u(s)\, g(s)\, ds, \end{gathered} \tag{2.4}$$

avec D^{α} est l'opérateur différentiel de Caputo d'ordre arbitraire $(n-1 < \alpha \le n)$, $\eta \in [0,1]$, g une fonction intégrable et f une fonction continue sur $[0,1]$ soumise à quelques conditions qui seront précisées par la suite dans cette section.

La solution intégrale de l'équation (2.4) est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.4 *Soit $n-1 < \alpha \le n$. La solution du problème* (2.4) *est :*

$$u(t) = J^{\alpha} f(t, u(t)) - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^{\eta} u(s)\, g(s)\, ds \right]. \quad (2.5)$$

Dans ce qui suit, nous allons démontrer que (2.4) admet (2.5) comme solution. Nous avons besoin de l'espace de Banach $C([0,1], \mathbb{R})$, espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Preuve. Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, $k_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, ..., n-1$. En utilisant les lemmes 2.2 et 2.3, nous pouvons écrire :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds - k_0 - k_1 t - k_2 t^2 - ... - k_{n-1} t^{n-1}. \quad (2.6)$$

Les conditions :

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, \quad (2.7)$$

et

$$u^{(n-2)}(1) = \int_0^{\eta} u(s)\, g(s), \quad (2.8)$$

permettent d'effectuer le calcul des constantes k_i. Ainsi :

$$k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-2} = 0, \quad (2.9)$$

et

$$k_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^{\eta} u(s)\, g(s)\, ds \right]. \quad (2.10)$$

En remplaçant les k_i dans (2.6) nous trouverons la formule (2.5).

■

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) : (i) La fonction f est $k-$lipshitzienne, i.e : il existe $k > 0$, tel que pour tout $u, \overline{u} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,\ 1]$, nous avons :

$$|f(t,u) - f(t, \overline{u})| \leq k |u - \overline{u}|.$$

(ii) Il existe M strictement positive, telle que :

$$\|g\|_{L^1} = \int_0^{\eta} |g(t)|\, dt \leq M < \infty.$$

(H_2) : La fonction f est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$.

(H_3) : Il existe une constante positive N, telle que $|f(t,u)| \leq N$, $t \in [0,\ 1]$, $u \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Existence

Théorème 2.3 *Si les conditions* (H_2) *et* (H_3) *sont satisfaites alors le problème aux limites* (2.4) *admet au moins une solution dans* $C([0,1],\mathbb{R})$ *pourvu que :*

$$\Gamma(n) \geq M, \;\; M > 0. \tag{2.11}$$

.

Preuve. La preuve de ce théorème consiste à montrer que l'opérateur Φ donné par :

$$\begin{aligned} \Phi u(t) &= J^{\alpha} f(t, u(t)) \\ &- \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^{\eta} u(s)\, g(s)\, ds\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

a au moins un point fixe dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

Nous appliquons le théorème de Schaefer et la démonstration sera donnée en 4 étapes.

étape 1 : Continuité de Φ :
Soit (u_n) une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} |\Phi u_n(t) - \Phi u(t)| &= |J^{\alpha} f(t, u_n(t)) \\ &- \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u_n(\tau))\, d\tau - \int_0^{\eta} u_n(s)\, g(s)\, ds\right] \\ &- \left(J^{\alpha} f(t, u(t)) - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^{\eta} u(s)\, g(s)\, ds\right]\right)\Bigg|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Comme f est continue, nous avons :

$$\|\Phi u_n - \Phi u\| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{2.14}$$

Ainsi Φ est continu.

étape 2 : Φ envoie les ensembles bornés dans des ensembles bornés dans $C([0,1],\mathbb{R})$:
Soit l'ensemble $B_v = \{u \in C([0,1],\mathbb{R}) : \|u\| \leq v, v > 0\}$. Considérons $u \in B_v$, alors pour tout $t \in [0,1]$, nous avons l'inégalité fractionnaire suivante :

$$\begin{aligned} |\Phi u(t)| &\leq J^{\alpha} |f(t, u(t))| \\ &+ \left|\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right|\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} |f(\tau, u(\tau))|\, d\tau + \int_0^{\eta} |u(s)\, g(s)|\, ds\right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Puisque f vérifie l'hypothèse (H_3), alors

$$\|\Phi u\| \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{N}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha-n+3)} + \frac{vM}{\Gamma(n)}, \tag{2.16}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\|\Phi u\| < \infty. \tag{2.17}$$

En effet, $\Phi(B_v) \subset B_v$.

étape 3 : Φ envoie les ensembles bornés dans des ensembles équicontinus de $C([0,1],\mathbb{R})$.
Soit $t_1; t_2 \in [0,1]$ tels que $t_1 < t_2$ et soit $u \in B_v$. Alors :

$$\begin{aligned}|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)| = \Bigg| & J^\alpha f(t_2, u(t_2)) - \frac{t_2^{n-1}}{(n-1)!}\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^\eta u(s)\, g(s)\, ds\right] \\ & -J^\alpha f(t_1, u(t_1)) + \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!}\left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^\eta u(s)\, g(s)\, ds\right]\Bigg|. \end{aligned} \tag{2.18}$$

D'où, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1} \left[(t_2-\tau)^{\alpha-1} - (t_1-\tau)^{\alpha-1}\right] f(\tau, u(\tau))\, d\tau\right| \\ & + \left|\int_{t_2}^{t_1} (t_2-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\right| \\ & + \left|\frac{t_2^{n-1} - t_1^{n-1}}{(n-1)!}\right| \left(\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} |f(\tau, u(\tau))|\, d\tau + \int_0^\eta |u(s)\, g(s)|\, ds\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

En effet,

$$\begin{aligned}|\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)| \leq & \frac{2N}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha + \frac{N}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2^\alpha - t_1^\alpha\right) \\ & + \left(\frac{N}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha-n+3)} + \frac{vM}{\Gamma(n)}\right)\left(t_2^{n-1} - t_1^{n-1}\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Du moment que t_1 tend vers t_2, le second membre de l'inégalité fractionnaire précédente tend vers zero. Alors, en combinant les étapes 1, 2, 3 et d'après le théorème d'Ascoli-Arzela, nous concluons que Φ est complètement continu.

étape 4 : Maintenant, nous allons montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{u \in C([0,1],\mathbb{R}),\ u = \lambda \Phi u,\ 0 < \lambda < 1\} \tag{2.21}$$

est borné.

Soit donc $u \in \Omega$. Alors $u = \lambda \Phi u$, pour un certain λ compris strictement entre 0 et 1, nous avons :

$$u(t) = \lambda \left(J^{\alpha} f(t, u(t)) - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau))\, d\tau - \int_0^{\eta} u(s)\, g(s)\, ds \right] \right). \tag{2.22}$$

Grâce à (H_3), nous obtenons

$$|u(t)| \leq \lambda \left(\frac{N}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{N}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha-n+3)} + \frac{vM}{\Gamma(n)} \right), \ t \in [0,1]. \tag{2.23}$$

Donc,

$$\|u\| \leq \frac{\lambda \Gamma(n)}{\Gamma(n) - \lambda M} \left(\frac{N}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{N}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha-n+3)} \right). \tag{2.24}$$

La condition dans (2.11) mène à écrire :

$$\|\Phi u\| < \infty. \tag{2.25}$$

De cette façons, nous avons pu montrer que Ω est borné.

D'après le théorème du point fixe de Schaefer nous constatons que Φ admet au moins un point fixe qui est la solution du problème (2.4).

■

2.3.2 Existence et Unicité

Le deuxième résultat représente un théorème qui montre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.4).

Théorème 2.4 *Supposons que* (H_1) *est vérifiée. Si*

$$k \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha-n+3)} \right) + \frac{M}{\Gamma(n)} < 1, \tag{2.26}$$

alors le BVP (2.4) *a une solution unique sur* $[0,1]$.

La preuve de ce théorème est basée sur le principe de contraction de Banach.

Preuve. Soit $u, \overline{u} \in C([0,1], \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in [0,\ 1]$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\left|\Phi u\left(t\right)-\Phi\overline{u}\left(t\right)\right| &\leq J^{\alpha}\left|f\left(t,u\left(t\right)\right)-f\left(t,\overline{u}\left(t\right)\right)\right| \\
&+\left|\frac{t^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\right|\left[\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(1-\tau\right)^{\alpha-n+1}}{\Gamma\left(\alpha-n+2\right)}\left|f\left(\tau,u\left(\tau\right)\right)-f\left(\tau,\overline{u}\left(\tau\right)\right)\right|d\tau\right. \\
&\left.+\int_{0}^{\eta}\left|g\left(s\right)\right|\left|u\left(s\right)-\overline{u}\left(s\right)\right|ds\right].
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Comme (H_1) est vérifiée, alors nous obtenons :

$$
\left\|\Phi u-\Phi\overline{u}\right\| \leq \left(k\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(\alpha-n+3\right)}\right]+\frac{M}{\Gamma\left(n\right)}\right)\left\|u-\overline{u}\right\|. \tag{2.28}
$$

En utilisant la condition (2.26), nous concluons que Φ est une contraction.

Ainsi, d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un point fixe unique $u \in C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ solution du problème (2.4). ■

Exemple 2.1 *Soit f définie par $f\left(t,u\left(t\right)\right)=\frac{1}{(t+2)^5}\left[\sin u\left(t\right)+\frac{1}{u^2(t)+1}\right]$ et $g\left(t\right)=\frac{\cos^2 t}{t^2+3}$.Nous considèrons le prblème suivant :*

$$
\begin{aligned}
D^{\frac{7}{2}}u(t)+\frac{1}{\left(t+2\right)^5}\left[\sin u(t)+\frac{1}{u^2(t)+1}\right] &= 0 \\
u\left(0\right)=u'\left(0\right)=u''\left(0\right)=0, u''\left(1\right) &= \int\limits_{0}^{\eta}\frac{\cos^2 s}{s^2+3}u\left(s\right)ds.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\left|f\left(t,u\right)-f\left(t,\overline{u}\right)\right| &\leq \frac{1}{16}\left|u-\overline{u}\right|, \\
k\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(\alpha-n+3\right)}\right)+\frac{M}{\Gamma\left(n\right)} &= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{105\sqrt{\pi}}+\frac{2}{9\sqrt{\pi}}\right)+\frac{1}{18} \\
&\approx 0,06876<1.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Alors, le problème (2.29) a une solution unique dans $[0,1]$.

Chapitre 3

PROBLEMES AUX OPERATEURS FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes d'équations différentielles d'ordre arbitraires. Les SEDFs ont un champs trop large d'applications vue le nombre indéterminé de modèles régis par ces systèmes fractionnaires $[1, 13, 27, 31, 33, 43, 50, 55, 64, 70 - 73]$.

La première section est consacrée à l'étude d'un problème à deux équations fractionnaires. Des résultats d'éxistance et d'unicité de la solution seront étatblis. En suite, dans la deuxième section nous allons traiter un système plus comliqué à n éqution différentielles en utilisant les inégalités fractionnaires. En fin, nous terminerons ce chapitre par des exemples illustratifs.

3.1 Problème1 : Dérivée Caputo/ Dérivée Classique

Soit à considérer le système d'équations [16] suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) + f(t, y(t), D^{\delta}y(t)) = 0, & t \in J \\ D^{\beta}y(t) + g(t, x(t), D^{\sigma}x(t)) = 0, & t \in J \\ x(0) = y(0) = 0, x(1) - \lambda_1 x(\eta) = 0, y(1) - \lambda_1 y(\eta) = 0, \\ x''(0) = y''(0) = 0, x''(1) - \lambda_2 x''(\xi) = 0, y''(1) - \lambda_2 y''(\xi) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où D^{α}, D^{β}, D^{δ} et D^{σ} sont les dérivées fractionnaire de Caputo avec $3 < \alpha, \beta \leq 4$, $\delta \leq \alpha - 1$, $\sigma \leq \beta - 1$, les constantes $\xi > 0$ et $\eta < 1$, pour les réelles λ_1 et λ_2 doivent satisfaires les conditions suivantes : $\lambda_1\eta \neq 1$ et $\lambda_2\xi \neq 1$; $J = [0, 1]$. Les fonctions f, g sont dans $C([0, 1])$.

Nous introduisons les espaces de Banach suivants :

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \in C([0,1]), D^{\sigma}x \in C([0,1])\}, \\ Y &= \{y : y \in C([0,1]), D^{\delta}y \in C([0,1])\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

dont nous associons respectivement les normes :

$$\begin{aligned} \|x\|_X &= \|x\| + \|D^{\sigma}x\|, \\ \|y\|_Y &= \|y\| + \|D^{\delta}y\|, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\|.\| = \sup\limits_{t\in J} |.|$.

Ainsi $\left(X \times Y, \|(x,y)\|_{X\times Y}\right)$ et aussi un espace de Banach avec $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Dans le lemme suivant, nous déterminons la solution générale du problème (3.1) .

Lemme 3.1 *Soit $h \in C([0,1])$, $t \in J$, $3 < \alpha \leq 4$. Alors la solution de l'équation :*

$$D^{\alpha}x(t) + h(t) = 0, \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, x(1) - \lambda_1 x(\eta) = 0, \\ x''(0) &= 0, x''(1) - \lambda_2 x''(\xi) = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \\ &\quad + \frac{\lambda_1 t}{(\lambda_1\eta - 1)\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha-1} h(s)ds \\ &\quad - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1\eta - 1)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s)ds \\ &\quad + \frac{(\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1\eta^3)\,t - (\lambda_2\lambda_1\eta - \lambda_2)\,t^3}{6(\lambda_1\eta - 1)(\lambda_2\xi - 1)\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{\xi} (\xi - s)^{\alpha-3} h(s)ds \\ &\quad - \frac{(1 - \lambda_1\eta^3)\,t + (\lambda_2\lambda_1\eta - \lambda_2)\,t^3}{6(\lambda_1\eta - 1)(\lambda_2\xi - 1)\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} h(s)ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Preuve. Soit $C_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,3$. En utilisant les lemmes 2.2 et 2.3, la solution générale de (3.1) peut être écrite sous la forme :

$$x(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - C_0 - C_1 t - C_2 t^2 - C_3 t^3. \tag{3.7}$$

Puis, en employant (3.5) nous trouverons que $C_0 = C_2 = 0$, et

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{\lambda_1}{(\lambda_1\eta-1)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-1}\,h(s)ds \\
&+\frac{\lambda_1}{(\lambda_1\eta-1)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-1}\,h(s)ds \\
&-\frac{\lambda_2\,(1-\lambda_1\eta^3)}{6\,(\lambda_1\eta-1)\,(\lambda_2\xi-1)\,\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-3}\,h(s)ds \qquad (3.8)\\
&+\frac{(1-\lambda_1\eta^3)}{6\,(\lambda_1\eta-1)\,(\lambda_2\xi-1)\,\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-3}\,h(s)ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
C_3 &= -\frac{\lambda_2}{6\,(\lambda_2\xi-1)\,\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-3}\,h(s)ds \\
&+\frac{1}{6\,(\lambda_2\xi-1)\,\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha-3}\,h(s)ds. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Finalement, nous substituons les valeurs de C_1 et C_3 dans (3.7), alors nous obtenons (3.6) . ■

3.1.1 Existence et Unicité de la Solution

Introduisons les quantités :

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{|\lambda_1\eta-1|+|\lambda_1|\,\eta^{\alpha}+1}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha+1)} \\
&+\frac{(|\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\eta^3|+|\lambda_1\lambda_2\eta-\lambda_2|)\,\xi^{\alpha-2}+|1-\lambda_1\eta^3|+|\lambda_1\eta-1|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}, \\
N_2 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\sigma+1)}+\frac{|\lambda_1|\,\eta^{\alpha}+1}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(2-\sigma)} \\
&+\frac{|\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\eta^3|\,\xi^{\alpha-2}+|1-\lambda_1\eta^3|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(2-\sigma)}+\frac{|\lambda_1\lambda_2\eta-\lambda_2|\,\xi^{\alpha-2}+|\lambda_1\eta-1|}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(4-\sigma)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3 &= \frac{|\lambda_1\eta-1|+|\lambda_1|\,\eta^{\beta}+1}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\beta+1)} \\
&\quad+\frac{\left(|\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\eta^3|+|\lambda_1\lambda_2\eta-\lambda_2|\right)\xi^{\beta-2}+|1-\lambda_1\eta^3|+|\lambda_1\eta-1|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)}, \\
N_4 &= \frac{1}{\Gamma(\beta-\delta+1)}+\frac{|\lambda_1|\,\eta^{\beta}+1}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(2-\delta)} \\
&\quad+\frac{|\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\eta^3|\,\xi^{\beta-2}+|1-\lambda_1\eta^3|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)\,\Gamma(2-\delta)} \\
&\quad+\frac{|\lambda_1\lambda_2\eta-\lambda_2|\,\xi^{\beta-2}+|\lambda_1\eta-1|}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)\,\Gamma(4-\delta)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Les fonction f et g doivent vérifier les trois hypothèses suivantes.

(H_1) : Les fonctions $f, g : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues.

(H_2) : Il existe des fonctions positives $a_i,\ b_i \in C([0,1])$, $i=1,2,$ telles que pour tout $t\in[0,1]$ et $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)| &\le a_1(t)\,|x_1-x_2|+b_1(t)\,|y_1-y_2|, \\
|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)| &\le a_2(t)\,|x_1-x_2|+b_2(t)\,|y_1-y_2|.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

De plus, nous posons :

$$\omega_1=\sup_{t\in J}a_1(t),\ \ \omega_2=\sup_{t\in J}b_1(t),\ \ \varpi_1=\sup_{t\in J}a_2(t),\ \ \varpi_2=\sup_{t\in J}b_2(t). \tag{3.12}$$

(H_3) : Il existe deux constantes positives L_1 et L_2 vérifiant :

$$|f(t,x,y)|\le L_1,\ \ |g(t,x,y)|\le L_2, t\in[0,1],(x,y)\in\mathbb{R}^2\ . \tag{3.13}$$

Théorème 3.1 *Supposons que l'hypothèse* (H_2) *et la condition :*

$$(N_1+N_2)(\omega_1+\omega_2)+(N_3+N_4)(\varpi_1+\varpi_2)<1 \tag{3.14}$$

sont vérifiées. Alors le problème (3.1) *a une solution unique sur* J.

Preuve. Nous appliquons le théorème du point fixe de Banach. Ainsi, nous considerons l'opérateur $\phi : X \times Y \to X \times Y$, défini par :

$$\phi(x,y)(t) := (\phi_1 y(t), \phi_2 x(t)), \tag{3.15}$$

tel que :

$$\begin{aligned}
\phi_1 y(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s),D^\delta y(s))ds \\
&+\frac{\lambda_1 t}{(\lambda_1\eta-1)\Gamma(\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s,y(s),D^\delta y(s))ds \\
&-\frac{\lambda_1}{(\lambda_1\eta-1)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,y(s),D^\delta y(s))ds \qquad (3.16)\\
&+\frac{(\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3)t-(\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2)t^3}{6(\lambda_1\eta-1)(\lambda_2\xi-1)\Gamma(\alpha-2)}\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3} f(s,y(s),D^\delta y(s))ds \\
&-\frac{(1-\lambda_1\eta^3)t+(\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2)t^3}{6(\lambda_1\eta-1)(\lambda_2\xi-1)\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} f(s,y(s),D^\delta y(s))ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\phi_2 x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s,x(s),D^\sigma x(s))ds \\
&+\frac{\lambda_1 t}{(\lambda_1\eta-1)\Gamma(\beta)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\beta-1} g(s,x(s),D^\sigma x(s))ds \\
&-\frac{\lambda_1}{(\lambda_1\eta-1)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g(s,x(s),D^\sigma x(s))ds \qquad (3.17)\\
&+\frac{(\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3)t-(\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2)t^3}{6(\lambda_1\eta-1)(\lambda_2\xi-1)\Gamma(\beta-2)}\int_0^\xi (\xi-s)^{\beta-3} g(s,x(s),D^\sigma x(s))ds \\
&-\frac{(1-\lambda_1\eta^3)t+(\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2)t^3}{6(\lambda_1\eta-1)(\lambda_2\xi-1)\Gamma(\beta-2)}\int_0^1 (1-s)^{\beta-3} g(s,x(s),D^\sigma x(s))ds.
\end{aligned}$$

Puis, nous devons montrer que ϕ est une application contractante.

Soient $(x,y),(x_1,y_1)\in X\times Y$. Alors, pour tout $t\in[0,1]$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\left|\phi_1 y(t)-\phi_1 y_1(t)\right|\leq \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))-f(s,y_1(s),D^\delta y_1(s))\right|ds \\
&+\frac{|\lambda_1|\,t}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))-f(s,y_1(s),D^\delta y_1(s))\right|ds \\
&+\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))-f(s,y_1(s),D^\delta y_1(s))\right|ds \\
&+\frac{|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3|\,t+|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,t^3}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-2)}\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))-f(s,y_1(s),D^\delta y_1(s))\right|ds.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Sous les hypothèses de (H_2), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\left\|\phi_1 y-\phi_1 y_1\right\|\leq \\
&\frac{\left(|\lambda_1\eta-1|+|\lambda_1|\,\eta^\alpha+1\right)\left(\omega_1\left\|y-y_1\right\|+\omega_2\left\|D^\delta(y-y_1)\right\|\right)}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha+1)} \\
&+\frac{\left[\left(|\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\eta^3|+|\lambda_1\lambda_2\eta-\lambda_2|\right)\xi^{\alpha-2}+|1-\lambda_1\eta^3|+|\lambda_1\eta-1|\right]\left(\omega_1\left\|y-y_1\right\|+\omega_2\left\|D^\delta(y-y_1)\right\|\right)}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Par conséquent,

$$
\left\|\phi_1 y-\phi_1 y_1\right\|\leq N_1(\omega_1+\omega_2)\left(\left\|y-y_1\right\|+\left\|D^\delta(y-y_1)\right\|\right), \tag{3.20}
$$

D'autre part, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\left|D^{\delta}y\left(t\right)-D^{\delta}y_{1}\left(t\right)\right| \leq \\
&\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\sigma\right)}\int\limits_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-\sigma-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))-f(s,y_{1}(s),D^{\delta}y_{1}(s))\right|ds \\
&+\frac{\left|\lambda_{1}\right|t}{\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)}\int\limits_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))-f(s,y_{1}(s),D^{\delta}y_{1}(s))\right|ds \\
&+\frac{t^{1-\sigma}}{\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)}\int\limits_{0}^{1}\left(1-s\right)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))-f(s,y_{1}(s),D^{\delta}y_{1}(s))\right|ds \\
&+\left(\begin{array}{c}\frac{\left|\lambda_{2}-\lambda_{2}\lambda_{1}\eta^{3}\right|t^{1-\sigma}}{6\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\left|\lambda_{2}\xi-1\right|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)} \\ \frac{\left|\lambda_{2}\lambda_{1}\eta-\lambda_{2}\right|t^{3-\sigma}}{\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\left|\lambda_{2}\xi-1\right|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)}\end{array}\right)\int\limits_{0}^{\xi}\left(\xi-s\right)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))-f(s,y_{1}(s),D^{\delta}y_{1}(s))\right|ds \\
&+\left(\begin{array}{c}\frac{\left|\lambda_{2}-\lambda_{2}\lambda_{1}\eta^{3}\right|t^{1-\sigma}}{6\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\left|\lambda_{2}\xi-1\right|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)} \\ \frac{\left|\lambda_{2}\lambda_{1}\eta-\lambda_{2}\right|t^{3-\sigma}}{\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\left|\lambda_{2}\xi-1\right|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)}\end{array}\right)\int\limits_{0}^{1}\left(1-s\right)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))-f(s,y_{1}(s),D^{\delta}y_{1}(s))\right|ds.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

L'inégalité fractionnaire précédente devient :

$$
\begin{aligned}
&\left|D^{\delta}y\left(t\right)-D^{\delta}y_{1}\left(t\right)\right| \leq \\
&\frac{\left(\omega_{1}+\omega_{2}\right)\left(\left\|y-y_{1}\right\|+\left\|D^{\delta}\left(y-y_{1}\right)\right\|\right)}{\Gamma\left(\alpha-\sigma+1\right)} \\
&+\frac{\left(\omega_{1}+\omega_{2}\right)\left[\left|\lambda_{1}\right|\eta^{\alpha}+1\right]\left(\left\|y-y_{1}\right\|+\left\|D^{\delta}\left(y-y_{1}\right)\right\|\right)}{\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)} \\
&+\frac{\left(\omega_{1}+\omega_{2}\right)\left[\left|\lambda_{2}-\lambda_{2}\lambda_{1}\eta^{3}\right|\xi^{\alpha-2}+\left|1-\lambda_{1}\eta^{3}\right|\right]\left(\left\|y-y_{1}\right\|+\left\|D^{\delta}\left(y-y_{1}\right)\right\|\right)}{6\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\left|\lambda_{2}\xi-1\right|\Gamma\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)} \\
&+\frac{\left(\omega_{1}+\omega_{2}\right)\left[\left|\lambda_{2}\lambda_{1}\eta-\lambda_{2}\right|\xi^{\alpha-2}+\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\right]\left(\left\|y-y_{1}\right\|+\left\|D^{\delta}\left(y-y_{1}\right)\right\|\right)}{\left|\lambda_{1}\eta-1\right|\left|\lambda_{2}\xi-1\right|\Gamma\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(4-\sigma\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Ce qui implique que :

$$
\left\|D^{\delta}y-D^{\delta}y_{1}\right\| \leq N_{2}\left(\omega_{1}+\omega_{2}\right)\left(\left\|y-y_{1}\right\|+\left\|D^{\delta}\left(y-y_{1}\right)\right\|\right). \tag{3.23}
$$

En combinant (3.20) et (3.23) , nous obtenons :

$$
\left\|\phi_{1}y-\phi_{1}y_{1}\right\|_{X} \leq \left(N_{1}+N_{2}\right)\left(\omega_{1}+\omega_{2}\right)\left(\left\|y-y_{1}\right\|+\left\|D^{\delta}\left(y-y_{1}\right)\right\|\right). \tag{3.24}
$$

De la même manière, nous trouverons l'inégalité d'ordre non entier suivante :

$$
\left\|\phi_{2}x-\phi_{2}x_{1}\right\|_{Y} \leq \left(N_{3}+N_{4}\right)\left(\varpi_{1}+\varpi_{2}\right)\left(\left\|x-x_{1}\right\|+\left\|D^{\delta}\left(x-x_{1}\right)\right\|\right). \tag{3.25}
$$

Grâce aux deux dernières formules, nous pouvons écrire :

$$\|\phi(x,y)-\phi(x_1,y_1)\|_{X\times Y}\leq\left[\begin{array}{c}(N_1+N_2)(\omega_1+\omega_2)\\+(N_3+N_4)(\varpi_1+\varpi_2)\end{array}\right]\|(x-x_1,y-y_1)\|_{X\times Y}. \tag{3.26}$$

En tenant compte de (3.14), nous concluons que ϕ est une contraction. Alors, nous déduisons que ϕ a un unique point fixe qui représente la solution du système (3.1). ■

Exemple 3.1 *Considérons le système couplé suivant :*

$$\left\{\begin{array}{c}D^{\frac{7}{2}}x(t)+\frac{|y(t)|}{7(\pi t^2+3)(2+|y(t)|)}+\frac{\sqrt{\pi}e^{-\pi t}|\cos(\pi t)|\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|}{7(1+e^t)^2\left(2+\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|\right)}=0,\\ \\ D^{\frac{11}{3}}y(t)+\frac{3\pi|x(t)|}{\left(5e^{t^2}+3\sqrt{\pi}\right)(1+|x(t)|)}+\frac{\pi e^{-2\pi t}\left|D^{\frac{5}{2}}x(t)\right|}{5\left(t+3\sqrt{\pi}\right)^2\left(1+\left|D^{\frac{5}{2}}x(t)\right|\right)}=0,\\ \\ x(0)=y(0)=0, x(1)=\frac{3}{4}x(\frac{1}{3}), y(1)=\frac{3}{4}y(\frac{1}{3}),\\ \\ x''(0)=y''(0)=0, x''(1)=\frac{4}{5}x(\frac{2}{3}), y''(1)=\frac{4}{5}y(\frac{2}{3}).\end{array}\right., \tag{3.27}$$

où $\alpha=\frac{7}{2},\beta=\frac{11}{3},\sigma=\frac{5}{2},\delta=\frac{7}{3},\lambda_1=\frac{3}{4},\lambda_2=\frac{4}{5},\eta=\frac{1}{3},\xi=\frac{2}{3},$ *et*

$$\begin{aligned}f(t,y(t),D^{\frac{7}{3}}y(t)) &= \frac{|y(t)|}{7(\pi t^2+3)^2(2+|y(t)|)}+\frac{\sqrt{\pi}e^{-\pi t}|\cos(\pi t)|\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|}{7(1+e^t)^2\left(2+\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|\right)},\\ g(t,x(t),D^{\frac{5}{2}}x(t)) &= \frac{3\pi|x(t)|}{(5e^{t^2}+3\sqrt{\pi})(1+|x(t)|)}+\frac{\pi e^{-2\pi t}\left|D^{\frac{5}{2}}x(t)\right|}{5(t+3\sqrt{\pi})^2\left(1+\left|D^{\frac{5}{2}}x(t)\right|\right)}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Pour $x,x_1,y,y_1\in\mathbb{R},\ t\in[0,1]$, *nous avons*

$$|f(t,x,y)-f(t,x_1,y_1)|\leq\frac{1}{7(\pi t^2+3)^2}|x-x_1|+\frac{\sqrt{\pi}e^{-\pi t}}{7(1+e^t)^2}|y-y_1|, \tag{3.29}$$

et

$$|g(t,x,y)-g(t,x_1,y_1)|\leq\frac{3\pi}{(5e^{t^2}+3\sqrt{\pi})}|x-x_1|+\frac{\pi e^{-2\pi t}}{5(t+3\sqrt{\pi})^2}|y-y_1|. \tag{3.30}$$

Ainsi,

$$a_1(t)=\frac{1}{7(\pi t^2+3)^2}, b_1(t)=\frac{\sqrt{\pi}e^{-\pi t}}{7(1+e^t)^2}, \tag{3.31}$$

puis,

$$a_2(t) = \frac{3\pi}{(5e^{t^2} + 3\sqrt{\pi})}, b_2(t) = \frac{\pi e^{-2\pi t}}{5(t + 3\sqrt{\pi})^2}. \tag{3.32}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sup_{t\in[0,1]} a_1(t) = \frac{1}{63}, \omega_2 = \sup_{t\in[0,1]} b_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{28\pi}, \\
\varpi_1 &= \sup_{t\in[0,1]} a_2(t) = \frac{3\pi}{5 + 3\sqrt{\pi}}, \varpi_2 = \sup_{t\in[0,1]} b_2(t) = \frac{1}{45}, \qquad (3.33) \\
N_1 &= 1.08935, N_2 = 3.4444, N_3 = 0.77571, N_4 = 2.51754,
\end{aligned}$$

et

$$(N_1 + N_2)(\omega_1 + \omega_2) + (N_3 + N_4)(\varpi_1 + \varpi_2) \simeq 0.52795 < 1. \tag{3.34}$$

En conséquence du théorème 3.1, *le problème* (3.26) *a une solution unique.*

3.1.2 Existence de la Solution

Théorème 3.2 *Si* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées, alors le problème* (3.1) *a au moins une solution sur* J.

Preuve. Cette démonstration est basée sur le théoreme du point fixe de Schaefer.

A : De (H_1), nous pouvons voir que ϕ est continu sur $X \times Y$.

B : Maintenant, il faut montrer que ϕ envoie les ensembles bornés dans des ensembles bornés dans $X \times Y$.

En prenant $\rho > 0$, $(x, y) \in B_\rho := \left\{(x, y) \in X \times Y; \|(x, y)\|_{X\times Y} \leq \rho\right\}$, alors pour tout $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\phi_1 y(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\frac{|\lambda_1|\,t}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\frac{t}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^{1} (1-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\frac{|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3|\,t+|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,t^3}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\frac{|1-\lambda_1\eta^3|\,t+|\lambda_1\eta-1|\,t^3}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-2)}\int_0^{1} (1-s)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

L'hypothèse (H_3) impose que f soit absolument bornées, ainsi (3.35) devient :

$$\|\phi_1 y\| \leq L_1 N_1. \tag{3.36}$$

Pour $D^{\sigma}y$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\delta}y\,(t)\right| \leq \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha-\sigma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\sigma-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\frac{|\lambda_1|\,t^{1-\sigma}}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2-\sigma)}\int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\frac{t^{1-\sigma}}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2-\sigma)}\int_0^{1} (1-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\left(\begin{array}{c}\frac{\left|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3\right|t^{1-\sigma}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)} \\ \frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|t^{3-\sigma}}{|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(4-\sigma)}\end{array}\right)\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds \\
&+\left(\begin{array}{c}\frac{\left|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3\right|t^{1-\sigma}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)} \\ \frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|t^{3-\sigma}}{|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(4-\sigma)}\end{array}\right)\int_0^{1} (1-s)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right| ds.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Par conséquent,

$$\|D^{\sigma}\phi_1 y\| \leq L_1 N_2. \tag{3.38}$$

De (3.36) et (3.38) nous concluons que :

$$\|\phi_1 y\|_X \leq L_1 (N_1 + N_2). \tag{3.39}$$

Avec les mêmes arguments que précédement, nous obtenons

$$\|\phi_2 x\|_Y \leq L_2 (N_3 + N_4). \tag{3.40}$$

Via (3.39) et (3.40), nous avons

$$\|\phi(x,y)\|_{X\times Y} \leq L_1 (N_1 + N_2) + L_2 (N_3 + N_4) < \infty. \tag{3.41}$$

Ce qui implique que ϕ envoie les bornés dans des bornés dans $X \times Y$.

C : Dans cette étape, nous montrons l'équi-continuité de ϕ.

Soit $(x,y) \in B_\rho$, et $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$. nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&|\phi_1 y(t_1) - \phi_1 y(t_2)| \leq \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right) \left|f(s, y(s), D^{\delta} y(s))\right| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \left|f(s, y(s), D^{\delta} y(s)))\right| ds \\
&+ \frac{|\lambda_1| (t_2 - t_1)}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha-1} \left|f(s, y(s), D^{\delta} y(s))\right| ds \\
&+ \frac{|\lambda_1| (t_2 - t_1)}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha)} \int_0^{1} (1 - s)^{\alpha-1} \left|f(s, y(s), D^{\delta} y(s))\right| ds \\
&+ \frac{|\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3| (t_2 - t_1) + |\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2| (t_2^3 - t_1^3)}{6 |\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 2)} \int_0^{\xi} (\xi - s)^{\alpha-3} \left|f(s, y(s), D^{\delta} y(s))\right| ds.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Ce qui mène à écrire :

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_1 y(t_1)-\phi_1 y(t_2)\| \leq \\
&L_1\left[\frac{|\lambda_1\eta-1|+|\lambda_1|\,\eta^{\alpha}}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3|\,\xi^{\alpha-2}}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}\right](t_2-t_1) \\
&+L_1\left[\frac{1}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|1-\lambda_1\eta^3|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}\right](t_1-t_2) \\
&+L_1\left[\frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,\xi^{\alpha-2}}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}+\frac{|\lambda_1\eta-1|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}\right]\left(t_2^3-t_1^3\right) \\
&+L_1\left[\frac{(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha})}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{2\,(t_2-t_1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right].
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Nous avons aussi

$$
\begin{aligned}
&\|D^{\sigma}\phi_1 y(t_1)-D^{\sigma}\phi_1 y(t_2)\| \leq \\
&\frac{L_1}{\Gamma(\alpha-\sigma+1)}\left[t_1^{\alpha-\sigma}-t_2^{\alpha-\sigma}+2\,(t_2-t_1)^{\alpha-\sigma}\right] \\
&+L_1\left[\begin{array}{c}\frac{|\lambda_1|\eta^{\alpha}+1}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\sigma)} \\ +\frac{\left|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3\right|\xi^{\alpha-2}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\sigma)}\end{array}\right]\left(t_2^{1-\sigma}-t_1^{1-\sigma}\right) \\
&+L_1\left[\begin{array}{c}\frac{1}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\sigma)} \\ +\frac{\left|1-\lambda_1\eta^3\right|\xi^{\alpha-2}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\sigma)}\end{array}\right]\left(t_1^{1-\sigma}-t_2^{1-\sigma}\right) \\
&+L_1\left[\frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,\xi^{\alpha-2}}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(4-\sigma)}\right]\left(t_2^{3-\sigma}-t_1^{3-\sigma}\right) \\
&+L_1\left[\frac{|\lambda_1\eta-1|}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(4-\sigma)}\right]\left(t_1^{3-\sigma}-t_2^{3-\sigma}\right).
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

De (3.43) et (3.44), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_1 y(t_1) - \phi_1 y(t_2)\|_X \leq \\
&L_1\left[\frac{|\lambda_1\eta-1|+|\lambda_1|\,\eta^{\alpha}}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3|\,\xi^{\alpha-2}}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}\right](t_2-t_1) \\
&+L_1\left[\frac{1}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|1-\lambda_1\eta^3|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}\right](t_1-t_2) \\
&+L_1\left[\frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,\xi^{\alpha-2}}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}+\frac{|\lambda_1\eta-1|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)}\right]\left(t_2^3-t_1^3\right) \\
&+L_1\left[\frac{(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha})}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{2\,(t_2-t_1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]+\frac{L_1}{\Gamma(\alpha-\sigma+1)}\left[t_1^{\alpha-\sigma}-t_2^{\alpha-\sigma}+2\,(t_2-t_1)^{\alpha-\sigma}\right]
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

$$
+L_1\left[\begin{array}{c}\frac{|\lambda_1|\eta^{\alpha}+1}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\sigma)}\\+\frac{\left|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3\right|\xi^{\alpha-2}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\sigma)}\end{array}\right]\left(t_2^{1-\sigma}-t_1^{1-\sigma}\right)+L_1\left[\begin{array}{c}\frac{1}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\sigma)}\\+\frac{\left|1-\lambda_1\eta^3\right|\xi^{\alpha-2}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\sigma)}\end{array}\right]\left(t_1^{1-\sigma}-t_2^{1-\sigma}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+L_1\left[\frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,\xi^{\alpha-2}}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(4-\sigma)}\right]\left(t_2^{3-\sigma}-t_1^{3-\sigma}\right) \\
&+L_1\left[\frac{|\lambda_1\eta-1|}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(4-\sigma)}\right]\left(t_1^{3-\sigma}-t_2^{3-\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

D'autre part, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_2 x(t_1) - \phi_2 x(t_2)\|_Y \leq \\
&L_2\left[\frac{|\lambda_1\eta-1|+|\lambda_1|\,\eta^{\beta}}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\beta+1)}+\frac{|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3|\,\xi^{\beta-2}}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)}\right](t_2-t_1) \\
&+L_2\left[\frac{1}{|\lambda_1\eta-1|\,\Gamma(\beta+1)}+\frac{|1-\lambda_1\eta^3|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)}\right](t_1-t_2) \\
&+L_2\left[\frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,\xi^{\beta-2}}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)}+\frac{|\lambda_1\eta-1|}{6\,|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)}\right]\left(t_2^3-t_1^3\right) \\
&+L_2\left[\frac{\left(t_1^{\beta}-t_2^{\beta}\right)}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{2\,(t_2-t_1)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right]+\frac{L_2\left[t_1^{\beta-\delta}-t_2^{\beta-\delta}+2\,(t_2-t_1)^{\beta-\delta}\right]}{\Gamma(\beta-\delta+1)}
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

$$
+L_2\left[\begin{array}{c}\frac{|\lambda_1|\eta^{\beta}+1}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\delta)}\\+\frac{\left|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3\right|\xi^{\beta-2}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\beta-1)\Gamma(2-\delta)}\end{array}\right]\left(t_2^{1-\delta}-t_1^{1-\delta}\right)+L_2\left[\begin{array}{c}\frac{1}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\delta)}\\+\frac{\left|1-\lambda_1\eta^3\right|\xi^{\beta-2}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\beta-1)\Gamma(2-\delta)}\end{array}\right]\left(t_1^{1-\delta}-t_2^{1-\delta}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+L_2\left[\frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|\,\xi^{\beta-2}}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)\,\Gamma(4-\delta)}\right]\left(t_2^{3-\delta}-t_1^{3-\delta}\right) \\
&+L_2\left[\frac{|\lambda_1\eta-1|}{|\lambda_1\eta-1|\,|\lambda_2\xi-1|\,\Gamma(\beta-1)\,\Gamma(4-\delta)}\right]\left(t_1^{3-\delta}-t_2^{3-\delta}\right).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Remarquons que si t_2 tend vers t_1, alors la norme $\|\phi(x,y)(t_1) - \phi(x,y)(t_2)\|_{X\times Y} \to 0$. Puis, en combinant les étapes **A, B, C** et en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli, nous déduisons que ϕ est completement continu.

D : En fin, nous montrons que $\Omega = \{(x,y) \in X \times Y;\ (x,y) = \mu\phi(x,y),\ 0 < \mu < 1\}$, est un ensemble borné.

Soit $(x,y) \in \Omega$, alors $(x,y) = \mu\phi(x,y)$, avec $0 < \mu < 1$. Ainsi, pour tout $t \in J$,nous avons :

$$y(t) = \mu\phi_1 y(t) \text{ et } x(t) = \mu\phi_2 x(t). \tag{3.47}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}|y(t)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))\right| ds \\
&+\frac{|\lambda_1| t}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))\right| ds \\
&+\frac{t}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))\right| ds \\
&+\frac{|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3|t+|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|t^3}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)}\int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))\right| ds \\
&+\frac{|1-\lambda_1\eta^3|t+|\lambda_1\eta-1|t^3}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^\delta y(s))\right| ds.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

En tenant compte des conditions de (H_3), nous pouvons écrire :

$$|y(t)| \leq \mu L_1 \left[\begin{array}{c} \frac{|\lambda_1\eta-1|+|\lambda_1|\eta^\alpha+1}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha+1)} \\ +\frac{\left(\left|\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\eta^3\right|+|\lambda_1\lambda_2\eta-\lambda_2|\right)\xi^{\alpha-2}+\left|1-\lambda_1\eta^3\right|+|\lambda_1\eta-1|}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-1)} \end{array}\right] \tag{3.49}$$

Alors,

$$|y(t)| \leq \mu L_1 N_1,\ t \in J. \tag{3.50}$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\left|D^{\delta}y\left(t\right)\right| \leq \\
&\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\sigma\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-\sigma-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right|ds \\
&+\frac{\left|\lambda_1\right|t^{1-\sigma}}{\left|\lambda_1\eta-1\right|\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right|ds \\
&+\frac{t^{1-\sigma}}{\left|\lambda_1\eta-1\right|\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right|ds \\
&+\begin{pmatrix}\frac{\left|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3\right|t^{1-\sigma}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)} \\ \frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|t^{3-\sigma}}{|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(4-\sigma)}\end{pmatrix}\int_{0}^{\xi}\left(\xi-s\right)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right|ds \\
&+\begin{pmatrix}\frac{\left|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3\right|t^{1-\sigma}}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(2-\sigma)} \\ \frac{|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|t^{3-\sigma}}{|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)\Gamma(4-\sigma)}\end{pmatrix}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{\alpha-3}\left|f(s,y(s),D^{\delta}y(s))\right|ds,
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\left|D^{\sigma}y(t)\right| \leq\ & \mu L_1\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\sigma+1\right)}+\frac{\left|\lambda_1\right|\eta^{\alpha}+1}{\left|\lambda_1\eta-1\right|\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)}\right] \\
&+\mu L_1\left[\frac{\left|\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\eta^3\right|\xi^{\alpha-2}+\left|1-\lambda_1\eta^3\right|}{6\left|\lambda_1\eta-1\right|\left|\lambda_2\xi-1\right|\Gamma\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(2-\sigma\right)}\right] \\
&+\mu L_1\left[\frac{\left|\lambda_1\lambda_2\eta-\lambda_2\right|\xi^{\alpha-2}+\left|\lambda_1\eta-1\right|}{\left|\lambda_1\eta-1\right|\left|\lambda_2\xi-1\right|\Gamma\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(4-\sigma\right)}\right].
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Donc,

$$
\left|D^{\sigma}y(t)\right| \leq \mu L_1 N_2 \tag{3.53}
$$

De (3.50) et (3.53), nous avons

$$
\left\|y\right\|_X \leq \mu L_1\left(N_1+N_2\right). \tag{3.54}
$$

De la même manière, nous trouverons

$$
\left\|x\right\|_Y \leq \mu L_2\left(N_3+N_4\right). \tag{3.55}
$$

Par conséquent

$$
\left\|(x,y)\right\|_{X\times Y} \leq \mu L_1\left(N_1+N_2\right)+\mu L_2\left(N_3+N_4\right). \tag{3.56}
$$

Ainsi,

$$\|\phi\,(x,y)\|_{X\times Y}<\infty. \tag{3.57}$$

Ce qui montre que l'ensemble Ω est borné.

De **A, B, C** et **D,** nous concluons que ϕ a au moins un point fixe (solution du Pb(3.1)). ■

Exemple 3.2 *Considérons le problème suivant :*

$$\left\{\begin{array}{c} D^{\frac{15}{4}}x(t)+\frac{1}{(t^2+1)\left(2+\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|\right)}+\frac{2e^{-t}|\cos(ty(t))|}{7(1+e^t)^2\left(2+\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|\right)}=0,\\ \\ D^{\frac{10}{3}}y(t)+\frac{1}{\left(e^{t^2}+1\right)(1+|x(t)|)}+\frac{e^{-t}}{7(1+t)^2\left(1+\left|D^{\frac{5}{2}}x(t)\right|\right)}=0, \\ \\ x(0)=y(0)=0,x(1)=\frac{3}{4}x(\frac{1}{3}),y(1)=\frac{3}{4}y(\frac{1}{3}),\\ x''(0)=y''(0)=0,x''(1)=\frac{4}{5}x(\frac{2}{3}),y''(1)=\frac{4}{5}y(\frac{2}{3}). \end{array}\right. , \tag{3.58}$$

où $\alpha=\frac{15}{4},\beta=\frac{10}{3},\sigma=\frac{5}{3},\delta=\frac{5}{2},\lambda_1=\frac{3}{4},\lambda_2=\frac{4}{5},\eta=\frac{1}{3},\xi=\frac{2}{3}$ *et*

$$\begin{aligned} f(s,y(s),D^{\delta}y(s)) &= \frac{1}{(t^2+1)\left(2+\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|\right)}+\frac{2e^{-t}\left|\cos\left(ty(t)\right)\right|}{7\left(1+e^t\right)^2\left(2+\left|D^{\frac{7}{3}}y(t)\right|\right)},\\ g(s,x(s),D^{\sigma}x(s)) &= \frac{1}{\left(e^{t^2}+1\right)\left(1+|x(t)|\right)}+\frac{e^{-t}}{7\left(1+t\right)^2\left(1+\left|D^{\frac{5}{2}}x(t)\right|\right)}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Les fonctions f *et* g *vérifient les conditions des hypothèses* $(H_1)-(H_3)$.

D'après le théoreme 3.2, *le problème* (3.58) *a au moins une solution dans* $[0,1]$.

3.2 Problème2 : Dérivée de Caputo/ Intégrale de R-L

Dans cette section, nous introduisons un système d'équations fractionnaires [67] et nous montrons l'existence de la solution en utilisant le théoreme de Schaefer. L'unicité de cette solution est discutée dans la partie qui suit en faisant intervenir le théorème de Banach.

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}u_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i^1(t, u_1(t), ..., u_m(t), D^{\gamma_1}u_1(t), ..., D^{\gamma_m}u_m(t)), \ t \in J, \\ D^{\alpha_2}u_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i^2(t, u_1(t), ..., u_m(t), D^{\gamma_1}u_1(t), ..., D^{\gamma_m}u_m(t)), \ t \in J, \\ \vdots \\ D^{\alpha_m}u_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i^m(t, u_1(t), ..., u_m(t), D^{\gamma_1}u_1(t), ..., D^{\gamma_m}u_m(t)), \ t \in J, \\ u_k(0) = a_0^k, \\ u_k^{(j)}(0) = 0, \ j = 1, 2, ..., n-2, \\ u_k^{(n-1)}(0) = J^{r_k}u_k(\tau_k), \ r_k > 0, \\ k = 1, 2, ..., m, \end{cases} \tag{3.60}$$

où $n-1 < \alpha_k < n$, $\gamma_k \in \left]0, n-1\right[$ tels que $k = 1, 2, ..., m$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, m, l des entiers naturels non nuls, $\tau \in]0,1[$, $J := [0,1]$.

Nous supposons aussi que $D^{\alpha_k}, D^{\gamma_k}$, $k = 1, 2, ..., m$ sont des opérateurs de dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α_k et γ_k respectivement. Les fonctions $\left(f_i^k\right)_{i=1,...,l}^{k=1,2,...,m}$: $J \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ seront spécifiées plus tard.

Maintenant, nous allons présenter la solution intégrale du système (3.60) :

Lemme 3.2 *Considérons le problème :*

$$D^{\alpha_k}u_k(t) = \sum_{i=1}^{l} Q_i^k(t), \ t \in J, \ n-1 < \alpha_k < n, \ n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \tag{3.61}$$

où $\left(Q_i^k\right)_{i=1,...,l}^{k=1,...,m} \in C([0,1], \mathbb{R})$, $m, l \in \mathbb{N}^*$, *tel que :*

$$\begin{cases} u_k(0) = a_0^k, \\ u_k^{(j)}(0) = 0, \ j = 1, 2, ..., n-2, \\ u_k^{(n-1)}(0) = J^{r_k}u_k(\tau_k), \\ k = 1, 2, ..., m. \end{cases} \tag{3.62}$$

Alors pour tout $k = 1, 2, ..., m$, *nous avons :*

$$\begin{aligned} u_k(t) = & -\sum_{i=1}^{l} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} Q_i^k(s)\, ds + a_0^k \\ & + \frac{\Gamma(r_k+n)t^{n-1}}{(n-1)!\left(\tau_k^{r_k+n-1} - \Gamma(r_k+n)\right)} \left(\sum_{i=1}^{l} \int_0^{\tau_k} \frac{(\tau_k - s)^{\alpha_k + r_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k + r_k)} Q_i^k(s)\, ds - \frac{a_0^k \tau_k^{r_k}}{\Gamma(r_k+1)} \right). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Preuve. En appliquant le lemme 2.3 au problème (3.61) , nous pouvons écrire :

$$u_k(t) = \sum_{i=1}^{l} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} Q_i^k(s)\, ds - c_0^k - c_1^k t - c_2^k t^2 - ... - c_{n-1}^k t^{n-1}, \tag{3.64}$$

avec $c_j^k \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, ..., n-1$, $k = 1, 2, ..., m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $n-1 < \alpha_k < n$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Pour tout $k = 1, 2, ..., m$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_k(0) = -c_0^k, \\ u_k^{(j)}(0) = -j!c_j^k, \;\; j = 1, 2, ..., n-2, \\ u_k^{(n-1)}(0) = -(n-1)!c_{n-1}^k. \end{array} \right. \tag{3.65}$$

En utilisant les conditions de (3.62) , nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{c} c_0^k = -a_0^k, \\ c_j^k = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n-2, \\ c_{n-1}^k = \frac{\Gamma(r_k+n)}{\Gamma(n)\left(\tau_k^{r_k+n-1} - \Gamma(r_k+n)\right)} \left(a_0^k \frac{\tau_k^{r_k}}{\Gamma(r_k+1)} - \sum_{i=1}^{l} J^{\alpha_k + r_k} Q_i^k(\tau_k) \right), \\ k = 1, 2, ..., m. \end{array} \right. \tag{3.66}$$

Substituons les valeurs de c_j^k données par (3.66) dans (3.64), nous aurons (3.63). ce qui achève la démonstration.

■

Passons maintenant à considérer l'espace de Banach :

$$S := \{(u_1, u_2, ..., u_m) : u_k \in C([0,1], \mathbb{R}), \;\; D^{\gamma_k} u_k \in C([0,1], \mathbb{R}), \;\; k = 1, 2, ..., m\}, \tag{3.67}$$

muni de la norme :

$$\|(u_1, u_2, ..., u_m)\|_S = \max_{1 \leq k \leq m} \left(\|u_k\|_\infty, \|D^{\gamma_k} u_k\|_\infty \right), \tag{3.68}$$

où

$$\|u_k\|_\infty = \sup_{t \in J} |u_k|, k = 1, 2, ...\cdot$$

Hypothèses

(H_1) : Il existe des constantes positives $\left(\mu_{i,\; i=1,...,l}^{k,\; k,=1,2,...,m}\right)_{j,\; j=1,2,...,2m}$, telles que pour tout $t \in [0,1]$ et $\forall (u_1, u_2, ..., u_{2m}), (v_1, v_2, ..., v_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$, nous avons

$$\left| f_i^k(t, u_1, u_2, ..., u_{2m}) - f_i^k(t, v_1, v_2, ..., v_{2m}) \right| \leq \sum_{j=1}^{2m} \left(\mu_i^k\right)_j |u_j - v_j|.$$

(H_2) : Les fonctions $\left(f_i^k\right)_{i=1,2,...,l}^{k=1,2,...,m}$: $[0,1]\times\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}$; $m,l\in\mathbb{N}^*$ sont continues.

(H_3) : Il existe des fonctions non négatives $\left(\omega_i^k\right)_{i=1,...,l}^{k=1,2...,m}\in C\left([0,1]\right)$, telles que : $\forall\, t\in[0,1]$ et $\forall\left(u_1,u_2,...,u_{2m}\right)\in\mathbb{R}^{2m}$,

$$\left|f_i^k\left(t,u_1,u_2,...,u_{2m}\right)\right|\leq\omega_i^k\left(t\right),$$

avec

$$\sup_{t\in J}\omega_i^k\left(t\right)=C_i^k.$$

Les quantités suivantes seront utilisées le long de la démonstration :

$$\begin{aligned}
\Sigma_k &= \sum_{j=1}^{2m}\sum_{i=1}^{l}\left(\mu_i^k\right)_j,\\
\digamma_k &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)},\\
\digamma_k^* &:= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)}+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)},
\end{aligned}\tag{3.69}$$

et

$$\begin{aligned}
W_k &= \left|a_0^k\right|+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(r_k+1\right)},\\
W_k^* &= \frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(r_k+1\right)}.
\end{aligned}\tag{3.70}$$

3.2.1 Continuité et Bornitude

Théorème 3.3 *Soient les fonctions* $\left(f_i^k\right)_{i=1,2,...,l}^{k=1,2,...,m}$ *satisfaisants les hypothèses* (H_2) *et* (H_3)*. Alors, le système* (3.60) *a au moins une solution sur* J*.*

La preuve de ce théorème est basée sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Preuve. Nous définissons l'opérateur non linéaire $P:S\to S$, tel que

$$P\left(u_1,u_2,...,u_m\right)(t):=\left(P_1\left(u_1,u_2,...,u_m\right)(t),...,P_m\left(u_1,u_2,...,u_m\right)(t)\right),\ t\in J,\tag{3.71}$$

tel que :

$$P_k\left(u_1,u_2,...,u_m\right)(t):=$$

$$-\sum_{i=1}^{l}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_i^k\left(t,u_1(t),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds+a_0^k$$
$$+\frac{\Gamma(r_k+n)\,t^{n-1}}{(n-1)!\left(\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma(r_k+n)\right)} \tag{3.72}$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{l}\int_0^{\tau_k}\frac{(\tau_k-s)^{\alpha_k+r_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+r_k)} f_i^k\left(t,u_1(t),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds-\frac{a_0^k\tau_k^{r_k}}{\Gamma(r_k+1)}\right).$$

En premier, nous montrons que P est complètement continu. Considérons l'ensemble : $\Omega_\sigma := \left\{(u_1,u_2,...,u_m)\in S;\ \left\|(u_1,u_2,...,u_m)\right\|_S\leq\sigma,\ \sigma>0\right\}$, et nous montrons que P envoie les ensembles bronés dans des ensembles bornés dans S.

Soit $(u_1,u_2,...,u_m)\in\Omega_\sigma$. Les hypothèses (H_3) impliquent que

$$\left\|P_k\left(u_1,u_2,...,u_m\right)\right\|_\infty$$
$$\begin{aligned}\leq\ & \frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|f_i^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)\right| \\ & +\left|a_0^k\right|+\frac{\Gamma(r_k+n)\,t^{n-1}\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(r_k+1)} \\ & +\frac{\Gamma(r_k+n)\,t^{n-1}\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(\alpha_k+r_k+1)} \\ & \times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|f_i^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)\right|.\end{aligned} \tag{3.73}$$

Alors,

$$\left\|P_k\left(u_1,u_2,...,u_m\right)\right\|_\infty$$
$$\begin{aligned}\leq\ & \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{\Gamma(r_k+n)\,\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(\alpha_k+r_k+1)}\right)\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\omega_i^k(s) \\ & +\left|a_0^k\right|+\frac{\Gamma(r_k+n)\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(r_k+1)}.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Par conséquent,

$$\left\| P_k\left(u_1,u_2,...,u_m\right)\right\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)}\right)\sum_{i=1}^{l}C_i^k$$

$$+\left|a_0^k\right|+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(r_k+1\right)}. \tag{3.75}$$

Donc,

$$\left\| P_k\left(u_1,u_2,...,u_m\right)\right\|_\infty \leq F_k\sum_{i=1}^{l}C_i^k+W_k. \tag{3.76}$$

De plus,

$$\left\| D^{\gamma_k}P_k\left(u_1,u_2,...,u_m\right)\right\|_\infty$$

$$\leq \frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)t^{n-\gamma_k-1}\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(r_k+1\right)}$$

$$+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)t^{n-\gamma_k-1}\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)} \tag{3.77}$$

$$\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|.$$

Alors,

$$\left\| D^{\gamma_k}P_k\left(u_1,u_2,...,u_m\right)\right\|_\infty$$

$$\leq \left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)}+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)}\right)\sum_{i=1}^{l}\omega_i^k\left(t\right)$$

$$+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(r_k+1\right)}.$$

Ainsi,

$$\|D^{\gamma_k}P_k(u_1,u_2,...,u_m)\|_\infty \leq F_k^*\sum_{i=1}^{l}C_i^k + W_k^*. \tag{3.78}$$

D'après (3.76) et (3.78) , nous obtenons

$$\|P(u_1,u_2,...,u_m)\|_S \leq \max_{1\leq k\leq m}\left(F_k\sum_{i=1}^{l}C_i^k + W_k,\ F_k^*\sum_{i=1}^{l}C_i^k + W_k^*\right) < \infty. \tag{3.79}$$

Donc, P envoie les ensembles bornés de S dans des ensembles bornés dans S.

L'hypothèse (H_2) implique que l'opérateur P est continu dans S. Alors, soit $t_1, t_2 \in [0,1]$; $t_1 < t_2$, et $(u_1,u_2,...,u_m) \in S$, nous avons :

$$\|P_k(u_1,u_2,...,u_m)(t_2) - P_k(u_1,u_2,...,u_m)(t_1)\|_\infty \leq$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}\left(2(t_2-t_1)^{\alpha_k} + \left(t_2^{\alpha_k} - t_1^{\alpha k}\right)\right)\sum_{i=1}^{l}C_i^k \\
&+\frac{\Gamma(r_k+n)\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1} - \Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(r_k+1)}\left(t_2^{n-1} - t_1^{n-1}\right) \\
&+\frac{\Gamma(r_k+n)\,\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1} - \Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(\alpha_k+r_k+1)}\left(t_2^{n-1} - t_1^{n-1}\right)\sum_{i=1}^{m}C_i^k
\end{aligned} \tag{3.80}$$

et

$$\|D^{\gamma_k}P_k(u_1,u_2,...,u_m)(t_2) - D^{\gamma_k}P_k(u_1,u_2,...,u_m)(t_1)\|_\infty \leq$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2(t_2-t_1)^{\alpha_k-\gamma_k} + \left(t_2^{\alpha_k-\gamma_k} - t_1^{\alpha_k-\gamma_k}\right)}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)}\sum_{i=1}^{l}C_i^k \\
&+\frac{\Gamma(r_k+n)\left|a_0^k\right|\tau_k^{r_k}}{\Gamma(n-\gamma_k)\left|\tau_k^{r_k+n-1} - \Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(r_k+1)}\left(t_2^{n-\gamma_k-1} - t_1^{n-\gamma_k-1}\right) \\
&+\frac{\Gamma(r_k+n)\,\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{\Gamma(n-\gamma_k)\left|\tau_k^{r_k+n-1} - \Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(\alpha_k+r_k+1)}\left(t_2^{n-\gamma_k-1} - t_1^{n-\gamma_k-1}\right)\sum_{i=1}^{l}C_i^k.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Nous pouvons remarquer que les seconds membres des inégalités (3.80) et (3.81) sont indépendents du vecteur $(u_1,u_2,...,u_m)$ et tendent vers zéro quand $t_2 - t_1 \to 0$.

Par conséquent, P est equi-continu. Ainsi, l'operateur P est complètement continu.

Finallement, nous montrons que l'ensemble λ est borné, avec :

$$\lambda := \{(u_1, u_2, ..., u_m) \in S, \ \ (u_1, u_2, ..., u_m) = \eta P (u_1, u_2, ..., u_m), \ 0 < \eta < 1 \}. \qquad (3.82)$$

Pour tout $(u_1, u_2, ..., u_m) \in \lambda$, nous avons $(u_1, u_2, ..., u_m)(t) = \eta P (u_1, u_2, ..., u_m)(t)$, $\forall t \in [0,1]$. En utilisant (3.79), nous trouverons que

$$\|(u_1, u_2, ..., u_m)\|_S \le \eta \max_{1\le k\le m} \left(F_k \sum_{i=1}^{l} C_i^k + W_k, \ F_k^* \sum_{i=1}^{l} C_i^k + W_k^* \right) < \infty. \qquad (3.83)$$

Donc, λ est borné.

Grâce au lemme de Schaefer, l'opérateur P a au moins un point fixe qui est solution du système (3.60). Ainsi, le théorème 4.3 est démontré.

■

Exemple 3.3 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{19}{4}} u_1(t) = \\ \frac{t \sin\left(D^{\frac{7}{2}} u_1(t) + D^{\frac{4}{3}} u_2(t) + D^{\frac{15}{4}} u_3(t)\right)}{1 + |\sin(u_1(t) + u_2(t) + u_3(t))|} + \frac{e^t \sin\left(u_1(t) D^{\frac{7}{2}} u_1(t)\right)}{1 + \left|\cos\left(u_2(t) + D^{\frac{4}{3}} u_2(t) + u_3(t) + D^{\frac{15}{4}} u_3(t)\right)\right|}, \\ D^{\frac{17}{4}} u_2(t) = \\ \frac{e^t \sin(u_1(t) + u_2(t) + u_3(t))}{2 - \sin\left(D^{\frac{7}{2}} u_1(t) + D^{\frac{4}{3}} u_2(t) + D^{\frac{15}{4}} u_3(t)\right)} + \frac{\sin(u_2(t) u_3(t))}{\pi(t+1) + \sin\left(u_1(t) D^{\frac{7}{2}} u_1(t) D^{\frac{4}{3}} u_2(t) + D^{\frac{15}{4}} u_3(t)\right)}, \\ D^{\frac{25}{6}} u_3(t) = \\ \sin(u_1(t) u_2(t) u_3(t)) \, e^{tcox\left(D^{\frac{7}{2}} u_1(t) + D^{\frac{4}{3}} u_2(t) + D^{\frac{15}{4}} u_3(t)\right)} + \frac{t \sin(u_1(t) u_2(t) u_3(t))}{e^{D^{\frac{7}{2}} u_1(t) + D^{\frac{4}{3}} u_2(t) + D^{\frac{15}{4}} u_3(t)}}, \\ u_1(0) = 3\sqrt{2}, \ u_1^{(1)}(0) = u_1^{(2)}(0) = u_1^{(3)}(0) = 0, \ u_1^{(4)}(0) = J^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{2}\right), \\ u_2(0) = \sqrt{7}, \ u_2^{(1)}(0) = u_2^{(2)}(0) = u_2^{(3)}(0) = 0, \ u_2^{(4)}(0) = J^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right), \\ u_3(0) = \sqrt{5}, \ u_3^{(1)}(0) = u_3^{(2)}(0) = u_3^{(3)}(0) = 0, \ u_3^{(4)}(0) = J^{\frac{5}{8}} \left(\frac{4}{5}\right). \end{cases} \qquad (3.84)$$

Nous avons : $n = 5$, $l = 2$, $\alpha_1 = \frac{19}{4}$, $\gamma_1 = \frac{7}{2}$; $\alpha_2 = \frac{17}{4}$, $\gamma_2 = \frac{4}{3}$; $\alpha_3 = \frac{25}{6}$, $\gamma_3 = \frac{15}{4}$, $r_1 = \frac{1}{8}$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = \frac{5}{8}$, $\tau_1 = \frac{1}{2}$, $\tau_2 = \frac{2}{3}$, $\tau_3 = \frac{4}{5}$, $J = [0,1]$.

Pour tout $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$, $\forall t \in [0,1]$, *nous obtenons :*

$$\left| f_1^1(t,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\right| \leq \omega_1^1(t) = \frac{t\left|\sin u_4 + u_5 + u_6\right|}{1+\left|\sin(u_1+u_2+u_3)\right|} \leq C_1^1 = 1,$$

$$\left| f_2^1(t,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\right| \leq \omega_2^1(t) = \frac{e^t\left|\sin(u_1u_4)\right|}{1+\left|\cos(u_2+u_5+u_3+u_6)\right|} \leq C_2^1 = e,$$

$$\left| f_1^2(t,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\right| \leq \omega_1^2(t) = \frac{e^t\left|\sin(u_1+u_2+u_3)\right|}{2-\sin(u_4+u_5+u_6)} \leq C_1^2 = e,$$

$$\left| f_2^2(t,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\right| \leq \omega_2^2(t) = \frac{\left|\sin(u_2u_3)\right|}{\pi(t+1)+\sin(u_1u_4u_5+u_6)} \leq C_2^2 = \frac{1}{\pi-1},$$

$$\left| f_1^3(t,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\right| \leq \omega_1^3(t) = \left|\sin(u_1u_2u_3)\right| e^{tcox(u_4+u_5+u_6)} \leq C_1^3 = e,$$

$$\left| f_2^3(t,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\right| \leq \omega_2^3(t) = \frac{t\left|\sin(u_1(t)\,u_2(t)\,u_3(t))\right|}{e^{u_4t+u_5+u_6}} \leq C_2^3 = 1.$$

Les fonction f_i^k sont continues et bornées dans $J \times \mathbb{R}^6$. En utilisant le théorème 3.3, le système (3.84) *a au moins une solution dans J.*

3.2.2 Lipshitzianité Conditionnée

L'existence et l'unicité de la solution de (3.60) est assurée par le théoreme suivant :

Théorème 3.4 *Supposons que l'hypothèse* (H_1) *et la condition :*

$$\max_{1\leq k\leq m} \Sigma_k\left(\digamma_k, \digamma_k^*\right) < 1, \tag{3.85}$$

sont satisfaites, alors le système (3.60) *a une solution unique sur J.*

Preuve. Commonçons par monter que P est contractant :

Soit $(u_1,u_2,...,u_m)$, $(v_1,v_2,...,v_m) \in S$. Alors, pour tout $k = 1,2,...,m$, $t \in J$, nous avons :

$$\left|P_k(u_1,u_2,...,u_m)(t) - P_k(v_1,v_2,...,v_m)(t)\right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{c} f_i^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right) \\ -f_i^k\left(s,v_1(s),...,v_m(s),D^{\gamma_1}v_1(s),...,D^{\gamma_m}v_m(s)\right)\end{array}\right| \\
&+\frac{\Gamma(r_k+n)\,\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma(r_k+n)\right|\Gamma(\alpha_k+r_k+1)} \\
&\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{c} f_i^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right) \\ -f_i^k\left(s,v_1(s),...,v_m(s),D^{\gamma_1}v_1(s),...,D^{\gamma_m}v_m(s)\right)\end{array}\right|.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

En utilisant (H_1), nous obtenons :

$$\left\| P_k\left(u_1, u_2, ..., u_m\right) - P_k\left(v_1, v_2, ..., v_m\right)\right\|_\infty \leq$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{(n-1)!\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)}\right) \\ \times\sum_{i=1}^{l}\left(\left(\mu_i^k\right)_1+\left(\mu_i^k\right)_2+...+\left(\mu_i^k\right)_{2m}\right)\max_{1\leq k\leq m}\left(\left\|u_k-v_k\right\|_\infty, \left\|D^{\gamma_k}\left(u_k-v_k\right)\right\|_\infty\right).\end{gathered} \tag{3.87}$$

Puis,

$$\left\| P_k\left(u_1, u_2, ..., u_m\right) - P_k\left(v_1, v_2, ..., v_m\right)\right\|_\infty \leq$$

$$\Sigma_k F_k \left\|\left(u_1-v_1, ..., u_m-v_m, D^{\gamma_1}\left(u_1-v_1\right), ..., D^{\gamma_m}\left(u_m-v_m\right)\right)\right\|_S. \tag{3.88}$$

D'autre part, nous avons

$$\left|D^{\gamma_k}P_k\left(u_1, u_2, ..., u_m\right)(t) - D^{\gamma_k}P_k\left(v_1, v_2, ..., v_m\right)(t)\right| \leq$$

$$\begin{gathered}\frac{t^{\alpha_k-\gamma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{c} f_i^k\left(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1}u_1(s), ..., D^{\gamma_m}u_m(s)\right) \\ -f_i^k\left(s, v_1(s), ..., v_m(s), D^{\gamma_1}v_1(s), ..., D^{\gamma_m}v_m(s)\right)\end{array}\right| \\ +\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)t^{n-\gamma_k-1}\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)} \\ \times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{c} f_i^k\left(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1}u_1(s), ..., D^{\gamma_m}u_m(s)\right) \\ -f_i^k\left(s, v_1(s), ..., v_m(s), D^{\gamma_1}v_1(s), ..., D^{\gamma_m}v_m(s)\right)\end{array}\right|.\end{gathered} \tag{3.89}$$

Alors

$$\left\| D^{\gamma_k}P_k\left(u_1, u_2, ..., u_m\right) - D^{\gamma_k}P_k\left(v_1, v_2, ..., v_m\right)\right\|_\infty \leq$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)}+\frac{\Gamma\left(r_k+n\right)\tau_k^{\alpha_k+r_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\left|\tau_k^{r_k+n-1}-\Gamma\left(r_k+n\right)\right|\Gamma\left(\alpha_k+r_k+1\right)}\right) \\ \times\sum_{i=1}^{2m}\sum_{i=1}^{l}\mu_i^k\left\|\left(u_1-v_1, ..., u_m-v_m, D^{\gamma_1}\left(u_1-v_1\right), ..., D^{\gamma_m}\left(u_m-v_m\right)\right)\right\|_S.\end{gathered} \tag{3.90}$$

Donc, nous avons

$$\|D^{\gamma_k}P_k(u_1,u_2,...,u_m) - D^{\gamma_k}P_k(v_1,v_2,...,v_m)\|_\infty \leq$$
$$\Sigma_k F_k^* \|(u_1-v_1,...,u_m-y_m, D^{\gamma_1}(u_1-v_1),...,D^{\gamma_m}(u_m-v_m))\|_S . \quad (3.91)$$

En combinant les deux inégalités dans (3.88) et (3.91), nous aurons alors :

$$\|P(u_1,u_2,...,u_m) - P(v_1,v_2,...,v_m)\|_S \leq$$
$$\max_{1\leq k\leq n} \Sigma_k (F_k, F_k^*) \|(u_1-v_1,...,u_m-v_m, D^{\gamma_1}(u_1-v_1),...,D^{\gamma_m}(u_m-v_m))\|_S . \quad (3.92)$$

Comme la condition (3.85) impose que $\max_{1\leq k\leq n} \Sigma_k (F_k, F_k^*) < 1$, nous pouvons donc dire que l'opérateur P est une contraction.

Ainsi P a un point fixe qui représente la solution du système (3.60). Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 3.4 *Soit à considérer le système suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{11}{3}}u_1(t) = \frac{1}{12\pi^3(t+1)}\left(\cos(u_1(t)) + \cos(u_2(t)) + \frac{\left|D^{\frac{8}{3}}u_1(t)+D^{\frac{5}{2}}u_2(t)\right|}{\left(1+\left|D^{\frac{4}{3}}u_1(t)+D^{\frac{3}{2}}u_2(t)\right|\right)}\right) \\ \quad + \frac{1}{64\pi(t+1)}\left(\frac{|u_1(t)+u_2(t)|}{2\pi(1+|u_1(t)+u_2(t)|)} + \sin D^{\frac{8}{3}}u_1(t) + \sin D^{\frac{5}{2}}u_2(t)\right), \\ D^{\frac{19}{5}}u_2(t) = \frac{1}{14\pi^3 e^t}\left(\frac{|u_1(t)+u_2(t)|}{1+|u_1(t)+u_2(t)|} + \sin\left(D^{\frac{8}{3}}u_1(t)\right) + \sin\left(D^{\frac{5}{2}}u_2(t)\right)\right) \\ \quad + \frac{t^2}{6\pi^3}\left(\frac{\left|\sin(u_1(t))+\cos(u_2(t))+\cos\left(D^{\frac{8}{3}}u_1(t)\right)+\sin\left(D^{\frac{5}{2}}u_2(t)\right)\right|}{1+\left|\sin(u_1(t))+\cos(u_2(t))-\cos\left(D^{\frac{8}{3}}u_1(t)\right)+\sin\left(D^{\frac{5}{2}}u_2(t)\right)\right|}\right), \\ u_1(0) = \sqrt{3},\ u_1^{(1)}(0) = u_1^{(2)}(0) = 0,\ u_1^{(3)}(0) = J^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{7}\right), \\ u_2(0) = \sqrt{5},\ u_2^{(1)}(0) = u_2^{(2)}(0) = 0,\ u_2^{(3)}(0) = J^{\frac{1}{3}}\left(\frac{6}{7}\right). \end{cases} \quad (3.93)$$

Nous avons alors :
$n=4,\ l=2,\ \alpha_1=\frac{11}{3},\ \alpha_2=\frac{19}{5},\ \gamma_1=\frac{8}{3},\ \gamma_2=\frac{5}{2},\ r_1=\frac{1}{2},\ r_2=\frac{1}{3},\ \tau_1=\frac{3}{7},\ \tau_2=\frac{6}{7},\ J=[0,1]$,

$$f_1^1(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{1}{12\pi^3(t+1)}\left(\cos u_1 + \cos u_2 + \frac{|u_3+u_4|}{(1+|u_3+u_4|)}\right),$$
$$f_2^1(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{1}{64\pi(t+1)}\left(\frac{|u_1+u_2|}{2\pi(1+|u_1+u_2|)} + \sin u_3 + \sin u_4\right),$$
$$f_1^2(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{1}{14\pi^3 e^t}\left(\frac{|u_1+u_2|}{1+|u_1+u_2|} + \sin u_3 + \sin u_4\right),$$

$$f_2^2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{t^2}{6\pi^3}\left(\frac{|\sin u_1+\cos u_2+\cos u_3+\sin u_4|}{1+|\sin u_1+\cos u_2-\cos u_3+\sin u_4|}\right).$$

Pour tout $t\in J$ *et* $(u_1,u_2,u_3,u_4),\ (v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4$, *nous obtenons :*

$$\left|f_1^1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-f_1^1(t,v_1,v_2,v_3,v_4)\right|\leq$$
$$\frac{1}{12\pi^3}|u_1-v_1|+\frac{1}{12\pi^3}|u_2-v_2|+\frac{1}{12\pi^3}|u_3-v_3|+\frac{1}{12\pi^3}|u_4-v_4|,$$
$$\left|f_2^1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-f_2^1(t,v_1,v_2,v_3,v_4)\right|\leq$$
$$\frac{1}{128\pi^2}|u_1-v_1|+\frac{1}{128\pi^2}|u_2-v_2|+\frac{1}{64\pi}|u_3-v_3|+\frac{1}{64\pi}|u_4-v_4|,$$
$$\left|f_1^2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-f_1^2(t,v_1,v_2,v_3,v_4)\right|\leq$$
$$\frac{1}{14\pi^3}|u_1-v_1|+\frac{1}{14\pi^3}|u_2-v_2|+\frac{1}{14\pi^3}|u_3-v_3|+\frac{1}{14\pi^3}|u_4-v_4|,$$
$$\left|f_2^2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-f_2^2(t,v_1,v_2,v_3,v_4)\right|\leq$$
$$\frac{1}{6\pi^3}|u_1-v_1|+\frac{1}{6\pi^3}|u_2-v_2|+\frac{1}{6\pi^3}|u_3-v_3|+\frac{1}{6\pi^3}|u_4-v_4|.$$

Nous prenons :

$$\left(\mu_1^1\right)_1=\left(\mu_1^1\right)_2=\left(\mu_1^1\right)_3=\left(\mu_1^1\right)_4=\frac{1}{12\pi^3},$$
$$\left(\mu_2^1\right)_1=\left(\mu_2^1\right)_2=\frac{1}{128\pi^2},\ \left(\mu_2^1\right)_3=\ \left(\mu_2^1\right)_4=\frac{1}{64\pi},$$
$$\left(\mu_1^2\right)_1=\left(\mu_1^2\right)_2=\left(\mu_1^2\right)_3=,\ \left(\mu_1^2\right)_4=\frac{1}{14\pi^3},$$
$$\left(\mu_2^2\right)_1=\left(\mu_2^2\right)_2=\left(\mu_2^2\right)_3=\ \left(\mu_2^2\right)_4=\frac{1}{6\pi^3}.$$

Et puis,

$$\begin{aligned}\Sigma_1\digamma_1&=0.001517,\ \Sigma_2\digamma_2=0.001820,\\ \Sigma_1\digamma_1^*&=0.022304,\ \Sigma_2\digamma_2^*=0.027009.\end{aligned}$$

En effet,

$$\max\left(\Sigma_1\digamma_1,\ \Sigma_2\digamma_2,\ \Sigma_1\digamma_1^*,\ \Sigma_2\digamma_2^*\right)<1.$$

D'après le théoreme 3.4, le système (3.93) *a une solution unique sur J.*

Chapitre 4

SYSTEMES DIFFERENTIELS FRACTIONNAIRES A SOMMES INFINIES

4.1 Nouvelle Piste de Recherche

Ce dernier chapitre consiste à étudier un nouveau type de système d'équations fractionnaires, c'est des équations couplées avec suites de fonctions aux quelles nous exigeons la convergence. Il est à noter que la littérature n'est pas encore riche dans ce sens. Les premiers résultats obtenus sont ceux de M.A. Abdellaoui *et al. dans* [2] . Les auteurs traitent le système à deux EDFs :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f_1(t, u(t), v(t)) \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} \varphi_i(s) g_i(s, u(s), v(s)) ds, \ t \in J, \\ D^{\beta}v(t) = f_2(t, u(t), v(t)) \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_i - 1}}{\Gamma(\beta_i)} \phi_i(s) h_i(s, u(s), v(s)) ds, \ t \in J, \\ \sum_{k=0}^{n-2} \left(\left| u^{(k)}(0) \right| + \left| v^{(k)}(0) \right| \right) = 0, \\ \\ u^{(n-1)}(0) = \gamma I^p u(\eta), \ p > 0, \eta \in]0,1[, \\ v^{(n-1)}(0) = \delta I^q v(\varsigma), \ q > 0, \varsigma \in]0,1[, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\alpha,\ \beta \in]n-1, n[, \alpha_i \geq 1, \beta_i \geq 1, i = 1, 2, ..., \ J := [0,1]$. Les dérivées $D^{\alpha},\ D^{\beta}$ sont au sens de Caputo et les fonctions $f_1,\ f_2,\ g_i,\ h_i,\ \varphi_i,\ \phi_i \in C_{-1}([0,1], \mathbb{R})$.

D'autres résultats sur les systèmes fractionnaires avec suites convergentes sont établis en faisant intervenir la théorie de point fixe. Dans [68] , les auteurs étudient l'existence et l'unicité de la solution d'un problème qui généralise en quelque sorte le système précédent en ayant des sommes finies et d'autres infinies dans les seconds membres des équations. Le problème traité est le suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}x(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i\left(t, y(t), D^{\gamma_1}y(t), D^{\gamma_2}y(t)\right) \\ + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-r)^{\delta_j-1}}{\Gamma(\delta_j)} \psi_j(r)\, g_j\left(r, y(r), D^{\gamma_1}y(r), D^{\gamma_2}y(r)\right) dr,\ t \in I, \\ D^{\alpha_2}y(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i\left(t, x(t), D^{\gamma_1}x(t), D^{\gamma_2}x(t)\right) \\ + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-r)^{\theta_j-1}}{\Gamma(\theta_j)} \xi_j(r)\, h_j\left(r, x(r), D^{\gamma_1}x(r), D^{\gamma_2}x(r)\right) dr,\ t \in I, \\ x(0) = a_0, y(0) = b_0, \\ x^{(j)}(0) = y^{(j)}(0) = 0,\ j = 1, 2, ..., n-2, \\ x^{(n-1)}(0) = J^{\sigma}x(\tau),\ \sigma > 0, \tau \in \left]0, 1\right[, \\ y^{(n-1)}(0) = J^{\varrho}y(\rho),\ \varrho > 0, \rho \in \left]0, 1\right[, \end{cases} \tag{4.2}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \left]n-1, n\right[, \delta_j \geq 1, \theta_j \geq 1, j = 1, 2, ..., \gamma_1, \gamma_2 \in \left]0, n-1\right[, l \in \mathbb{N}^*, \sigma, \varrho \in \mathbb{R}_+^*$, $I = [0, 1]$. $D^{\alpha_k}, D^{\gamma_k}$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre α_k et γ_k réspectivement avec $k = 1, 2$. Les fonctions $(f_i)_{i=1,...,l} : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(k_i)_{i=1,...,l} : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, et ψ_j, g_j, ξ_j, h_j des fonctions continue sur I.

4.2 Problème et Résultats

Maintenant, nous proposons un problème plus général [69] avec m équations différentielles, des ordres de dérivation trés importants, des sommes infinies et des conditions intégrales. Nous allons étudier l'existence d'au moins une solution. Puis, nous montrons l'existence et l'unicité. Le système est donné par :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} u_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i^1(t, u_1(t), ..., u_m(t), D^{\gamma_1} u_1(t), ..., D^{\gamma_m} u_m(t)) \\ + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_i - 1}}{\Gamma(\beta_i)} \varphi_j^1(s) g_j^1(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), ..., D^{\gamma_m} u_m(s)) ds, \; t \in J, \\ D^{\alpha_2} u_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i^2(t, u_1(t), ..., u_m(t), D^{\gamma_1} u_1(t), ..., D^{\gamma_m} u_m(t)) \\ + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_i - 1}}{\Gamma(\beta_i)} \varphi_j^2(s) g_j^2(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), ..., D^{\gamma_m} u_m(s)) ds, \; t \in J, \\ \vdots \\ D^{\alpha_m} u_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i^m(t, u_1(t), ..., u_m(t), D^{\gamma_1} u_1(t), ..., D^{\gamma_m} u_m(t)) \\ + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_i - 1}}{\Gamma(\beta_i)} \varphi_j^m(s) g_j^m(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), ..., D^{\gamma_m} u_m(s)) ds, \; t \in J, \\ u_k(0) = a_0^k, \\ u_k^{(r)}(0) = 0, \; r = 1, 2, ..., n-2, \\ u_k^{(n-1)}(0) = u_k(1) + J^{\sigma_k} u_k(\tau_k), \; \sigma_k > 0, \\ k = 1, 2, ..., m, \end{cases} \tag{4.3}$$

avec $\alpha_k \in]n-1, n[$, $\beta_j \geq 1$, $j = 1, 2, ...$, $\gamma_k \in]0, n-1[$, $l \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_k \in \mathbb{R}_+^*$, $J = [0, 1]$. Les opérateurs D^{α_k}, D^{γ_k} représentent les opérateurs de dérivation au sens de Caputo d'ordre α_k et γ_k réspectivement où $k = 1, ..., m$. Les fonctions $\left(f_i^k\right)_{i=1,...,l} : J \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ et φ_j^k, g_j^k des fonctions satisfaisants des hypothèses qui seront précisées plus tard.

4.2.1 Résultat Préliminaire

Lemme 4.1 *Supposons que $u \in C_{-1}^n$, $\beta_j \geq 1, j = 1, 2, ...$ et $\alpha_k \in]n-1, n[$. Si les fonctions F_i, G_j , $\Phi_j \in C_{-1}([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\Phi_j\|_\infty < \infty$ et G_j sont uniformement bornées et $\frac{\Gamma(\sigma+n)[1-\Gamma(n)]}{\Gamma(n)} \neq \tau^{\sigma+n-1}$. Alors, la solution du problème*

$$D^\alpha u(t) = \sum_{i=1}^{l} F_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_j - 1}}{\Gamma(\beta_j)} \Phi_j(s) G_j(s) ds, \; t \in J, \tag{4.4}$$

avec les conditions

$$\begin{cases} u(0) = a_0, \\ u^{(r)}(0) = 0, \; r = 1, 2, ..., n-2, \\ u^{(n-1)}(0) = u(1) + J^\sigma u(\tau) \end{cases} \tag{4.5}$$

est donnée par :

$$u(t)=\sum_{i=1}^{l}\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_i(s)\,ds+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha+\beta_j-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_j)}\Phi_j(s)\,G_j(s)\,ds$$
$$+a_0-\tfrac{\Gamma(\sigma+n)t^{n-1}}{\Gamma(\sigma+n)[1-\Gamma(n)]+\Gamma(n)\tau^{\sigma+n-1}}\times$$
$$\Bigg[\sum_{i=1}^{l}\int_{0}^{\tau}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma)}F_i(s)\,ds+\sum_{i=1}^{l}\int_{0}^{1}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_i(s)\,ds+\tfrac{a_0\tau^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}+a_0 \tag{4.6}$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{\tau}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha+\beta_j+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_j+\sigma)}\Phi_j(s)\,G_j(s)\,ds+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha+\beta_j-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_j)}\Phi_j(s)\,G_j(s)\,ds\Bigg].$$

Preuve. En moyennant le lemme 2.3 et la relation (4.4) nous avons :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{l}\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}F_i(s)\,ds+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha+\beta_j-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_j)}\Phi_j(s)\,G_j(s)\,ds \\ &\quad -c_0-c_1t-c_2t^2-...-c_{n-1}t^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

où $c_r\in\mathbb{R}$, $r=0,1,2,...,n-1$, et $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Alors,

$$\begin{cases} u(0)=-c_0, \\ u^{(r)}(0)=-r!c_r,\ r=1,2,...,n-2, \\ u^{(n-1)}(0)=-(n-1)!c_{n-1}. \end{cases} \tag{4.8}$$

En utilisant (4.5), nous avons

$$\begin{cases} c_0=-a_0, \\ c_r=0,\ r=1,2,...,n-2, \\ c_{n-1}=\tfrac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma+n)[1-\Gamma(n)]+\Gamma(n)\tau^{\sigma+n-1}}\times \\ \Bigg[\sum_{i=1}^{l}\int_{0}^{\tau}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma)}F_i(s)\,ds+\sum_{i=1}^{l}\int_{0}^{1}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_i(s)\,ds+\tfrac{a_0\tau^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}+a_0 \\ +\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{\tau}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha+\beta_j+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_j+\sigma)}\Phi_j(s)\,G_j(s)\,ds+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\tfrac{(\tau-s)^{\alpha+\beta_j-1}}{\Gamma(\alpha+\beta_j)}\Phi_j(s)\,G_j(s)\,ds\Bigg]. \end{cases} \tag{4.9}$$

Puis, en remplaçant les valeurs de c_r données par (4.9) dans (4.7) nous récupérons (4.6). Ainsi le Lemme est démontré.

■

Nous aurons besoin de l'espace de Banach suivant :

$$X := \{(u_1, ..., u_m) : u_k \in C_{-1}([0,1], \mathbb{R}),\ D^{\gamma_k} u_k \in C_{-1}([0,1], \mathbb{R}),\ k = 1, 2, ..., m\}, \quad (4.10)$$

muni de la norme

$$\|(u_1, ..., u_m)\|_X = \max_{1 \le k \le m} \left(\|u_k\|_\infty, \|D^{\gamma_k} u_k\|_\infty\right). \quad (4.11)$$

4.2.2 Hypothèses

(H_1) : Il existe des constantes positives $(\rho_i, \varrho_j)_{i=1,...,l}^{j=1,2,...}$ telles que $\forall\, t \in [0,1]$ et $\forall\, (u_1, ..., u_{2m})$, $(v_1, ..., v_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$, nous avons :

$$\left|f_i^k(t, u_1, ..., u_{2m}) - f_i^k(t, v_1, ..., v_{2m})\right| \le \rho_i \max\{|u_h - v_h|\}_{h=\overline{1,2m}}, \quad (4.12)$$

$$\left|g_j^k(t, u_1, ..., u_{2m}) - g_j^k(t, v_1, ..., v_{2m})\right| \le \varrho_j \max\{|u_h - v_h|\}_{h=\overline{1,2m}}, \quad (4.13)$$

où $j \in \mathbb{N}^*$ et $1 \le k \le m$.

(H_2) : (i) : Supposons que $\varphi_j^k \in C_{-1}([0,1], \mathbb{R})$ et g_j^k sont uniformement bornées i.e il existe $L^k \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $t \in [0,1]$ et $(u_1, ..., u_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$, nous avons

$$\left|g_j^k(t, u_1, ..., u_{2m})\right| \le L^k, j = 1, 2, ... \quad (4.14)$$

(ii) : Supposons que $\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\varphi_j^k\right\|_\infty < \infty$.

(H_3) : Les fonctions f_i^k, g_j^k :$[0,1] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., l$, $j \in \mathbb{N}^*$ sont continues et il existent des fonctions positives $\xi_i^k \in C([0,1])$, telles que : $\forall\, t \in [0,1]$ et $\forall\, (u_1, u_2, ..., u_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$

$$\left|f_i^k(t, u_1, u_2, ..., u_{2m})\right| \le \xi_i^k(t), \quad (4.15)$$

avec

$$\sup_{t \in J} \xi_i^k(t) := C_i^k. \quad (4.16)$$

Posons les quantités suivantes :

$$
\begin{aligned}
W_k &= \frac{\Gamma(\sigma_k+n)}{\Gamma(\sigma_k+n)\left[1-\Gamma(n)\right]+\Gamma(n)\,\tau_k^{\sigma_k+n-1}}, \\
Z_k &= \frac{1+|W_k|}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{|W_k|}{\Gamma(\alpha_k+\sigma_k+1)}, \\
&\quad +\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty\left(\frac{(1+|W_k|)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}+\frac{|W_k|}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}\right), \\
\varGamma_k &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_k-\gamma_k+1)}+\frac{\Gamma(n)\,|W_k|}{\Gamma(n-\gamma_k)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\sigma_k+1)}\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j-\gamma_k+1\right)}+\frac{\Gamma(n)\,|W_k|}{\Gamma(n-\gamma_k)}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Psi_k &= \left|a_0^k\right|\left(1+|W_k|\,\tau_k^{\sigma_k}+\frac{|W_k|}{\Gamma(\sigma_k+1)}\right), \\
\nabla_k &= \frac{\left|a_0^k\right|}{\Gamma(1-\gamma_k)}+\frac{\Gamma(n)\left|a_0^k W_k\right|}{\Gamma(n-\gamma_k)}\left(\tau_k^{\sigma_k}+\frac{1}{\Gamma(\sigma_k+1)}\right).
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

4.2.3 Résultat d'Existence

Le théorème suivant étudie l'existence de solutions du système fractionnaire (4.3) sur $[0,1]$.

Théorème 4.1 *Soit les fonction* $\left(f_i^k\right)_{i=1,2,\ldots,l}^{k=1,2,\ldots,m}$ *satisfaisant les hypothèses* (H_2) *et* (H_3). *Alors, le système* (4.3) *a au moins une solution dans* X.

Preuve. Prouvons que T est complètement continu. Considérons l'ensemble :

$$\Upsilon_\varsigma := \left\{(u_1,\ldots,u_m)\in X;\ \ \|(u_1,\ldots,u_m)\|_X\le\varsigma,\ \varsigma>0\right\}.$$

Les conditions de (H_2) permettent d'écrire pour tout $t\in J$:

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_j-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j\right)}\varphi_j^k(s)\,g_j^k(s,)\,ds\right\|_\infty\le\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L^k\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}. \tag{4.19}$$

Alors,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L^k\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}\leq L^k\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty\leq\infty. \tag{4.20}$$

1 : T envoie les ensembles bornés de X dans des ensembles bornés dans X.

Soit $(u_1,...,u_m)\in\Upsilon_\varsigma$, $\varsigma>A$, tel que $A=\max\left(Z_k\Sigma_k+\Psi_k,\digamma_k\Sigma_k+\nabla_k\right)$
et $\Sigma_k=\max\left(\sum\limits_{i=1}^{l}C_i^k,L^k\right)$.

Nous définissons l'opérateur :

$$T\left(u_1,...,u_m\right)(t):=\left(T_1\left(u_1,...,u_m\right)(t),...,T_m\left(u_1,...,u_m\right)(t)\right),t\in J,$$

tel que

$$\begin{aligned}
&T_k\left(u_1,...,u_m\right)(t):=\\
&\sum_{i=1}^{l}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}f_i^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds\\
&+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_k+\beta_j-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j\right)}\varphi_j^k(s)\,g_j^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds\\
&+a_0^k-W_kt^{n-1}\sum_{i=1}^{l}\int_0^{\tau_k}\frac{(\tau_k-s)^{\alpha_k+\sigma_k-1}}{\Gamma(\alpha_k+\sigma_k)}f_i^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds\\
&-W_kt^{n-1}\sum_{i=1}^{l}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}f_i^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds\\
&-W_kt^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\tau_k}\frac{(\tau_k-s)^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k\right)}\varphi_j^k(s)\,g_j^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds\\
&-W_kt^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha_k+\beta_j-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j\right)}\varphi_j^k(s)\,g_j^k\left(s,u_1(s),...,u_m(s),D^{\gamma_1}u_1(s),...,D^{\gamma_m}u_m(s)\right)ds\\
&-a_0^kW_kt^{n-1}\left(\frac{\tau_k^\sigma}{\Gamma(\sigma_k+1)}+1\right).
\end{aligned}\tag{4.21}$$

En utilisant (H_3), nous obtenons :

$$|T_k(u_1,...,u_m)(t)| \leq$$

$$\frac{1+|W_k|}{\Gamma(\alpha_k+1)} \times \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{l} \left| f_i^k(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1}u_1(s), ..., D^{\gamma_m}u_m(s)) \right|$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty (1+|W_k|)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)} \times \sup_{s\in J} \left| g_j^k(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1}u_1(s), ..., D^{\gamma_m}u_m(s)) \right|$$

$$+\frac{|W_k|\,\tau_k^{\alpha_k+\sigma_k}}{\Gamma(\alpha_k+\sigma_k+1)} \times \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{l} \left| f_i^k(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1}u_1(s), ..., D^{\gamma_m}u_m(s)) \right| \tag{4.22}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|W_k|\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty \tau_k^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)} \times \sup_{s\in J} \left| g_j^k(s, u_1(s), ..., u_m(s), D^{\gamma_1}u_1(s), ..., D^{\gamma_m}u_m(s)) \right|$$

$$+\left|a_0^k\right|\left(1+|W_k|\,\tau_k^{\sigma_k}+\frac{|W_k|}{\Gamma(\sigma_k+1)}\right).$$

Ainsi,

$$|T_k(u_1,...,u_m)(t)| \leq$$

$$\left[\frac{1+|W_k|}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{|W_k|\,\tau_k^{\alpha_k+\sigma_k}}{\Gamma(\alpha_k+\sigma_k+1)}\right] \sup_{t\in J} \sum_{i=1}^{l} \omega_i(t)$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty (1+|W_k|)}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|W_k|\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty \tau_k^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}\right] \max_{1\leq k\leq m} L^k \tag{4.23}$$

$$+\left|a_0^k\right|\left(1+|W_k|\,\tau_k^{\sigma_k}+\frac{|W_k|}{\Gamma(\sigma_k+1)}\right).$$

Sachant que

$$\Sigma_k = \max\left(\sum_{i=1}^{l} C_i^k, L^k\right),$$

alors,

$$\|T_k(u_1,...,u_m)\|_\infty \leq Z_k\Sigma_k+\Psi_k. \tag{4.24}$$

Aussi, pour $D^{\gamma_k}T_k$ nous avons :

$$\left|D^{\gamma_k}T_k\left(u_1,...,u_m\right)(t)\right| \leq$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)}\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j-\gamma_k+1\right)}\times\sup_{s\in J}\left|g_j^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$+\frac{\Gamma\left(n\right)\left|W_k\right|\tau_k^{\alpha_k+\sigma_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\Gamma\left(\alpha_k+\sigma_k+1\right)}\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n\right)\left|W_k\right|\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty\tau_k^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k}}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}\times\sup_{s\in J}\left|g_j^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$\frac{\Gamma\left(n\right)\left|W_k\right|}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{l}\left|f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n\right)\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty\left|W_k\right|}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}\times\sup_{s\in J}\left|g_j^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$+\frac{\left|a_0^k\right|}{\Gamma\left(1-\gamma_k\right)}+\frac{\Gamma\left(n\right)\left|a_0^kW_k\right|}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)}\left(\tau_k^{\sigma_k}+\frac{1}{\Gamma\left(\sigma_k+1\right)}\right). \tag{4.25}$$

En effet,

$$\left\|D^{\gamma_k}T_k\left(u_1,...,u_m\right)\right\|_\infty \leq \digamma_k\Sigma_k+\nabla_k, \tag{4.26}$$

De (4.24) et (4.26) résulte :

$$\left\|T_k\left(u_1,...,u_m\right)\right\|_X \leq \max_{1\leq k\leq m}\left(Z_k\Sigma_k+\Psi_k,\digamma_k\Sigma_k+\nabla_k\right)<\varsigma, \tag{4.27}$$

d'où, T envoie les ensembles bornés dans des ensembles bornés dans X.

2 : T est équi-continu :

D'après les conditions (H_2) , l'operateur T_k est continu dans X. Alors, soit $t_1,t_2\in[0,1]$; $t_1<t_2$ et $(u_1,...,u_m)\in X$, nous avons :

$$\left|T_k\left(u_1,...,u_m\right)\left(t_2\right)-T_k\left(u_1,...,u_m\right)\left(t_1\right)\right|\leq$$

$$\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{l}\int\limits_{0}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)ds\\ \sum\limits_{i=1}^{l}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)ds\end{array}\right|$$

$$+\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha_k+\beta_j-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j\right)}\varphi_j^k\left(s\right)g_j^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)ds\\ -\sum\limits_{j=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha_k+\beta_j-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j\right)}\varphi_j^k\left(s\right)g_j^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)ds\end{array}\right|$$

$$+\left|W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\left|\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{0}^{\tau_k}\frac{\left(\tau_k-s\right)^{\alpha_k+\sigma_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\sigma_k\right)}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)ds\right|$$

$$+\left|W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\left|\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\tau_k}\frac{\left(\tau_k-s\right)^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k\right)}\varphi_j^k\left(s\right)g_j^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)\right|$$

$$+\left|W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\left|\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(1-s\right)^{\alpha_k-1}}{\Gamma\left(\alpha_k\right)}f_i^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)ds\right|$$

$$+\left|W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\left|\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(1-s\right)^{\alpha_k+\beta_j-1}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j\right)}\varphi_j^k\left(s\right)g_j^k\left(s,u_1\left(s\right),...,u_m\left(s\right),D^{\gamma_1}u_1\left(s\right),...,D^{\gamma_m}u_m\left(s\right)\right)ds\right|$$

$$+\left|W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\left|a_0^k\left(\frac{\tau_k^{\sigma_k}}{\Gamma\left(\sigma_k+1\right)}+1\right)\right|. \tag{4.28}$$

Alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\left\|T_k\left(u_1,...,u_m\right)(t_2)-T_k\left(u_1,...,u_m\right)(t_1)\right\|_\infty \leq \\
&\left(t_2^{\alpha_k}-t_1^{\alpha_k}\right)\left[\frac{\sum_{i=1}^{l} C_i}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}+L\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}\right] \\
&+\left|W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\sum_{i=1}^{l} C_i\left[\frac{\tau_k^{\alpha_k+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\sigma_k+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}\right] \\
&+L^k\left|W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty\left[\frac{\tau_k^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}\right] \\
&+\left|a_0^k W_k\right|\left(t_2^{n-1}-t_1^{n-1}\right)\left|\frac{\tau_k^{\sigma_k}}{\Gamma\left(\sigma_k+1\right)}+1\right|.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

D'une autre part :

$$\begin{aligned}
&\left\|D^{\gamma_k}T_k\left(u_1,...,u_m\right)(t_2)-D^{\gamma_k}T_k\left(u_1,...,u_m\right)(t_1)\right\| \leq \\
&\left(t_2^{\alpha_k-\gamma_k}-t_1^{\alpha_k-\gamma_k}\right)\left[\frac{\sum_{i=1}^{l} C_i}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k+1\right)}+L^k\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j-\gamma_k+1\right)}\right] \\
&+\left(t_2^{-\gamma_k}-t_1^{-\gamma_k}\right)\frac{\left|a_0^k\right|}{\Gamma\left(\alpha_k-\gamma_k\right)} \\
&+\frac{\Gamma(n)\left|W_k\right|}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)}\left(t_2^{n-\gamma_k-1}-t_1^{n-\gamma_k-1}\right)\sum_{i=1}^{l} C_i\left[\frac{\tau_k^{\alpha_k+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\sigma_k+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}\right] \\
&+\frac{\Gamma(n)L^k\left|W_k\right|}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)}\left(t_2^{n-\gamma_k-1}-t_1^{n-\gamma_k-1}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j^k\right\|_\infty\left[\frac{\tau_k^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)}\right] \\
&+\frac{\Gamma(n)\left|a_0^k W_k\right|}{\Gamma\left(n-\gamma_k\right)}\left(t_2^{n-\gamma_k-1}-t_1^{n-\gamma_k-1}\right)\left|\frac{\tau_k^{\sigma}}{\Gamma\left(\sigma_k+1\right)}+1\right|.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Les seconds membres des inégalités (4.29) et (4.30) tendent vers zero quand $t_2 \to t_1$, ce qui implique que l'operateur T est équi-continu.

Nous concluons alors que T est completement continu.

Maintenant, nous devons montrer que l'ensemble

$$\Lambda := \{(u_1, ..., u_m) \in X,\ \ (u_1, ..., u_m) = \eta T\,(u_1, ..., u_m)\,,\ 0 < \eta < 1\ \}$$

est borné.

Pour tout $(u_1, ..., u_m) \in \Lambda$, nous avons $(u_1, ..., u_m)\,(t) = \eta T\,(u_1, ..., u_m)\,(t)\,,\ \forall t \in [0, 1]\,.$ Grâce à la formule (4.27), nous pouvons écrire :

$$\|(u_1, ..., u_m)\|_X \leq \eta \max_{1 \leq k \leq m} (Z_k \Sigma_k + \Psi_k, F_k \Sigma_k + \nabla_k) < \infty. \tag{4.31}$$

Par conséquent, Λ est borné.

D'après le théorème de point fixe de Schaefer, T a au moins un point fixe qui est solution de $(4.3)\,.$ ■

4.2.4 Résultat d'Existence et d'Unicité

Théorème 4.2 *Supposons que* $\frac{\Gamma(\sigma_k+n)[1-\Gamma(n)]}{\Gamma(n)} \neq \tau_k^{\sigma_k+n-1}$, *et* $\aleph = \max\left(\sum\limits_{i=1}^{l} \rho_i, \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varrho_j\right)$. *Le système* (4.3) *a une solution unique sur* J, *pourvu que* $(H_1)\,,\,(H_2)$ *et la condition*

$$\aleph \max_{1 \leq k \leq m} (Z_k, F_k) < 1 \tag{4.32}$$

sont vérifiées.

Preuve. Montrons que T_k est une contraction.

Soit $(u_1, ..., u_m)\,,\,(v_1, ..., v_m) \in X$. Alors, pour tout $1 \leq k \leq m$, et $t \in J$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
& \left|T_k\left(u_1, \ldots, u_m\right)(t)-T_k\left(v_1, \ldots, v_m\right)(t)\right| \leq \\
& \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{l}
f_i^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-f_i^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right| \\
& +\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left\|\varphi_j^k\right\|}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)} \sup_{s \in J}\left|\begin{array}{l}
g_j^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-g_j^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right| \\
& +\frac{\left|W_k\right| \tau_k^{\alpha_k+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\sigma_k+1\right)} \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{l}
f_i^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-f_i^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right| \\
& +\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|W_k\right|\left\|\varphi_j^k\right\| \tau_k^{\alpha_k+\beta_j+\sigma_k}}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)} \sup_{s \in J}\left|\begin{array}{l}
g_j^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-g_j^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right| \\
& +\frac{\left|W_k\right|}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{l}
f_i^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-f_i^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right| \\
& +\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|W_k\right|\left\|\varphi_j^k\right\|}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+1\right)} \sup_{s \in J}\left|\begin{array}{l}
g_j^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-g_j^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right| .
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
& \left|T_k\left(u_1, \ldots, u_m\right)(t)-T_k\left(v_1, \ldots, v_m\right)(t)\right| \leq \\
& \left[\frac{1+\left|W_k\right|}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)}+\frac{\left|W_k\right|}{\Gamma\left(\alpha_k+\sigma_k+1\right)}\right] \\
& \times \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^{l}\left|\begin{array}{l}
f_i^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-f_i^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right| \\
& +\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j^k\right\|\left(\frac{1+\left|W_k\right|}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_{j+1}\right)}+\frac{\left|W_k\right|}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}\right) \\
& \times \sup_{s \in J}\left|\begin{array}{l}
g_j^k\left(s, u_1(s), \ldots, u_m(s), D^{\gamma_1} u_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} u_m(s)\right) d s \\
-g_j^k\left(s, v_1(s), \ldots, v_m(s), D^{\gamma_1} v_1(s), \ldots, D^{\gamma_m} v_m(s)\right) d s
\end{array}\right|,
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

puis,

$$\begin{aligned} &\left\| T_k\left(u_1,...,u_m\right) - T_k\left(v_1,...,v_m\right)\right\|_\infty \leq \\ &\left[\frac{1+|W_k|}{\Gamma\left(\alpha_k+1\right)} + \frac{|W_k|}{\Gamma\left(\alpha_k+\sigma_k+1\right)}\right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j^k\right\|\left(\frac{1+|W_k|}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_{j+1}\right)} + \frac{|W_k|}{\Gamma\left(\alpha_k+\beta_j+\sigma_k+1\right)}\right)\right] \\ &\times \sum_{i=1}^{l}\rho_i \max_{1\leq k\leq m}\left\{\left\|u_k-v_k\right\|_\infty, \left\|D^{\gamma_k}\left(u_k-v_k\right)\right\|_\infty\right\}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\left\| T_k\left(u_1,...,u_m\right) - T_k\left(v_1,...,v_m\right)\right\|_\infty \leq \\ &Z_k \sum_{i=1}^{l}\rho_i \left\|\left(\left(u_1-v_1\right),...,\left(u_m-v_m\right), D^{\gamma_1}\left(u_1-v_1\right),...,D^{\gamma_m}\left(u_m-v_m\right)\right)\right\|_X \end{aligned} \tag{4.36}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} &\left\| D^{\gamma_k}T_k\left(u_1,...,u_m\right) - D^{\gamma_k}T_k\left(v_1,...,v_m\right)\right\|_\infty \leq \\ &\digamma_k \sum_{i=1}^{l}\varrho_i \left\|\left(\left(u_1-v_1\right),...,\left(u_m-v_m\right), D^{\gamma_1}\left(u_1-v_1\right),...,D^{\gamma_m}\left(u_m-v_m\right)\right)\right\|_X . \end{aligned} \tag{4.37}$$

En combinant (4.36) et (4.37), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\left\| T_k\left(u_1,...,u_m\right) - T_k\left(v_1,...,v_m\right)\right\|_X \leq \\ &\aleph \max_{1\leq k\leq m}\left(Z_k, \digamma_k\right) \left\|\left(\left(u_1-v_1\right),...,\left(u_m-v_m\right), D^{\gamma_1}\left(u_1-v_1\right),...,D^{\gamma_m}\left(u_m-v_m\right)\right)\right\|_X \end{aligned} \tag{4.38}$$

En tenant compte de la condition (4.32), l'opérateur T est contractant.

Ainsi, nous pouvons dire que T admet un point fixe unique. Donc le problème (4.3) a une solution unique sur J. $\blacksquare$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons présenté une contribution au calcul fractionnaire, à savoir les intégrales et les dérivées d'ordre non entier.

En effet, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité sur les équations différentielles fractionnaires aux ordres trés élevés, avec des conditions de forme intégrale classiques.

Nous avons aussi abordé d'autres problèmes différentiels avec conditions intégrales de type *Riemann-Liouville*.

Les problèmes traités sont beaucoups plus compliqués que ceux qui existent dans la litérature, vu que les seconds membres contiènnent des non linéarités fractionnaires faisant intervenir des suites de dérivées d'ordres arbitraires.

Dans le même sens et pour essayer de balayer tout ce qui a été fait sur les équations différentielles fractionnaires et l'existence et l'unicité, nous avons étudié d'autres problèmes sur les systèmes différentiels faisant intervenir les séries convergentes avec non linéarité dans les seconds membres. A noter, les travaux que nous avons réalisé dans ce sens sont, à notre connaissance, les premiers après celui réalisé dans [2] .

Problème ouvert *:*

Peut-on traiter les systèmes différentiels fractionnaires à dérivées de *Riemann-Liouville* faisant intervenir des séries dans les non linéarités ?

Bibliographie

[1] **M.A. Abdellaoui, Z. Dahmani :** *Solvability For Nonlinear Systems Of Differential Equations With Two Arbitrary Orders*, New Zeland Journal Of Math., Accepted 2014.

[2] **M.A. Abdellaoui, Z. Dahmani and N. Bedjaoui :** *Applications of Fixed Point Theorems for Coupled Systems of Fractional Integro-Differential Equations Involving Convergent Series*, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 45 (4), 2015.

[3] **N.H. Abel** : *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*, Oeuvres Completes, Christiania, 1881, tome premiere, 16-18.

[4] **G. Adomian :** *Solution of Coupled Nonlinear Partial Differential Equations by Decomposition*, Computers and Mathematics with Applicatons., 31, 1996, pp. 117 - 120.

[5] **A.P. Agrawal, M. Benchohra and B.A. Slimani :** *Existence Results For Differential Equations With Fractional Order And Impulses*, Mem. Differential Equations Math. Phys., 44, (2008), pp. 1-21.

[6] **A. Anber, S. Belarbi and Z. Dahmani** : *New Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations*, Analele Stintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Serbia Matematica. 21, (2013), no. 3, 33-41.

[7] **D. Baleanu, S. Zahra Nazemi and S. Rezapour :** *The Existence Of Solution For A n Dimentional System Of Multiterm Fractional Integrodifferential Equations With Antiperiodic Boundary Value Problems*, Abstract And Applied Analysis., (2014), p13.

[8] **M. Benchohra, S. Hamania, S.K. Ntouyas** : *Boundary Value Problems for Differential Equations With Fractional Order and Nonlocal Conditions*, Nonlinear Analysis. 71, 2009, pp. 2391-2396.

[9] **M.E. Bengrin and Z. Dahmani :** Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations, Int. J. Open Problems Compt., (4), pp. 7-15.

[10] **A.V. Bitsadze** : *On The Theory of Nonlocal Boundary Value Problems*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 277, 1984, pp. 17-19.

[11] **W.C. Brenke** : *An Application of Abel's Integral Equation*, American Mathematical Monthly, 29, 1922, pp. 58-60.

[12] **L. Byszewski and V. Lakshmikantham** : *Theorem About the Existence and Uniqueness of A Solution of A Nonlocal Abstract Cauchy Problem in A Banach Space*, Appl. Anal., 40 1990, 11-19.

[13] **Y. Chen and H.L. An** : *Numerical Solution of Coupled Burgers Equations With Time and Space Fractional Derivatives*, Appl. Math. Comput., 200, 2008, pp. 87-95.

[14] **D. Craiem and R.L. Armentano** : *A Fractional Derivative Model to Describe Arterial Viscoelasticity*, Biorheology., 44, pp.251–263.

[15] **V.G. Daftardar and H. Jafari :** *Solving a Multi-Order Fractional Differential Equation Using Adomian Decomposition*, Applied Mathematics and Computation., 189, 2007, pp. 541 - 548.

[16] **Z. Dahmani and L. Tabharit** : *Fractional Order Differential Equations Involving Caputo Derivative*, Theory and Applications of Mathematics & Computer Science., 4 (1), 2014, pp. 40-55.

[17] **Z. Dahmani and L. Tabharit** : *Solvability of a Boundary Value Problem with Caputo Derivative*, TARU Journal. accepted (2014).

[18] **Z. Dahmani and S. Belarbi** : *New Results for Fractional Evolution Equations Using Banach Fixed Point Theorem,* Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 5(2), 2014, pp. 22-30.

[19] **H.T. Davis :** *The Theory of Linear Operators*, Bloomington, Indiana : The Principia Press, 1936 ; p. 20.

[20] **L. Debnath and T.B. Speight** : *On Generalized Derivatives*, Pi Mu Epsilon Journal, East Carolina University, 5(5), 1971, pp. 217-220.

[21] **K. Diethelm** : *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, New York, (2010).

[22] **A.M.A. El-Sayed** : *Fractional Order Evolution Equations*, J. Fract. Calc., 7, 1995, pp. 89-100.

[23] **A. M. A. El-Sayed** : *Fractional Order Diffusion-Wave Equations*, Intern. J. Theo. Physics., 35, 1996, pp. 311-322.

[24] **A.M.A. El-Sayed, S.H. Behiry and W.E. Raslan** : *Adomian's Decomposition Method For Solving an Intermediate Fractional Advection-Dispersion Equation*, Computers and Mathematics with Applications., 59, 2010, pp. 1759 - 1765.

[25] **R. Gorenflo and F. Mainardi** : *Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order*, Springer Verlag, Wien, 1997, pp. 223-276.

[26] **A. Granas and J. Dugundji** : *Fixed Point Theory*, Springer-Verlas, New York. 2003.

[27] **Z. Guo and M. Liu** : *On Solutions of a System of Higher-Order Nonlinear Fractional Differential Equations*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications., 3(4), 2011, pp. 59-68.

[28] **J.K. Hale and S.V. Lunel** : *Introduction to Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences., 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[29] **R. Hilfer** : *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[30] **M. Houas and M. Benbachir** : *Existence and Uniqueness Results for a Nonlinear Differential Equations of Arbitrary Order*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 2(2), 2015, pp. 24-42.

[31] **M. Houas and Z. Dahmani** : *New Results for a System of Two Fractional Differential Equations Involving n Caputo Derivatives*, Kragujevac Journal of Mathematics. 38(2), 2014, pp. 283-301.

[32] **M. Houas and Z. Dahmani** : *On Existence of Solutions for Fractional Differential Equations with Nonlocal Multi-Point Boundary Conditions.* Accepted in Lobachevskii Journal of Mathematics., 2016.

[33] **Z. Hu, W. Liu and T. Chen** : *Existence Solutions for a Coupled System of Fractional Differential Equations at Resonance,* Boundary value problems., 98, 2012.

[34] **Y. Hu, Y. Luo and Z. Lu** : *Analytical Solution of the Linear Fractional Differential Equation by Adomian Decomposition Method*, Journal of Computational and Applied Mathematics., 215, 2008, pp. 220 - 229.

[35] **A.A. Kilbas and S.A. Mazran** : *Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions*, Differential Equations. 41, 2005, 84-89.

[36] **A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo** : *Theory and Aplications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Stadies, 204, Elsevier Sciences B. V., Amesterdam, 2006.

[37] **G.C. Koh and K.M. Kelly :** *Application of Fractional Derivatives to Seismic Analysis of Based Isolated Models.* Earthq Eng Struct., 19, 2010, pp. 229–241.

[38] **S.F. Lacroix** : *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Integral*, Paris : Mme. vecourcier, 1819, Tome Troisième, seconde édition, pp. 409-410.

[39] **V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala** : *Basic Theory of Fractional Differential Equations*, Nonlinear Anal., 69(8), 2008, pp. 2677-2682.

[40] **G.W. Leibnitz** : *Leibnitzen's Mathematische Schriften*, Hildesheim, Germany : Georg Olm, 2, 1962, pp. 301-302.

[41] **J. Liang, Z. Liu and X. Wang** : *Solvability for a Couple System of Nonlinear Fractional Differential Equations in a Banach Space*, Fractional Calculus and Applied Analysis., 16(1), 2013, pp. 51-63.

[42] **J. Liouville** : *Mémoire sur quelques Questions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 1832, tome XIII, XXI cahier, pp. 1-69.

[43] **R. Liu, C. Kou and X. Xie** : *Existence Results for a Coupled System of Nonlinear Fractional Boundary Value Problems at Resonance*, Mathematical Problems in Engineering. 2013, 9 pages.

[44] **Y. Liu, B. Ahmad and R.P. Agrawal** *Existence of Solutions for a Coupled System of Nonlinear Fractional Differential Equations With Fractional Boundary Conditions on the Half-Line.* Advances in Difference Equations., 46, (2013).

[45] **E. R. Love** : *Fractional Derivatives of Imaginary Order*, The Journal of the London Mathematical Society, Volume III (Second Series), 1971, pp. 241-259.

[46] **J.A.T. Machado and A. Azenha :** *Position Force Fractional Control of Mechanical Manipulators.* In : Proceedings of the 1998 5th international workshop on advanced motion control, Coimbra, Portugal, 1998, pp. 216–221.

[47] **J.A.T. Machado, V. Kiryakova and F. Mainardi :** *A Poster About The Old History of Fractional Calculus.* Frac. Calc. Appl. Anal. 13(4), 2010, pp. 447-454.

[48] **R.L. Magin :** *Fractional calculus in bioengineering.* Begell House, Connecticut. 2006.

[49] **F. Mainardi**, *Fractional Calculus : Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds)*, Springer-Verlag, Wien. 1997, pp. 291-348.

[50] **B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup and C.h. Ceyral** : *Fractional Differentiation for Edge Detection*, Signal Processing. 83, 2003, pp. 2421-2432.

[51] **D. Matignon and B.A. Novel** : *Décomposition Modale Fractionnaire de l´Equation des Ondes avec Pertes Viscothermiques*, Tech. Rep. 1995, École Nationale Supérieure des Télécommunications.

[52] **K.S. Miller and B. Ross** : *An introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, Jhon Wiley, New York. 1993.

[53] **K. Nishimoto** : *Fractional calculus*. Descartes Press Co., Koriyama, 1989.

[54] **S.K. Ntouyas** : *Boundary Value Problems for Nonlinear Fractional Differential Equations and Inclusions with Nonlocal and Fractional Integral Boundary Bonditions*, Opuscula Math. 33, 2013, pp. 117-138.

[55] **S.K. Ntouyas and M. Obaid** : *A Coupled System of Fraction Differential Equation with Nonlocal Integral Boundary Conditions*, Boundary Value Problems. 130, 2012.

[56] **K.B. Oldham and J. Spanier** : *The Fractional Calculs*, Acadimic Press, New York. 1974.

[57] **M.D. Ortigueira and J.A.T. Machado :** *Fractional Calculus Applications in Signals and Systems,* Signal Prossessing. 86, 2006, pp. 2503-2504.

[58] **A. Oustaloup** : *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Masson. Paris, 1983.

[59] **A. Oustaloup, B. Mathieu and P. Lanusse :** *The CRONE Control of Resonant Plants : Application to a Flexible Transmission.* Eur J Control., 1(2), 1995, pp. 113–121.

[60] **I. Podlubny** : *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego. 1999.

[61] **I. Podlubny** : *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1999.

[62] **B. Ross** : *A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of Fractional Calculus,* Fractional Calculus and its Applications, Springer Lecture Notes in Mathematics. 57, 1975, pp. 1-36.

[63] **B. Ross** : *A Chronological Bibliography of Fractional Calculus with Commentary*, The Fractional Calculus in [66], pp. 3-15.

[64] **J.M . Sabatier, O.P. Agrawal and J.A.T. Machado** : *Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering.* Springer, Berlin. 2007.

[65] **S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marchev** : *Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon. 1993.

[66] **J. Spanier and K. B. Oldham** : *The Fractional Calculus*, New York : Academic Press, 1974.

[67] **L. Tabharit and Z. Dahmani :** *High Dimensional Fractional Coupled System : New Existence and Uniqueness Results,* Accepted in Kragujevac Journal of Mathematics, 2016.

[68] **L. Tabharit and Z. Dahmani** : *Integro-Differential Equations of Arbitrary Orders Involving Convergent Series,* Submitted . 2016.

[69] **L. Tabharit and Z. Dahmani** : *On A High Order Fractional Differential Systems Involving Convergent Series*, Submitted . 2016.

[70] **G. Wang, R.P. Agrawal and A. Cabada** : *Existence results and monotone iterative technique for systems of nonlinear fractional differential equations.* Applied Mathematics Letters. 25, (2012), 1019–1024.

[71] **W. Yang** : *Positive Solutions for a Coupled System of Nonlinear Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions.* Comput. Math. Appl. 63, 2012, pp. 288-297.

[72] **X. Zhang, C.X. Zhu and Z.Q. Wu** : *Solvability for a Coupled System of Fractional Differential Equations with Impulses at Resonance.* Boundary Value Problems, 80, 2013, pp. 1-13.

[73] **C.X. Zhu, X. Zhang and Z.Q. Wu :** *Solvability for a Coupled Systems of Fractional Differential Equations with Intger Boundary Conditions,* Taiwanese J. Math., 17, 2013, pp. 2039-2054.