





## ملخص :

العمل المنجز في هذه الأطروحة يتمثل في دراسة ظاهرة الانتشار الحراري الطبيعي الهادئ داخل الصهاريح الاسطوانية الشكل التي تستعمل لتخزين السوائل شديدة البرودة. هذه الدراسة تمثل محاكاة رقمية ثنائية الأبعاد للانتشار الحراري الطبيعي داخل شكل مماثل لشكل الصهاريح وذلك بهدف التنبؤ المسبق بكيفية انتشار حرارة و حركة السائل داخله. المحاكاة الرقمية قسمت إلى قسمين وذلك حسب طبيعة و وضعية التدفق الحراري فوق الهيكل الخارجي للصهاريح. الجزء الأول يمثل حالة التدفق الحراري الثابت في الشدة و الوضعية, هذا التدفق يطبق على أجزاء مختلفة من هيكل الصهاريح (من الأسفل, من الأعلى و من الجانب الأيمن). الجزء الثاني يمثل حالة التدفق الحراري الناتج عن أشعة الشمس, هذا التدفق ثابت في الشدة ولكنه متحرك فوق هيكل الصهاريح وفق حركة الشمس طول اليوم. تحصلنا على كيفية انتشار حرارة و حركة السائل داخل الصهاريح بحل المعادلات المتحركة في الحركة وذلك باستعمال طريقة الحجوم المنتهية. **الكلمات المفتاحية:** الصهاريح, السوائل شديدة البرودة, الانتشار الحراري الطبيعي, طريقة الحجوم المنتهية, خوارزمية حل التداخل حرارة-سرعة.

## Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire constitue une étude de la convection naturelle laminaire dans un réservoir cylindrique horizontal de stockage des fluides cryogéniques. Cette étude est relative à une simulation bidimensionnelle d'un écoulement convectif en régime transitoire dans une géométrie semblable à celle du réservoir dont le but est la prédiction des comportements thermique et dynamique du fluide à l'intérieur du réservoir. Les simulations numériques ont été partagées, selon la position et la nature du flux de chaleur sur la paroi extérieure du réservoir, en deux parties différentes. La première représente le cas d'un flux de chaleur constant et fixe qui s'impose dans un premier temps sur la paroi inférieure du réservoir (réservoir chauffée par le bas), puis, sur la paroi latérale (réservoir différentiellement chauffé) et sur la paroi supérieure (réservoir chauffé par le haut) respectivement. La deuxième partie constitue le cas d'un flux de chaleur constant et mobile, ce flux est comparable au flux solaire qui s'impose au début sur une partie de la surface extérieure du réservoir ensuite, il va se déplacer le long de la journée en fonction de la position du soleil. Les champs de température, de vitesses ainsi que les lignes de courants ont été déterminés à travers la résolution des équations régissant le mouvement à l'aide de code commercial Fluent qui utilise la méthode des volumes finis.

**Mots clés :** réservoirs cryogéniques, fluides cryogéniques, convection naturelle, méthode des volumes finis, algorithme SIMPLE.

**Abstract :**

The work presented in this thesis is related to the studies of laminar natural convection in a horizontal cylindrical tank of storage of the cryogenic fluids. This study is relative to a two-dimensional simulation of a convective flow in transitory mode in geometry similar to that of the tank for the prediction of the behaviors thermics and dynamics of the fluid inside the tank. The numerical simulations are structured, according to the position and the nature of the heat flow, into two parts. The first represents the case of a heat flow constant and fixed which receives firstly on the lower wall of the tank (tank heated by bottom), then, on the side wall (laterally heated tank), and on the higher wall (tank heated by the top) respectively. The second part constitutes the case of a heat flow constant and mobile; this flow is comparable with the solar flow which receives at the beginning on part of surface external of the tank, then, it will move along the day according to the position of the sun. The velocities and temperatures fields in the system were given through solving the equations of the dynamics of the fluids by using the commercial code Fluent which uses the finite volume method.

**Keys words:** cryogenics tank, cryogenics fluid, natural convection, finite volume method, SIMPLE algorithm

# *Dédicace*

*A ceux qui n'ont jamais cessé de m'encourager et de  
me soutenir, à ceux qui leur amour m'a donné la  
volonté d'aller toujours de l'avant, A mes très chers  
parents, que Dieu les protège.*

*A ma chère sœur et mon très cher frère.*

*Je dédie ce travail*

*Abdelaziz.*

# Remerciements

*Je remercie DIEU le tout puissant qui m'a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Mes remerciements les plus profondes à mon encadreur Monsieur **RETIEL Nouredine**, maitre de conférences à l'université de Mostaganem pour leurs conseils, leur soutien et sa disponibilité.*

*Mes sincères remerciements à Monsieur **OUINES DJAMEL** et à Monsieur **BENAAZA Abdelylah** et à Monsieur **ABSAR Belkacem** qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail.*

*Mes remerciements également à tous les enseignants qui ont participé à ma Formation que ceux soient de l'école nationale polytechnique ou de l'université de Mostaganem.*

*Je tiens également à remercier tous mes amis et mes camarades de la promotion, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la bonne réalisation de ce travail.*

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>5-17</b>
I.1. Introduction .....	6
I.2. La convection naturelle .....	7
I.2.1. Expérience de Bénard et concept de cellules de convection .....	7
I.2.2. Expérience et critère de Rayleigh .....	8
I.3. La convection naturelle dans les cavités cylindriques horizontales .....	11
I.3.1. Cavité avec gradient vertical de température .....	12
I.3.2. Cavité à gradient horizontal de température .....	13
I.4. Synthèses des travaux de recherche .....	14
I.5. Problématique .....	16
I.6. Conclusion .....	17
<b>CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIQUE</b>	<b>18-32</b>
II. Introduction .....	19
II.1. Modèle physique .....	19
II.2. Modèle mathématique .....	20
II.2.1. Historique .....	20
II.2.2. Equations gouvernantes .....	21
II.2.1. Approximation de Boussinesq .....	21
II.2.2. Evaluation de la force motrice .....	22
II.2.3. Hypothèses simplificatrices .....	23
II.3. Equations du problème .....	24
II.3.1. Equation de la continuité .....	24
II.3.2. Equation de la quantité de mouvement suivant $\vec{r}$ .....	24
II.3.3. Equation de la quantité de mouvement suivant $\vec{\theta}$ .....	24
II.3.4. Equation d'énergie .....	24
II.3.5. Equations du problème sous forme conservative .....	25

II.4. Mise sous forme adimensionnées .....	25
II.4.1. Equations adimensionnelles .....	26
II.4.1.1. Equation de la continuité .....	26
II.4.1.2. Equation de quantité de mouvement suivant $\vec{R}$ .....	26
II.4.1.3. Equation de quantité de mouvement suivant $\theta$ .....	27
II.4.1.4. Equation d'énergie .....	27
II.4.1.5. Equations du problème sous forme conservative .....	27
II.4.1.5. Les paramètres caractéristiques du problème .....	27
II.4.2. Conditions aux limites .....	28
II.4.2.1. Partie I .....	28
II.4.2.1.1. Conditions aux limites selon la configuration 1 .....	28
II.4.2.1.2. Conditions aux limites selon la configuration 2 .....	29
II.4.2.1.3. Conditions aux limites selon la configuration 3 .....	29
II.4.2.1.4. Conditions aux limites selon la configuration 4 .....	30
II.4.2.1. Partie II .....	31
II.5. Conclusion .....	32

## **CHAPITRE III : PRESENTATION DE LA METHODE NUMERIQUE** **33-59**

III. Introduction .....	34
III.1. Principe de la méthode des volumes finis .....	35
III.2. Application aux équations de notre problème .....	35
III.2.1. Discrétisation des équations du bilan .....	35
III.2.2. Intégration du terme transitoire .....	38
III.2.3. Intégration du flux total suivant $\vec{R}$ .....	38
III.2.4. Intégration du flux total suivant $\theta$ .....	39
III.2.5. Intégration du terme source .....	39
III.3. Présentation des schémas .....	42
III.3.1. Schéma aux différences centrées (CDS) .....	42
III.3.2. Schéma Upwind (UPS) .....	43
III.3.3. Schéma hybride (HDS) .....	44
III.3.4. Schéma à loi de puissance (PLDS) .....	46
III.3.5. Récapitulation .....	46

III.4. Procédure de résolution .....	48
III.4.1. Algorithme SIMPLE .....	49
III.4.1.1. Equation de correction de la vitesse .....	49
III.4.1.2. Equation de correction de la pression .....	51
III.4.1.3. Séquence des opérations de l'algorithme SIMPLE .....	51
III.4.1.4. Résolution des systèmes d'équations linéaires .....	52
III.5. Stabilité et convergence .....	53
III.5.1. Règles de base de la convergence de la méthode .....	53
III.5.2. Technique de sous-relaxation .....	54
III.5.3. Critère de convergence .....	57
III.6. Conclusion .....	59

## **CHAPITRE IV : PRESENTATION DE CODE DE CALCUL** **60-71**

IV. Introduction .....	61
IV.1. Architecture du logiciel .....	62
IV.1.1. Le préprocesseur (Gambit) .....	62
IV.1.1.1. Critère du choix de maillage .....	63
IV.1.1.2. Le temps de maillage .....	63
IV.1.1.3. Le temps de calcul .....	64
IV.1.1.4. La diffusion numérique .....	64
IV.1.1.5. Application au réservoir cylindrique de stockage cryogénique .....	65
IV.1.1.5.1. Géométrie et maillage .....	65
IV.1.2. Le solveur (Fluent) .....	66
IV.1.2.1. Choix de la formulation du solveur .....	66
IV.1.2.2. Modélisation de la convection naturelle sur Fluent .....	67
IV.1.3. Le post-processeur (post-traitement) .....	71
IV.2. Conclusion .....	71

## **CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS** **72-123**

V. Introduction .....	73
V.1. Choix du maillage .....	74

V.3. Validation des résultats .....	75
V.2. Résultats et discussions .....	77
V.2.1. Cas 1 : Convection naturelle instationnaire à conditions aux limites fixes .....	77
V.2.1.1. Cavité chauffée par le bas .....	78
V.2.1.1.1. Champs thermique .....	78
V.2.1.1.2. Champs dynamiques .....	81
V.2.1.2. Cavité différentiellement chauffée .....	85
V.2.1.2.1. Champs thermique .....	85
V.2.1.2.2. Champs dynamiques .....	88
V.2.1.3. Cavité chauffée par le haut .....	92
V.2.1.3.1. Champs thermique .....	92
V.2.1.3.2. Champs dynamiques .....	95
V.2.2. Cas 2 : Convection naturelle instationnaire à conditions aux limites mobiles ...	99
V.2.2.1. Champs thermique .....	99
V.2.2.2. Champs dynamiques .....	108
V.3. Comparaison .....	115
V.3.1. Comparaison et discussion des résultats .....	115
<b>C</b> ONCLUSION GENERALE .....	<b>125</b>
<b>B</b> IBLIOGRAPHIE .....	<b>127</b>

# LISTE DES FIGURES

## CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Figure I.1 :	Schéma illustrant l'expérience de Bénard .....	8
Figure I.2 :	schéma représentant la poussée d'Archimède .....	9
Figure I.3 :	Schéma représente la force de trainée visqueuse .....	10
Figure I.4 :	Schéma illustre la diffusion thermique .....	10
Figure I.5 :	Illustration d'un gradient de température verticale .....	12
Figure I.6 :	Schéma représentant la force de trainée visqueuse et la force de flottabilité ...	13
Figure I.7 :	cavité avec gradient horizontal de température .....	13
Figure I.8 :	réservoirs cryogéniques horizontaux .....	16

## CHAPITRE II : MODELISATION MATHÉMATIQUE

Figure II.1 :	modèle physique à étudier .....	20
Figure II.2 :	représentation de force de pesanteur .....	23
Figure II.3 :	conditions aux limites selon (a) : la configuration 1 ; (b) : la configuration 2 .....	29
Figure II.4 :	conditions aux limites selon la configuration 3 .....	30
Figure II.5 :	conditions aux limites selon la configuration 4 .....	30
Figure II.6 :	Conditions aux limites correspondantes à la deuxième partie .....	31

## CHAPITRE III : PRESENTATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS

Figure III.1 :	volume de contrôle : (a) : en coordonnées cartésiennes .....	35
	(b) : en coordonnées cylindriques .....	35
Figure III.2 :	élément de volume en coordonnées cylindriques .....	36
Figure III.4 :	volume de contrôle en coordonnées cylindriques .....	37
Figure III.5 :	schéma montrant les sections $A_n$ et $A_s$ .....	38
Figure III.6 :	schéma montrant les sections $A_e$ et $A_w$ .....	39
Figure III.7 :	La fonction $A( Pe_m )$ pour différents schémas .....	47
	(a) : maillage standard .....	48
Figure III.8 :	maillage en coordonnées cylindrique : (b) : maillage décalé suivant R .....	48
	(c) : maillage décalé suivant $\theta$ .....	48

Figure III.9 :	Évolution possible de $\phi_p$ dans un processus convergent ; nécessité d'une sur-relaxation.	56
Figure III.10 :	Évolution possible de $\phi_p$ dans un processus convergent ; nécessité d'une sous-relaxation.	56

## CHAPITRE IV : PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

Figure IV.1 :	Interface de Gambit	63
Figure IV.2 :	Géométrie et le maillage sur lesquels ont été effectuées les simulations	65
Figure IV.2 :	Interface de Fluent	66
Figure IV.3 :	Spécification du mode d'écoulement	67
Figure IV.4 :	Spécification de la formulation et de type d'écoulement	67
Figure IV.5 :	Spécification l'équation d'énergie et le régime d'écoulement	68
Figure IV.6 :	Spécification des propriétés du fluide étudié	68
Figure IV.7 :	Spécification des conditions de fonctionnement	68
Figure IV.8 :	Spécification des conditions aux limites	69
Figure IV.9 :	Spécification des paramètres de contrôle de la solution	69
Figure IV.10 :	Initialisation du processus itératif	70
Figure IV.11 :	Spécification du pas de temps et le nombre maximum des itérations	70

## CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSION

Figure V.1 :	Profils d'évolution de la température au plan medium	74
Figure V.2 :	Validation des résultats	75
Figure V.3 :	Evolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps...	79
Figure V.4 :	Profils d'évolution des températures au plan medium en fonction du temps	80
Figure V.5 :	Courbe d'évolution de la température au centre du réservoir	80
Figure V.6 :	Evolution des lignes de courants dans le réservoir en fonction du temps	82
Figure V.7 :	Evolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps	83
Figure V.8 :	Evolution des modules de vitesses au plan medium en fonction du temps	84
Figure V.9 :	Courbes d'évolutions des modules des vitesses maximale et au centre	84
Figure V.10 :	Evolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps ..	86
Figure V.11 :	Profils d'évolution des températures au plan medium en fonction du temps	87

Figure V.12 :	Courbe d'évolution de la température au centre du réservoir .....	87
Figure V.13 :	Evolution des lignes de courants dans le réservoir en fonction du temps .....	89
Figure V.14 :	Evolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps .....	90
Figure V.15 :	Profils d'évolution des modules de vitesses au plan medium .....	91
Figure V.16 :	Courbes d'évolutions des modules de vitesses maximales et au centre .....	91
Figure V.17 :	Evolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps	93
Figure V.18 :	Profils d'évolution des températures au plan medium en fonction du temps .....	94
Figure V.19 :	Courbe d'évolution de la température au centre du réservoir .....	94
Figure V.20 :	Evolution des lignes de courants dans le réservoir en fonction du temps .....	96
Figure V.21 :	Evolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps .....	97
Figure V.22 :	Profils d'évolution des modules de vitesses au plan medium .....	98
Figure V.23 :	Courbes d'évolution des modules des vitesses maximale et au centre .....	98
	(a) : évolution des champs de température dans le réservoir $t \in [0 ; 6]$ h .....	102
Figure V.24 :	(b) : évolution des champs de température dans le réservoir $t \in [7 ; 12]$ h .....	103
	(c) : évolution des champs de température dans le réservoir $t \in [13 ; 18]$ h ....	104
	(d) : évolution des champs de température dans le réservoir $t \in [19 ; 24]$ h ...	105
Figure V.25 :	Profils d'évolution des températures au plan medium .....	106
Figure V.26 :	courbe d'évolution de la température au centre du réservoir .....	107
	(a) : évolution des vecteur vitesses dans le réservoir $t \in [0 ; 6]$ h .....	109
Figure V.27 :	(b) : évolution des vecteur vitesses dans le réservoir $t \in [7 ; 12]$ h .....	110
	(c) : évolution des vecteur vitesses dans le réservoir $t \in [13 ; 18]$ h .....	111
	(d) : évolution des vecteur vitesses dans le réservoir $t \in [19 ; 24]$ h .....	112
Figure V.28 :	Profils d'évolution des modules de vitesses au plan medium .....	114
Figure V.29 :	Courbes d'évolution des vitesses maximale et celle au centre .....	114
Figure V.30 :	Champs thermique et dynamique selon la configuration 1 pour les deux cas ....	118
Figure V.31 :	Champs thermique et dynamique selon la configuration 2 pour les deux cas ....	119
Figure V.32 :	Champs thermique et dynamique selon la configuration 3 pour les deux cas ....	120
Figure V.33 :	Champs thermique et dynamique selon la configuration 4 pour les deux cas ....	121
Figure V.34 :	Comparaison de profils d'évolutions de la température (config.1) .....	122
Figure V.35 :	Comparaison de profils d'évolutions de la température (config.2) .....	122
Figure V.36 :	Comparaison de profils d'évolutions de la température (config.3) .....	123
Figure V.37 :	Comparaison de profils d'évolutions de la température (config.4) .....	123

# NOMENCLATURE

$A_m$	Aire de l'interface	$m^2$
$a_M$	Coefficient de l'équation discrétisée	
$a_{nb}$	Coefficient se rapportant au nœud voisin de $P$	
$a_P$	Coefficient se rapportant au nœud $P$	
$b$	Terme constant de l'équation discrétisée	
$C_P$	Chaleur spécifique à pression constante	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$D_m$	Conductance thermique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$F$	Force de flottabilité	
$F_m$	Débit volumique	$m^3.s^{-1}$
$g$	Accélération de la pesanteur	$m.s^{-2}$
$J_m$	Flux total	
$k$	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$P$	Pression adimensionnelle	
$p$	Pression	$Pa$
$q$	Puissance volumique dissipée	$W.m^{-3}$
$R, \theta$	Coordonnées d'espace adimensionnelle	
$R_\emptyset$	Résidu relatif à la variable $\emptyset$	
$R_0$	Rayon adimensionnel du réservoir	
$\delta R$	Distance entre deux nœuds voisins suivant $R$	
$\Delta R$	Taille d'un volume de contrôle suivant $R$	
$r, \theta$	Coordonnées d'espace dimensionnel	$m$
$\delta r$	Distance entre deux nœuds voisins suivant $r$	$m$

$\Delta r$	Dimension d'un volume de contrôle suivant $r$	$m$
$S_{\emptyset}$	Terme source relative à la variable $\emptyset$	
$\overline{S_{\emptyset}}$	Terme source moyenne relative à $\emptyset$	
$S_c$	Partie résultante de la linéarisation de $S_{\emptyset}$	
$S_p$	Coefficient de $\emptyset_p$ dans l'expression de $S_{\emptyset}$	
$T$	Température	$K$
$T_{moy}$	Température moyenne	$K$
$\Delta T$	Ecart de température	$K$
$t$	Temps	$s$
$U$	Vitesse adimensionnelle suivant $R$	
$u$	Vitesse suivant $r$	$m \cdot s^{-1}$
$V$	Vitesse adimensionnelle suivant $\theta$	
$v$	Vitesse suivant $\theta$	$m \cdot s^{-1}$
$\Delta V$	Volume élémentaire	$m^3$

### Symboles Grecs

$\emptyset$	Variable dépendante	
$\delta\theta$	Distance entre deux nœuds voisins suivant $\theta$	$rad$
$\Delta\theta$	Dimension d'un volume de contrôle suivant $\theta$	$rad$
$\varphi$	Température adimensionnelle	
$\Delta\varphi$	Ecart de la température adimensionnelle	
$\tau$	Temps adimensionnel	
$\Delta\tau$	Pas de temps adimensionnel	
$\alpha$	Diffusivité thermique	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\alpha_i$	Coefficient de schéma Hybride	

$\alpha_\emptyset$	Facteur de sous-relaxation	
$\beta$	Coefficient de dilatation volumique à P= C <sup>te</sup>	$K^{-1}$
$\Gamma_\emptyset$	Coefficient de diffusion relatif à $\emptyset$	
$\rho$	Masse volumique du GNL	$kg.m^{-3}$
$\mu$	Viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\vartheta$	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
$\varepsilon_\emptyset$	Erreur relatif	

### Indices

0	Paramètre de référence
*	Relatif à une valeur estimée
'	Relatif à une valeur corrigée
<i>c</i>	Surface chaude
<i>f</i>	Surface froide
<i>i, j</i>	i <sup>ème</sup> et j <sup>ème</sup> composantes
<i>m</i>	
<i>m = e, w, n, s</i>	<i>e</i> : est ; <i>w</i> : west ; <i>n</i> : nord ; <i>s</i> : soude
<i>M</i>	
<i>M = E, W, N, S</i>	<i>E</i> : Est ; <i>W</i> : West ; <i>N</i> : Nord ; <i>S</i> : Soude
<i>nb</i>	Relatif aux nœuds voisins

### Nombres Adimensionnels

<i>Pe</i>	Nombre de Peclet
<i>Pr</i>	Nombre de Prandtl
<i>Nu</i>	Nombre de Nusselt
<i>Ra</i>	Nombre de Rayleigh
<i>Gr</i>	Nombre de Grashof

---

# *INTRODUCTION GENERALE*

---

## INTRODUCTION GENERALE

---

Le problème du stockage des gaz liquéfiés se posant en même temps que leur obtention, il a fallu tenter très tôt de développer des solutions efficaces d'isolation thermique des récipients de stockage. Les faibles valeurs des enthalpies de vaporisation des fluides cryogéniques obligent à utiliser des réservoirs très bien isolés thermiquement. Cependant, on dispose un nombre important de matériaux isolants. À cause des contraintes dues à des aspects financières (difficulté de mise en œuvre, durée de vie réduite) et à des aspects sécuritaires, (produits inflammables ou toxiques), on a limité l'utilisation de certains matériaux.

L'isolation thermique des réservoirs cryogéniques diminuent de manière considérable les transferts thermiques par la technique du vide poussé ou l'utilisation de matériaux super isolants, mais généralement, ils ne l'annulent pas, à cause d'un part, à des défauts de fabrications, d'autre part à la fiabilité réduite par vieillissement des matériaux d'isolations (fissuration). Ces défauts constituent un vrai problème pour l'efficacité de l'opération de stockage par ce que, c'est à partir desquelles, les infiltrations thermiques provenant de l'extérieur peuvent atteindre le liquide stocké.

Ces infiltrations thermiques ont un effet complètement nuisible à l'opération de stockage. Elles provoquent un écoulement de la convection naturelle dite « Boil-off » du liquide stocké. Ce phénomène est considéré comme une perte et s'accompagne très souvent par un changement continu de la composition du liquide restant ainsi qu'une diminution du volume de liquide constaté dans le réservoir. En effet, l'étude de la convection naturelle dans les réservoirs de stockages cryogéniques joue un rôle de plus en plus important en ce qui concerne d'un coté, la compréhension de ce phénomène et par conséquent la minimisation des pertes, de l'autre, la conception et l'amélioration des performances d'isolation et de formes géométriques.

La convection naturelle laminaire dans un réservoir cylindrique horizontal de stockage cryogénique est l'objet de notre étude. Le flux solaire constitue un apport de chaleur inévitable pour les réservoirs de stockages cryogéniques. Ce flux est reçu par une partie de la paroi extérieure de ces réservoirs qui va par la suite, se déplacer sur toute la paroi du réservoir le long de la journée. A cause des défauts d'isolations dont nous avons parlé au deuxième paragraphe, une très petite partie de ce flux (infiltrations) peut atteindre le liquide stocké. La température des infiltrations est largement supérieure à celle de stockage ce qui provoque un mouvement convectif à l'intérieur du réservoir. Nous avons donc, simulé exactement le mouvement du flux solaire en déplaçant les conditions aux limites imposées sur la surface extérieure du réservoir. Les résultats obtenus sont présentés en détailles dans le dernier chapitre.

Pour faciliter la lecture de ce mémoire, nous avons choisi de le subdiviser en plusieurs chapitres qui se résume comme suit :

Le chapitre I est consacré à l'étude bibliographique, cette étude consiste à l'analyse et à la présentation de différents travaux de recherche qui ont traité le problème de la convection naturelle dans les réservoirs de stockage cryogénique. Nous tenons à spécifier que très peu d'études ont été faites dans cet axe. Nous présentons par la suite, le problème à étudier.

Le chapitre II a fait l'objet de la modélisation mathématique. Au début, nous avons présenté la géométrie de réservoir à étudier ainsi que le repère indiquant l'orientation des axes. Puis, les équations générales gouvernantes de la convection naturelle ont été présentées avant de les simplifier par la suite à l'aide des hypothèses simplificatrices. Ensuite, nous avons présenté les types de conditions aux limites imposées ainsi que leurs positions selon les configurations.

Le chapitre III est consacré à la modélisation numérique. Nous avons commencé par la présentation de la méthode des volumes finis utilisée pour discrétiser les équations du modèle mathématique. Cependant, nous avons utilisé la méthode des volumes finis en coordonnées cylindrique à cause de la géométrie du réservoir ce qui nous a créé des difficultés, surtout au niveau de terme source. Ensuite, nous avons présenté les différentes étapes de la résolution numérique (algorithme SIMPLE) des équations discrétisés.

Le chapitre IV est porté sur la présentation du code commercial Fluent, en commençant par leur architecture générale qui est divisée en trois parties. Puis, nous avons décrit les étapes à suivre et les paramètres choisis dans le cas de l'étude de la convection naturelle.

Le chapitre V est réservé à la présentation des résultats obtenus, en commençant par le cas de la convection naturelle à conditions aux limites fixes, puis le cas de la convection naturelle à conditions aux limites mobiles, ensuite, une comparaison entre ces deux derniers cas pour voir les différences enregistrées. Pour les trois cas, les champs thermique et dynamique ainsi que les profils de températures au plan médium et au centre du réservoir sont soigneusement présentés et discutés.

Le mémoire se termine par une conclusion générale exposant les objectifs atteints, les difficultés rencontrées et les perspectives à prévoir pour la continuité de ce travail.

---

*CHAPITRE I :*

*ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE*

---

# CHAPITRE I :

## ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

---

### **I.1. Introduction :**

La cryogénie, appelée aussi cryotempérature, est le domaine de très basses températures. Cependant, l'appellation "fluides cryogéniques" concerne un domaine de températures relatives aux températures normales d'ébullition de l'Hélium, l'Hydrogène, l'Azote et l'Oxygène. C'est grâce au développement de ce domaine (liquéfaction des gaz, stockages cryogéniques) que les gaz industriels comme le GNL, GPL, O<sub>2</sub>, Azote, sont devenus des produits d'usage général.

Les gaz industriels sont devenus des cryogènes (fluides cryogéniques) à l'aide d'un procédé de liquéfaction. Ces gaz sont rendus liquides par refroidissement afin de réduire leurs volumes. Pour une même quantité de gaz industriel, le volume du gaz liquéfié obtenu est environ 600 fois inférieur à celui de son état gazeux. Il peut alors être stocké ou transporté économiquement à l'état liquide.

Les fluides cryogéniques ont des caractéristiques spécifiques, qui nécessitent une attention particulière. Leurs faibles enthalpies de vaporisations et températures critiques constituent un vrai problème pour l'opération de stockage. Un petit apport thermique provenant de l'extérieur du à une efficacité réduite d'isolation du réservoir peut causer une évaporation par convection naturelle du liquide. Ce phénomène connue sous le nom "Boil-Off" est considéré comme une perte s'accompagnant très souvent par un changement continu de la composition du liquide restant. La manifestation directe de ces pertes se traduit par une diminution du volume de liquide constaté dans les réservoirs [1].

Du fait de leur importance, l'étude de la convection naturelle dans les réservoirs de stockages cryogénique a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches dont le but est de mieux comprendre ce phénomène afin de pouvoir par la suite limiter ces pertes de l'évaporation et améliorer la conception, les performances d'isolation et la forme géométrique des réservoirs [2].

## I.2. La convection naturelle :

La convection naturelle est la forme de transfert de chaleur la plus remarquable dans la vie quotidienne. Elle aura lieu à cause d'un gradient de température ou de concentration qui provoquent une différence de densité dans le fluide (liquide ou gaz). Le transfert de chaleur par convection naturelle s'effectue en plusieurs étapes. Au contact d'un corps (source de chaleur) dont la température est supérieure à celle du fluide, les particules adjacentes reçoivent de la chaleur qui fait augmenter leurs températures. Elles se dilatent et deviennent moins denses que les particules fluides situées loin de la source de chaleur, elles ont donc tendance à s'élever. Cette tendance se traduit par la naissance d'une force dirigée vers le haut dite « force de flottabilité ». Sous l'effet de cette force, les particules fluides chaudes vont se déplacer et se mélanger avec d'autres particules situées dans une région plus froide et transférer une partie de leur chaleur (diffusion thermique). Il est important de noter que le même phénomène peut s'observer pour des corps froids, le mouvement s'effectue en sens inverse.

### I.2.1. Expérience de Bénard et concept de cellules de convection :

Les cellules de Bénard (*cellules de convection*) sont un concept apparaissant lors de l'étude de la convection. Elles sont obtenues par une expérience simple, réalisée par Henri Bénard, un physicien français en 1900. Ce sont des cellules de convection qui apparaissent spontanément dans un liquide quand on lui applique une source de chaleur extérieure.

Pour réaliser l'expérience, on dispose d'une couche de liquide, par exemple de l'eau, enfermée entre deux plaques parallèles. La hauteur de liquide doit être faible par rapport à la surface du récipient. Ensuite, on commence à chauffer la paroi inférieure. Un flux d'énergie parcourt verticalement le liquide, par conduction thermique, et entre les deux plaques apparaît un gradient thermique linéaire.

Si l'on continue à augmenter la température de la plaque inférieure, un phénomène radicalement nouveau se produit : l'apparition de cellules de convection (Figure I.2), c'est-à-dire de petits mouvements du liquide bien séparés les uns des autres. La taille de ces cellules est de l'ordre du millimètre. Le mouvement microscopique aléatoire s'ordonne ainsi spontanément à plus grande échelle et devient observable. Les cellules de convection sont stables, et leur sens de rotation est inverse pour deux cellules contigües dans le sens horizontal. Dans une cellule le liquide tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, et dans le sens inverse à l'intérieur de la suivante.

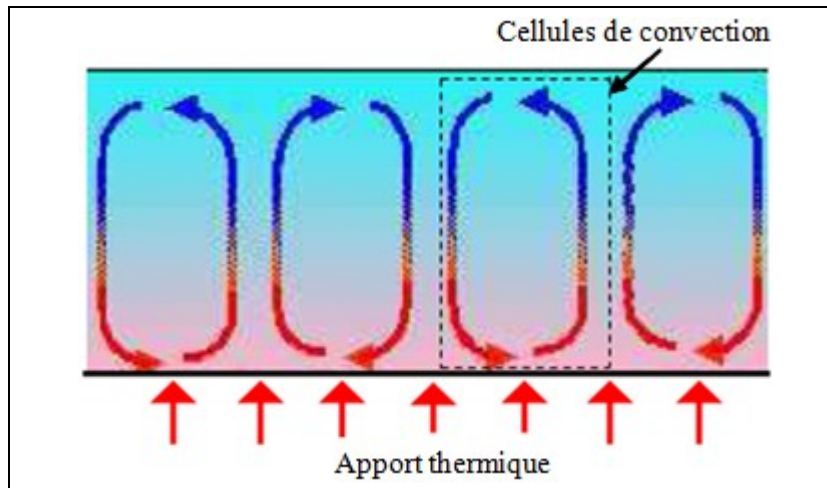


Figure I.1 : Schéma illustrant l'expérience de Bénard

En conséquence, On peut parfaitement prédire l'apparition des cellules de convection, mais n'absolument pas prévoir leur sens de rotation et on peut déduire que la température à laquelle la convection apparaît dépend de la viscosité du fluide, de sa conductivité thermique et des dimensions physiques de l'expérience. Si l'on augmente davantage encore la température du plan inférieur, la structure devient très complexe, des turbulences apparaissent et le système devient chaotique.

### I.2.2. Expérience et critère de Rayleigh :

Le théoricien de la convection fut, au début du XX siècle, Lord Rayleigh. Parmi ses derniers travaux figure un article sur la convection, publié en 1916 où il tente d'expliquer les résultats de Bénard. On sait maintenant que la théorie de Lord Rayleigh ne s'applique pas au système étudié par Bénard; néanmoins l'œuvre de Lord Rayleigh est le point de départ de la plupart des théories modernes sur la convection.

Nous pouvons présenter le premier modèle de convection que présenta Rayleigh : Il décrit une expérience modèle utilisant un fluide aux propriétés plus simple que celles des gaz ou liquides réels. Il considère une mince (beaucoup plus large que profonde) couche de fluide (ce qui permet de négliger les effets de bord) confiné entre deux plaques horizontales (Il n'y a donc pas de surface libre contrairement à l'expérience de Bénard). Il considère les hypothèses :

- la couche de fluide est infinie dans la direction horizontale
- la température est constante et uniforme sur chacune des plaques (chauffée par le bas et refroidie par le haut)

- le gradient de température dans le fluide est linéaire dans la direction verticale
- la gravité est la seule force agissant à l'intérieur du fluide et de plus le champ de gravité est uniforme à l'échelle de l'expérience
- le fluide est incompressible (ce qui est acceptable pour un liquide si la profondeur est faible)
- et, de plus, la seule propriété du fluide à être affectée par la variation de température est la densité (elle diminue si la température augmente)

Une première analyse simple de l'expérience modèle que nous avons décrite plus haut est la suivante : on peut imaginer que le gradient de température qui s'établit à l'intérieur de la couche de fluide l'organise en couches de différentes températures (les plus chaudes en bas). Et dans ce cas, une simple fluctuation verticale de la position d'une particule fluide serait amplifiée par la poussée d'Archimède qui s'applique sur elle (la densité augmente avec la hauteur), aussi faible que soit le gradient de température.

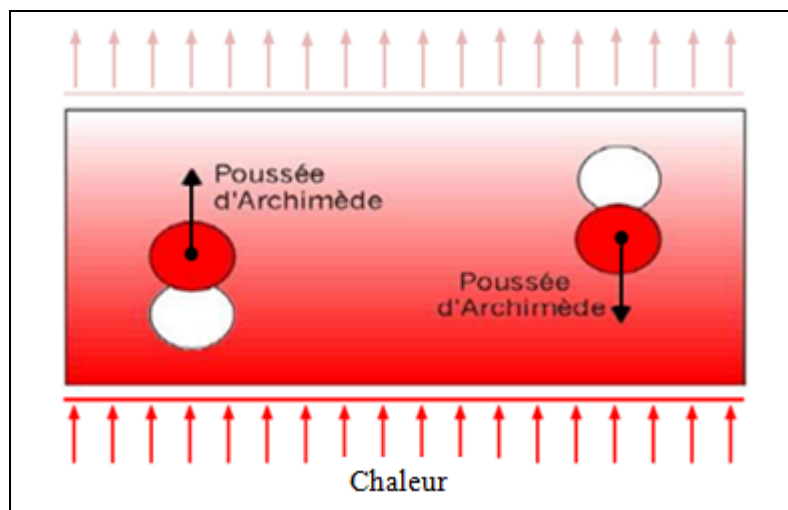


Figure I.2 : schéma représentant la poussée d'Archimède

Or, l'apport principal de Rayleigh fut d'expliquer pourquoi le gradient de température doit dépasser un certain seuil pour déclencher le mouvement convectif. Le premier paramètre à prendre en compte en plus de la poussée d'Archimède est la **traînée visqueuse** ou « les force de frottement visqueux » (Figure I.4). Elle est dirigée dans la direction opposée au mouvement (et donc à la poussée d'Archimède), et sa grandeur est déterminée par une propriété intrinsèque du fluide : la viscosité. En conclusion, l'écoulement convectif aura lieu dans le cas où la valeur de la traînée visqueuse soit strictement inférieure à la poussée d'Archimède.

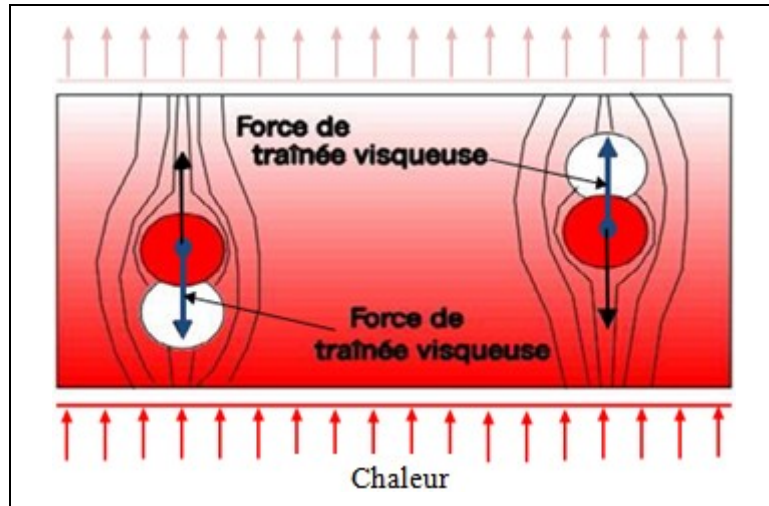


Figure I.3 : Schéma représente la force de traînée visqueuse

Le deuxième paramètre à prendre en compte en plus de la poussée d'Archimède n'est pas moins essentiel que la traînée visqueuse, c'est la diffusion de chaleur. En effet ce phénomène tend à réduire le gradient de température dans le fluide et par conséquent la poussée d'Archimède. Le flux de chaleur, qui se propage par transfert d'énergie thermique de molécule à molécule voisine, donne de la chaleur à un environnement plus froid. Réciproquement, une goutte froide qui tend à descendre vers le fond de la couche reçoit de la chaleur.

En fait, si le temps caractéristique de diffusivité thermique est inférieur au temps nécessaire pour que la particule fluide se déplace d'une longueur caractéristique, alors le transport de la chaleur à travers la couche de fluide est assuré par conduction et diffusion, sans mouvement d'ensemble du fluide. Si non, le transfert de chaleur se fait par convection et diffusion.

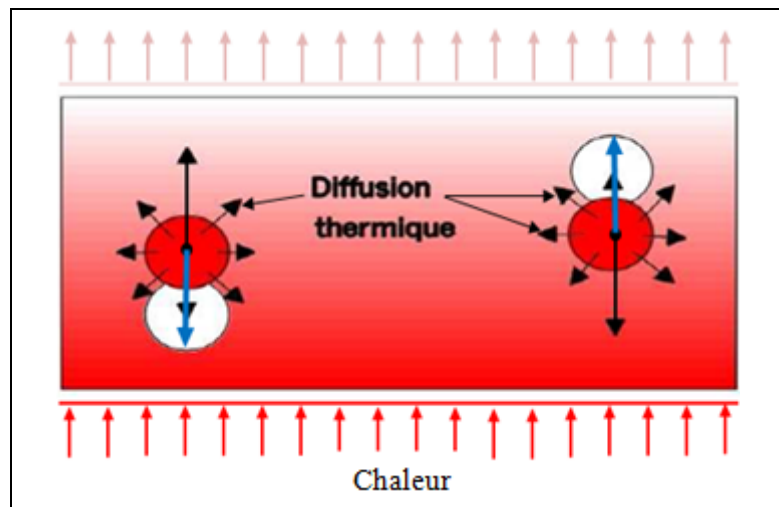


Figure I.4 : Schéma illustre la diffusion thermique

Lord Rayleigh montre qu'un écoulement convectif ne peut naître que si le gradient de température est suffisant pour vaincre les forces dissipatives (visqueuse et de diffusion thermique)

En d'autres termes, l'énergie potentielle gravitationnelle libérée par la chute du fluide plus dense et l'ascension du fluide plus léger doit être supérieure à l'énergie dissipée par traînée ou diffusion de la chaleur. La relation entre ces effets opposés s'exprime par un rapport sans dimension. Ce rapport s'appelle aujourd'hui le **nombre de Rayleigh** ; la convection démarre lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique.

Le nombre de Rayleigh a été défini à l'aide d'un rapport du produit du temps caractéristique de refroidissement par conduction et du temps caractéristique visqueux sur le carré du temps caractéristique pour que la particule fluide voyage.

Le nombre de Rayleigh s'exprime comme suit :

$$Ra = Gr.Pr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{\alpha} \quad (I.1)$$

Où :

$Gr$  : représente le nombre de Grashof avec :

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2} \quad (I.2)$$

$Pr$  : représente le nombre de Prandtl avec :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (I.3)$$

Or toute la contribution de Rayleigh était de montrer l'existence d'un nombre de Rayleigh critique qui correspond au gradient de température qui équilibre la poussée d'Archimède et les forces dissipatives.

### I.3. La convection naturelle dans les cavités cylindriques horizontales :

La littérature disponible sur ce type de cavités est très rare, car la recherche se concentre dans la plupart des cas sur l'étude de la convection naturelle dans les cavités carrés et les cavités cylindriques verticales. Pour cela, nous avons basé sur les travaux de Rayleigh pour exprimer le mode d'écoulement prévu à l'intérieur d'une cavité cylindrique horizontal.

La paroi de la cavité est subdivisée en deux parties symétriques maintenues à des températures différentes en raison de créer un gradient de température déclenchant le mouvement convectif. On distingue principalement deux types de gradients de températures, le premier est vertical (comparable à celui de Rayleigh-Bénard), le deuxième est horizontal.

### I.4.1. Gradient vertical de température :

La cavité est chauffée par le bas (Figure I.6), les couches inférieures plus chaudes se dilatent et deviennent moins denses que les couches supérieures; elles ont ainsi tendance à s'élever tandis que les couches supérieures plus froides, donc plus lourdes, ont tendance à descendre.

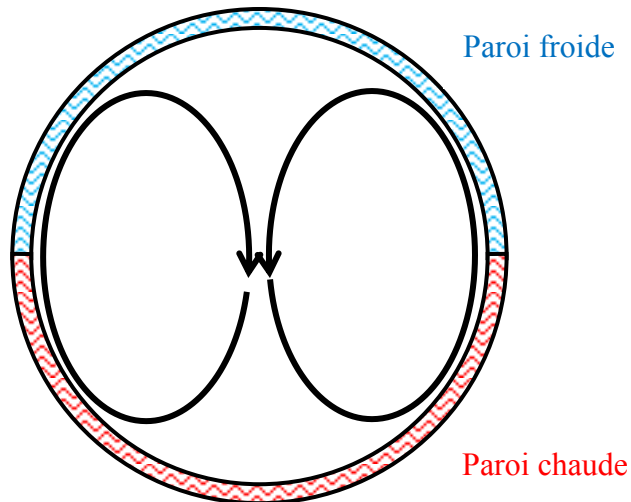


Figure I.5 : Illustration d'un gradient de température verticale

Selon les valeurs du nombre de Rayleigh, on distingue deux régimes distincts :

Si  $Ra$  est inférieur à une valeur critique, la poussée d'Archimède est trop faible pour vaincre les effets de la viscosité et de la diffusion thermique, il n'y a aucun mouvement appréciable au sein du fluide. Ce régime est celui de la conduction pure. Sinon, si  $Ra$  est supérieur à cette valeur critique, la poussée d'Archimède devient suffisamment active pour vaincre les effets dissipatifs de la viscosité et la convection naturelle prend naissance [3].

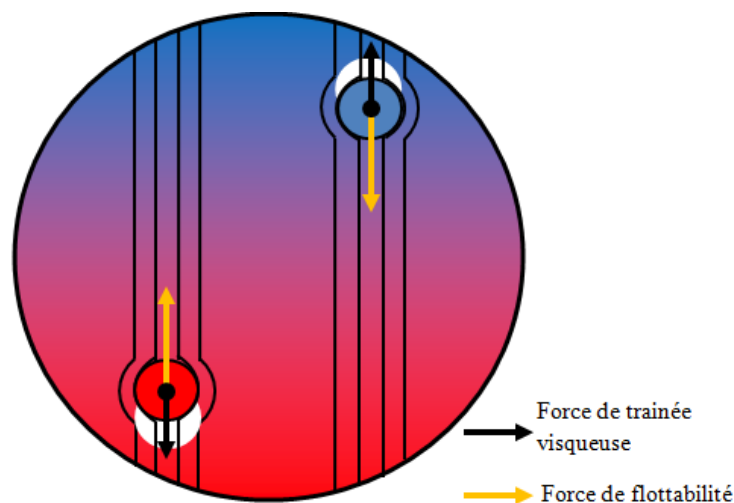


Figure I.6 : Schéma représentant la force de trainée visqueuse et la force de flottabilité.

#### I.4.2. Gradient de température horizontal :

Dans cette configuration, la cavité est chauffée par la paroi gauche. Le gradient de température résultant est horizontal, sous l'effet de la force de flottabilité, le fluide est alors ascendant le long de la paroi chaude et descendante le long de la paroi froide [9].

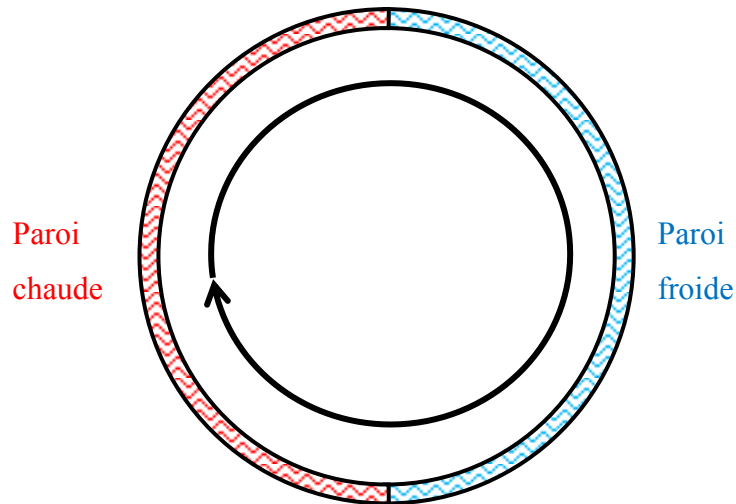


Figure I.7 : cavité avec gradient horizontal de température.

#### I.4. Synthèses des travaux de recherche :

La simulation numérique de la convection naturelle à l'intérieur des réservoirs de stockage des fluides cryogénique a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. La minimisation des pertes par évaporation, l'amélioration de la conception et de l'isolation, la prédiction du mouvement de liquide ainsi que la distribution de la température dans le réservoir constituent les principaux objets des travaux de recherche.

En 1991, N. DJELLAS [4] a effectué une étude essentiellement numérique fondée sur trois paramètres, le premier concerne la conception du bac de stockage (forme géométrique, caractéristiques thermiques du bac, isolation), le deuxième concerne le produit stocké qui est le GNL et le troisième concerne les conditions externes (pression et température ambiante). L'auteur a proposé un modèle mathématique pour le calcul de la température le long de la paroi interne du bac de stockage. Les profils de températures calculées concordent avec ceux de mesures effectuées sur site.

En 1995, **A. Lemembre et Petit [5]** ont traité une cavité cylindrique contenant un liquide chauffé latéralement et refroidi uniformément par sa surface libre. Plusieurs liquides ont été testés en faisant varier le nombre de Prandtl, le nombre de Rayleigh étant inférieur à  $10^5$ . Les équations de fonction de courant et de vorticité sont r solv es par la technique des différences finies. Les valeurs de Nusselt latérale et de surface ont été calculées et comparées aux corrélations déjà reportées dans la littérature.

En 1997, **S. Bate et D. S. Morrison [6]** ont modélisé la stratification du liquide GNL depuis sa formation jusqu'à sa rupture dans le réservoir de stockage. L'expérience a montré que cette évolution est composée de deux phases : une phase stable, où l'interface séparant les deux couches de GNL, stationnaire et une deuxième phase instable caractérisée par une migration d'interface résultant du phénomène de Rollover. Des modèles mathématiques ont été développés pour les deux phases. Pour la première phase une solution paramétrique a été employée, alors qu'une solution numérique a été développée pour la seconde.

En 1999, **A. Benkhelifa et al. [7]** ont présenté une étude numérique de la convection naturelle en régime laminaire et permanent dans une cuve cylindrique contenant de l'eau. Cette cavité de rapport d'allongement égale à 1 est chauffée au niveau des parois latérales et de la paroi supérieure mais refroidie par le bas. L'influence du nombre de Rayleigh sur le transfert thermique et sur le champ dynamique a été analys e en utilisant la méthode des volumes finis et l'algorithme SIMPLER.

En 2003, **R. C. Oliveski et al. [8]** Ces études portent sur le stockage de l'eau dans un réservoir vertical durant un processus de refroidissement. Dans la première étape de leur investigation, ces auteurs ont comparé la distribution verticale de la température obtenue expérimentalement et numériquement. Ensuite, ils ont étudié l'influence du volume de réservoir, de son rapport d'allongement et de l'épaisseur de l'isolation sur le transfert de chaleur. La technique implicite en volumes finies avec maillage uniforme a été adoptée dans le domaine liquide pour évaluer les champs de vitesse et de température.

En 2004, **Q. S. Chen et al. [9]** ont développé un modèle thermodynamique et de transfert de chaleur pour analyser les différents mécanismes de la chaleur ajoutée au GNL. Les propriétés et la composition du GNL ont été simulées. Les auteurs proposent d'utiliser des générateurs électriques ou des condenseurs afin de diminuer la pression dans le réservoir et d'éliminer les pertes par évaporation de cet hydrocarbure.

En 2004, **O. Khemis et al [10]** ont fait une étude théorique et expérimentale des transferts thermiques dans un cryostat à Azote liquide. Le comportement thermique de ce cryostat été modélisé numériquement avec plusieurs variantes relatives à la nature du contact thermique entre le col et les vapeurs issues du bain cryogénique. Des chaufferettes à puissance électrique variables sont introduites sous le bain et dedans pour produire un volume de vapeur suffisant à la mise en évidence du phénomène de Wexler. L'isolation thermique a été réalisée à l'aide de plusieurs écrans de refroidissement radiatifs pour minimiser les flux thermiques provenant du milieu extérieur. La position de ces écrans a été optimisée de façon à minimiser les transferts radiatifs dans le liquide cryogénique à l'intérieur du cryostat.

En 2007, **R. Hariti et al. [11]** ont fait une étude comparative d'une modélisation numérique des transferts thermiques dans un bac de stockage GNL avec les données réelles enregistrées sur site. Deux modélisations des transferts thermiques sur une cylindre bidimensionnel ont été faite, la 1<sup>er</sup> a montré l'effet de la couche de gaz qui se situe en haut du réservoir au-dessus du bain sur le taux d'évaporation du liquide, cette couche a donnée un faible flux conducto-convectif donc sans s'effet significatif sur l'évaporation. Les résultats obtenus ont comparé avec celles obtenus par FLUENT.

Par contre la modélisation de l'ensemble des transferts thermiques en comparaison avec les données enregistrer sur site ont montré que les résultats obtenus sont en bonne concordance avec les relevés expérimentaux et, plus généralement, les taux d'évaporation prédits sont représentatifs de ceux observés en conditions réelles d'exploitation.

En 2008, **S. A. Jazayeri et E. M. Hasanzadeh Khoei [12]** ont étudié la croissance de la circulation naturelle et la stratification thermique dans les réservoirs de stockage de l'oxygène et de l'azote due aux transferts de chaleur provenant de l'environnement par un modèle mathématique. Le modèle 2D est considéré pour le calcul de la convection naturelle dans le domaine liquide en plus de l'utilisation d'un modèle thermodynamique pour estimer le taux de vapeur, une balance d'énergie étant appliquée à l'interface liquide-vapeur.

En 2008, **H. Kim et al. [13]** repose sur un modèle dynamique hybride composé par des états dynamiques continus pour estimer le taux d'évaporation. Ces chercheurs se basent sur la compréhension du transfert d'énergie et de masse entre des couches stratifiées de GNL dans le réservoir de stockage en utilisant des états dynamiques discrets pour décrire la procédure opérationnelle du taux d'évaporation qu'il faut prévoir pour les compresseurs (BOG).

En 2010, **M. S. Khelifi Touhami et al. [14]** ont reconsidéré le même problème que [5] sauf au niveau des conditions aux limites. Ils ont étudié la convection naturelle en régime laminaire dans une cavité cylindrique verticale contenant du GNL comme fluide cryogénique. La cavité reçoit un flux de chaleur constant sur sa paroi latérale ce qui conduit à chauffer le fluide voisinant cette paroi. Sous le mouvement convectif, le fluide chauffé latéralement est envoyé vers la surface libre afin qu'il se refroidisse uniformément. Les champs thermique et dynamique ont été obtenus pour des nombres de Rayleigh allant de  $10^3$  à  $10^5$  en fonction des trois rapports d'allongement (1/3, 1/2, 1) de la cavité.

En 2013, **J. Ren et al [15]** ont étudié numériquement les phénomènes de la stratification et de la dé-stratification thermique dans les réservoirs cryogéniques. Ces réservoirs reçoivent un flux de chaleur sur leurs parois, la température donc du fluide cryogénique près de la paroi augmente et sa masse volumique diminue ce qui conduit à un écoulement de la convection naturelle à proximité de la paroi. Sous ce phénomène, le fluide cryogénique s'organise en couches stratifiées dont la température est croissante de bas vers le haut. La simulation numérique de ce phénomène a été faite à l'aide du code de calcul Fluent. Les champs thermiques et dynamiques dans le réservoir obtenus par Fluent montrent une bonne concordance avec ceux obtenus par l'expérimentation.

### **I.5. Problématique**

Les réservoirs de stockage des fluides cryogéniques sont naturellement l'objet d'apports thermiques du milieu ambiant d'autant plus importants que la température d'ébullition du fluide cryogénique est plus basse et que l'isolation thermique est moins efficace. Les fluides cryogéniques comme le GNL, l'azote, l'oxygène, l'hydrogène nécessitent une isolation très poussée. Cette isolation n'est jamais parfaite, les infiltrations thermiques provenant de l'extérieur entraînent des écoulements de la convection naturelle (Boil-off) et par conséquent une évaporation du liquide à l'intérieur du réservoir. Ce phénomène a des effets nuisibles à l'opération de stockage, il diminue le volume de liquide constaté dans le réservoir.

Les réservoirs horizontaux cryogéniques sont soumis à un flux solaire sur leurs surfaces extérieures (Figure I.7). Ce flux va se déplacer sur la paroi du réservoir le long de la journée en fonction de la position du soleil. A cause des défauts de fabrication ou d'isolation, une très petite partie de ce flux solaire (infiltrations) peuvent atteindre le liquide cryogénique stocké. La masse du liquide stocké est donc affectée par ce phénomène climatique qui peut générer un écoulement de la convection naturelle instationnaire.

Notre objectif est d'étudier l'influence du flux solaire sur le réservoir cryogénique en fonction du temps pendant une journée. Cette étude consiste à la simulation numérique du comportement thermique et dynamique du liquide dans ce réservoir.



*Figure I.8 : réservoirs cryogéniques horizontaux.*

### **I.9. Conclusion :**

L'étude bibliographique nous a permis de faire une synthèse des travaux précédents dans le domaine de stockage cryogénique dans des réservoirs cylindriques. Nous avons trouvé une grande difficulté dans cette partie à cause d'un manque considérable de la littérature relative à notre cas, les gens s'intéressent beaucoup au stockage dans des cavités carrés ou dans des réservoirs cylindriques verticales, alors que, même les travaux sur les réservoirs cylindriques horizontaux sont la pluparts des études énergétiques et non pas thermiques.

Cet étude bibliographie nous a aussi permis d'entreprendre notre propre étude que nous présentons dans ce mémoire de magister qui est un étude thermique dans un réservoir cylindrique horizontal de stockage cryogénique.

---

*CHAPITRE II :*

*MODELISATION MATHEMATIQUE*

---

---

# CHAPITRE II :

## MODELISATION MATHÉMATIQUE

---

### II. Introduction :

L'objectif principal de ce chapitre consiste en l'analyse préliminaire, en régime instationnaire, de la convection naturelle laminaire, dans un réservoir cylindrique horizontale de stockage des fluides cryogéniques, afin de prévoir le comportement thermique du mouvement de fluide à l'intérieur du réservoir. Le champ des vitesses et la distribution des températures dans le réservoir sont évalués par la résolution du modèle mathématique représenté par l'équation de continuité (conservation de masse), les équations de Navier et Stokes (quantité de mouvement) et l'équation d'énergie, en utilisant la méthode des volumes finis sous des hypothèses préétablies.

Il est important de mentionner que la littérature disponible sur ce type d'analyses est rare car la recherche se concentre dans la plupart des cas sur l'évaluation des performances énergétiques globales d'un tel système [16].

### II.1. Modèle physique :

La figure II.1 illustre le modèle physique du réservoir à étudier ainsi que les positions des repères et l'orientation des axes en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Il s'agit d'un réservoir de stockage des fluides cryogéniques tel que GNL, AR, He,  $CO_2$  ...etc., de forme cylindrique, disposé horizontalement.

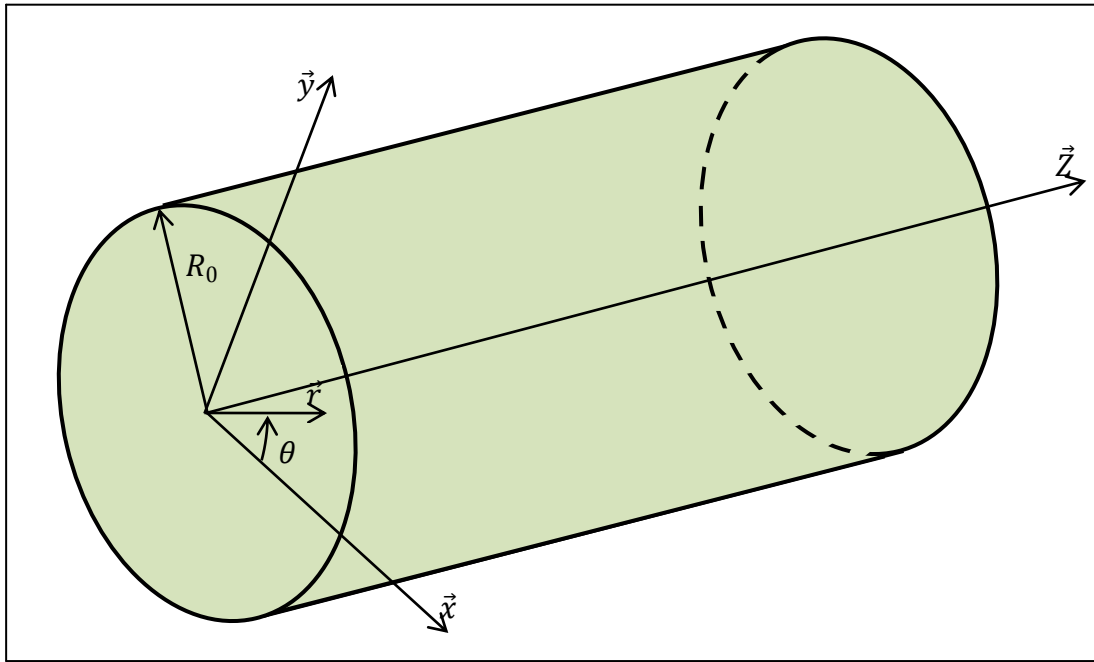


Figure II.1 : modèle physique à étudier.

## II.2. Modèle mathématique :

### II.2.1. Historique :

Dans les 18<sup>ème</sup> et 19<sup>ème</sup> siècles, la modélisation mathématique des mouvements de fluides a fait un très grand progrès. Daniel Bernoulli (1700-1782) a établi les équations connues de Bernoulli. Leonhard Euler (1707-1783) a proposé les équations d'Euler qui décrivent la conservation de la quantité de mouvement pour un fluide non visqueux et la conservation de la masse. Ce progrès n'aurait pas pu être accompli sans la participation de Claude Louis Marie Henry Navier (1785-1836) et George Gabriel Stokes (1819-1903) qui ont introduit le terme relatif à la viscosité dans les équations d'Euler, pour obtenir les équations très connues de Navier-Stokes. C'est cette forme d'équations mathématiques différentielles développée il y'a plus de 200 ans qui est à la base de la mécanique des fluides numérique moderne.

Ces équations sont fortement couplées et très difficiles à résoudre. Ce n'est donc que vers les années 1960s et 1970s avec l'avènement des ordinateurs que ces équations ont pu être résolues pour des problèmes d'écoulements réels et avec des temps de calculs raisonnables. Mais ce n'est que vers le début des années 1980s que la commercialisation des logiciels CFD a commencé et son utilisation devient acceptable par la majorité des entreprises à l'échelle mondiale.

### II.2.2. Equations gouvernantes :

Les équations qui gouvernent le phénomène de la convection naturelle en régime transitoire sont principalement celles de conservation de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation d'énergie :

- ❖ **L'équation de continuité (conservation de la masse) :** l'équation de la continuité exprimant la loi de conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

- ❖ **Les équations de quantité de mouvement (Navier-Stokes) :** exprimant la conservation de la quantité de mouvement, elles sont obtenues à partir de la deuxième loi de Newton (principe de conservation de quantité de mouvement) appliquée pour un volume de contrôle donné :

$$\frac{D}{Dt}(\rho \cdot \vec{V}) = \rho \cdot \vec{g} - \text{grad}(P) + \mu \cdot \Delta V + \frac{1}{3} \mu \cdot \text{grad}(\text{div}(\vec{V})) \quad (\text{II.2})$$

- ❖ **L'équation de la conservation de l'énergie :** L'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique, elle exprime la variation de l'énergie totale du système et s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt}(\rho \cdot c_p \cdot T) = \Delta(k \cdot T) + q + \beta \cdot T \cdot \frac{Dp}{DT} + \mu \cdot \Phi \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$$\frac{D}{Dt}(\rho \cdot c_p \cdot T) \quad : \text{La variation de l'énergie totale du système}$$

$$\Delta(k \cdot T) \quad : \text{La variation de l'énergie par conduction}$$

$$q \quad : \text{La puissance volumique dissipée}$$

$$\beta \cdot T \cdot \frac{Dp}{DT} \quad : \text{La variation d'énergie due à la compressibilité}$$

$$\mu \cdot \Phi \quad : \text{La dissipation irréversible due aux frottements visqueux}$$

### II.2.1. Approximation de Boussinesq :

Dans le cas de la convection naturelle dans les cavités, la résultante des forces externes (motrices) est limitée aux forces gravitationnelles de sorte que leur influence provoquée par des gradients de la température soit évidente. En effet, c'est la variation de la masse volumique du fluide qui est à l'origine du phénomène de convection naturelle, créant une force motrice volumique (Archimède) à laquelle s'oppose notamment une force de frottement visqueux.

L'approximation de Boussinesq consiste à considérer d'un part que la masse volumique dans les équations de conservation est constante sauf dans le terme de la force volumique  $\rho \vec{F}$ , et d'autre part que les écarts de températures sont suffisamment faibles pour que l'on puisse se constater, dans l'évaluation du terme  $(\rho \vec{F})$ , que du premier terme de développement en série de Taylor de  $\rho$ , à savoir :

$$\rho = \rho_0 + (T - T_0) \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} \quad (II.4)$$

Avec :

- $T_0$  : Température de référence.
- $\rho_0$  : Masse volumique correspondante à la température de référence.

Nous avons, par définition, le coefficient de dilatation volumique à pression constante est donné par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_{P=cte} \quad (II.5)$$

C.à.d. :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_{\substack{T=T_0 \\ P=cte}} \quad (II.6)$$

En remplaçant l'équation (II.6) dans l'équation (II.4), on obtient :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0)) \quad (II.7)$$

La relation (II.7) constitue l'approximation de Boussinesq de la masse volumique, elle permet d'aboutir à un couplage entre l'équation d'énergie et les équations de la quantité de mouvement.

### II.2.2. Evaluation de la force motrice :

En prenant un état thermodynamique de référence  $(T_0, \rho_0, P_0)$ , et en supposant que l'écoulement a lieu avec une vitesse constante. D'où l'équation (II.2) devient :

$$\rho_0 \vec{g} - \text{grad}(P_0) = 0 \quad (II.8)$$

En soustrayant l'équation (II.8) de l'équation (II.2), on trouve :

$$\frac{D}{Dt} (\rho \cdot \vec{V}) = (\rho - \rho_0) \cdot \vec{g} - g \vec{r} \vec{a} d (P - P_0) + \mu \cdot \Delta V + \frac{1}{3} \mu \cdot g \vec{r} \vec{a} d (\text{div}(\vec{V})) \quad (II.9)$$

De l'équation (II.7) on a :

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (II.10)$$

Finalement l'équation générale de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{D}{Dt}(\rho \cdot \vec{V}) = -\rho_0 \beta (T - T_0) \cdot \vec{g} - g \vec{r} \text{ad}(P - P_0) + \mu \cdot \Delta V + \frac{1}{3} \mu \cdot g \vec{r} \text{ad}(\text{div}(\vec{V})) \quad (II.11)$$

Avec :

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_r \\ g_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \cdot \sin(\theta) \\ -g \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

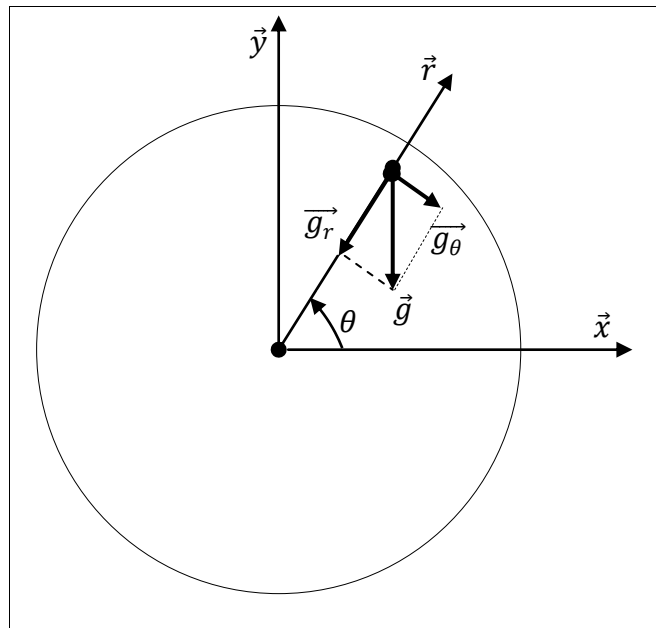


Figure II.2 : représentation de force de pesanteur.

Par identification entre les équations (II.2) et (II.11) on trouve :

$$\rho_0 \cdot \vec{F} = -\rho_0 \beta (T - T_0) \cdot \vec{g} \quad (II.12)$$

Finalement la force motrice dans le cas de la convection naturelle est donnée par :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \cdot g \cdot (T - T_0) \sin \theta \\ \beta \cdot g \cdot (T - T_0) \cos \theta \end{pmatrix} \quad (II.13)$$

### II.2.3. Hypothèses simplificatrices :

Pour établir un modèle mathématique relativement simple qui décrit physiquement la convection naturelle dans le réservoir, on adopte les hypothèses suivantes :

- ✓ L'écoulement est bidimensionnel et laminaire.
- ✓ Le GNL est considéré comme un fluide incompressible.
- ✓ Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- ✓ Les forces volumiques ne sont dues qu'à l'accélération de la pesanteur.
- ✓ Les vitesses mises en jeu sont relativement faibles de sorte que le terme relatif aux dissipations visqueuses dans l'équation d'énergie soit négligeable.
- ✓ Pas de source de chaleur.
- ✓ Le fluide considéré est supposé visqueux et newtonien et obéit à l'approximation de Boussinesq.

### II.3. Equations du problème :

Moyennant les hypothèses précédentes, nous avons obtenu un système d'équations moins compliqué qui caractérisent la convection naturelle en régime transitoire et en coordonnées cylindriques qu'ils s'écrivent comme suit :

#### II.3.1. Equation de la continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v) = 0 \quad (II.14)$$

#### II.3.2. Equation de la quantité de mouvement suivant $\vec{r}$ :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right) = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (II.15)$$

#### II.3.3. Equation de la quantité de mouvement suivant $\theta$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} \right) = \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad (II.16)$$

#### II.3.4. Equation d'énergie :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (II.17)$$

Les équations (II.6-9) constituent le modèle mathématique de l'écoulement de la convection naturelle laminaire dans un réservoir cylindrique horizontal de stockage du GNL.

### II.3.5. Equations du problème sous forme conservative :

Les équations de conservation précédentes peuvent être mises sous une forme conservative commune, ce qui permet d'éviter la répétition du travail de discrétisation pour chaque équation. Ainsi, si on note  $\phi$  la variable étudiée, chacune des équations peut être réduite à une seule équation générale, en coordonnées cylindriques selon la forme :

$$\rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \Gamma_{\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\phi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] + S_{\phi} \quad (II.18)$$

Avec :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\phi) \right) + \frac{\phi}{r^2} \quad (II.19)$$

Les expressions du coefficient de diffusion et du terme source sont indiquées dans le tableau :

Equation	$\phi$	$\Gamma_{\phi}$	$S_{\phi}$
Continuité	0	0	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v)$
Quantité de Mouvement suivant $\vec{r}$	u	$\mu$	$\rho \left( F_r + \frac{v^2}{r} \right) - \frac{\partial p}{\partial r} - \mu \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}$
Quantité de Mouvement suivant $\vec{\theta}$	v	$\mu$	$\rho \left( F_{\theta} + \frac{uv}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}$
Energie	T	$\frac{k}{c_p}$	$\frac{k}{c_p} \frac{T}{r^2}$

Tableau II.1 : Expressions du coefficient de diffusion et du terme source

### II.4. Mise sous forme adimensionnelle :

L'emploi de variables adimensionnelles (variables réduites) dans les équations de bilans, permet d'approcher de plus près à la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures choisis. Ces variables permettent d'obtenir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficients de similitudes ainsi d'un autre côté déduire le nombre de paramètres de contrôle d'un problème.

En effet, pour ramener les équations phénoménologiques sous une forme adimensionnelle, ainsi que pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire de définir, moyennant des grandeurs caractéristiques, des changements de variables.

Les variables de référence et adimensionnelle sont présentés au tableau ci-dessus :

Variable	Désignation du variable dimensionnelle	Variable de référence	Variable adimensionnelle
Le rayon	$r$	$R_0$	$R = \frac{1}{R_0} r$
L'angle	$\theta$	$\theta$	$\theta = \theta$
La vitesse suivant le rayon	$u$	$V_r = \frac{\alpha}{R_0}$	$U = \frac{1}{V_r} u$
La vitesse suivant l'angle	$v$	$V_r = \frac{\alpha}{R_0}$	$V = \frac{1}{V_r} v$
La pression	$p$	$\rho V_r^2$	$P = \frac{1}{\rho V_r^2} p$
La température	$T$	$T_f$	$\varphi = \frac{T - T_f}{\Delta T}$
Le temps	$t$	$\frac{R_0}{V_r}$	$\tau = \frac{V_r}{R_0} t$

Tableau II .2 : les variables de référence et adimensionnel du problème.

#### II.4.1. Equations adimensionnées

En tenant compte des variables adimensionnées, les équations de continuité, de quantités du mouvement et d'énergie qui gouvernent le phénomène de la convection naturelle s'écrivent :

##### II.4.1.1. Equation de la continuité :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RU)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (II.20)$$

##### II.4.1.2. Equation de quantité de mouvement suivant $\vec{R}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V^2}{R} \\ = - \frac{\partial P}{\partial R} + Pr \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + GrPr^2 \varphi \sin(\theta) \end{aligned} \quad (II.21)$$

**II.4.1.3. Equation de quantité de mouvement suivant  $\theta$ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{UV}{R} \\ = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + Pr \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RV) \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] + GrPr^2 \varphi \cos(\theta) \end{aligned} \quad (II.22)$$

**II.4.1.4. Equation d'énergie :**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \alpha \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] \quad (II.23)$$

**II.4.1.5. Equations du problème sous forme conservative :**

Afin d'éviter la répétition du travail de discrétisation pour chaque équation, on doit mettre les équations adimensionnelles précédentes (sauf l'équation de continuité) sous forme conservative tel que  $\phi$  est la variable étudiée en chaque équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \Gamma_{\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\phi) \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] + S_{\phi} \quad (II.18)$$

Les expressions du coefficient de diffusion et du terme source sont indiquées dans le tableau :

Equation	$\phi$	$\Gamma_{\phi}$	$S_{\phi}$
Quantité de Mouvement suivant $\vec{R}$	U	Pr	$GrPr^2 \varphi \sin(\theta) + \frac{V^2}{R} - \frac{\partial P}{\partial R} - Pr \frac{2}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta}$
Quantité de Mouvement suivant $\vec{\theta}$	V	Pr	$\varphi \cos(\theta) + \frac{UV}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial R} + Pr \frac{2}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta}$
Energie	$\varphi$	$\alpha$	$\alpha \frac{\varphi}{R^2}$

Tableau II.1 : Expressions du coefficient de diffusion et du terme source

**II.4.1.5. Les paramètres caractéristiques du problème :**

Les paramètres caractéristiques du problème qui interviennent dans les équations adimensionnelles ci-dessus dont les valeurs conditionnent les transferts de chaleur et de masse dans le réservoir sont :

- Angle de la cavité :  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- Rayon de la cavité :  $0 \leq R \leq 1$
- Longueur de la cavité :  $Z = 1$

- Nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
- Nombre de Rayleigh thermique :  $Ra_t = \frac{g\beta_t\Delta T R_0^3}{\nu\alpha}$

#### II.4.2. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites jouent un rôle déterminant pour la résolution des équations gouvernantes établis précédemment du fait de leur influence directe sur les résultats finals. Nous l'avons donc, adopté soigneusement et précisément en imposant la condition de non glissement sur toute la paroi de réservoir, ce qui signifie que la vitesse de fluide qu'est au contact de la paroi est nulle. Les valeurs des températures sur les frontières (parois) sont connues,  $T_c$  (température de la paroi chaude) et  $T_f$  (température de la paroi froide).

Pour bien simuler et comparer les résultats du comportement thermique du fluide cryogénique à l'intérieur de réservoir, nous avons choisi de diviser notre travail en deux grandes parties :

- Partie I : Cas instationnaire à conditions aux limites fixes.
- Partie II : Cas instationnaire à conditions aux limites mobiles.

##### II.4.2.1. Partie I :

Cette partie est consacrée à l'étude du comportement thermique d'un réservoir cryogénique à conditions aux limites fixes. Cette étude a été faite pour quatre configurations différentes, chacune représente une position des conditions aux limites relative à la position du flux de chaleur sur la surface extérieure du réservoir. La première et la troisième configuration représentent les cas d'un réservoir chauffé par le bas et par le haut respectivement. La deuxième et quatrième configuration représentent les deux cas d'un réservoir différentiellement chauffé.

##### II.4.2.1.1. Configuration 1 :

Cette configuration est correspondante au cas d'un réservoir qui reçoit un flux de chaleur constant sur sa paroi inférieure (chauffé par le bas). Du fait de ce flux, la température de la paroi inférieure augmente, ce qui crée un gradient de température instable qui favorise l'écoulement de la convection naturelle. La condition de non glissement est toujours imposée sur les deux parois (figure II.4. (a)).

### II.4.2.1.2. Conditions aux limites selon la configuration 3 :

La troisième configuration constitue le cas d'un réservoir qui reçoit un flux de chaleur constant sur sa paroi supérieure (chauffé par le haut). Ce flux de chaleur augmente la température de la paroi supérieure. Cette configuration représente un gradient de température stable qui défavorise le mouvement convectif (figure II.4 (b)).

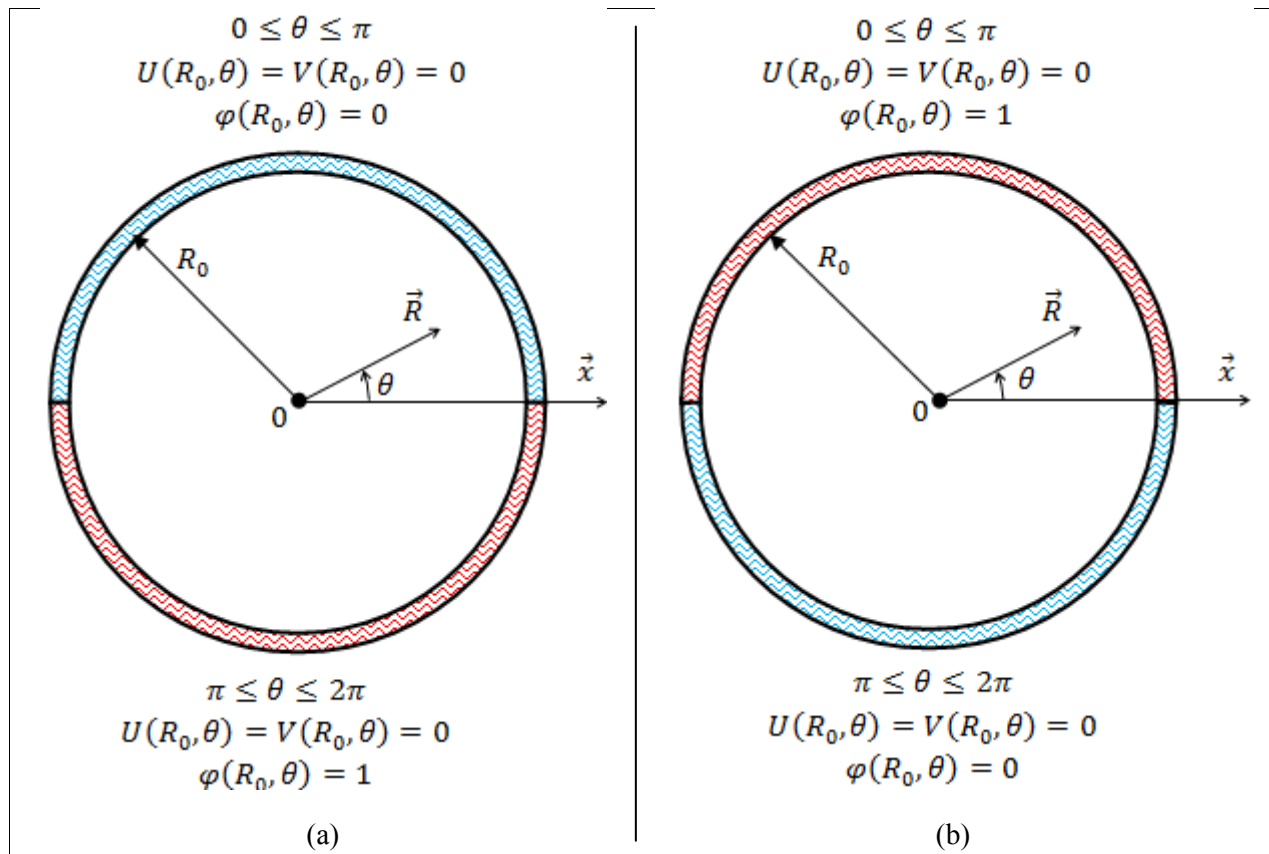


Figure II.3 : conditions aux limites selon (a) : la configuration 1 ; (b) : la configuration 3.

### II.4.2.1.3. Conditions aux limites selon la configuration 2 :

La deuxième configuration constitue le cas d'un réservoir qui reçoit un flux de chaleur constant son coté droit (différentiellement chauffé 1). Ce flux de chaleur augmente la température de la paroi supérieure. Cette configuration représente un gradient de température relativement instable qui favorise le mouvement convectif (figure II.5).

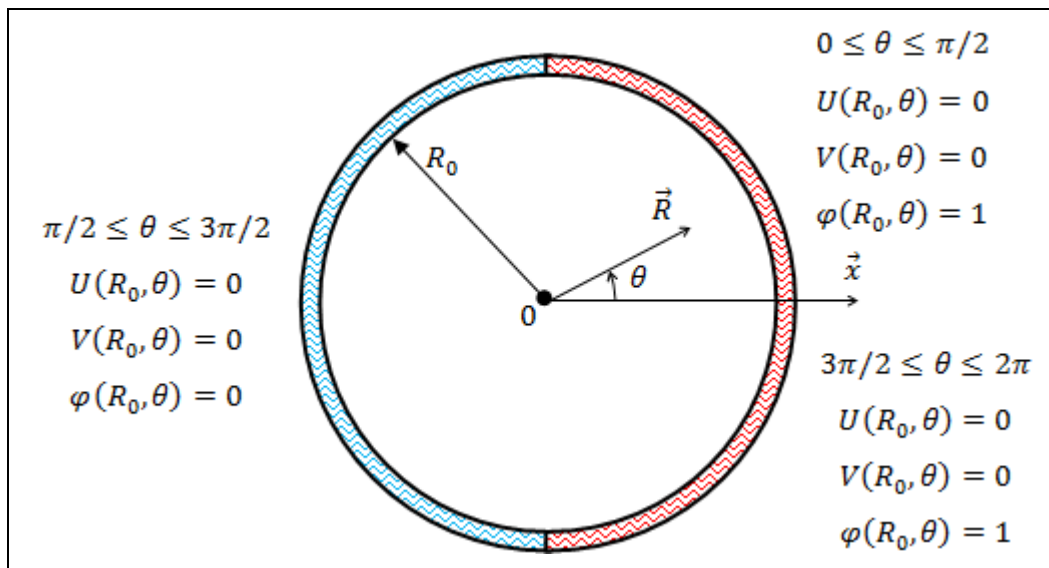


Figure II.4 : conditions aux limites selon la configuration 2

**II.4.2.1.4. Conditions aux limites selon la configuration 4 :**

Cette configuration est correspondante au cas d'un réservoir qui reçoit un flux de chaleur constant sur son côté gauche (différentiellement chauffé 2). Du fait de ce flux, la température du côté gauche augmente, ce qui crée un gradient de température instable qui favorise l'écoulement de la convection naturelle. La condition de non glissement est toujours imposée sur les deux parois (figure II.6).

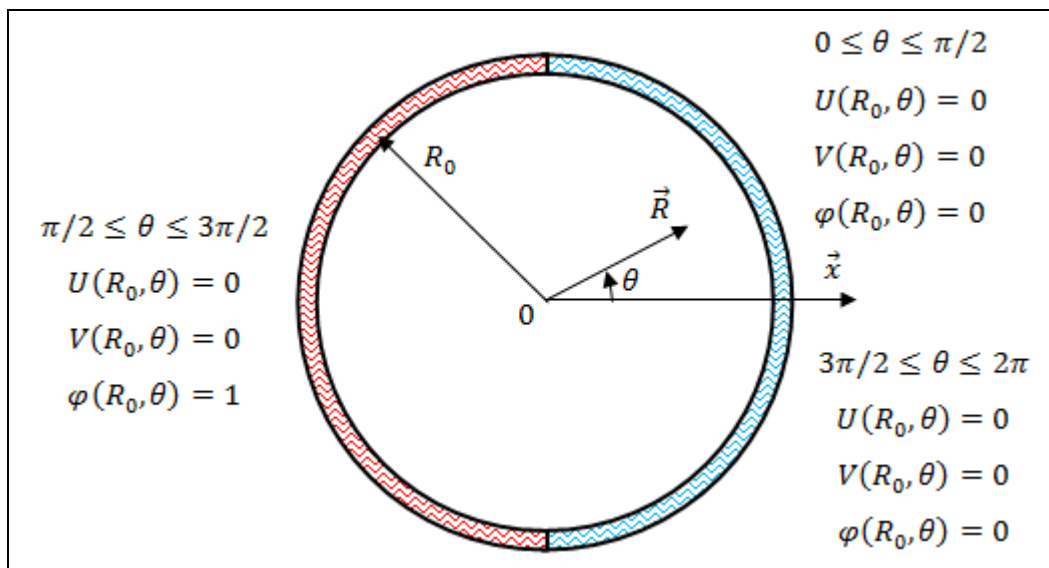


Figure II.5 : conditions aux limites selon la configuration 4.

## II.4.2.2. Partie II :

La deuxième partie constituée est consacrée à l'étude du comportement thermique d'un réservoir cryogénique à conditions aux limites mobiles. Dans cette partie, le réservoir est soumis à un flux solaire (apport de chaleur) sur sa paroi extérieure. Ce flux va se déplacer sur cette paroi le long de la journée. Pour simuler le déplacement du flux solaire, les conditions aux limites imposées sur la paroi du réservoir doivent être mobiles par la même vitesse que le flux solaire. En plus, la condition de non glissement est imposée sur toute la paroi.

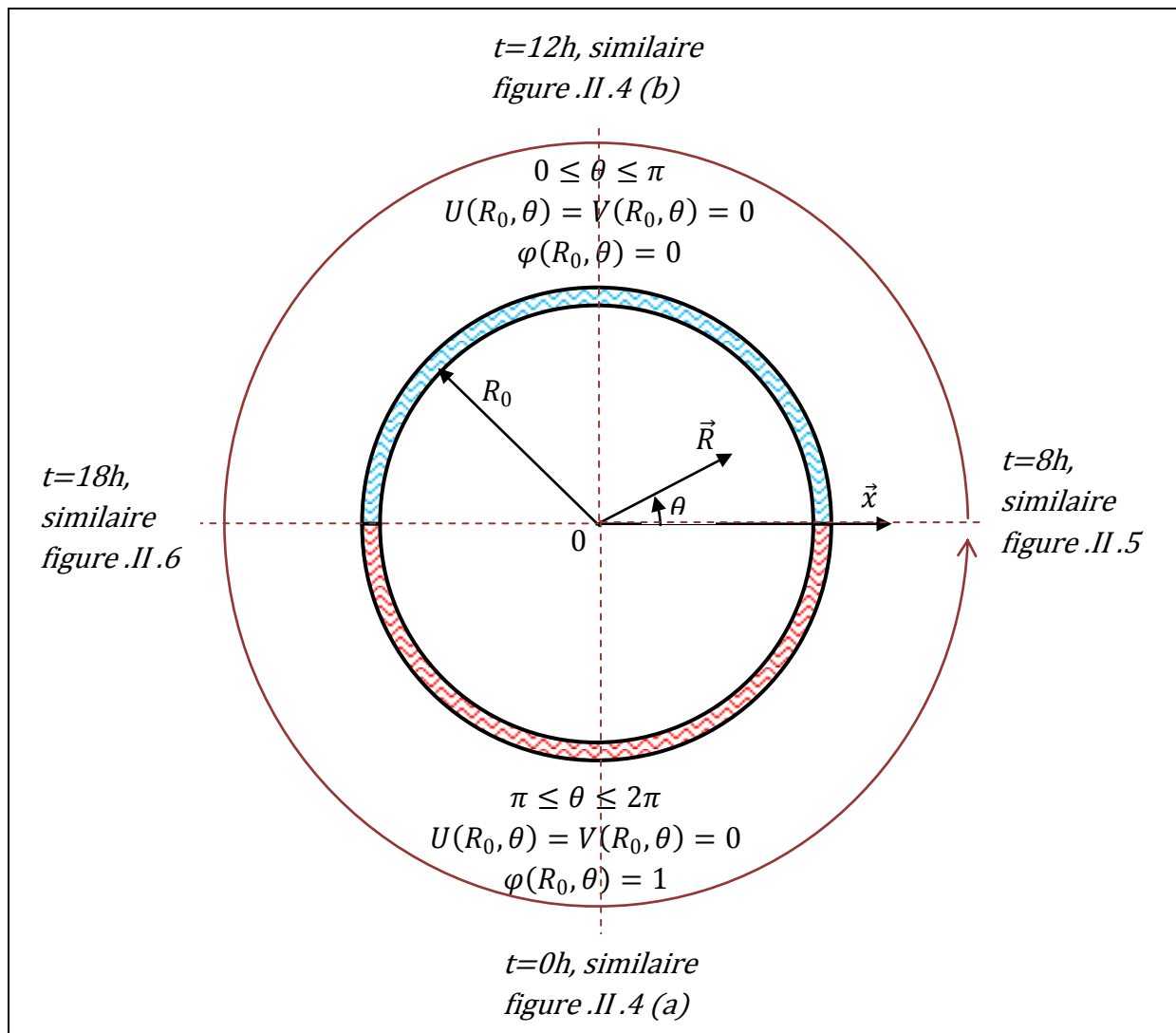


Figure II.6. : Conditions aux limites correspondantes à la deuxième partie

**II.5. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons établi le modèle mathématique de notre problème, ce dernier est constitué par les équations qui gouvernent le transfert thermique par convection naturelle ainsi que les conditions aux limites correspondantes. Il s'agit d'un système complexe formé par des équations qui sont issues de la thermodynamique et de la mécanique des fluides.

La résolution analytique de ces équations n'est pratiquement jamais réalisable à cause de la non linéarité visible de quelque variable, ce qui conduit toujours à l'utilisation des méthodes numériques pour résoudre le système d'équations.

Nous avons donc choisi pour résoudre le système d'équations la méthode des volumes finis développée par Patankar [17], qui a été utilisée avec succès par plusieurs auteurs [18,19]. La méthode est basée sur une approche de type volume de contrôle. Elle est simple à comprendre et à interpréter physiquement compte tenu de son fondement [16].

---

*CHAPITRE III :*

*PRESENTATION DE LA METHODE DES*

*VOLUMES FINIS*

---

# CHAPITRE III :

## PRESENTATION DE LA METHODE

### DES VOLUMES FINIS

---

#### **III. Introduction :**

Les équations régissant le phénomène de la convection naturelle sont des équations aux dérivées partielles. Leur résolution analytique est pratiquement impossible du fait de la non-linéarité enregistré sur leurs termes convectifs ainsi que le couplage vitesse-pression dans l'équation de la quantité de mouvement. Néanmoins, un recours aux méthodes de résolution numériques s'avère nécessaire pour les résoudre.

Il existe dans la littérature, plusieurs méthodes pour résoudre ce type d'équations, à savoir :

- La méthode des différences finies
- La méthode des éléments finis
- La méthode des volumes finis

La résolution des équations régissant le phénomène de la convection naturelle a été faite à l'aide de la méthode des volumes finis, en raison de sa facilité et son efficacité à résoudre des équations différentielles à plusieurs variables aussi compliquées. Cette méthode est simple à comprendre et à interpréter physiquement compte tenu de son fondement. Elle est basée sur une approche de type volume de contrôle. Sa qualité principale est la réduction des instabilités numériques des schémas aux grandes valeurs du nombre de Rayleigh [17].

**III.1. Principe de la méthode des volumes finis**

La méthode des volumes finis est caractérisée par son avantage à satisfaire la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans chaque volume de contrôle ainsi que dans tout le domaine de calcul. Elle facilite la linéarisation des termes non linéaires dans les équations de conservation telle que le terme source par exemple. La méthode consiste à partager le domaine de calcul en plusieurs volumes, où chaque volume entourant un nœud. On peut donc intégrer les termes de ces équations différentielles sur chaque volume de contrôle, en utilisant plusieurs schémas d'approximations où les valeurs et les quantités sont stockées aux nœuds de chaque volume de contrôle. Les équations algébriques produites expriment la conservation des quantités intégrées pour le volume de contrôle et pour tout le domaine de calcul.

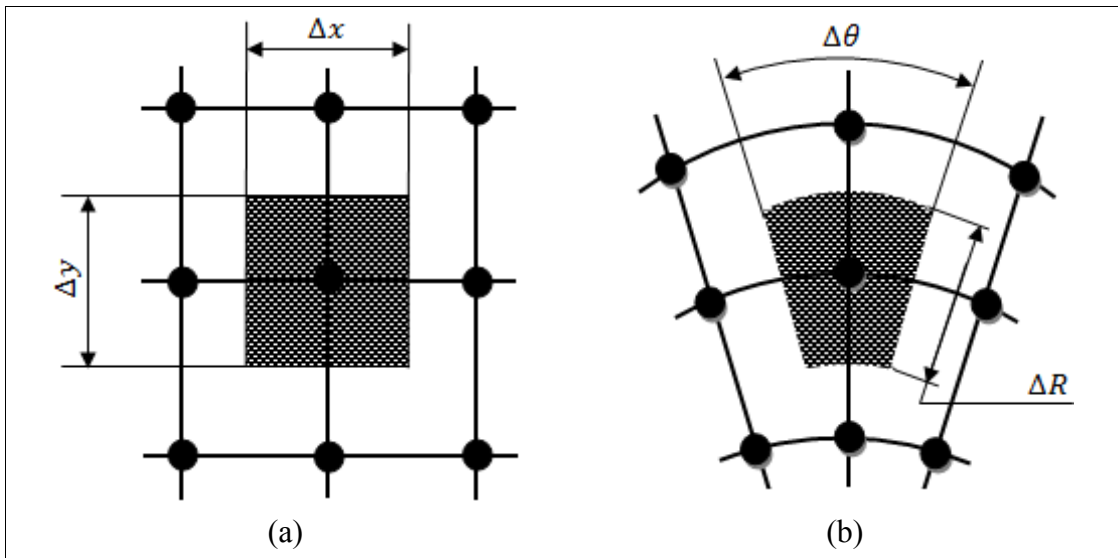


Figure III.1 : volume de contrôle (a) : en coordonnées cartésiennes (b) : en coordonnées cylindriques

**III.2. Application aux équations de notre problème :**

**III.2.1. Discrétisation des équations du bilan :**

En raison d'éviter la répétition du travail de discrétisation pour chaque équation, on va discrétiser seulement l'équation généralisée ensuite, on remplace la variable généralisée par celle qui lui correspond dans chaque équation :

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \tau}}_T + \underbrace{U \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}}_C = \underbrace{\Gamma_\phi \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\phi) \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right]}_D + \underbrace{S_\phi}_S \tag{III. 1}$$

Avec : T : terme transitoire ; C : terme convectif ; D : terme diffusif ; S : terme source.

Pour simplifier l'écriture de l'équation (III.1), on introduit les paramètres suivants :

$$J_R = U\phi - \Gamma_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\phi) \quad (\text{III. 2})$$

$$J_\theta = V\phi - \Gamma_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\phi) \quad (\text{III. 3})$$

Avec  $J_R$  et  $J_\theta$  sont les flux totaux par unité de surface (convectif et diffusif) suivant les directions  $\vec{R}$  et  $\theta$  respectivement.

Les équations s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial R} (J_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) = S_\phi \quad (\text{III. 4})$$

Alors :

$$\iint \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial R} (J_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) \right] dV d\tau = \iint [S_\phi] dV d\tau \quad (\text{III. 5})$$

Pour les coordonnées cylindriques (Figure III.2), on sait que l'élément de volume s'écrit comme suit :

$$dV = R \cdot dR \cdot d\theta \cdot dZ \quad (\text{III. 6})$$

Pour le cas bidimensionnel  $dZ = 1$

$$dV = R \cdot dR \cdot d\theta \quad (\text{III. 7})$$

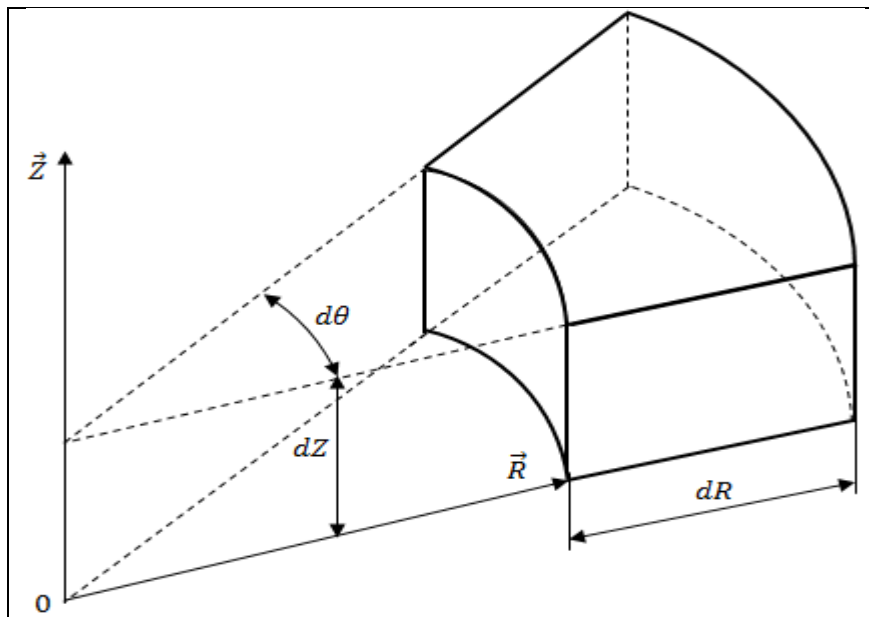


Figure III.2 : élément de volume en coordonnées cylindriques

L'équation (III.5) s'écrit donc comme suit :

$$\underbrace{\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial \phi}{\partial \tau} R dR d\theta d\tau}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \left[ \frac{\partial}{\partial R} (J_R) \right] R dR d\theta d\tau}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) \right] R dR d\theta d\tau}_{\text{III}}$$

$$= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n [S_\phi] R dR d\theta d\tau \quad \text{(III.8)}$$

IV

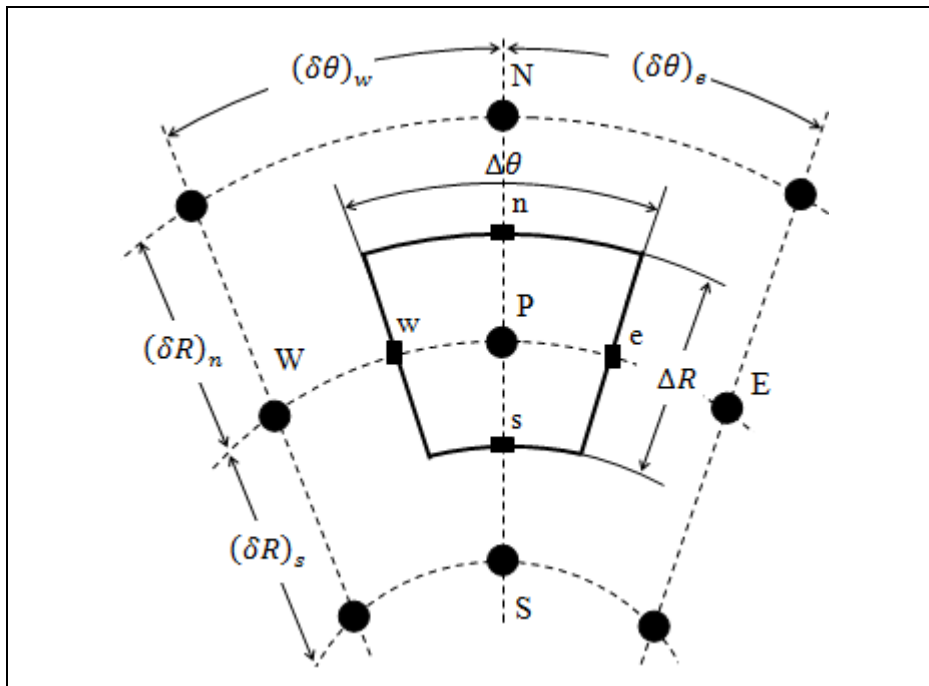


Figure III.4 : volume de contrôle en coordonnées cylindriques

Pour pouvoir intégrer cette équation sur le volume de contrôle schématisé sur la figure III.3, on doit faire les suppositions suivantes :

- ✓ Les flux (convectif et diffusif) sont uniformes le long de chaque face de volume de contrôle
- ✓ Pour chaque instant donné, la variable généralisée  $\phi$  est uniforme à travers le volume de contrôle
- ✓ Le terme source est uniforme sur le volume de contrôle
- ✓ On considère un schéma complètement implicite en vue d'assurer une bonne convergence de la méthode.

**III.2.2. Intégration du terme transitoire :**

$$I = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} d\tau \int_w^e \int_s^n R dR d\theta = [(\phi)_P - (\phi)_P^0] \Delta V \quad (\text{III. 9})$$

Avec :

$(\phi)_P$  : Valeur du variable généralisée à un instant  $\tau + \Delta\tau$

$(\phi)_P^0$  : Valeur du variable généralisée à un instant  $\tau$

$\Delta V$  : Volume de contrôle entourant le nœud P, ( $\Delta V = R_P \Delta R \Delta\theta$ ),  $\Delta Z = 1$

**III.2.3. Intégration du flux total suivant  $\vec{R}$  :**

$$II = \left[ \int_s^n \left( \frac{\partial}{\partial R} (J_R) \right) R dR \right] \Delta\theta \Delta\tau = [R_n (J_R)_n - R_s (J_R)_s] \Delta\theta \Delta\tau$$

Alors :

$$II = [J_n - J_s] \Delta\tau \quad (\text{III. 10})$$

Avec :

$$J_n = (J_R)_n \cdot A_n \quad \text{Où} \quad A_n = R_n \Delta\theta$$

$$J_s = (J_R)_s \cdot A_s \quad \text{Où} \quad A_s = R_s \Delta\theta$$

Où :  $J_n$  et  $J_s$  sont les flux totaux traversant les sections  $A_n$  et  $A_s$  respectivement.

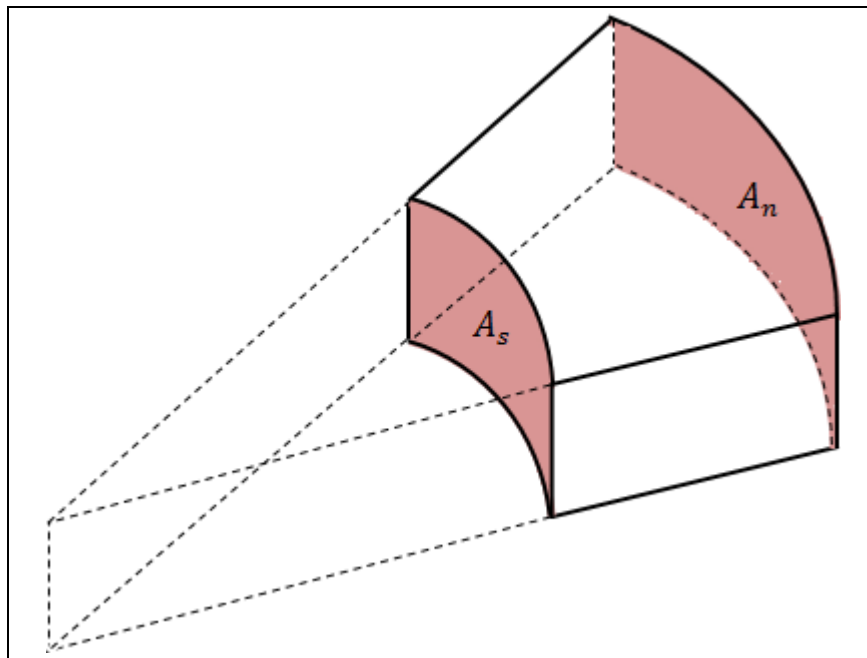


Figure III.5 : schéma montrant les sections  $A_n$  et  $A_s$

**III.2.4. Intégration du flux total suivant  $\theta$ :**

$$\text{III} = \left[ \int_w^e \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) \right) d\theta \right] \Delta R \Delta \tau = [(J_\theta)_e - (J_\theta)_w] \Delta R \Delta \tau$$

Alors :

$$\text{III} = [J_e - J_w] \Delta \tau \quad (\text{III. 11})$$

Avec :

$$J_e = (J_\theta)_e \cdot A_e \quad \text{Où} \quad A_e = \Delta R$$

$$J_w = (J_\theta)_w \cdot A_w \quad \text{Où} \quad A_w = \Delta R$$

Où :  $J_e$  et  $J_w$  sont les flux totaux traversant les sections  $A_e$  et  $A_w$  respectivement.

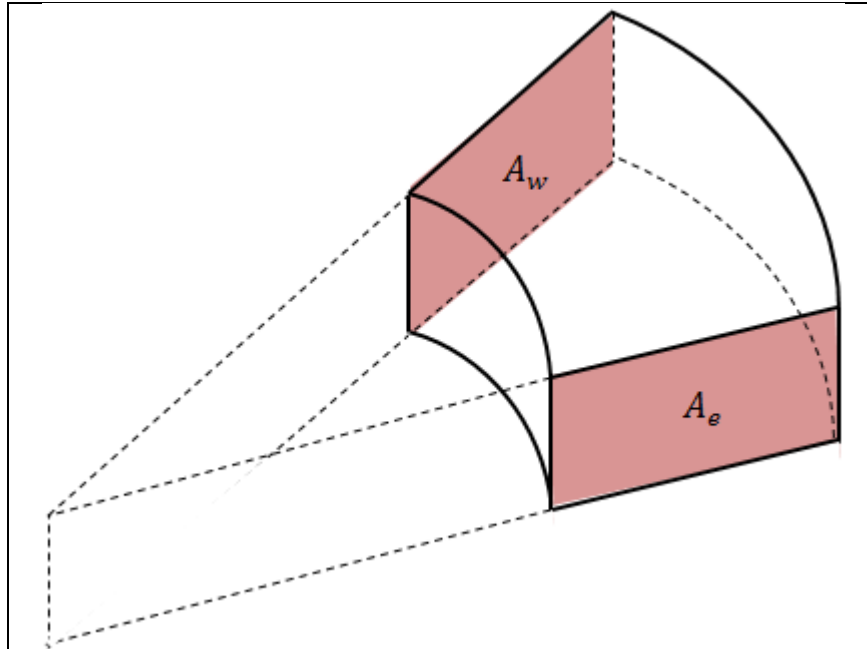


Figure III.6 : schéma montrant les sections  $A_e$  et  $A_w$

On fait la sommation des équations (III.10) et (III.11), on obtient l'intégrale des flux totaux suivant les deux directions  $(\vec{R}, \theta)$  :

$$\text{II} + \text{III} = [J_n - J_s + J_e - J_w] \Delta \tau \quad (\text{III. 12})$$

**III.2.5. Intégration du terme source :**

L'intégration du terme source  $S_\theta$  est obtenue en supposant qu'il est uniforme sur tout le volume de contrôle.

$$IV = \overline{S_\phi} \left[ \int_w^e \int_s^n R dR d\theta \right] \left[ \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} d\tau \right] = \overline{S_\phi} \Delta V \Delta\tau \quad (III. 13)$$

Où  $\overline{S_\phi}$  est la valeur moyenne du terme source sur le volume de contrôle.

Quand le terme source dépend de la variable dépendante. Cette dépendance doit être exprimée par une relation linéaire, ceci permettra d'utiliser les méthodes de résolution des systèmes linéaires. La linéarisation est l'évolution de la valeur moyenne  $\overline{S_\phi}$  qui peut être fonction de la variable dépendante, leur valeur est donc calculée à chaque itération à partir des nouvelles des variables dépendantes.

Suite à la résolution des équations algébriques adoptées, le terme source sera linéarisé de façon à forcer la convergence, de sorte que :

$$\overline{S_\phi} = S_c + S_p \phi_P \quad (III. 14)$$

Où  $S_c$  est la partie constante qui ne dépend pas explicitement de  $S_p$ ,  $S_p$  est la pente de  $\phi_P$

Il est nécessaire que le coefficient  $S_p$  soit négatif pour que la solution soit numériquement stable et que la convergence soit plus rapide.

Finalement, en remplaçant les termes I, II, III et IV dans l'équation (III.7), on obtient la discrétisation de l'équation généralisée du bilan qui s'écrit comme suit :

$$[(\phi)_P - (\phi)_P^0] \frac{\Delta V}{\Delta\tau} + [J_n - J_s] + [J_e - J_w] = \overline{S_\phi} \Delta V \quad (III. 15)$$

Où  $J_i$  ( $i = e, w, n, s$ ) est le flux total évalué sur chaque face du volume de contrôle. Ce flux est composé de deux parties un flux convectif et un autre diffusif, par exemple, le flux total sur la face ( $e$ ) est donné par :

$$J_e = \left( V\phi - \Gamma_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial\theta} (\phi) \right)_e A_e \quad (III. 16)$$

Les parties diffusives sont évaluées en approximant les dérivées par les différences, ce qui donne :

$$\begin{cases}
 \left( \Gamma_{\emptyset} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\emptyset) \right)_e = \Gamma_{\emptyset e} \frac{\emptyset_E - \emptyset_P}{R_e (\delta\theta)_e} & (a) \\
 \left( \Gamma_{\emptyset} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\emptyset) \right)_w = \Gamma_{\emptyset w} \frac{\emptyset_P - \emptyset_W}{R_w (\delta\theta)_w} & (b) \\
 \left( \Gamma_{\emptyset} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\emptyset) \right)_n = \Gamma_{\emptyset n} \frac{\emptyset_N - \emptyset_P}{(\delta R)_n} & (c) \\
 \left( \Gamma_{\emptyset} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\emptyset) \right)_n = \Gamma_{\emptyset n} \frac{\emptyset_N - \emptyset_P}{(\delta R)_n} & (c)
 \end{cases} \quad (III. 17)$$

En utilisant les termes  $D_i$  et  $F_i$  qui représentent respectivement, la conductance de diffusion et la force de convection. Avec :

$$\begin{cases}
 D_e = \left[ \frac{\Gamma_{\emptyset e}}{R_e (\delta\theta)_e} \right] A_e & F_e = V_e A_e & (a) \\
 D_w = \left[ \frac{\Gamma_{\emptyset w}}{R_w (\delta\theta)_w} \right] A_w & F_w = V_w A_w & (b)
 \end{cases} \quad (III. 18)$$

$$\begin{cases}
 D_n = \left[ \frac{\Gamma_{\emptyset n}}{(\delta R)_n} \right] A_n & F_n = U_n A_n & (a) \\
 D_s = \left[ \frac{\Gamma_{\emptyset s} A_s}{(\delta R)_s} \right] A_s & F_s = U_s A_s & (b)
 \end{cases} \quad (III. 19)$$

Donc, l'équation (III.16) devient :

$$J_e = (F_e \emptyset_e - D_e (\emptyset_E - \emptyset_P)) \quad (III. 19. a)$$

De même pour les autres :

$$J_w = (F_w \emptyset_w - D_w (\emptyset_P - \emptyset_W)) \quad (III. 19. b)$$

$$J_n = (F_n \emptyset_n - D_n (\emptyset_N - \emptyset_P)) \quad (III. 19. c)$$

$$J_s = (F_s \emptyset_s - D_s (\emptyset_P - \emptyset_S)) \quad (III. 19. d)$$

Pour évaluer la variable généralisé dans le terme du flux convectif à l'interface, nous avons à notre disposition plusieurs schémas. Parmi ces schémas, nous avons choisi de présenter quatre à savoir :

- ❖ Schéma aux différences centrées (CDS)
- ❖ Schéma Upwind (UPS)
- ❖ Schéma Hybride (HDS)
- ❖ Schéma à loi de puissance (PLDS)

**III.3. Présentation des schémas :****III.3.1. Schéma aux différences centrées (CDS) :**

Supposons que la variation de la variable  $\phi$  entre deux nœuds voisins est linéaire. On suppose aussi que le maillage est uniforme. Dans ce cas, les termes convectifs des variables généralisées  $\phi$  se présente par une interpolation comme suite :

$$\begin{cases} \phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) & (a) \\ \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) & (b) \\ \phi_n = \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) & (c) \\ \phi_s = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) & (d) \end{cases} \quad (III. 20)$$

Le flux sur l'interface "e" est alors donné par :

$$J_e = \left( F_e \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) - D_e(\phi_E - \phi_P) \right) \quad (III. 21)$$

Le rapport de transfert par convection au rapport de transfert par diffusion représentent le nombre de Peclet ( $Pe$ ) qui est défini par :

$$Pe_m = \frac{F_m}{D_m} \quad (m = e, w, n, s) \quad (III. 22)$$

En remplaçant l'équation (III.22) dans l'équation (III.21), on obtient :

$$\begin{aligned} J_e &= D_e(1 - 0.5Pe_e)(\phi_P - \phi_E) + F_e\phi_P \\ &= D_e(A(|Pe_e|) + \|-Pe_e, 0\|)(\phi_P - \phi_E) + F_e\phi_P \end{aligned} \quad (III. 23. a)$$

Sur les autres interfaces les autres flux peuvent s'écrire de la même façon. On a alors :

$$J_w = D_w(A(|Pe_w|) + \|+Pe_w, 0\|)(\phi_W - \phi_P) + F_w\phi_P \quad (III. 23. b)$$

$$J_n = D_n(A(|Pe_n|) + \|-Pe_n, 0\|)(\phi_P - \phi_N) + F_n\phi_P \quad (III. 23. c)$$

$$J_s = D_s(A(|Pe_s|) + \|+Pe_s, 0\|)(\phi_S - \phi_P) + F_s\phi_P \quad (III. 23. d)$$

Avec :

$$A(|Pe_e|) = 1 - 0.5|Pe_e| \quad (III. 24)$$

L'équation de continuité discrétisée selon ce schéma est donnée par :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s^n \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (RU) \right] R dR d\theta d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s^n \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (V) \right] R dR d\theta d\tau = [F_n - F_s] + [F_e - F_w] \quad (\text{III. 25})$$

En remplaçant les différents flux constituant l'équation (III.15) par leurs expressions correspondantes (III.23) et en soustrayant l'équation de continuité discrétisée (III.25) de (III.15) nous aboutirons après certain arrangement à une équation sous la forme suivante :

$$a_p \phi_p = a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b \quad (\text{III. 26})$$

Où les coefficients  $a_M$  ( $M=E, W, S, N$ ) sont donnés par :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (\text{III. 27. a})$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \|\+F_w, 0\| \quad (\text{III. 27. b})$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \|-F_n, 0\| \quad (\text{III. 27. c})$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \|\+F_s, 0\| \quad (\text{III. 27. d})$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_c \Delta V \quad (\text{III. 28})$$

Etant donné que le signe et la valeur des termes,  $F_m$ , dépendent de la vitesse, ces coefficients,  $a_M$ , peuvent être positifs ou négatifs. Il a été montré pour un problème monodimensionnel que la réalité physique des problèmes de transfert de chaleur exige que leurs valeurs soient positives ou nulles [31] c'est-à-dire que :

$$|Pe_m| = \left| \frac{F_m}{D_m} \right| < 2 \quad (\text{III. 29})$$

### III.3.2. Schéma Upwind (UPS) :

Ce schéma a été introduit, pour la première fois, par *Courant, Issacson & Rees* [17]. Par rapport au schéma précédent, les termes de diffusions sont les mêmes, seul les termes de convection changent. Il est appliqué pour les écoulements à dominance convective

Suivant la direction du flux ( $E \rightarrow W$ ), la valeur de  $\phi$  est déterminée comme suit :

$$\text{Pour : } F_e > 0 (V_e > 0), \quad \phi_e = \phi_P \text{ et } \phi_w = \phi_W \quad (\text{III. 30. a})$$

$$\text{Pour : } F_e < 0 (V_e < 0), \quad \phi_e = \phi_E \text{ et } \phi_w = \phi_P \quad (\text{III. 30. b})$$

En utilisant l'opérateur  $\|-, -\|$  maximum, cette double condition peut être écrite sous une forme compacte :

$$\phi_e = \frac{\phi_P \|+F_e, 0\| - \phi_E \|+F_e, 0\|}{F_e} \quad (\text{III. 31. a})$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W \|+F_w, 0\| - \phi_P \|+F_w, 0\|}{F_w} \quad (\text{III. 31. b})$$

Les valeurs de  $\phi_n$  et  $\phi_s$  sont définis de la même manière :

$$\phi_n = \frac{\phi_P \|+F_n, 0\| - \phi_N \|+F_n, 0\|}{F_n} \quad (\text{III. 32. c})$$

$$\phi_s = \frac{\phi_S \|+F_s, 0\| - \phi_P \|+F_s, 0\|}{F_s} \quad (\text{III. 32. d})$$

En suivant la même procédure qu'aux paragraphes précédents, nous aboutirons à l'équation (III.25) où les coefficients  $a_M$  ( $M=E, W, S, N$ ) sont donnés par :

$$a_E = D_e (1 + \|-Pe_e, 0\|) = D_e A(|Pe_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (\text{III. 33. a})$$

$$a_W = D_w (1 + \|+Pe_w, 0\|) = D_w A(|Pe_w|) + \|\+F_w, 0\| \quad (\text{III. 33. b})$$

$$a_N = D_n (1 + \|-Pe_n, 0\|) = D_n A(|Pe_n|) + \|-F_n, 0\| \quad (\text{III. 33. c})$$

$$a_S = D_s (1 + \|\+Pe_s, 0\|) = D_s A(|Pe_s|) + \|\+F_s, 0\| \quad (\text{III. 33. d})$$

Tous les coefficients de discrétisation de ce schéma sont positifs, ce qui fait ce schéma est inconditionnellement stable, il introduit une erreur nommée fausse diffusion, et de ce fait qu'il donne une mauvaise représentation du phénomène physique réel [17].

### III.3.3. Schéma hybride (HDS) :

Ce schéma a été développé par Spalding [17] et constitue la combinaison des deux schémas précédents ; il se déduit de l'approximation centrée lorsque  $|Pe_m| < 2$ , mais il devient identique au schéma *Upwind* lorsque  $|Pe_m| > 2$ .

En appliquant ce schéma, la variable généralisée  $\phi$  aux différentes interfaces du volume de contrôle prendra la forme suivante :

$$\phi_e = \alpha_e \phi_P + (1 - \alpha_e) \phi_E \quad (\text{III. 34. a})$$

$$\phi_w = \alpha_w \phi_W + (1 - \alpha_w) \phi_P \quad (\text{III. 34. b})$$

$$\phi_n = \alpha_n \phi_P + (1 - \alpha_n) \phi_N \quad (\text{III. 34. c})$$

$$\phi_s = \alpha_s \phi_S + (1 - \alpha_s) \phi_P \quad (\text{III. 34. d})$$

Où les coefficients  $\alpha_m$  ( $m=e, w, n, s$ ) sont définis par :

$$\alpha_m = 0 \text{ si } Pe_m < 2 \rightarrow \text{Schéma Upwind} \quad (a)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \text{ si } |Pe_m| \leq 2 \rightarrow \text{Schéma centrée} \quad (b) \quad (\text{III. 35})$$

$$\alpha_m = 1 \text{ si } Pe_m > 2 \rightarrow \text{Schéma Upwind} \quad (c)$$

En remplaçant les différents flux constituant l'équation (III.15) par leurs expressions correspondantes et en soustrayant l'équation de continuité discrétisée de (III.15) nous aboutirons après certain arrangement à une équation sous la forme suivante :

$$a_P \phi_P = a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b \quad (\text{III. 36})$$

Les coefficients  $a_M$  ( $M=E, W, S, N$ ) sont donnés par :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (\text{III. 37. a})$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \|\+F_w, 0\| \quad (\text{III. 37. b})$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \|-F_n, 0\| \quad (\text{III. 37. c})$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \|\+F_s, 0\| \quad (\text{III. 37. d})$$

Avec  $A(|Pe_m|)$  est donné cette fois ci par :

$$A(|Pe_s|) = \|(1 - 0.5|Pe_m|), 0\| \quad (\text{III. 38})$$

**III.3.4. Schéma à loi de puissance (PLDS) :**

Pour pallier aux difficultés citées précédemment, on a utilisé le schéma d'approximation de la loi puissance développé par Patankar (1980) qui semble être beaucoup plus consistant. Ce schéma s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte et il est largement utilisé dans la littérature.

Il se définit comme suit :

$$Pe_e < -10 \quad a_E = -D_e Pe_e \quad (III. 39)$$

$$-10 < Pe_e < 0 \quad a_E = D_e [(1 + 0.1Pe_e)^5 - Pe_e] \quad (III. 40)$$

$$0 < Pe_e < +10 \quad a_E = D_e [(1 - 0.1Pe_e)^5] \quad (III. 41)$$

$$Pe_e > +10 \quad a_E = 0 \quad (III. 42)$$

Ces expressions conditionnelles peuvent être écrites sous la forme compacte suivante :

$$a_E = D_e \left\| \left\| 0, \left( 1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e} \right)^5 \right\| \right\| + \|0, -F_e\| \quad (III. 43)$$

Comme dans les paragraphes précédents, les coefficients  $a_M$  ( $M=E, W, S, N$ ) sont donc donnés par :

$$a_E = D_e A(|Pe_e|) + \|-F_e, 0\| \quad (a)$$

$$a_W = D_w A(|Pe_w|) + \|\+F_w, 0\| \quad (b)$$

$$a_N = D_n A(|Pe_n|) + \|-F_n, 0\| \quad (c)$$

$$a_S = D_s A(|Pe_s|) + \|\+F_s, 0\| \quad (d)$$

(III. 44)

Avec  $A(|Pe_m|)$  donné par :

$$A(|Pe_m|) = \|0, (1 - 0.5|Pe_m|)^5\| \quad (III. 45)$$

**III.3.5. Récapitulation**

Dans le tableau (III.1) nous avons regroupé les expressions de la fonction  $A(|Pe_m|)$  relatives aux différents schémas d'approximations. En examinant les variations données sur la figure (III.4) de la dite fonction, on remarque que tous les schémas, à l'exception des différences centrées, donnent des solutions physiquement acceptables.

Cependant, il est possible de raffiner le maillage de sorte que  $Pe_m$  devienne assez petit ( $<2$ ) pour le schéma centré, ce qui permet d'obtenir des solutions raisonnables.

Schémas	Expressions de $A( Pe_m )$
Centré	$1 - 0.5 Pe_m $
Upwind	1
Hybride	$\ 0, (1 - 0.5 Pe_m )\ $
Loi puissance	$\ 0, (1 - 0.5 Pe_m )^5\ $

Tableau III.1 : Expressions de la fonction  $A(|Pe_m|)$  pour différents schémas

L'exactitude des schémas « hybride » et « Upwind » est seulement de premier ordre en termes d'erreur de troncation des séries de Taylor (Taylor Séries Truncation Error : TSTE). L'utilisation des quantités du schéma « Upwind » s'assure que les schémas sont très stables et obéissent à la condition de transportivisme mais l'exactitude du premier ordre les rend enclin aux erreurs numériques de diffusion.

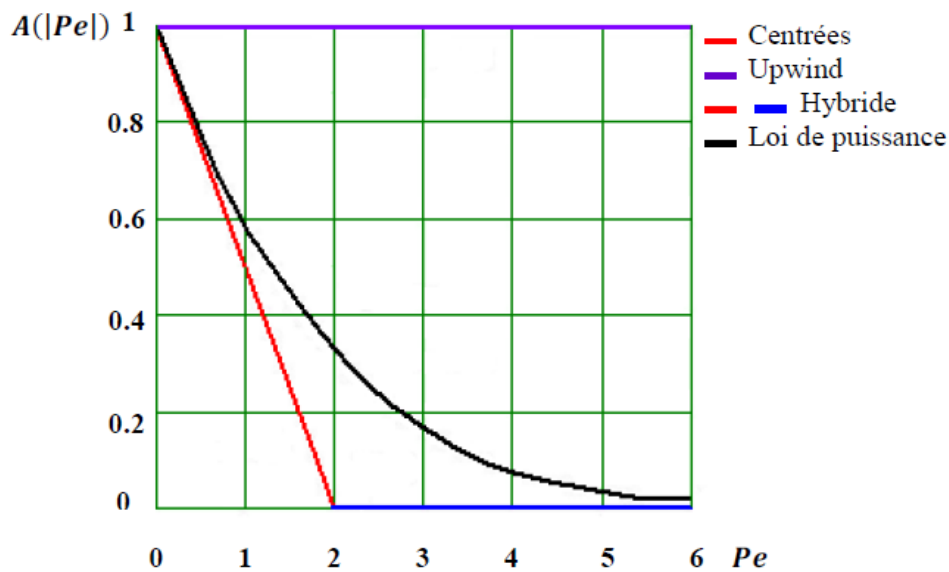


Figure III.7 : La fonction  $A(|Pe_m|)$  pour différents schémas [20].

### III.4. Procédure de résolution:

Le résultat de la discrétisation des équations régissant la convection naturelle est un ensemble d'équations algébriques non linéaires. Si on divise le domaine de calcul en  $N$  mailles selon  $R$  et en  $M$  mailles selon  $\theta$ , on aura un système de  $N \times M$  équations algébriques non linéaire pour chaque variable  $\phi$  considérée. Rappelons que les variables  $\phi$ , dans notre problème, sont la température  $T$ , les deux composantes de vitesse  $U$  et  $V$ . Un problème subsiste du fait qu'il n'existe pas d'équation donnant directement le champ de pression, ce qui oblige le passage par une méthode itérative.

Le traitement des équations de quantité de mouvement est similaire à celui de l'équation d'énergie, la seule différence réside dans le choix de la grille. On montre que si on calcule les variables,  $U$  et  $V$ , sur la même grille utilisée pour le calcul des variables  $T, p$  etc... on aboutira à une solution non réaliste [17,21]. Pour remédier à ce problème, on adopte un maillage 'décalé' afin d'évaluer le champ de vitesses et dont les nœuds sont localisés sur les faces des volumes de contrôle de la grille principale (figure (III)). Chaque composante de la vitesse est décalée suivant sa propre direction (figure (III)).

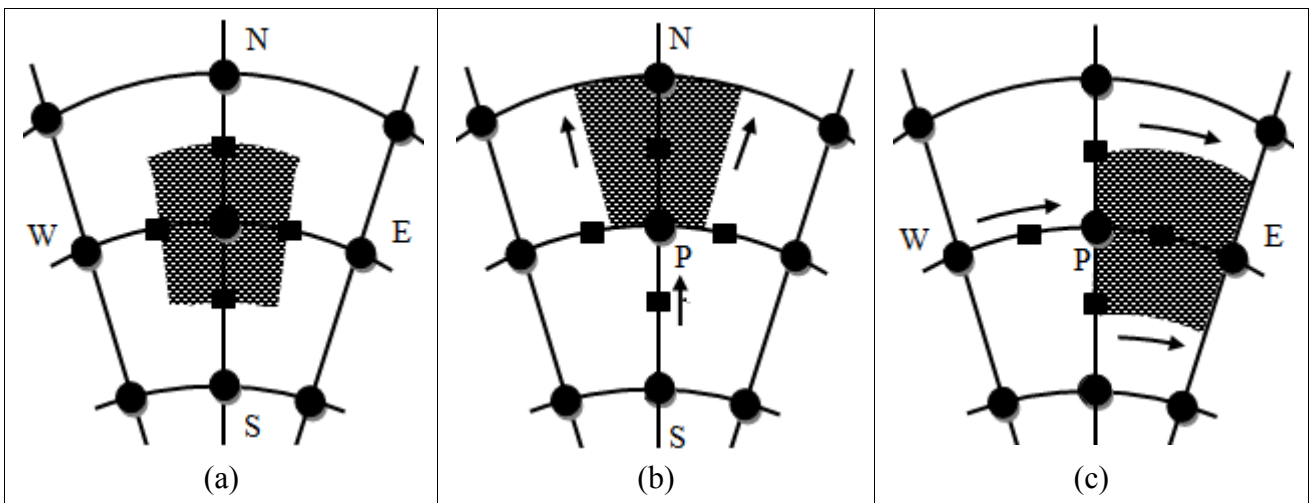


Figure III.8 : maillage en coordonnées cylindrique (a) : maillage standard ; (b) : maillage décalé suivant  $R$  ; (c) : maillage décalé suivant  $\theta$

L'intégration des deux équations de quantités de mouvement suivant les axes,  $R$  et  $\theta$ , où  $\phi$  dans l'équation généralisée correspond aux variables  $U$  et  $V$ , entraîne le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 a_e U_e &= a_{ee} U_{ee} + a_w U_w + a_{ne} U_{ne} + a_{se} U_{se} + b_U + (P_P - P_E) A_e & (a) \\
 a_n V_n &= a_{nn} V_{nn} + a_s V_s + a_{ne} V_{ne} + a_{nw} V_{nw} + b_V + (P_P - P_N) A_n & (b)
 \end{aligned}
 \tag{III. 46}$$

Avec :

$(P_P - P_E) A_e$  : représente la force de pression agissant sur la surface  $A_e$

$(P_P - P_N) A_n$  : représente la force de pression agissant sur la surface  $A_n$

$(b_U, b_V)$  : contient tout les termes source de l'équation

Les équations (III.46) peuvent alors s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$a_e U_e = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + (P_P - P_E) A_e + b_U \tag{III. 47. a}$$

$$a_n V_n = \sum_{nb} a_{nb} V_{nb} + (P_P - P_N) A_n + b_V \tag{III. 47. b}$$

Les équations de quantité de mouvement sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression (voir les équations (III.47.a) et (III.47.b)). Cette difficulté de couplage *vitesse-pression* vient de l'absence d'équations explicites qui gouvernent le champ de pression. Pour cette raison, on utilise des méthodes indirectes dont la plus répandue est relative à l'algorithme SIMPLE.

### III.4.1. Algorithme SIMPLE :

L'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) a été créé par Patankar S.V. et Spalding D.B. (1972) son idée générale est de corriger petit à petit la pression ainsi que les composantes de la vitesse afin que ces variables vérifiant les équations de la quantité de mouvement vérifient également l'équation de continuité. Il en résulte un processus itératif qui est intégré au sein de la résolution générale des équations discrétisées. Ceci est corrigé d'une manière continue en se référant aux résiduels de masses locales qui sont employées pour orienter le champ de pression vers le niveau correct. La stabilité de cet ordre itératif se base largement sur la rétention d'un couplage fort entre les perturbations dans le gradient de pression et les perturbations de vitesse [21].

#### III.4.1.1. Equation de correction de la vitesse

Soit  $P'$  la correction de pression, les composantes des corrections de  $U$  et  $V$  sont  $U'$  et  $V'$ . Ainsi, les champs corrigés de pression et de vitesse peuvent s'écrire comme suit :

$$P = P^* + P' \quad (a)$$

$$U = U^* + U' \quad (b) \quad (III. 48)$$

$$V = V^* + V' \quad (c)$$

Pour un champ de vitesse,  $\vec{V}^*$ , résultant d'un champ de pression,  $p^*$ , les équations (III.47.a) et (III.47.b) s'écrivent :

$$a_e U_e^* = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_U \quad (III. 49. a)$$

$$a_n V_n^* = \sum_{nb} a_{nb} V_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_V \quad (III. 49. b)$$

En soustrayant l'équation (III.47.a) de (III.49.b), on aboutit à :

$$a_e U_e - a_e U_e^* = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb} - \sum_{nb} a_{nb} U_{nb}^* + [(P_P - P_E) - (P_P^* - P_E^*)] A_e \quad (III. 50)$$

En combinant l'équation (III.49) avec les équations (III.48.a et b), on aboutit à :

$$a_e U_e' = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb}' + (P_P' - P_E') A_e \quad (III. 51)$$

En négligeant le terme  $\sum_{nb} a_{nb} U_{nb}'$ , l'équation (III.51) se réduit à :

$$a_e U_e' = (P_P' - P_E') A_e \quad (III. 52)$$

D'où :

$$U_e' = (P_P' - P_E') d_e \quad (III. 53)$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (III. 54)$$

L'équation (III.52) s'appelle : *formulation de correction de la vitesse*. De la même manière, on obtient celle relative à la composante  $V$ . Ainsi, les équations de correction de,  $U$  et  $V$  se réduisent à :

$$U_e = U_e^* + d_e (P_P' - P_E') \quad (III. 55. a)$$

$$V_n = V_n^* + d_n (P_P' - P_N') \quad (III. 55. b)$$

Il est à noter que le même raisonnement sera suivi pour les vitesses  $U_w$  et  $V_s$

### III.4.1.2. Equation de correction de la pression

Considère l'équation de continuité que nous avons intégrée à travers le volume de contrôle :

$$U_e A_e - U_w A_w + V_n A_n - V_s A_s = 0 \quad (\text{III.56})$$

En remplaçant dans l'équation (III.56) les vitesses  $U_e, U_w, V_n$  et  $V_s$  par leurs expressions correspondantes établies au paragraphe précédent, on aboutit à l'équation de correction de la pression :

$$a_P P_P' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b \quad (\text{III.57})$$

Avec :

$$a_E = d_e A_e \quad (a)$$

$$a_W = d_w A_w \quad (b)$$

$$a_N = d_n A_n \quad (c) \quad (\text{III.58})$$

$$a_S = d_s A_s \quad (d)$$

$$b = U_e^* A_e - U_w^* A_w + V_n^* A_n - V_s^* A_s \quad (e)$$

### III.4.1.3. Séquence des opérations de l'algorithme SIMPLE :

Après avoir présenté la méthode de discrétisation des différentes équations et le principe de base de l'algorithme **SIMPLE**, on peut résumer l'ensemble des séquences qui interviennent dans la résolution des équations mentionnées précédemment comme suit :

- ✓ **Etape 1** : Estimer le champ de pression  $p^*$ ,
- ✓ **Etape 2** : Calculer les coefficients pour les équations de quantité de mouvement et déterminer les vitesses  $U^*$  et  $V^*$ ,
- ✓ **Etape 3** : Calculer les coefficients pour l'équation de pression et obtenir le champ de pression,
- ✓ **Etape 4** : Évaluer la source  $b$  et résoudre l'équation (III.57) pour  $p'$ .
- ✓ **Etape 5** : Corriger le champ de vitesse, en utilisant des équations comme l'équation (III.55).
- ✓ **Etape 6** : Corriger le champ de pression en utilisant l'équation (III.49), avec la modification discutée dans le paragraphe ci-dessous.

- ✓ **Etape 7** : Résoudre les autres équations de  $\emptyset$ ; mettre à jour les propriétés, les coefficients,
- ✓ **Etape 8** : employant le  $p$  trouvé dans l'étape 4 comme nouveau  $p^*$ , revenir à l'étape 2. Faire un cycle par cette boucle jusqu'à ce que la convergence soit réalisée.

#### III.4.1.4. Résolution des systèmes d'équations linéaires

Considérons la notation indicielle, utilisée en raison de faciliter la programmation des étapes de calcul. La forme de l'équation de discrétisation de l'équation générale de transport sous la nouvelle notation est :

$$\left(a_{i,j} - S_{p_{i,j}}\right)\emptyset_{i,j} - a_{i,j-1}\emptyset_{i,j-1} - a_{i,j+1}\emptyset_{i,j+1} = a_{i+1,j}\emptyset_{i+1,j} + a_{i-1,j}\emptyset_{i-1,j} + S_c \quad (\text{III. 59})$$

Avec :

$$i = \overline{1, \dots, N} \text{ et } j = \overline{1, \dots, M}$$

Les coefficients de l'équation précédente sont fonction des variables de transport  $\emptyset$ , une méthode de résolution itérative doit être utilisée à cause de la non-linéarité. Le système (III.59) est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[A]\{\emptyset\} = \{S\} \quad (\text{III. 60})$$

Où :  $[A]$  est une matrice et  $\{\emptyset\}$  est le vecteur des inconnues  $\emptyset(i, j)$ .

La technique de balayage permet de transformer le système (III.60), en un système tridiagonal qui peut être résolu par l'algorithme de Thomas TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm).

Considérons le balayage Ouest-Est :

On attribut à la variable  $\emptyset$  pour les lignes  $(i - 1)$  et  $(i + 1)$ , ses valeurs obtenues lors de l'itération précédente, on aboutit au système suivant :

$$d_j \emptyset_j = C_j + b_j \emptyset_{j-1} + a_j \emptyset_{j+1} \quad (\text{III. 61})$$

Les coefficients de cette équation sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} d_j &= a_{i,j} + S_{p_{i,j}} & (a) \\ C_j &= a_{i+1,j}\emptyset_{i+1,j} + a_{i-1,j}\emptyset_{i-1,j} + S_c & (b) \end{aligned} \quad (\text{III. 62})$$

$$a_j = a_{i,j+1} \quad (c)$$

$$b_j = a_{i,j-1} \quad (d)$$

Cette technique de balayage permet une convergence plus rapide. Le choix de la direction de balayage exigé par les conditions aux limites. La méthode TDMA est utilisée après chaque balayage pour résoudre les systèmes d'équations correspondantes. Dans l'équation (III.61),  $\phi_j$  est fonction de  $\phi_{j+1}$  et  $\phi_{j-1}$  or une équation correspondante au nœud  $(i, j)$  peut être écrite de la manière suivante :

$$\phi_j = P_j \phi_{j+1} + Q_j \quad (\text{III. 63})$$

Une équation correspondante au nœud  $(i, j-1)$  est de la forme :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1} \phi_j + Q_{j-1} \quad (\text{III. 64})$$

En introduisant l'expression précédente dans l'expression (III.61), nous aurons :

$$\phi_j = \frac{a_j}{d_j - b_j P_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{C_j + b_j Q_{j-1}}{d_j - b_j P_{j-1}} \quad (\text{III. 65})$$

Avec :

$$P_j = \frac{a_j}{d_j - b_j P_{j-1}} \quad (a) \quad (\text{III. 66})$$

$$Q_j = \frac{C_j + b_j Q_{j-1}}{d_j - b_j P_{j-1}} \quad (b)$$

Donc il faut calculer  $P_1$  et  $Q_1$ , ensuite  $P_1$  et  $Q_2$  jusqu'à  $P_N$  et  $Q_N$ .

$$P_1 = \frac{a_1}{d_1}, \quad Q_1 = \frac{C_1}{d_1}, \quad P_N = 0 \quad \text{et} \quad Q_N = \phi_N \quad (\text{III. 67})$$

La valeur de  $Q_N$  étant connue d'après les conditions aux limites, on déterminera par retour en arrière  $\phi_{N-1}, \phi_{N-2}, \dots, \phi_2$  ( $\phi_1$  étant connue aux limites), nous balayons dans le sens inverse.

### III.5. Stabilité et convergence

#### III.5.1. Règles de base de la convergence de la méthode

La forme algébrique finale des équations discrétisées est :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (\text{III. 68})$$

En vue d'assurer la convergence, il est nécessaire de respecter les quatre règles de base suivantes :

**1° Règle :** *Comptabilité aux frontières des volumes de contrôle ;*

Lorsqu'une face est commune à deux volumes de contrôles adjacents, le flux qui les traverse doit être représenté par la même expression dans les équations discrétisées pour chacun des deux volumes de contrôle ;

**2° Règle :** *Coefficients positifs.*

La valeur de la variable  $\phi$  en un point donné est influencée par les valeurs de  $\phi$  aux nœuds voisins. Dans les mêmes conditions, l'augmentation de la valeur de  $\phi$  en un point doit provoquer une augmentation de  $\phi$  aux nœuds voisins. Pour cela, les coefficients  $a_P$  et  $a_M$  doivent tous avoir le même signe (positif ou négatif) ;

**3° Règle :** *linéarisation des termes sources.*

Dans l'équation (III.26), les coefficients  $a_M$  sont positifs, les coefficients  $a_P$  peuvent devenir négatifs à travers les termes  $S_P$  entraînant ainsi des instabilités numériques. Pour cette raison, les termes  $S_P$  doivent être négatifs ou nuls ;

**4° Règle :** *somme des coefficients voisins.*

Les équations différentielles gouvernantes contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante  $\phi$ . Si,  $c$ , est une constante arbitraire, la fonction  $\phi + c$  vérifie aussi les équations différentielles. Cette propriété est aussi valable pour les équations discrétisées. Ceci conduit à :

$$a_P = \sum_{nb} a_{nb} \quad (\text{III. 69})$$

### III.5.2. Technique de sous-relaxation

Parmi les méthodes de résolution des systèmes d'équations, on distingue les méthodes itératives. Ces dernières sont généralement plus utilisées pour :

- Des systèmes de grande taille,
- Des systèmes dont les équations algébriques sont à caractère non linéaire et couplé.

Dans cette catégorie de méthodes, on utilise la technique de relaxation pour contrôler la convergence du processus itératif (ralentir ou accélérer la convergence). Elle se présente comme suit :

Soit l'équation discrétisée de la variable  $\phi$  :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} (a_{nb} \phi_{nb}) + b \quad (\text{III. 70})$$

Où encore :

$$\phi_P = \frac{\sum_{nb} (a_{nb} \phi_{nb}) + b}{a_P} \quad (\text{III. 71})$$

A l'itération  $(k+1)$ , on peut écrire :

$$\phi_P^{(k+1)} = \phi_P^{(k)} + \left[ \frac{\sum_{nb} (a_{nb} (\phi_{nb})^{(k+1)}) + b}{a_P} - \phi_P^{(k)} \right] \quad (\text{III. 72})$$

Avec :

$\phi^{(k)}$  : Valeur de  $\phi$  à l'itération  $(k)$

$\phi^{(k+1)}$  : Valeur de  $\phi$  à l'itération  $(k + 1)$

La quantité, entre crochets, dans l'équation (III.70) représente la variation de  $\phi$  produite par une itération courante ou tout simplement le résidu.

La technique de relaxation a pour but de diminuer les résidus d'une première approximation puisque ces résidus sont nuls pour la solution exacte, ce qui revient à introduire un facteur de relaxation  $\alpha_\phi$  :

$$\phi_P^{(k+1)} = \phi_P^{(k)} + \alpha_\phi \left[ \frac{\sum_{nb} (a_{nb} (\phi_{nb})^{(k+1)}) + b}{a_P} - \phi_P^{(k)} \right] \quad (\text{III. 73})$$

Ou bien :

$$\frac{a_P}{\alpha_\phi} \phi_P^{(k+1)} = \sum_{nb} (a_{nb} (\phi_{nb})^{(k+1)}) + b + \frac{a_P}{\alpha_\phi} (1 - \alpha_\phi) \phi_P^{(k)} \quad (\text{III. 74})$$

En pratique,  $\alpha_\phi$  est défini tel que :

$$0 < \alpha_\phi < 2 \quad (\text{III. 75})$$

Si  $\alpha_\phi > 2$ , le processus diverge souvent.

Deux cas sont généralement rencontrés :

- ❖ Si  $1 < \alpha_\emptyset < 2$  : on est en présence d'une sur-relaxation. Cette valeur de  $\alpha_\emptyset$  est utilisée pour accélérer la convergence d'un processus itératif déjà convergent (figure (III.9)) [34].

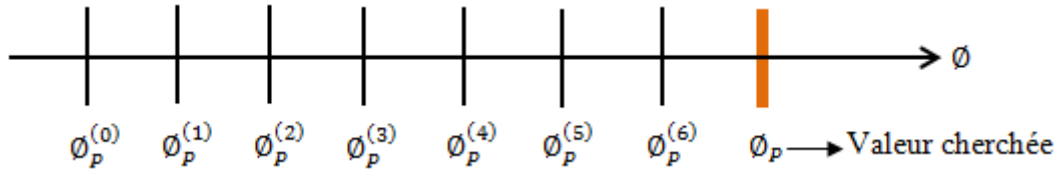


Figure III.9: Évolution possible de  $\Phi_p$  dans un processus convergent ; nécessité d'une sur-relaxation.

- ❖ Si  $0 < \alpha_\emptyset < 1$  : il s'agit d'une sous-relaxation. Dans ce cas, la valeur de  $\alpha_\emptyset$  permet souvent de faire converger un processus divergent ou encore de diminuer les variations des variables dépendantes d'une itération à l'autre (figure (III.10)) [34].

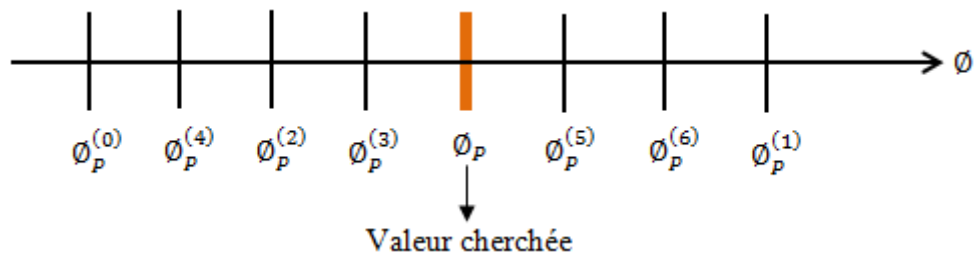


Figure III.10 : Évolution possible de  $\Phi_p$  dans un processus convergent ; nécessité d'une sous-relaxation.

La technique de sous-relaxation est très conseillée pour les problèmes non linéaires afin d'éviter la divergence. Dans notre cas, les variables,  $U$ ,  $V$  et  $T$  sont sous-relaxées tels que donné par l'équation (III.70). Par contre, la pression est sous-relaxée comme suit :

$$P = P^* + \alpha_\emptyset P' \quad (\text{III.76})$$

**En résumé :**

- ❖ Les facteurs de sous relaxation favorisent la stabilité du schéma numérique adopté et permettent d'atteindre l'état de convergence le plus rapidement possible ;
- ❖ Les valeurs de,  $\alpha_\emptyset$ , apparaissant dans les différentes équations, ne sont pas nécessairement les mêmes. Aussi, elles peuvent varier d'un nœud à l'autre et d'une itération à l'autre ;
- ❖ En pratique,  $\alpha_\emptyset$ , n'est pas connu à l'avance, il faut faire des essais. On peut suivre l'évolution des valeurs de  $\Phi_p^{(k)}$ , puis injecter une valeur de,  $\alpha_\emptyset$  et voir comment évoluent les valeurs de  $\Phi_p^{(k)}$  ;

- ❖ En général, il n'y a pas une garantie qui, pour tout caractère non linéaire et couplé d'équations, on peut toujours avoir la convergence. En absence de cette garantie, on peut néanmoins avoir de l'espoir, du fait que, pour un grand nombre de problèmes complexes, on a pu atteindre la convergence [17].

### III.5.3. Critère de convergence

On dit qu'un processus itératif a atteint la convergence c'est-à-dire se rapprocher au mieux de la solution stable du système d'équations en un nombre optimal d'itérations, lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs des variables dépendantes  $\Phi$ . Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé aussi '*critère de convergence*' qui dépend de la nature du problème et des objets du calcul. Un critère approprié est celui qui porte sur les résidus de quantité de mouvement, de masse et la température. Ces résidus sont définis par :

$$R_\Phi = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + b - a_P \Phi_P \quad (\text{III. 77})$$

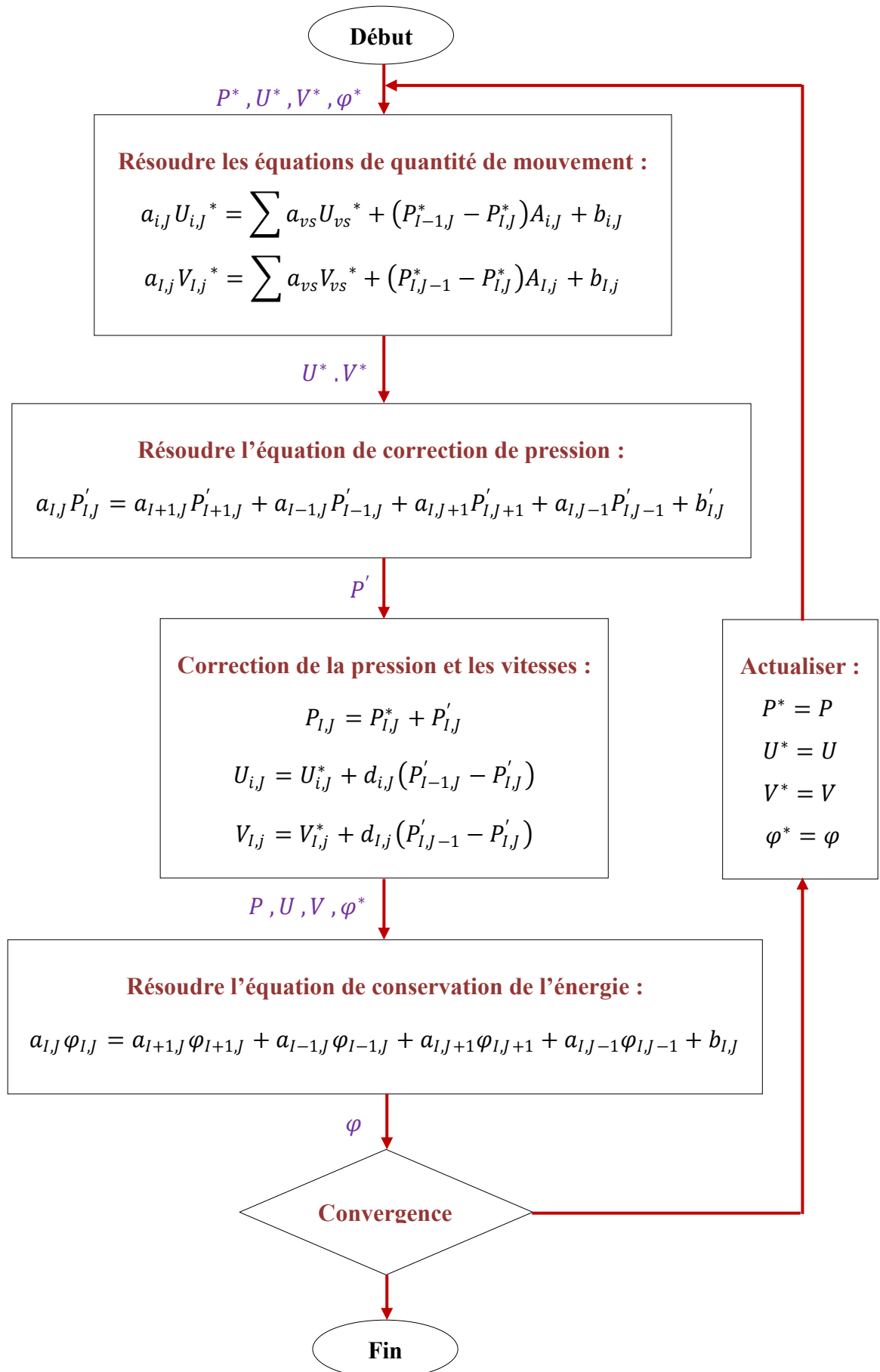
Evidemment, quand l'équation discrétisée est satisfaite,  $R_\Phi$  tendra vers zéro.

Mathématiquement, cela se traduit ça par l'inégalité suivante :

$$\sum |R_\Phi| < \varepsilon_\Phi \quad (\text{III. 78})$$

Où  $\varepsilon_\Phi$  est la valeur caractérisant l'erreur sur la solution obtenue.

La séquence des étapes dans l'algorithme SIMPLE est présentée ci-dessus :



**III.6. Conclusion :**

A travers ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode de volume fini, les étapes de discrétisation de modèle mathématique et de la résolution des équations algébriques, et quelques schémas de discrétisation.

Une résolution numérique bidimensionnelle des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de la chaleur a été mise en œuvre pour simuler le comportement thermique de liquide à l'intérieur d'un réservoir cylindrique horizontal de stockage cryogénique. La résolution est effectuée par le logiciel FLUENT basé sur la méthode des volumes finis.

Le logiciel FLUENT que nous allons détailler dans le chapitre suivant, propose un nombre assez important d'options qui déterminent la forme des équations de bilan et des équations de transport des scalaires supplémentaires. L'utilisateur a le choix entre un écoulement tridimensionnel ou bidimensionnel, monophasique ou multiphasique (homogène ou non), turbulent ou laminaire, permanent ou transitoire. Toutes ces options sont exposées dans le chapitre suivant.

---

*CHAPITRE IV :*

*PRESENTATION DU CODE DE CALCUL*

---

---

# CHAPITRE IV :

## PRESENTATION DU CODE DE CALCUL

---

### IV. Introduction

Pour réaliser nos simulations, nous avons choisi d'utiliser le code de calcul commercial *FLUENT* que nous présentons dans cette partie. Fluent est le leader des codes CFD (Computational Fluid Dynamics) de calcul industriel spécialisé dans les domaines de la mécanique des fluides et des transferts thermiques. Il est utilisé dans plusieurs domaines : Aéronautique, spatial, automobile, énergie, génie des procédés, environnement, thermique du bâtiment et biomécanique.

Il sert à effectuer des simulations allant de l'écoulement d'air autour d'un profil d'aile d'avion à la combustion dans les fours, des colonnes à bulles à la production de glace, de l'écoulement du sang dans les vaisseaux à la fabrication de semi-conducteurs, des installations de climatisation des pièces jusqu'aux centrales de traitement des eaux usées. Ce logiciel est capable de modéliser des écoulements aussi complexes que ceux dans les cylindres d'un moteur à combustion interne, dans les turbomachines ou dans les systèmes multiphasiques.

Fluent est écrit en langage de programmation C et utilise pleinement la flexibilité et la puissance offertes par ce langage (allocation de la mémoire dynamique). En outre, il utilise une architecture qui lui permet de s'exécuter en tant que plusieurs processus simultanés sur le même poste de travail ou sur des postes séparés, pour une exécution plus efficace. En plus de sa polyvalence, Fluent reste facile à maîtriser pour les utilisateurs grâce à son interface simple et complète. Ceci a servi à élargir sa gamme d'utilisation.

Ce code de calcul utilise la méthode des volumes finis comme procédé de discrétisation. Les équations intégrales qui régissent l'écoulement telles que l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de l'énergie sont résolues à l'aide de cette méthode. Pour cela Fluent est programmé pour passer par les étapes suivantes :

- division du domaine en volumes de contrôle discrets à l'aide un maillage.
- intégration des équations différentielles sur les volumes de contrôle individuels, afin de construire les équations algébriques pour les variables telles que la vitesse, la pression...etc.
- linéarisation des équations discrétisées et résolution du système d'équations linéaires algébriques résultant en utilisant la méthode de Gauss-Seidel.

Il peut résoudre des problèmes d'écoulement avec des mailles non structurées qui peuvent être produites pour des géométries complexes, avec une facilité relative. Les types de mailles supportées sont des mailles, en 2D, triangulaires ou quadrilatérales, ou en 3D tétraédriques, hexaédriques et pyramidales, et les mailles hybrides [22].

#### **IV.1. Architecture du logiciel :**

Comme tout logiciel de calcul numérique, il est composé de trois éléments :

- ✓ le préprocesseur (Gambit)
- ✓ le solveur
- ✓ le post-processeur

##### **IV.1.1. Le préprocesseur (Gambit) :**

Gambit est un logiciel de DAO (*Dessin Assisté par Ordinateur*), il sert à définir le problème à résoudre, cette définition consiste à créer la géométrie du système, et de discrétiser le domaine construit en utilisant plusieurs algorithmes de maillage en 2D ou 3D. Il permet aussi de définir le type de conditions aux limites et de spécifier la nature de matériaux (Fluide, solide) dans le domaine. En raison de son interface graphique puissante, il permet aussi de réaliser tout type de géométries complexes (fixes ou mobiles) associées à des maillages fixes ou adaptatifs [22].

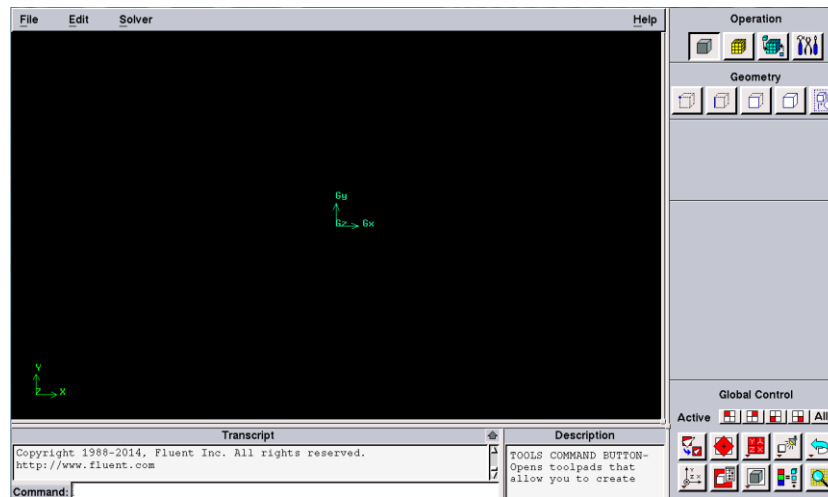


Figure IV.1 : interface de Gambit

#### IV.1.1.1. Critère du choix de maillage :

Le choix du maillage est un point essentiel dans la précision et l'exactitude des résultats numériques. Gambit met à la disposition de l'utilisateur une variété du choix des formes de cellules pour le maillage de la géométrie. Des cellules quadrilatères et triangulaires ou les deux à la fois pour des géométries en deux dimensions, et des cellules tétraédriques, hexaédriques, pyramidales, et parallélépipédiques pour des géométries en trois dimensions.

Le choix des types de cellules pour le maillage doit respecter certains critères et qui sont relatifs essentiellement, à la complexité de la géométrie (intersection des géométries de forme différents par exemple un parallélépipède avec un pyramide), aux phénomènes physiques que l'on souhaite faire apparaître (proche ou loin de la paroi). Mais surtout en choisissant le type de maillage il faut penser aux points suivants :

- Le temps de maillage.
- Le temps de calcul.
- La diffusion numérique.

#### IV.1.1.2. Le temps de maillage :

Beaucoup d'applications dans l'ingénierie nécessitent la modélisation de problèmes de géométrie complexe. La génération d'un maillage structuré ou structuré par blocs (contenant des éléments quadrilatéraux/hexaédriques) peut prendre beaucoup de temps et même impossible pour certaines configurations. C'est pour cela que, pour de telles géométries on a tendance à utiliser des maillages non structurés moyennant des éléments triangulaires/hexaédriques. Pour des géométries simples, le temps de maillage peut être similaire pour les deux types.

### IV.1.1.3. Le temps de calcul :

Si la géométrie est complexe ou si la dimension du domaine de l'écoulement est large, un maillage triangulaire/tétraédrique peut être créé avec un moindre nombre de cellules que pour un maillage équivalent en quadrilatéral/hexaédrique. Ceci par le fait que le maillage triangulaire/tétraédrique permet la segmentation des cellules dans des régions bien définies du domaine fluide, lorsqu'un maillage structuré va généralement forcer les cellules à être placées dans des régions parfois superflues. Un maillage non structuré quadrilatéral/hexaédrique offre les mêmes avantages qu'un maillage triangulaire/tétraédrique sur ce point.

Une caractéristique des éléments quadrilatéraux/hexaédriques est qu'ils peuvent être plus économiques dans certaines situations dans la mesure où ils permettent d'obtenir un ratio d'aspect plus grand. Celui-ci est défavorable pour le cas d'un maillage triangulaire/tétraédrique du moment qu'il affecte l'aplatissement des éléments ce qui est indésirable et peut causer une divergence lors de la simulation.

### IV.1.1.4. La diffusion numérique :

Une source dominante d'erreurs dans les situations multidimensionnelles est la diffusion numérique (diffusion fautive). Le terme diffusion fautive est utilisé parce que celle-ci n'est pas réelle, cependant elle affecte les résultats obtenus en augmentant les coefficients de diffusion.

Voici quelques cas où elle est notable :

- Elle est notable quand la diffusion réelle est faible, principalement dans le cas où la convection est dominante.
- Elle augmente l'erreur de troncature lors de la discrétisation des équations de l'écoulement.
- On peut réduire ses effets en utilisant la discrétisation au deuxième ordre sur FLUENT.
- La diffusion numérique est minimisée quand l'écoulement est aligné avec le maillage. Ceci est le point le plus important pour le choix du maillage. Si on utilise un maillage triangulaire/tétraédrique l'écoulement ne pourra jamais être aligné avec le maillage. Par contre, ceci peut se produire avec un maillage quadrilatéral /hexaédrique mais pas pour des écoulements complexes.

#### IV.1.1.5. Application au réservoir cylindrique de stockage cryogénique :

##### IV.1.1.5.1. Géométrie et maillage :

Après avoir fait les tests sur plusieurs types de maillages, nous avons abouti à deux conclusions, la première est que le maillage structuré n'est pas applicable à cause de présence d'une singularité au centre du cylindre (le nœud de coordonnées (0, 0) n'a pas de volume) et par conséquent on doit passer par le maillage non structuré, la deuxième est que le maillage triangulaire donne des résultats mieux que le maillage quadratique malgré que leur temps de calcul est plus important.

L'écoulement étant considéré bidimensionnel, le maillage a été réalisé en deux dimensions, Un maillage en trois dimensions n'aurait fait qu'augmenter le nombre de cellules et de ce fait, le temps de calcul, sans apporter de précision supplémentaire. Le maillage a été réalisé avec un pas variable, se resserrant aux niveaux des zones intéressantes (parois du réservoir). La figure IV.2 montre la géométrie et le maillage choisi sur lesquels ont été effectuées les simulations. Ils ont été réalisés sur GAMBIT et sont présentés comme sur une fenêtre FLUENT.

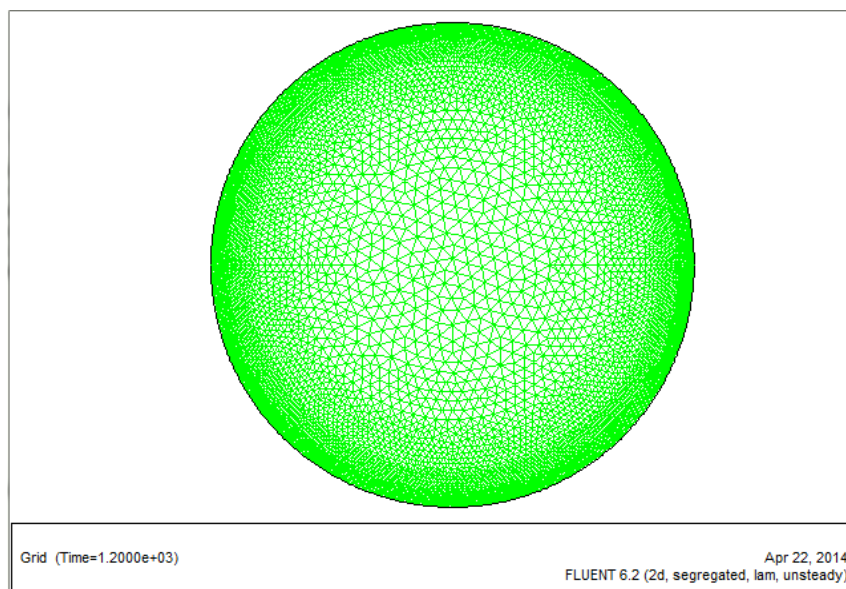


Figure IV.2 : la géométrie et le maillage sur lesquels ont été effectuées les simulations.

Une fois la géométrie est définie sur Gambit, On peut l'exporter vers Fluent en format.msh. La géométrie et le maillage peuvent être visualisés, redimensionnés et vérifiées grâce au menu GRID qui apparait sur l'interface de FLUENT.

### IV.1.2. Le solveur (Fluent) :

Permet de définir numériquement les conditions opératoires (gravité, pression) dans lesquelles est effectuée la simulation, et de spécifier les conditions aux limites. Il effectue la résolution numérique des équations décrites dans le chapitre II à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel.

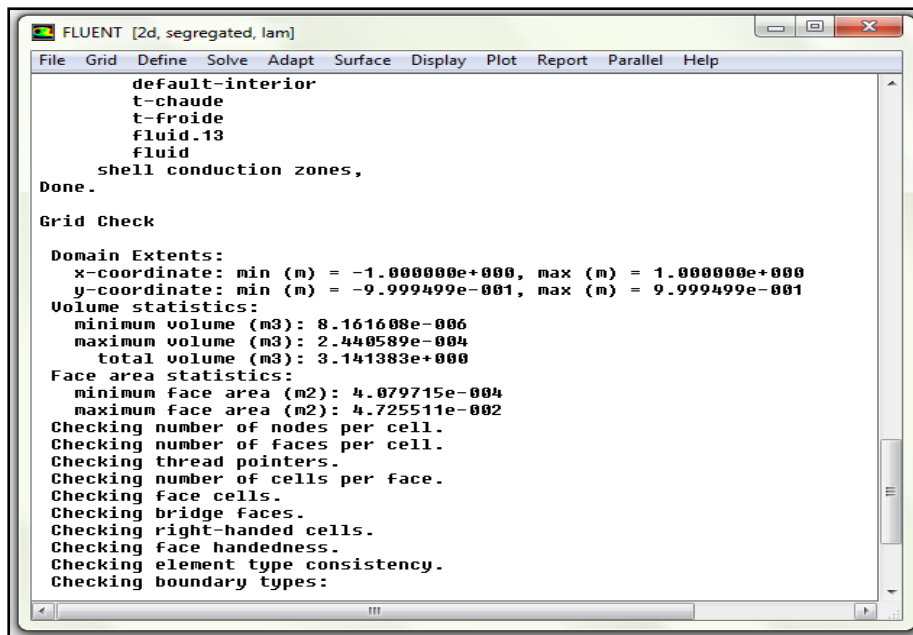


Figure IV.2 : interface de Fluent

#### IV.1.2.1. Choix de la formulation du solveur :

Sous "Fluent", on peut choisir entre plusieurs formulations du solveur :

- ❖ **La formulation "Segregated", ou isolée (implicite) :** Cette formulation résout les équations de continuité, de quantité de mouvement et quand c'est nécessaire celle de l'énergie, séquentiellement, c'est-à-dire isolées les unes des autres (implicite par défaut). Le solveur isolé est classiquement employé pour les écoulements incompressibles à modérément compressibles.
- ❖ **La formulation "Coupled", ou couplée (implicite ou explicite) :** Cette option permet aux équations gouvernantes d'être résolues simultanément, c'est-à-dire couplées les unes avec les autres. Cependant, les autres scalaires, tels que les quantités de la turbulence, sont traités isolément. Initialement, ce mode a été conçu pour les écoulements compressibles à grandes vitesses. Ceci lui donne un avantage pour le traitement des écoulements hautement couplés (forte interdépendance entre la densité, l'énergie et les moments) avec des forces

de volumes (pare exemple flottabilité et forces de rotation). Il faut signaler que le solveur couplé implicite requiert presque le double de la mémoire qu'utiliserait le solveur isolé, alors que le solveur couplé explicite vient au milieu, en terme de besoins en ressources, mais converge plus lentement que la formulation implicite et n'est conseillé que pour les écoulements instationnaire.

#### IV.1.2.2. Modélisation de la convection naturelle sur Fluent :

Avant de lancer les calculs sur FLUENT et de faire n'importe quelle modélisation, tous les paramètres de l'écoulement doivent être spécifiés :

- ✓ On spécifie le mode d'écoulement qui se fera en deux dimensions :

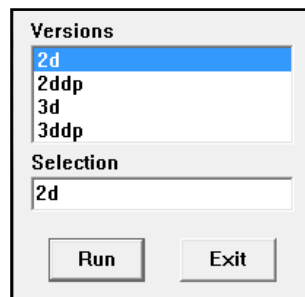


Figure IV.3 : Spécification du mode d'écoulement.

- ✓ On choisit la formulation "Segregated", et l'écoulement est instationnaire "Unsteady" dans le sous menu ci-dessous :

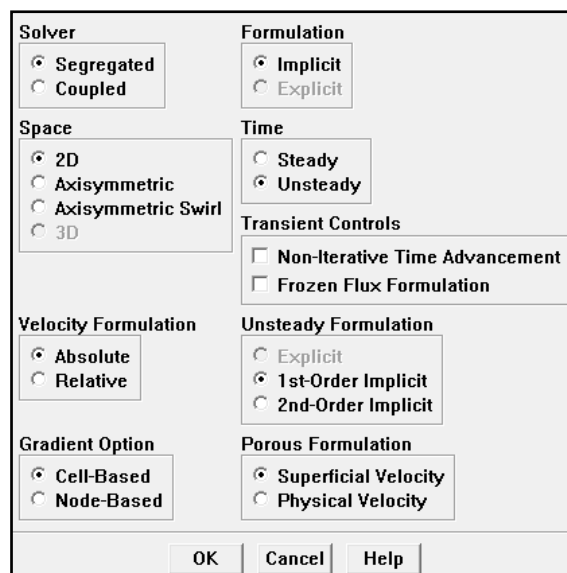


Figure IV.4 : Spécification de la formulation et de type d'écoulement.

- ✓ On spécifie que la résolution de l'équation de l'énergie étant nécessaire, et que le régime est laminaire.

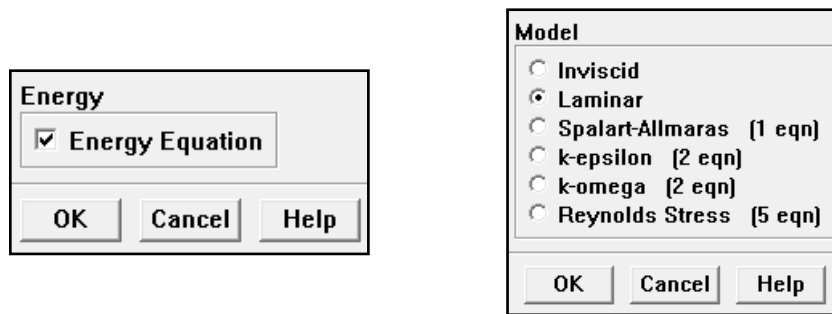


Figure IV.5 : Spécification l'équation d'énergie et le régime d'écoulement.

- ✓ Le fluide est choisi dans la base de données de FLUENT (Fluent database), dans notre cas on choisit le méthane puis, on modifie ses propriétés pour qu'elles correspondent à celles de stockage cryogénique. En plus, la masse volumique du liquide est soumise dans ce cas à l'approximation de Boussinesq.

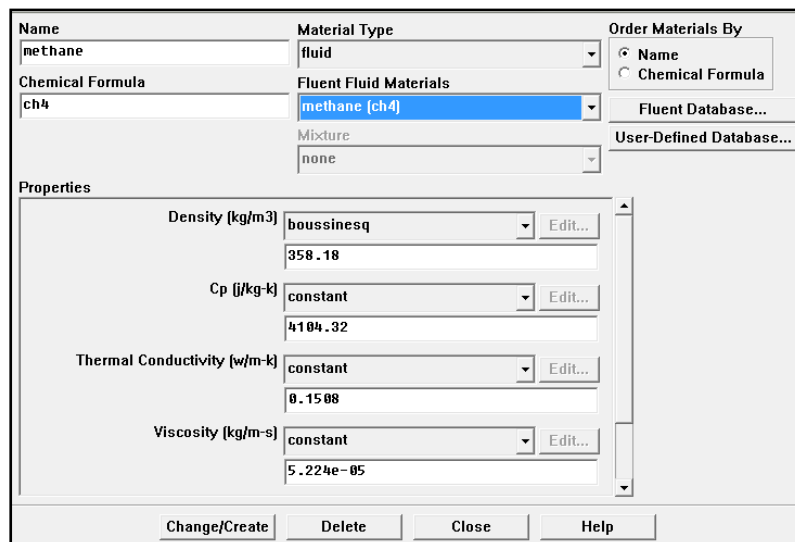


Figure IV.6 : Spécification des propriétés du fluide étudié.

- ✓ On spécifie les conditions de fonctionnement (la pression, la température, la gravité...etc.)

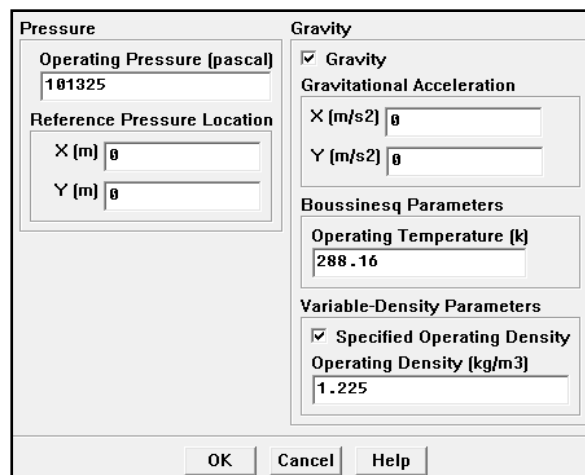


Figure IV.7 : Spécification des conditions de fonctionnement.

- ✓ Les conditions aux limites correspondantes à notre problème sont mobiles en fonction du temps. Tandis que les paramètres standard du Fluent exigent l'application des conditions aux limites fixes et constantes. Pour modifier les paramètres standards du code afin de rendre les conditions aux limites, nous avons du utiliser un UDF (User Defined Function). Cette fonction est écrite en langage de programmation C++ et est compilé sous Fluent.

Figure IV.8 : Spécification des conditions aux limites.

- ✓ On spécifie les coefficients de sous-relaxations, l'algorithme de couplage vitesse-pressure ainsi que les schémas de discrétisations :

Figure IV.9 : Spécification des paramètres de contrôle de la solution.

- ✓ Pour commencer les calculs on procède par une initialisation, qui consiste à donner des valeurs initiales aux paramètres afin de commencer les calculs. Elles doivent être bien choisies de sorte à éviter que le calcul diverge. Dans notre cas, la valeur retenue correspond à les vitesses suivant les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , et la températures sur les parois du réservoir (températures chaude et froide)

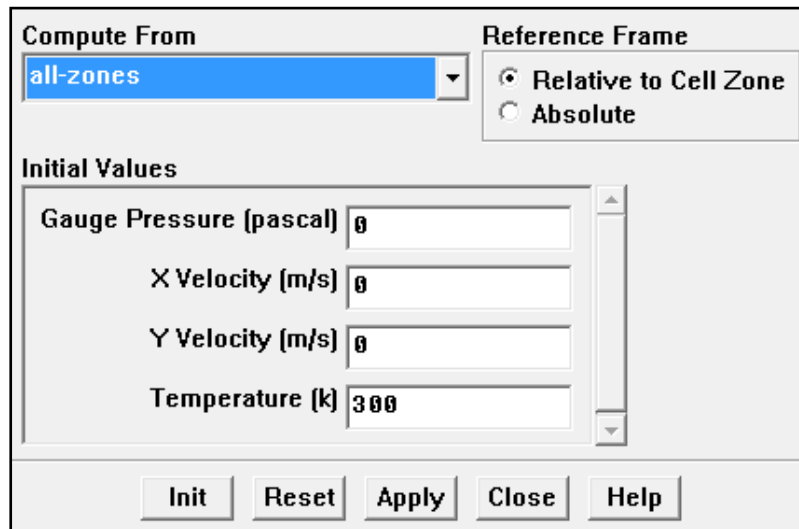


Figure IV.10 : Initialisation du processus itératif.

- ✓ Au début des calculs, on spécifie le nombre d'itérations et on suit l'évolution des paramètres (dont on définit les résidus au préalable) que l'on juge essentiels pour s'assurer de la convergence du processus de calcul.

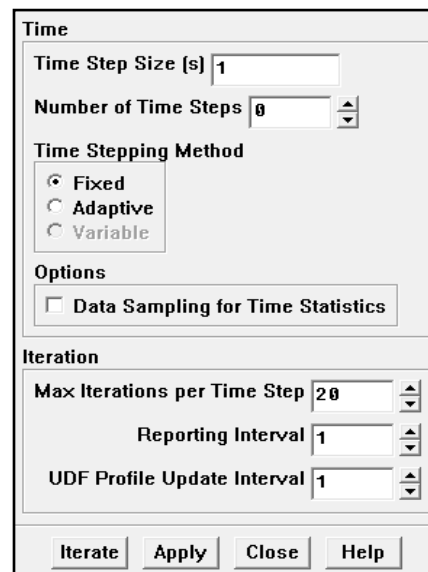


Figure IV.11 : Spécification du pas de temps et le nombre maximum des itérations.

### IV.1.3. Le post-processeur (post-traitement):

Le post-processeur est l'élément qui permet de visualiser la géométrie et le maillage du domaine, mais surtout d'afficher les résultats obtenus. Il est ainsi possible de visualiser à l'aide du menu *DISPLAY*, les champs des vecteurs vitesses, les champs de pression, de température ainsi que toutes les autres grandeurs calculées sur un segment, une section du domaine ou sur tout le volume. Il permet aussi de visualiser les lignes de courant ou les trajectoires des particules.

Le menu *PLOT* offre également la possibilité de tracer des profils de certaines grandeurs sur les lignes et les droites bien définies. Pour sa part le menu *REPORT* permet de récupérer les valeurs numériques des grandeurs tels que les flux de chaleur, les vitesses moyennes, les débits de masse,...etc. sur les surfaces qu'on définit. Il offre aussi la possibilité de tracer des courbes et d'exporter les résultats sous d'autres formats pour un traitement approprié.

Le post-processeur du code de calcul nous offre des possibilités très larges pour le traitement des données. Ainsi, pour la partie visualisation, nous pouvons observer les contours de l'évolution de toute une série de grandeurs. Il nous permet aussi de tracer les champs de vecteurs et les lignes de courant de l'écoulement mais tout cela est considéré souvent peu pratique (surtout pour le déplacement dans la fenêtre graphique et pour sa faible qualité au niveau des graphismes). Il est donc conseillé d'utiliser d'autres logiciels spécialement dédiés pour le post-traitement comme **Tecplot** ou **Fieldview** si cela est possible [22].

### IV.2. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons exposé le logiciel de DAO Gambit ainsi que les critères pour le choix de maillage. En se basant sur ces critères, nous avons trouvé que le maillage structuré n'est pas applicable pour la géométrie cylindrique.

Nous avons aussi exposé brièvement le code de calcul FLUENT ainsi que les étapes que nous avons suivies pour aboutir à la convergence du code de calcul pour obtenir des résultats plus précis.

La résolution qui est effectuée par le logiciel FLUENT donne des résultats qui sont présentés dans le chapitre suivant.

---

*CHAPITRE V :*

*RESULTATS ET DISCUSSIONS*

---

---

# CHAPITRE V :

## RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

---

### V. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'étude numérique de la convection naturelle laminaire dans un réservoir cylindrique horizontal de stockage du GNL, cette étude se focalise principalement sur la variation des champs thermique et dynamique à l'intérieur du réservoir. Au début, on a fait un test sur le maillage dans le but d'estimer l'influence de ce dernier sur les résultats, puis nous avons procédé à la validation des résultats de la simulation obtenus à l'aide du logiciel FLUENT en les comparant avec ceux obtenus par d'autres auteurs, ensuite, nous avons présenté et discuté les résultats obtenus.

Pour mieux cerner le phénomène de la convection naturelle à l'intérieur d'une cavité cylindrique et estimer l'influence des conditions aux limites sur les résultats, nous avons choisi de partager notre étude en trois grandes parties : la première constitue le cas de la convection naturelle instationnaire à condition aux limites fixes, où les simulations ont été faites sur les trois configurations présentées dans le chapitre II. La deuxième partie est le cas de la convection naturelle instationnaire à conditions aux limites mobiles. La troisième partie constitue une comparaison entre ces deux derniers cas, en estimant la différence causée par le mouvement des conditions aux limites sur les résultats. Nous présentons pour chaque cas les isothermes, les lignes de courant et les vecteurs de vitesse, ainsi que les profils de températures et de vitesses au plan médium et au centre du réservoir.

### V.1. Choix du maillage :

Le choix du maillage joue un rôle capital en ce qui concerne la précision et l'exactitude des résultats numériques, c'est pourquoi nous en avons soigneusement testé plusieurs types (quadratique, triangulaire et mixte). L'analyse des résultats nous a permis sans aucun doute de dire que le maillage triangulaire est le plus répandu pour notre géométrie, malgré que leur temps de calcul est relativement élevé par rapport à celui de maillage quadratique.

Nous avons donc utilisé un maillage triangulaire raffiné près des parois avec des pas appartenant à [0.02 ; 0.018 ; 0.016 ; 0.014]. Le nombre de Nusselt moyen est devenu constant à partir de 0.016 ce qui signifie qu'au-delà de ce pas la solution sera indépendante du maillage. La figure V.1 illustre l'influence de la taille de maillage sur les champs des températures au niveau du plan médium.

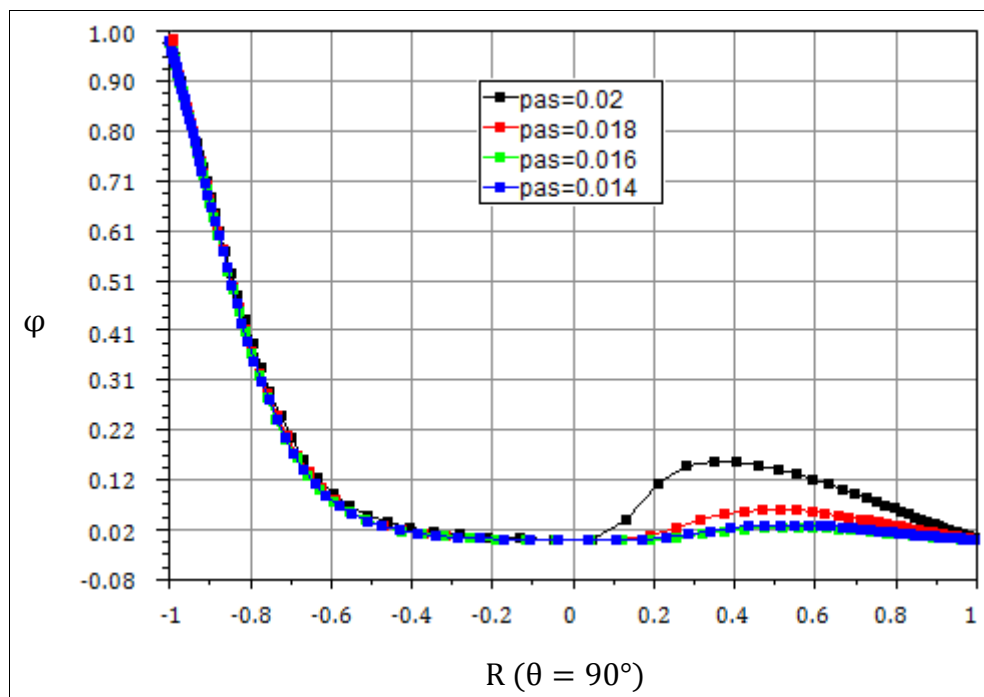
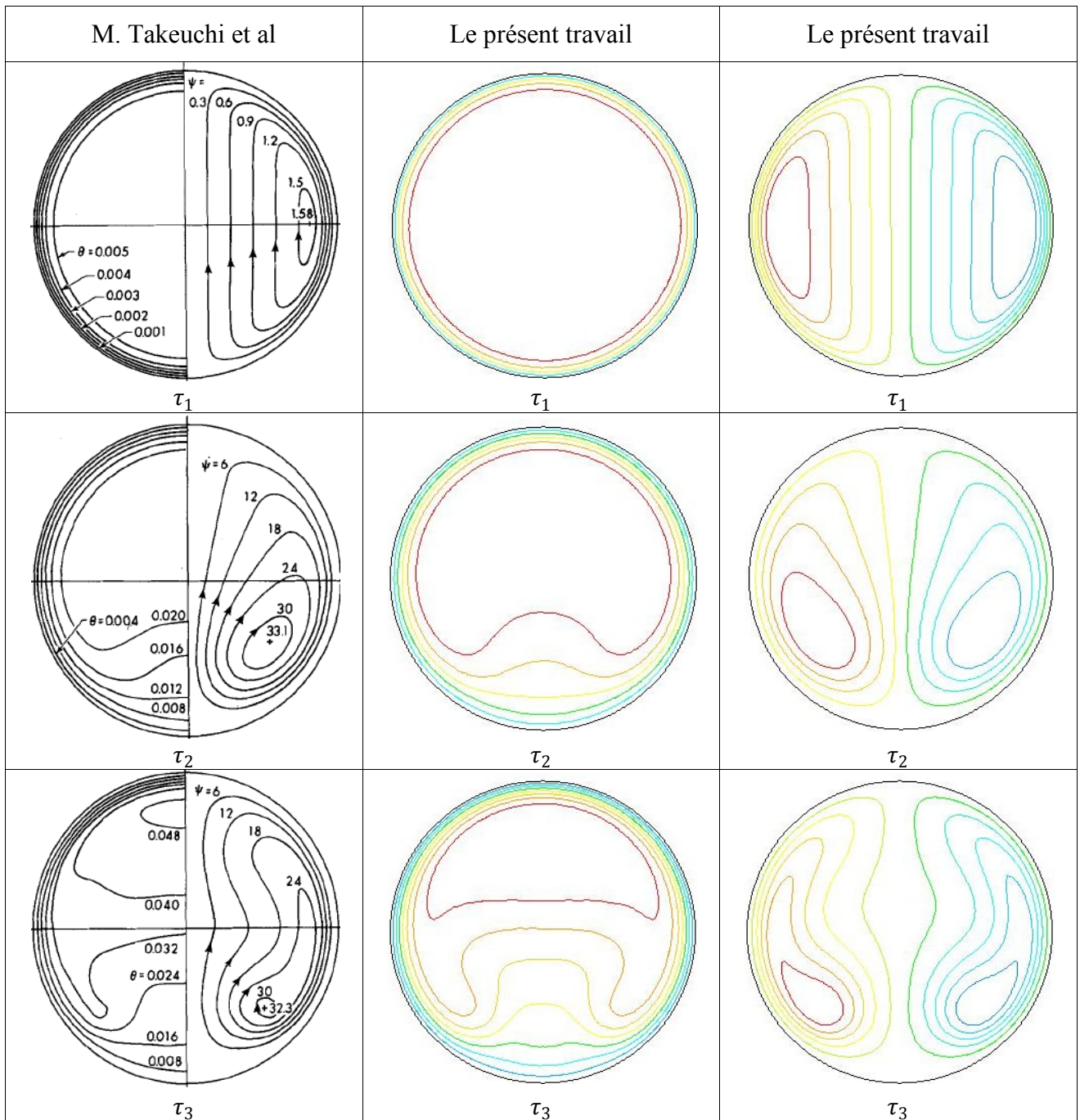


Figure V.1 : profils d'évolution de la température au plan médium

En se basant sur les résultats ci-dessus, nous avons choisi pour le reste de l'étude un maillage triangulaire raffiné près des parois avec un pas = 0.016.

V.2. Validation des résultats :

Dans le but de prouver que les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont exacts, nous avons choisi de les valider en reprenant le travail de M. Takeuchi et al [23] tel qu'il est et on le refait en utilisant la même procédure que nous avons utilisée dans notre travail. Le problème traité par [23] constitue l'étude de la convection naturelle transitoire dans une cavité cylindrique horizontale contenant un fluide. La température du fluide dans la cavité est constante tandis que la température de la paroi extérieure diminue linéairement en fonction du temps qu'est à son tour varie suivant une série de Fourier. Nous avons aussi utilisé les mêmes nombres de Prandtl et de Grashof.



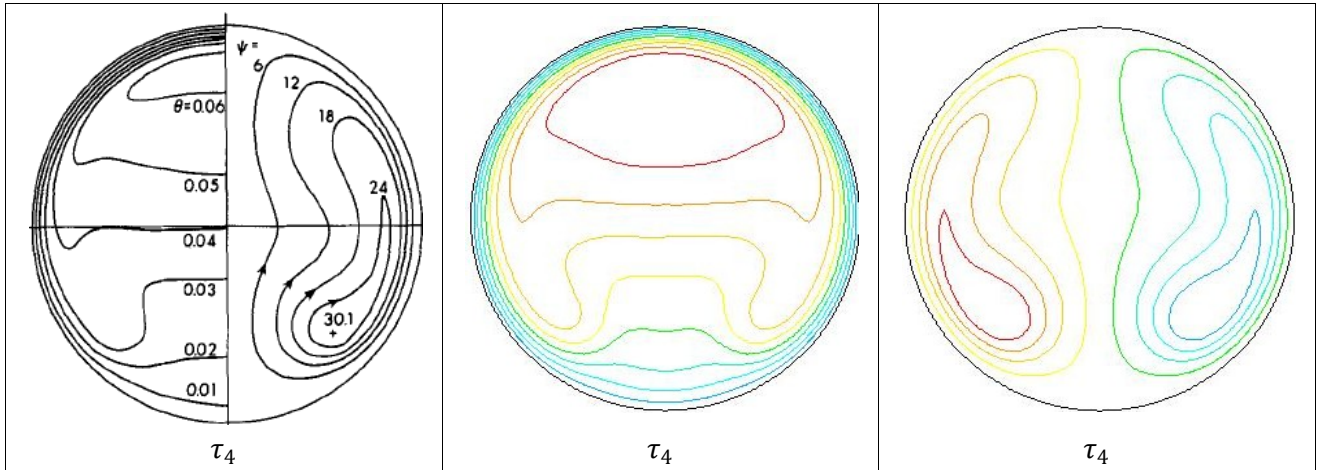


Figure V.2 (a) : Validation des résultats : évolution des champs thermiques et dynamiques dans la cavité en fonction du temps

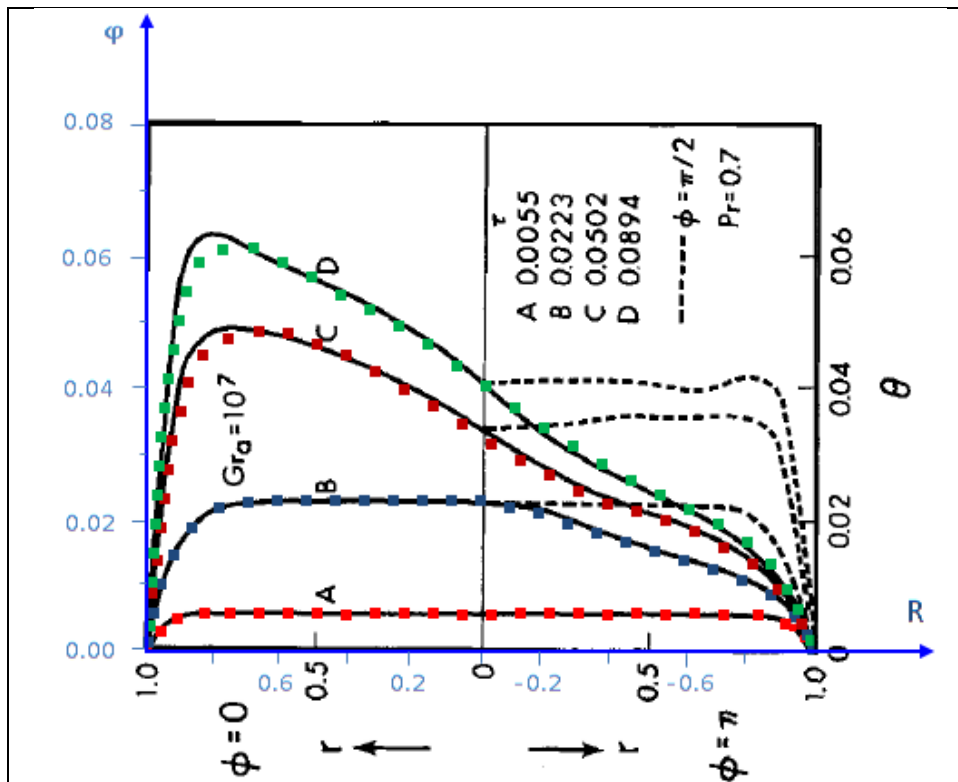


Figure V.2 (b) : Validation des résultats : évolution des profils de température dans le plan médium en fonction du temps

La comparaison des champs thermiques et dynamiques montre une très bonne concordance. Une légère différence est enregistrée au niveau des courbes d'évolution des températures au plan médium. Cette différence est tout à fait naturelle parce que M. Takeuchi et al ont utilisé la méthode explicite de DuFort –Frankel tandis qu'on a utilisé la méthode des volumes finis.

**V.2. Résultats et discussions :**

Les données numériques des variables adimensionnées utilisées pendant la simulation sont :

- Le rayon du réservoir est :  $R = 1$
- La température de stockage du GNL est :  $\varphi_{GNL} = 0$
- La température de la paroi chaude est :  $\varphi_c = 1$
- La température de la paroi froide est :  $\varphi_f = 0$
- Le nombre de Rayleigh est :  $Ra = 5.10^4$

**V.2.1. Cas 1 : Convection naturelle instationnaire à conditions aux limites fixes :**

La géométrie de réservoir étudié est de forme cylindrique horizontal contenant du GNL comme fluide cryogénique. La paroi extérieure du réservoir est subdivisée en deux parties symétriques maintenues à des températures différentes afin de créer un gradient de température déclenchant le phénomène de la convection naturelle. Les simulations ont été faites sur trois configurations parmi les quatre présentées au deuxième chapitre (cavité chauffée par le bas, cavité différentiellement chauffée et cavité chauffée par le haut). la deuxième et la quatrième configuration sont symétriques par rapport à l'axe vertical, ce qui implique que les résultats obtenues doivent sans aucun doute, être identiques, c'est pourquoi nous avons jugé inutile de faire les simulations sur la quatrième configuration. .

Le réservoir est chauffé pendant une durée totale  $\tau = 3.08 \cdot 10^{-04}$ . Nous avons choisi de présenter les résultats obtenues (champs de températures, lignes de courants et vecteurs de vitesses) chaque  $\tau = 0.61 \cdot 10^{-04}$ .

**V.2.1.1. Cavité chauffée par le bas :****V.2.1.1.1. Champs thermique :**

Les figures V.2 illustrent la distribution de la température à l'intérieur du réservoir en fonction du temps. Elles montrent clairement que le réservoir est chauffé par le bas. Au contact de la paroi chaude, la température du fluide augmente et sa masse volumique décroit, il se dilate et devient moins denses que le fluide de la partie supérieure (près de la paroi froide), il a donc tendance à s'élever tandis que le fluide supérieur plus froid, donc plus lourd, a tendance à descendre ce qui crée une force de flottabilité dirigée vers le haut. Sous l'effet de cette force, l'écoulement convectif aura lieu.

La masse du fluide chaud s'élève en enlevant de la chaleur à la paroi chaude et se refroidit au contact avec le fluide supérieur (fluide à proximité de la paroi froide) puis revient au centre du réservoir pour descendre vers le bas. Cette recirculation du fluide est comparable à celle de Rayleigh-Bénard, la seule différence réside dans le sens de mouvement, ce qui est normale parce que les géométries sont différentes.

La variation de la température dans le plan medium en fonction du temps est représentée sur la figure V.3 on remarque que les courbes sont toutes de même allure, elles se décomposent en deux parties. Une première partie de pente raide qui caractérise une diminution très rapide de la température, ainsi que la deuxième caractérise sa stabilisation. Les températures maximales sont localisées à proximité de la paroi chaude ainsi que les basses températures sont situées à proximité de la paroi froide.

La figure V.4 représente la variation de la température du centre de réservoir en fonction du temps. La courbe peut se décomposer en deux parties. La première montre que la température du centre reste constante à celle de stockage pendant une durée de  $1.84 \cdot 10^{-04}$ . La deuxième caractérise une augmentation rapide de la température pendant la durée qui reste jusqu'à atteint la température de la paroi chaude.

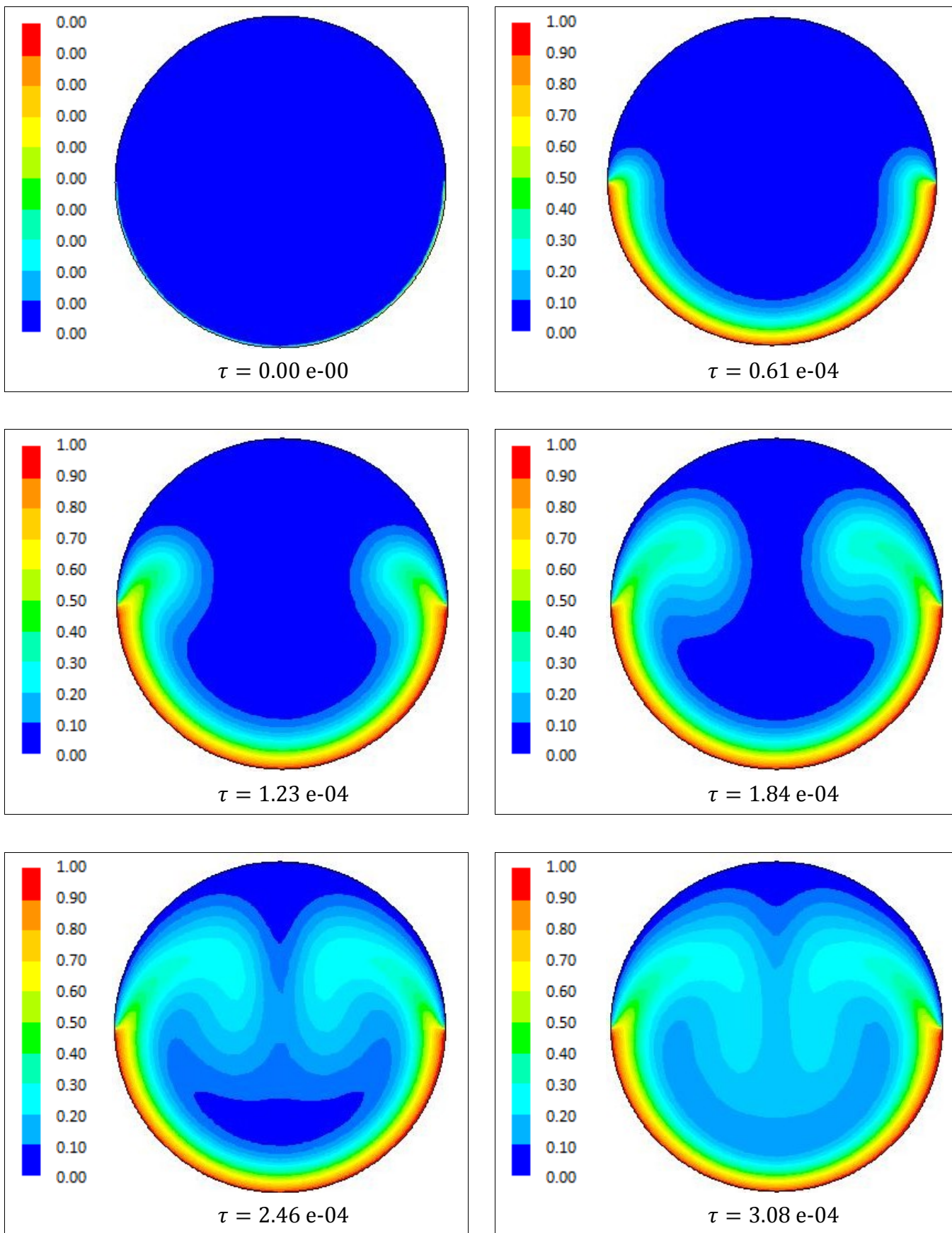


Figure V.3 : évolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps

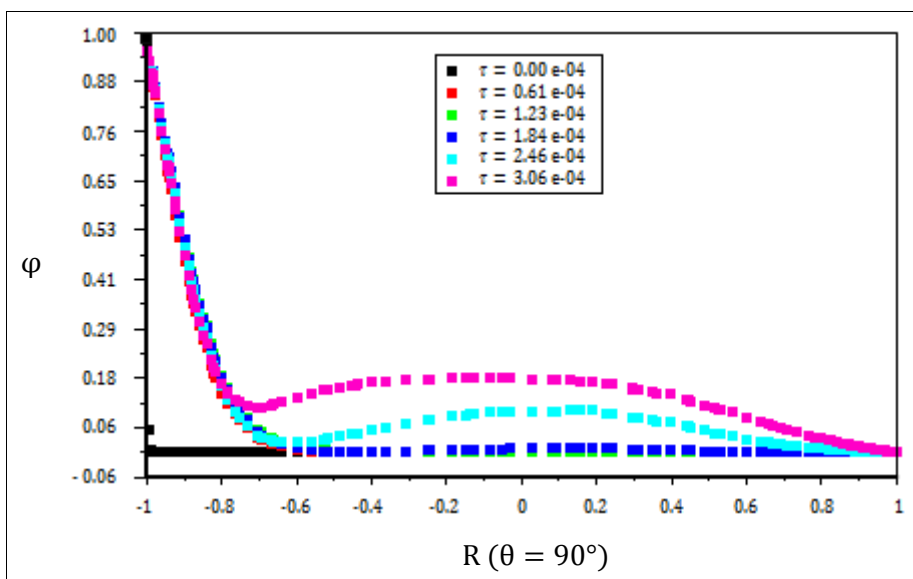


Figure V.4 : profils d'évolution des températures au plan médium en fonction du temps

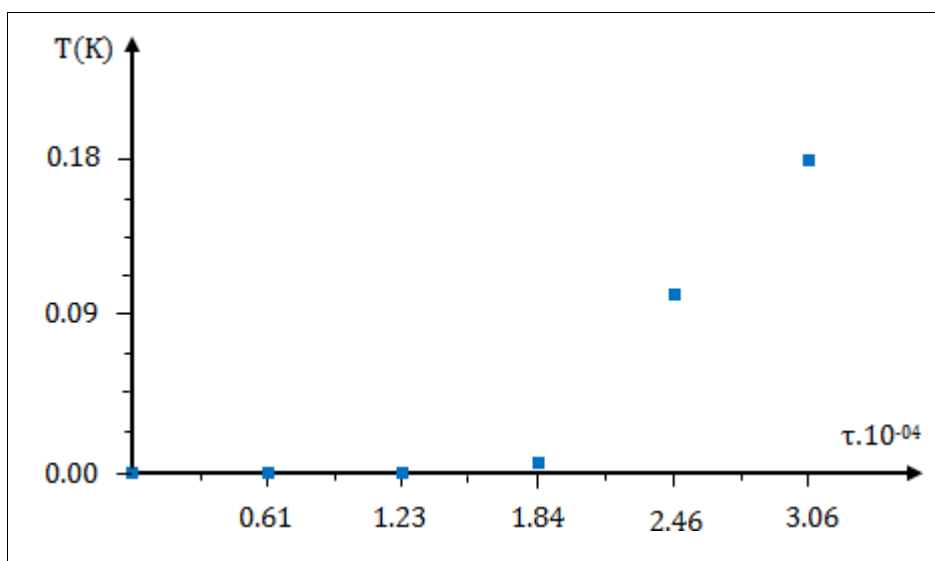


Figure V.5 : courbe d'évolution de la température au centre du réservoir en fonction du temps

**V.2.1.1.2. Champs dynamiques :**

Le champ dynamique est représenté par les contours de vecteurs des vitesses et les lignes de courants dans les figures V.5 et V.6 respectivement. Pendant la durée de  $\tau = 0$  jusqu'à  $\tau = 1.84 \cdot 10^{-04}$ , on remarque la formation de deux cellules contrarotatives dont celle de la gauche tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et celle de la droite tourne dans le sens contraire. Le fluide qui est chauffé par la paroi inférieure se déplace vers la paroi supérieure, où il se regroupe en un seul flux se dirigeant vers le centre du réservoir. Au delà de  $\tau = 1.84 \cdot 10^{-04}$ , on remarque la formation de deux petites cellules contrarotatives qui agrandit peu à peu dans la durée restante afin de se stabiliser par la suite.

La figure V.7 représente l'évolution de la vitesse dans le plan médium en fonction du temps. Premièrement, on remarque que les vitesses sont nulles près des parois, ce qui est logique à cause de la condition de non glissement imposé sur celle-ci. Deuxièmement, on remarque que les courbes se sont pratiquement décomposées en deux parties. La première est caractérisée par une augmentation rapide de la vitesse, ainsi que la deuxième caractérise sa diminution rapide.

La figure V.8 représente l'évolution des vitesses maximale ainsi que celle au centre du réservoir en fonction du temps. Les deux courbes sont de même allure. Elles se décomposent en deux parties. Une première partie caractérise une croissance de plus en plus ralentie pour la vitesse maximale et une croissance de plus en plus rapide pour la vitesse au centre. Une deuxième partie caractérise une décroissance ainsi qu'une convergence de la vitesse du centre vers la vitesse maximale.

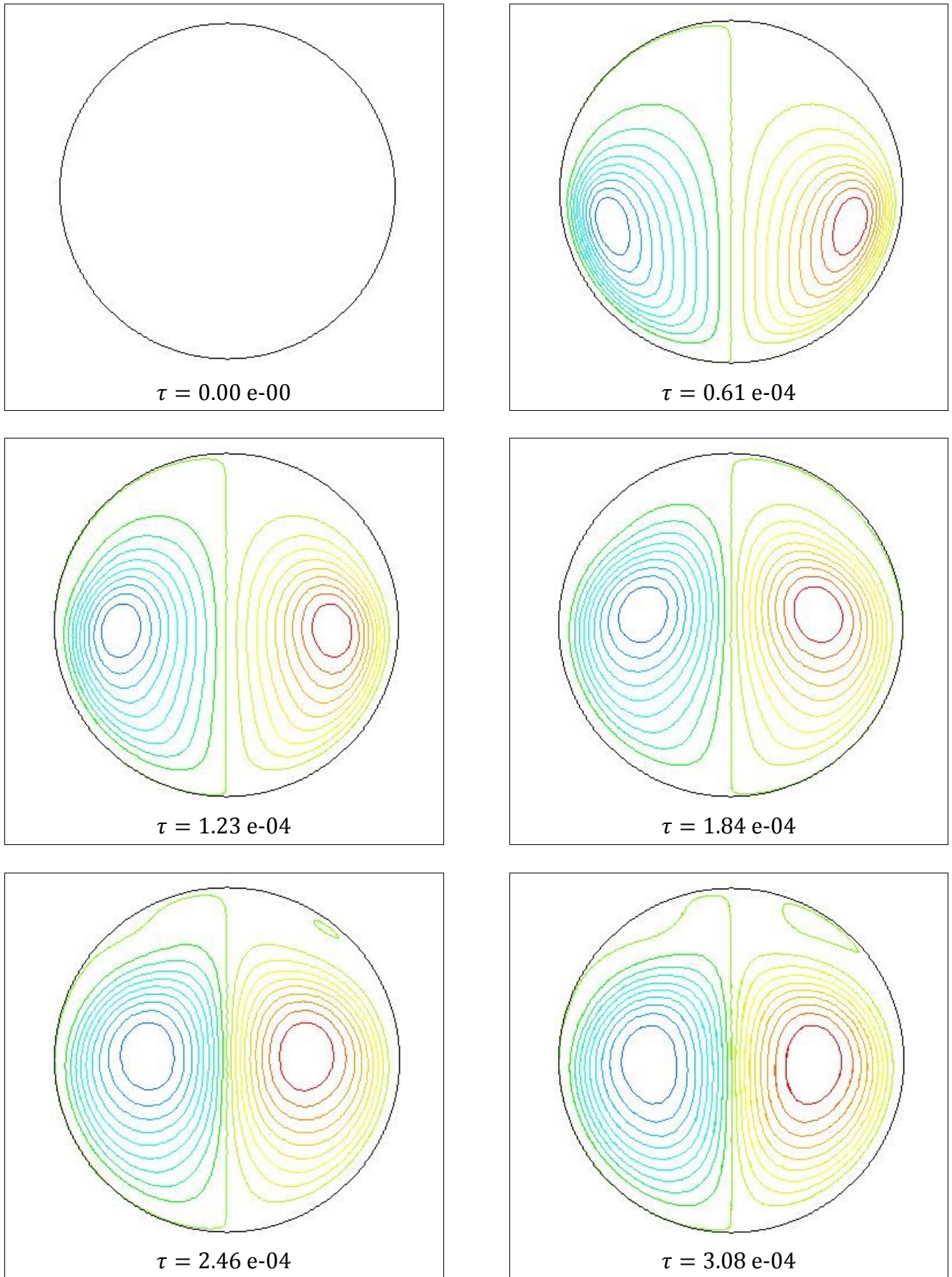


Figure V.6 : évolution des lignes de courants dans le réservoir en fonction du temps

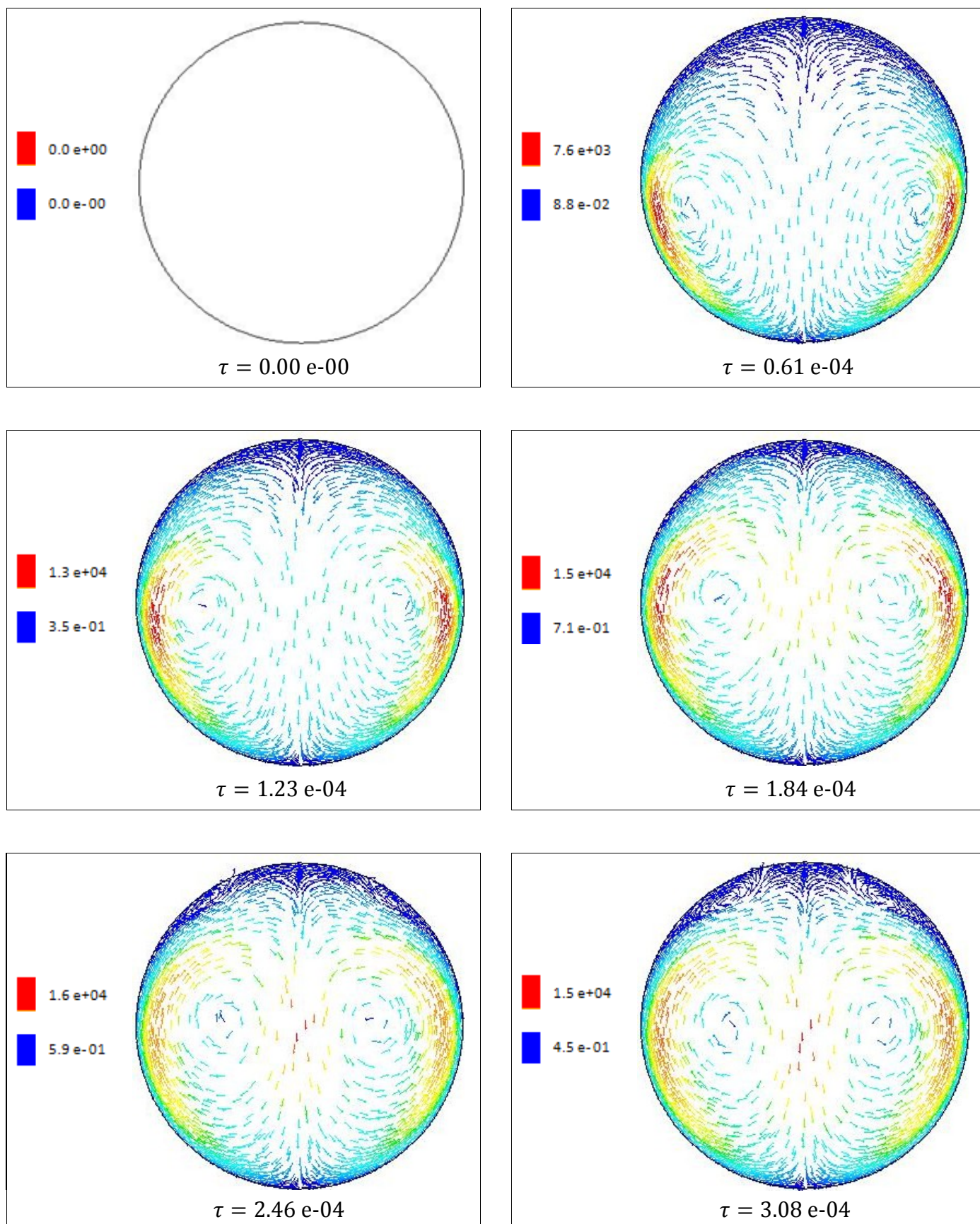


Figure V.7 : évolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps.

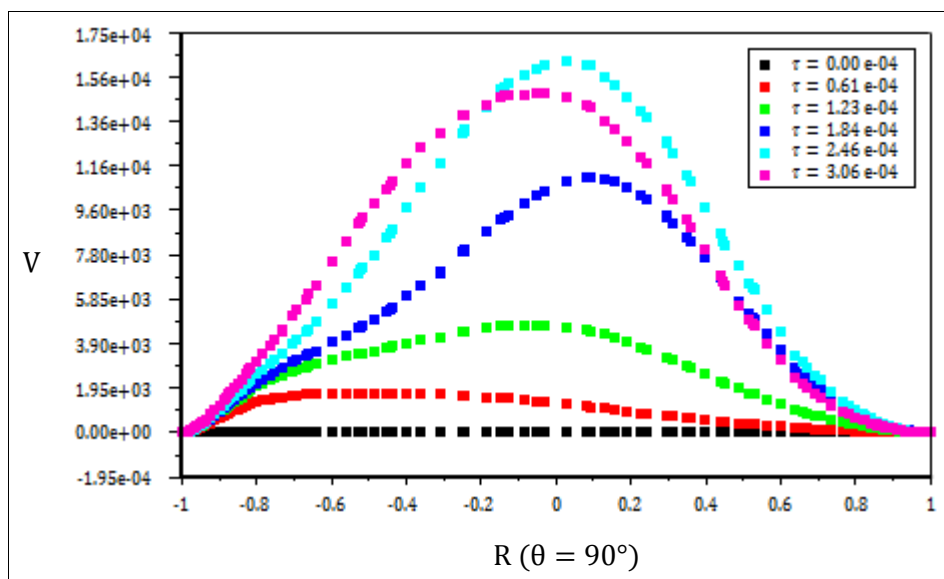


Figure V.8 : évolution des modules de vitesses au plan médium en fonction du temps

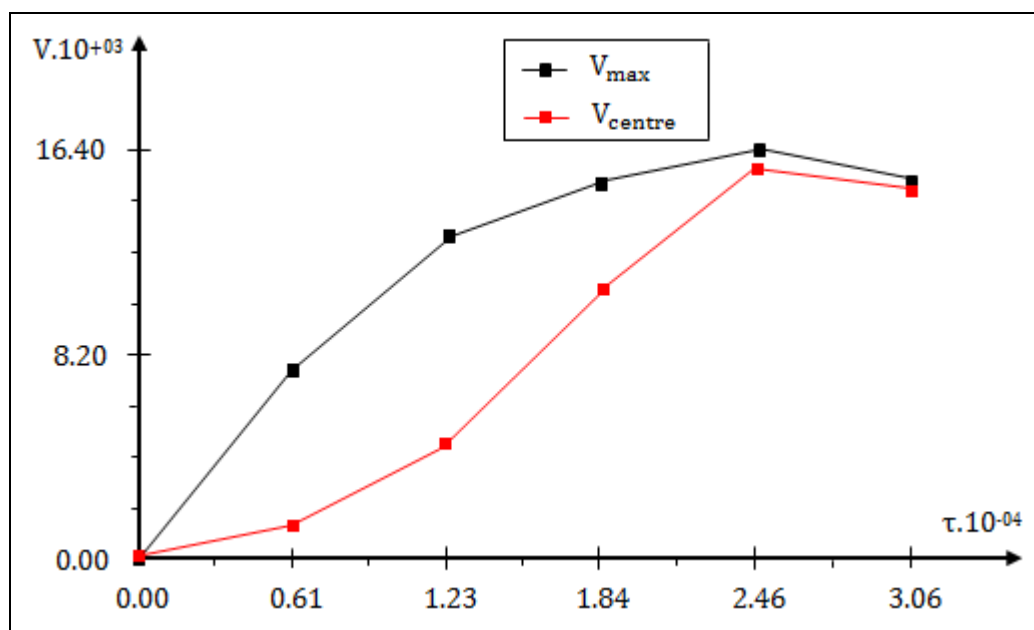


Figure V.9: courbes d'évolutions des modules des vitesses maximale et au centre du réservoir en fonction du temps

**V.2.1.2. Cavité différentiellement chauffée :****V.2.1.2.1. Champs thermique :**

Les figures V.9 illustrent la distribution de la température à l'intérieur du réservoir en fonction du temps. Les grandes températures sont localisées dans la zone à proximité de la paroi chaude, plus en s'éloignant, la température de fluide diminue jusqu'à atteindre la température de stockage. En effet lorsque la température de paroi augmente, le fluide voisinant s'échauffe plus, et la masse volumique des particules qui sont au contact avec la paroi diminue, ce qui fait que la force de flottabilité devient prépondérante devant les forces résistantes.

Sous l'effet la force de flottabilité, la masse du fluide chaude située en bas de réservoir est envoyé dans un premier temps vers le haut puis vers la partie gauche (à proximité de la paroi froide) pour se refroidir et descendre vers le bas du réservoir.

La variation de la température dans le plan médium en fonction du temps est représentée par la figure V.10. on remarque que les courbes sont toutes de même allure, elles se décomposent en trois parties. Une première partie de pente négative qui caractérise une diminution très rapide de la température, une deuxième partie caractérise sa stabilisation, une troisième partie caractérise une diminution de nouveau de la température. Les températures maximales sont localisées à proximité de la paroi chaude ainsi que les basses températures sont situées à proximité de la paroi froide.

La figure V.11 illustre la courbe d'évolution de la température au niveau du centre du réservoir en fonction du temps. On voit que la courbe est de forme parabolique, elle caractérise que la température augmente de plus en plus rapide.

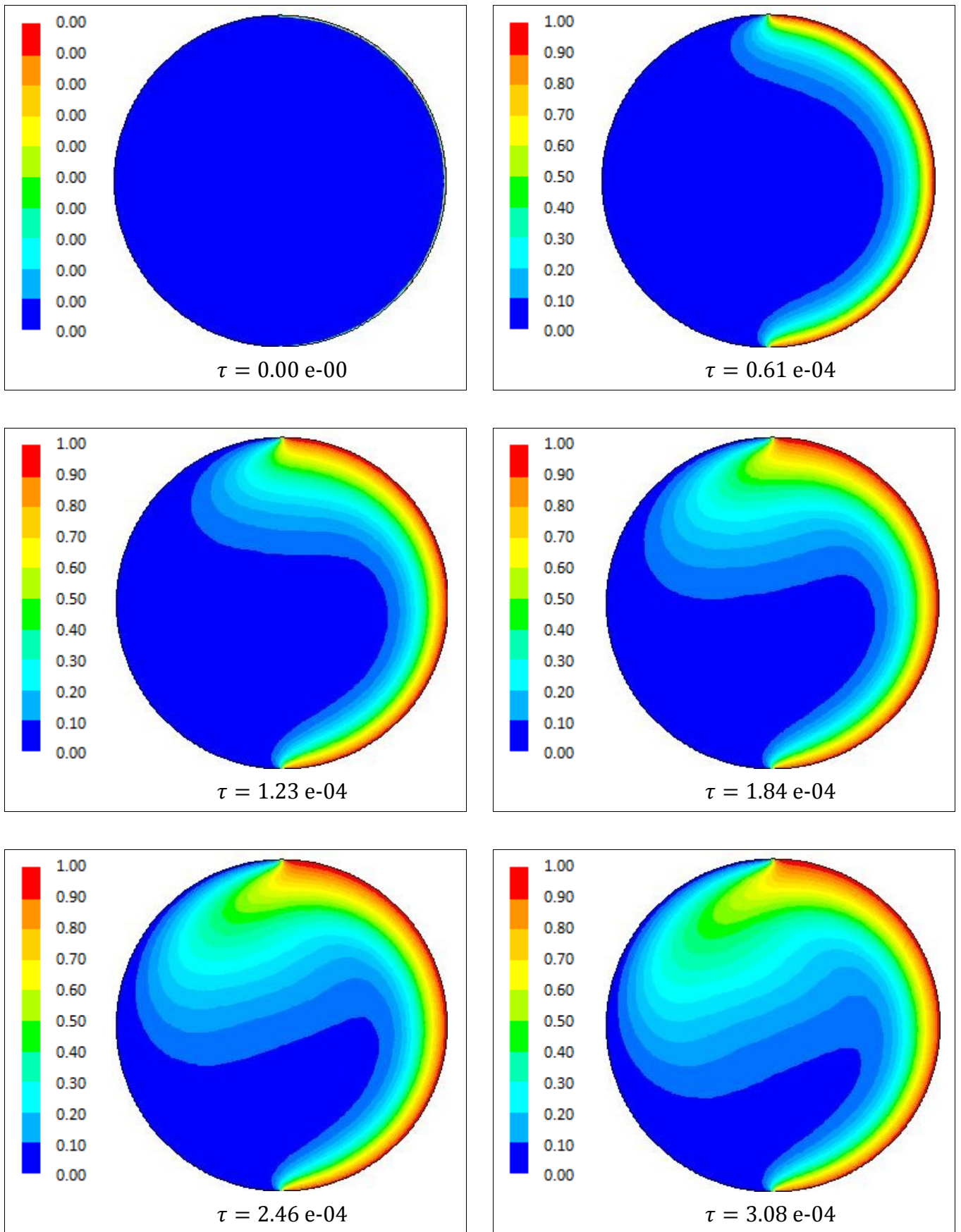


Figure V.10 : évolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps

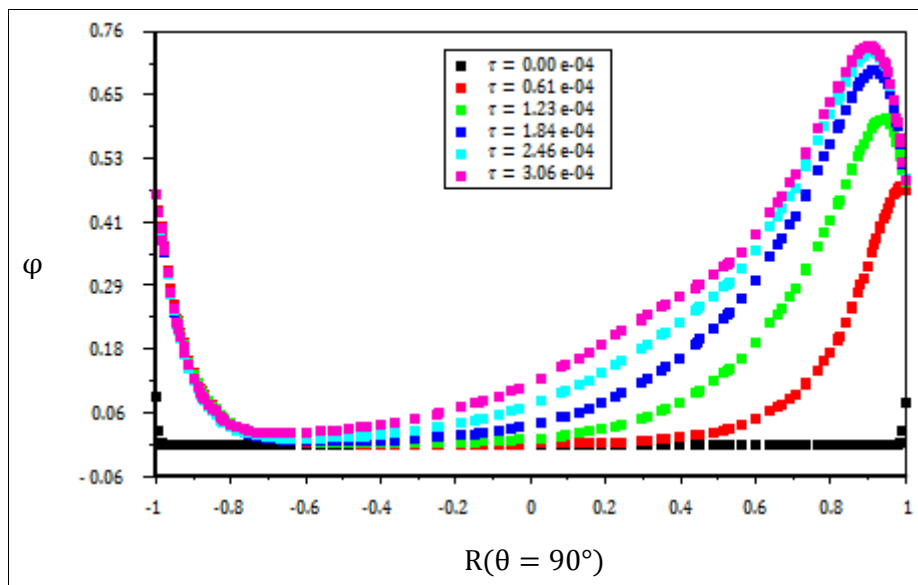


Figure V.11 : profils d'évolution des températures au plan medium en fonction du temps

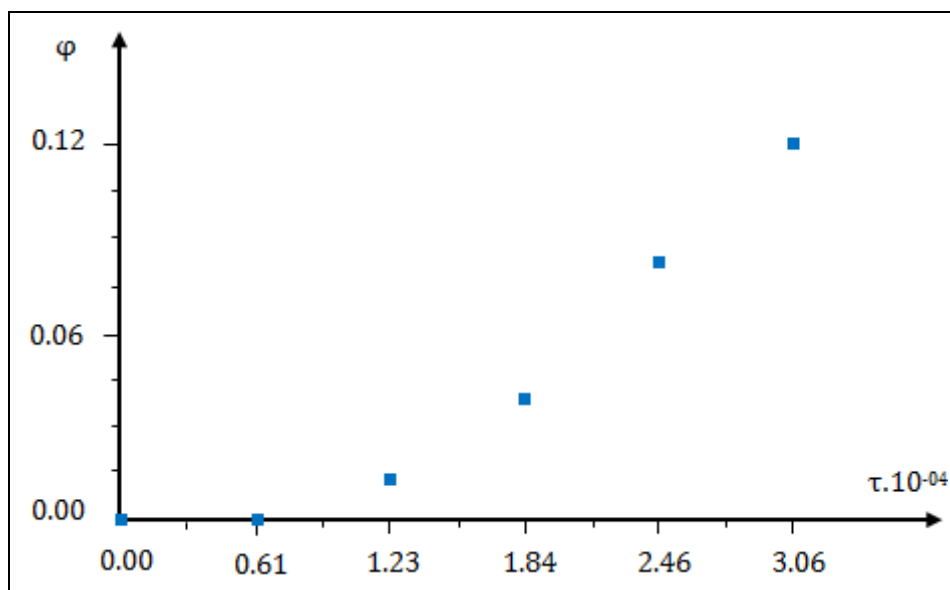


Figure V.12 : courbe d'évolution de la température au centre du réservoir en fonction du temps

**V.2.1.2.2. Champs dynamiques :**

Le champ dynamique est représenté par les contours des vecteurs vitesses et des lignes de courant dans les figures V.12 et V.13 respectivement. On remarque la formation d'une seule cellule dont le centre n'est pas confondu avec ce du réservoir et qui tourne dans le sens antihoraire. Au début, le centre de la cellule se situe pratiquement au milieu de la partie droite du réservoir, puis il se retire peu à peu en fonction du temps vers le haut où le mouvement convectif est plus considérable.

La figure V.14 représente l'évolution de la vitesse dans le plan médium en fonction du temps. On remarque que les vitesses sont nulles près des parois, ce qui est logique à cause de la condition de non glissement imposé sur celle-ci. On remarque aussi que les courbes se sont pratiquement décomposées en quatre parties. La première caractérise une augmentation rapide de la vitesse avant de se stabiliser dans la deuxième puis elle augmente rapidement dans la troisième avant de diminuer rapidement dans la quatrième partie.

L'évolution des vitesses maximale et celle au centre en fonction du temps sont représentées par la figure V.15. On remarque une augmentation de la vitesse maximale et que cette augmentation est de plus en plus ralentie en fonction du temps. La courbe de la vitesse au centre est décomposée en deux parties. La première caractérise une croissance lente de la vitesse avant de décroître dans la deuxième partie.

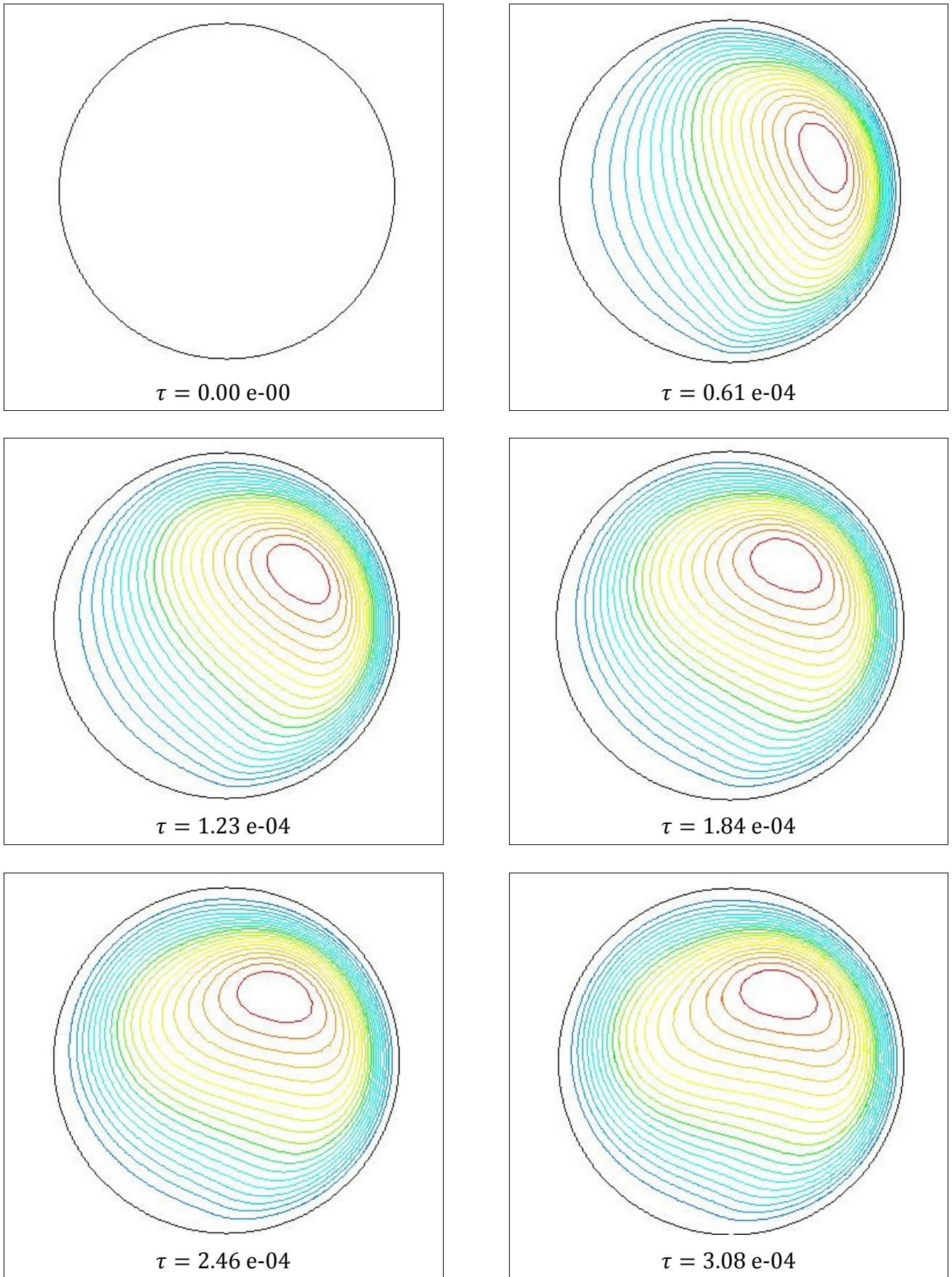


Figure V.13 : évolution des lignes de courants dans le réservoir en fonction du temps

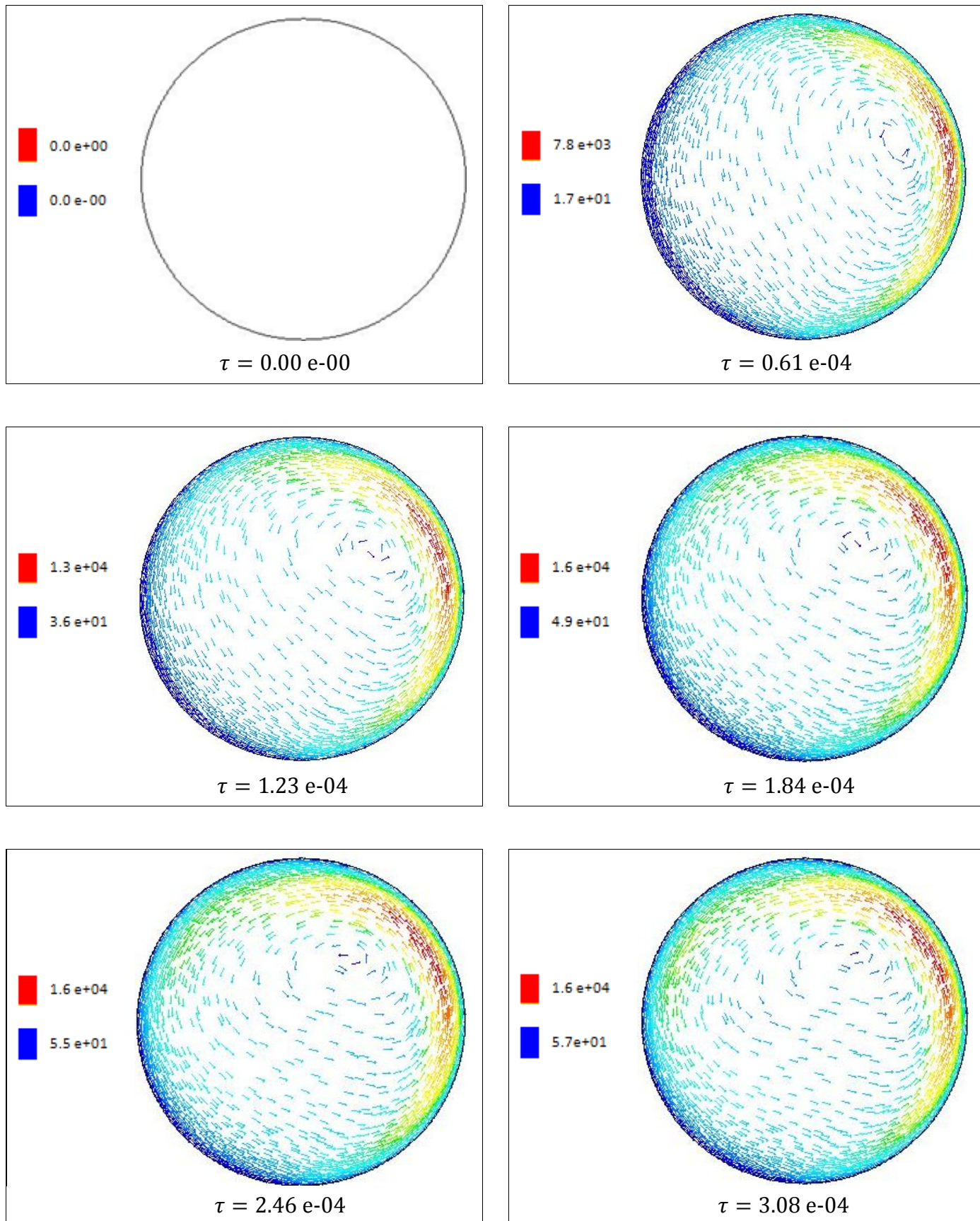


Figure V.14 : évolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps

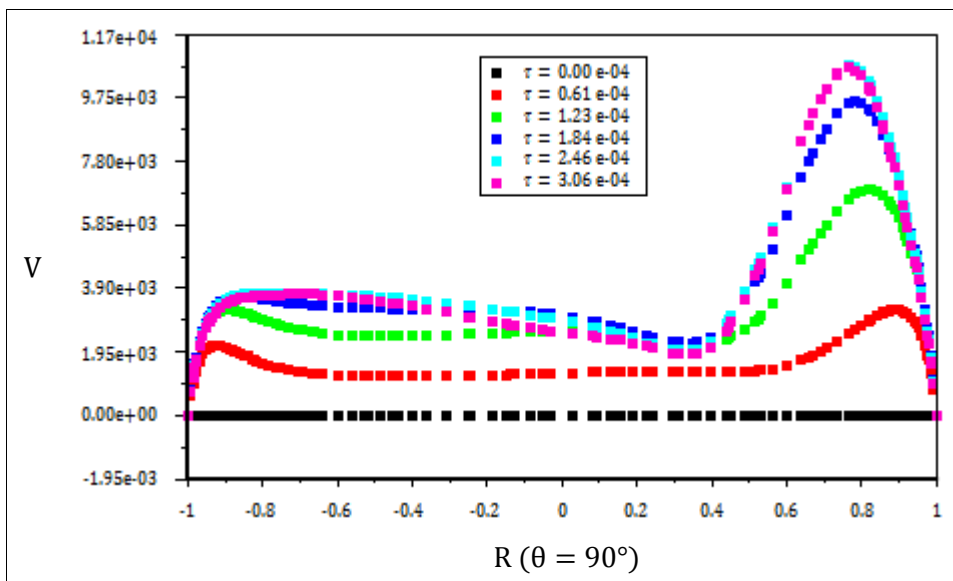


Figure V.15 : profils d'évolution des modules de vitesses au plan medium en fonction du temps

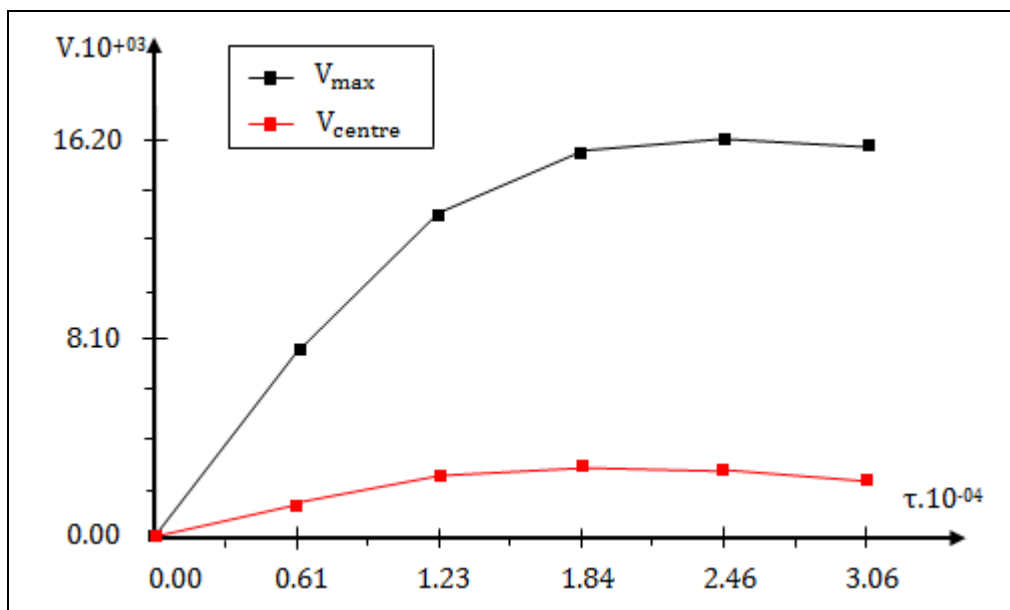


Figure V.16 : courbes d'évolutions des modules de vitesses maximales et au centre du réservoir en fonction du temps

### V.2.1.3. Cavité chauffée par le haut :

#### V.2.1.3.1. Champs thermique :

Les figures V.16 illustrent la distribution de la température à l'intérieur du réservoir en fonction du temps. Elles montrent clairement que le réservoir est chauffée par le haut où les températures maximales sont localisées, ainsi que les basses températures sont localisées au voisinage de la paroi inférieure. En effet, plus en s'éloignant, la température de fluide diminue jusqu'à atteindre la température de stockage.

La présente configuration constitue un gradient de température dite « stable », ce type de gradients défavorise beaucoup le transfert de chaleur par convection. Dans ce cas, le transfert de chaleur dans le fluide se fait en majeure partie par conduction, ce qui se traduit par la formation des couches stratifiées dans le fluide.

La variation de la température dans le plan médium en fonction du temps est représentée sur la figure V.17. les courbes sont toutes de même allure, elles se décomposent en deux parties. Une première partie caractérisée par une température constante et une deuxième partie de pente raide qui caractérise une augmentation rapide de la température.

La figure V.18 représente la courbe de l'évolution de la température au centre en fonction du temps. La courbe est pratiquement une droite de pente positive ce qui signifie que la température au centre augmente régulièrement en fonction du temps. La variation de température du fluide est linéaire, cela vaut dire que nous avons devant un cas où le transfert de chaleur se fait par conduction pure.

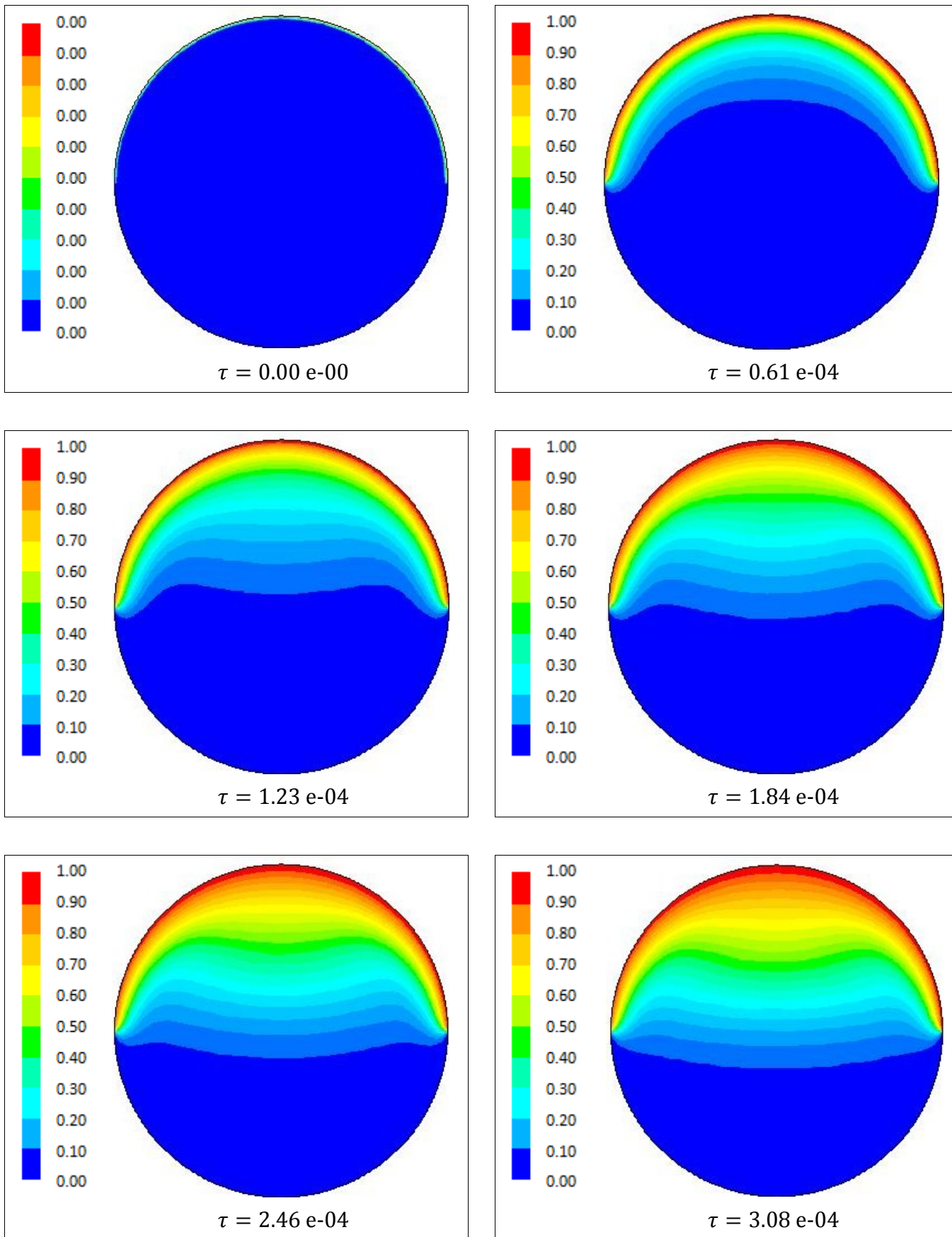


Figure V.17 : évolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps

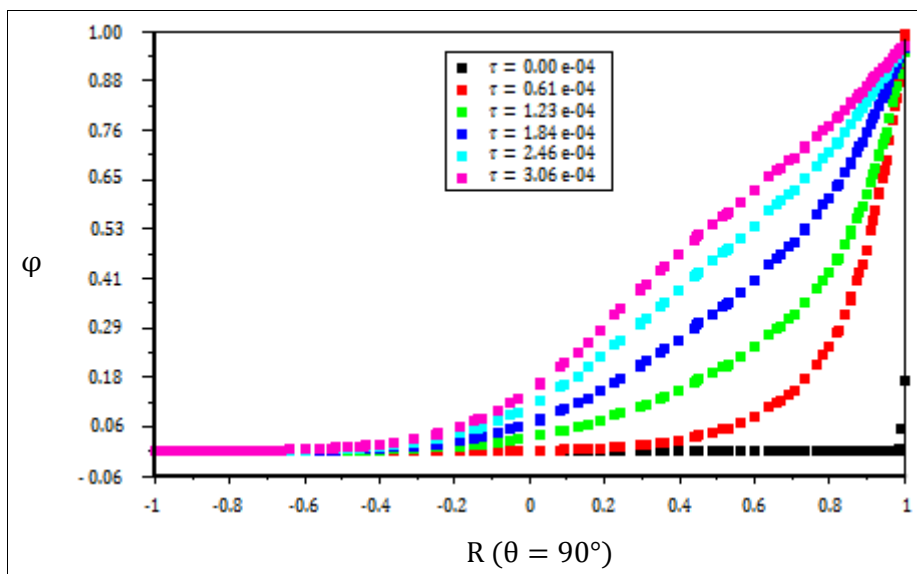


Figure V.18 : profils d'évolution des températures au plan médium en fonction du temps

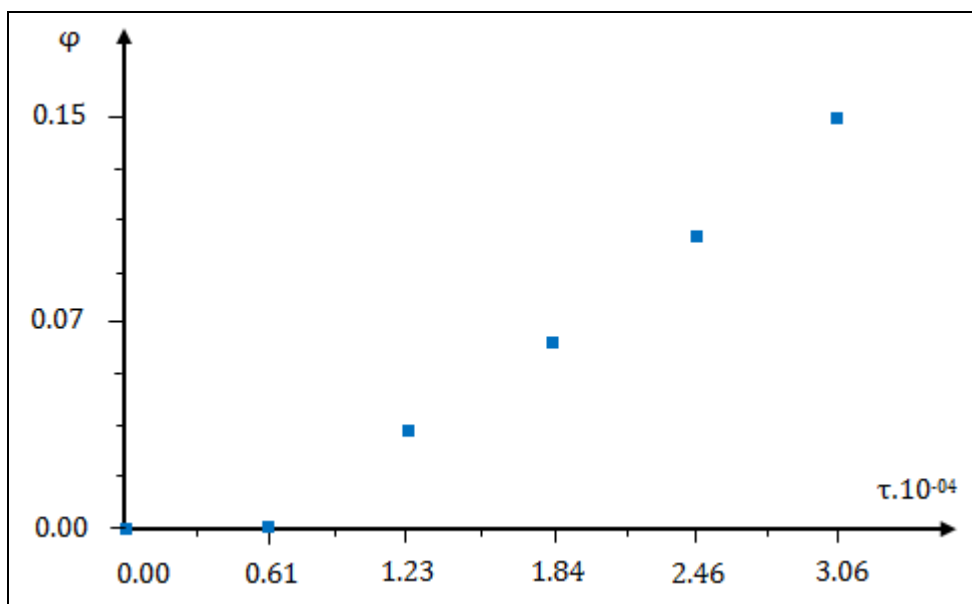


Figure V.19 : courbe d'évolution de la température au centre du réservoir en fonction du temps

**V.2.1.3.2. Champs dynamiques :**

Le champ dynamique est représenté par les contours des vecteurs vitesses et des lignes de courant dans les figures V.19 et V.20 respectivement. Pendant la durée comprise entre  $\tau = 0$  et  $\tau = 1.84.10^{-04}$ , on remarque la formation de deux cellules contrarotatives dont celle de la gauche tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et celle de la droite tourne dans le sens contraire. Le fluide qui est chauffé se déplace vers la paroi supérieure, où il se regroupe en un seul flux se dirigeant vers le centre du réservoir. Au delà de  $\tau = 1.84.10^{-04}$ , on remarque la formation de deux petites cellules contrarotatives qui agrandit peu à peu dans la durée qui suit.

La figure V.21 représente l'évolution de la vitesse dans le plan médium en fonction du temps. Premièrement, on remarque que les vitesses sont nulles près des parois, ce qui est logique à cause de la condition de non glissement imposé sur celle-ci. Deuxièmement, on remarque que les courbes ont la même allure, elles se décomposent en trois zones. La première est caractérisée par des vitesses qui sont pratiquement nulles, la deuxième est caractérisée par une augmentation rapide de ces vitesses avant de diminuer rapidement dans la troisième partie.

L'évolution de la vitesse maximale ainsi que celle au centre du réservoir est représentée par la figure V.22. on remarque que la courbe d'évolution de la vitesse maximale est constituée par deux parties. La première caractérise une croissance de plus en plus ralentie avant de décroître dans la deuxième partie. La courbe d'évolution de la vitesse au centre peut se décomposer en trois parties. Une première partie caractérise une croissance lente. Une deuxième partie caractérise une stabilisation de la température avant de décroître dans la troisième partie.

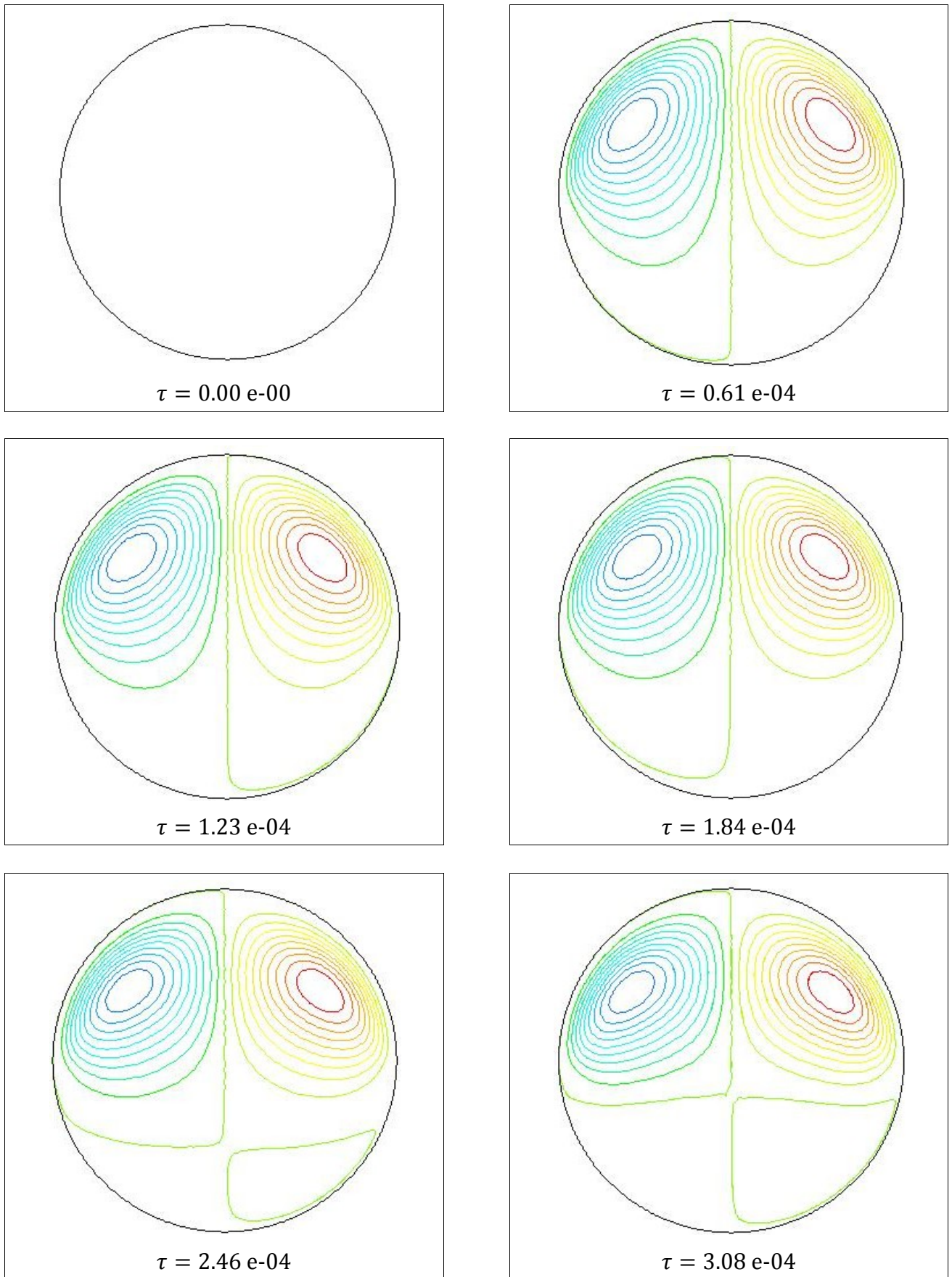


Figure V.20 : évolution des lignes de courants dans le réservoir en fonction du temps

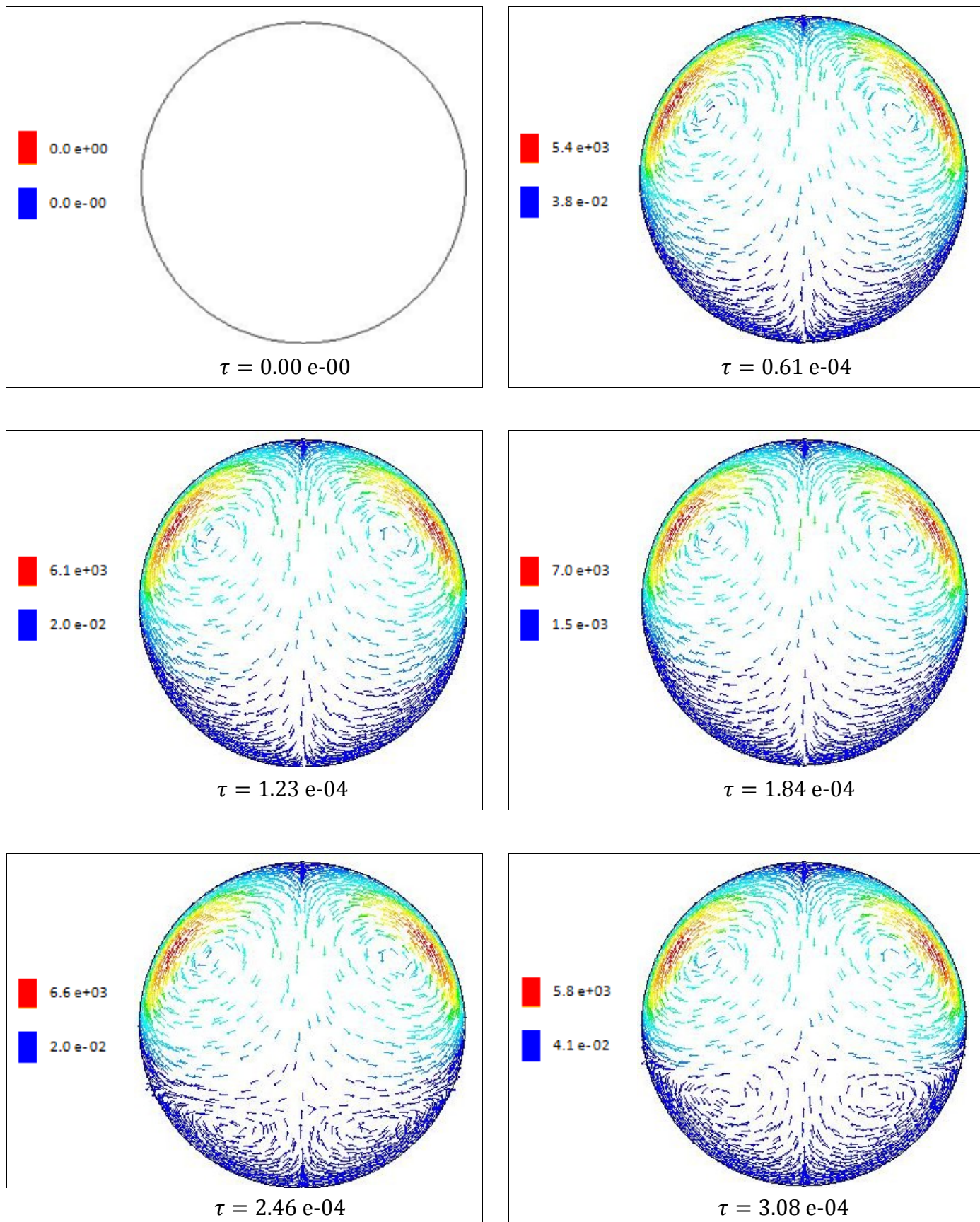


Figure V.21 : évolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps

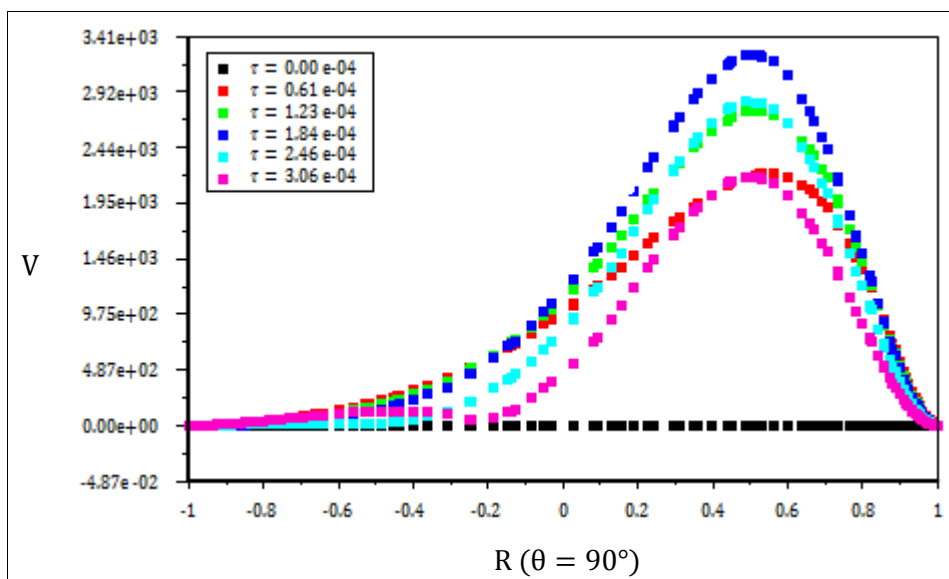


Figure V.22: profils d'évolution des modules de vitesses au plan médium en fonction du temps

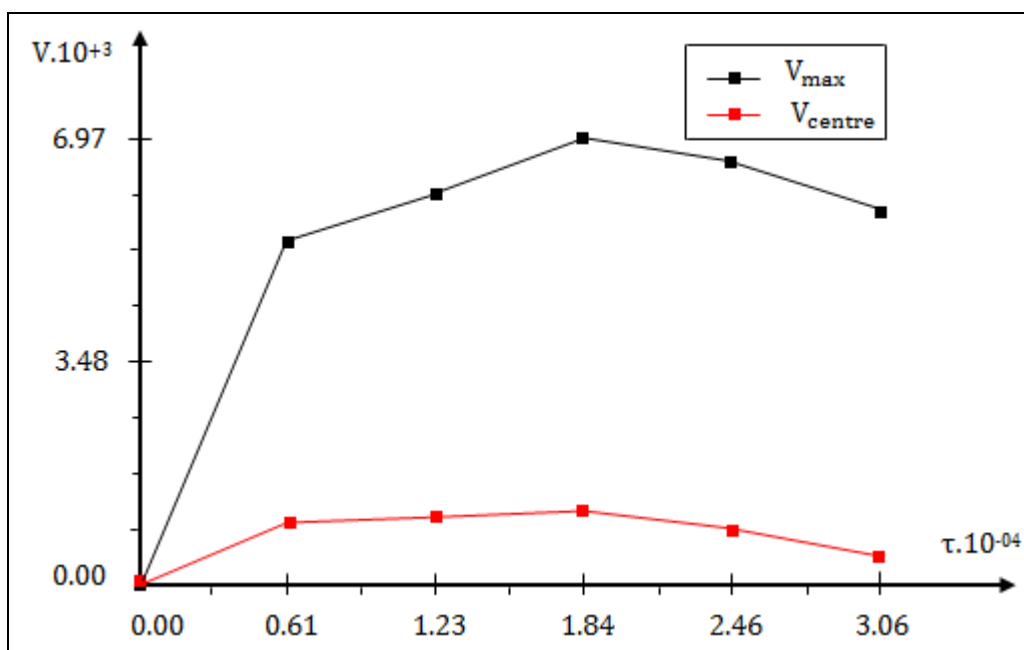


Figure V.23 : courbes d'évolution des modules des vitesses maximale et au centre du réservoir en fonction du temps

**V.2.2. Cas 2 : Convection naturelle instationnaire à conditions aux limites mobiles :**

Les réservoirs de stockages des fluides cryogéniques reçoivent des apports inévitables de chaleur sur leurs parois extérieures. Ces apports thermiques ont des effets nuisibles à l'opération de stockage, ils se traduisent par une perte considérable dans fluide stocké (BOIL OFF) ainsi qu'une modification des propriétés physiques initiales du fluide.

Le flux solaire constitue l'un de ces apports inévitable de chaleur, dès que le levé du soleil, le réservoir reçoit un flux de chaleur qui va se déplacer sur sa paroi extérieure le long de la journée en fonction de la position du soleil (levé du soleil, midi-solaire, couché du soleil). L'idée des conditions aux limites mobiles est inspirée de ce phénomène naturel, leur mouvement est adopté de façon à simuler le mouvement du soleil (flux solaire).

Le flux solaire le long de la journée ne s'impose que sur la partie supérieure du réservoir alors que la partie inférieure reste sans apport de chaleur. C'est pourquoi nous avons choisi de rendre le problème plus général en faisant mobiliser les conditions aux limites sur toute la paroi extérieure du réservoir. A l'état initial le réservoir reçoit un flux thermique comparable à celui du soleil par sa paroi inférieure puis en fur et à mesure ce flux va se déplacer jusqu'à ce qu'il arrive de nouveau à sa position initial.

**V.2.2.1. Champs thermique :**

Nous avons fait nos simulations pour un pas du temps  $\Delta\tau = 0.305 \cdot 10^{-04}$ , correspondant à une rotation des conditions aux limites de  $2.5^\circ$  (levé du soleil de  $2.5^\circ$  par rapport à l'horizontal) sur la paroi extérieure. Nous avons donc, un nombre considérable des résultats dont la totalité vaut 288. La présentation de tous les résultats est impossible en vue de leur nombre, ce qui nous a obligés de choisir un nombre acceptable pour les présenter.

Les figures V.23. illustrent la distribution de la température à l'intérieur du réservoir en fonction du temps. Les images sont enregistré chaque  $\tau = 0.37 \cdot 10^{-03}$ . On remarque initialement, que la paroi inférieure est l'objet d'un apport thermique et que cet apport se déplace par la suite en fonction du temps. Les températures maximales sont localisées au voisinage de la paroi recevant le flux de chaleur, plus en s'éloignant de la paroi chaude, la température de fluide diminue peu à peu jusqu'à atteindre la température de stockage au voisinage de la paroi froide où les basses températures se sont localisées.

Au début, on a un gradient de température instable caractérisé par un grand écoulement convectif, plus en rapprochant de la configuration midi-solaire (le flux thermique est reçu par la paroi supérieure), cet écoulement diminue jusqu'à ce qu'il devient négligeable, on a donc, un gradient de température stable, ce type de gradient favorise beaucoup le transfert de chaleur par conduction, ce qui explique la formation des couches stratifiées dont la température est classée par ordre décroissant. Ensuite, plus en s'éloignant de la configuration midi-solaire, on remarque que l'écoulement convectif devient de plus en plus important.

La comparaison entre les profils de température pour deux configurations symétriques par rapport à l'axe vertical nous montre clairement l'effet de la mobilité des conditions aux limites en fonction du temps, on prend à titre d'exemple les profils correspondants à  $\tau = 2.21 \cdot 10^{-03}$  et  $\tau = 6.64 \cdot 10^{-03}$  respectivement. On remarque qu'ils sont des conditions aux limites et des configurations symétriques par rapport à l'axe vertical, par contre, leurs profils de températures ne sont pas symétriques, ce qui est tout à fait normale, par ce que le premier profil est précédé pendant  $\tau = 2.21 \cdot 10^{-03}$  par un grand écoulement convectif qui diminue lentement, alors que le deuxième profil est précédé pendant la même durée par un écoulement convectif négligeable qui croît lentement.

La figure V.24 représente la distribution de la température dans le plan médium en fonction du temps avec :

- ✓ La figure (a) schématise la variation de la température pendant  $\tau \in [0, 2.21]10^{-03}$ . On voit clairement que les courbes sont toutes de même allure et qu'elles se décomposent en trois parties. Une première partie de pente négative qui caractérise une diminution rapide de la température, la deuxième caractérise sa stabilisation ainsi que la troisième aussi constitue sa diminution rapide.
- ✓ Les figures (b) et (c) illustrent la variation de la température pendant  $\tau \in [2.58, 4.43]10^{-03}$ . et  $\tau \in [4.80, 6.64]10^{-03}$ . consécutives. On remarque que les courbes sont toutes de même allure, la température augmente rapidement en fonction du temps. Il faut noter que la température du centre reste constante pendant ces deux heures consécutives.

- ✓ La figure (d) illustre la variation de la température pendant  $\tau \in [7.01, 8.86]10^{-03}$ . On remarque clairement que les courbes sont toutes de même allure et qu'elles se décomposent en trois parties. Une première partie de pente négative qui caractérise une diminution rapide de la température puis une augmentation lentement dans la deuxième partie avant sa diminution rapide dans la troisième partie.

La variation de la température du centre de réservoir en fonction du temps est représentée sur la figure V.25. on remarque que la courbe se décompose en trois parties. La première est caractérisée par une augmentation rapide de la température, puis augmentation lente avant de se stabiliser dans la troisième partie.

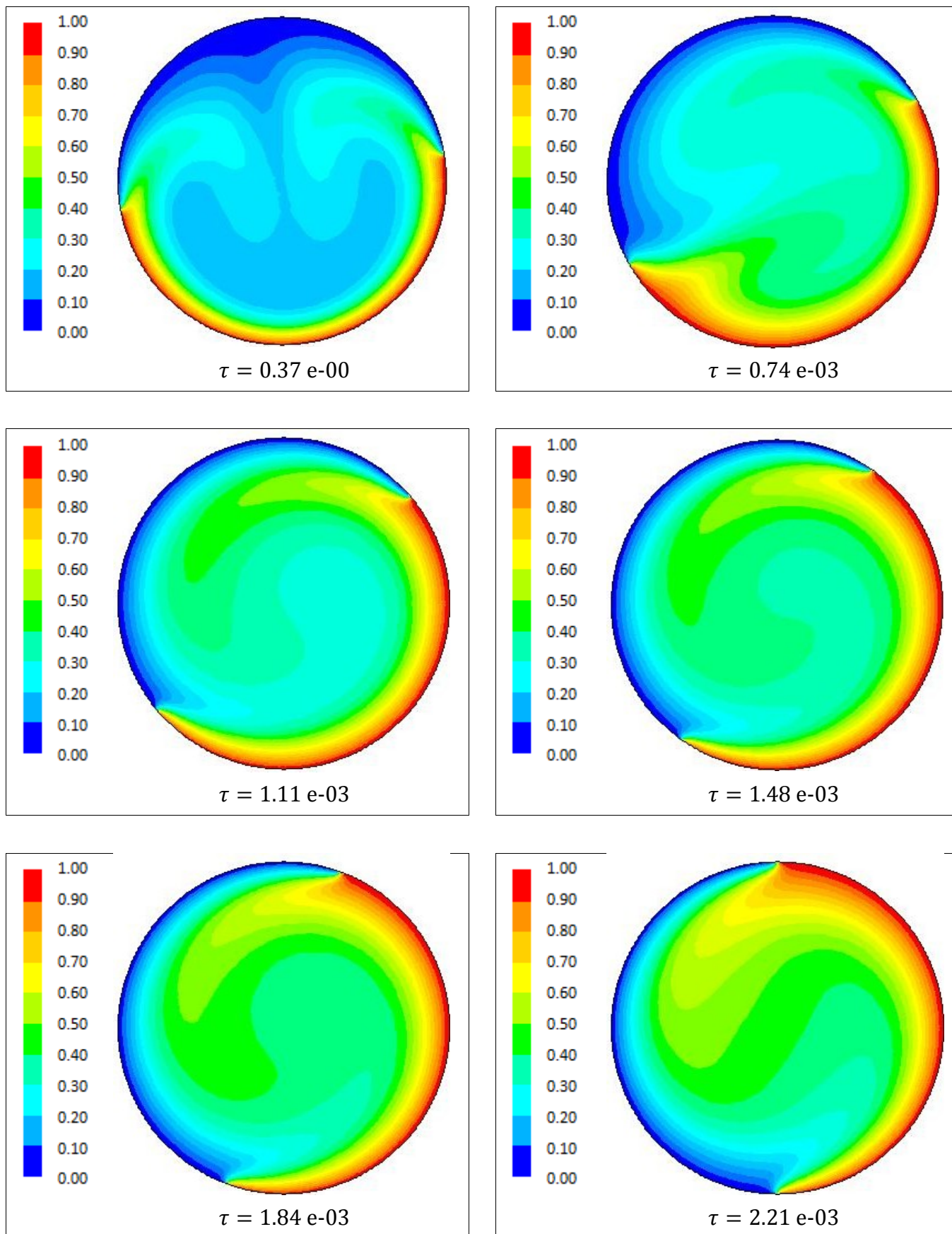


Figure V.24. (a) : évolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps

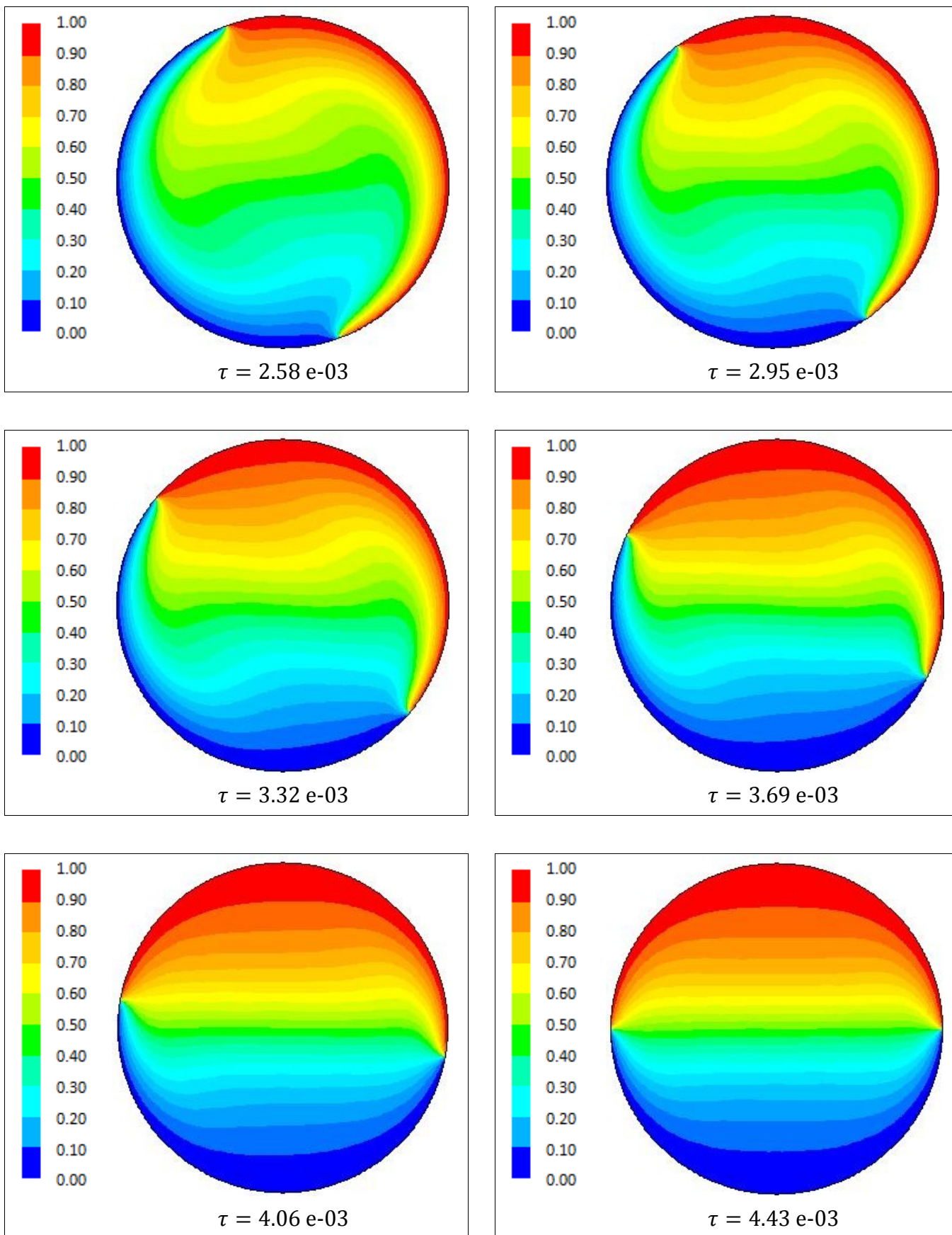


Figure V.24. (b) : évolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps

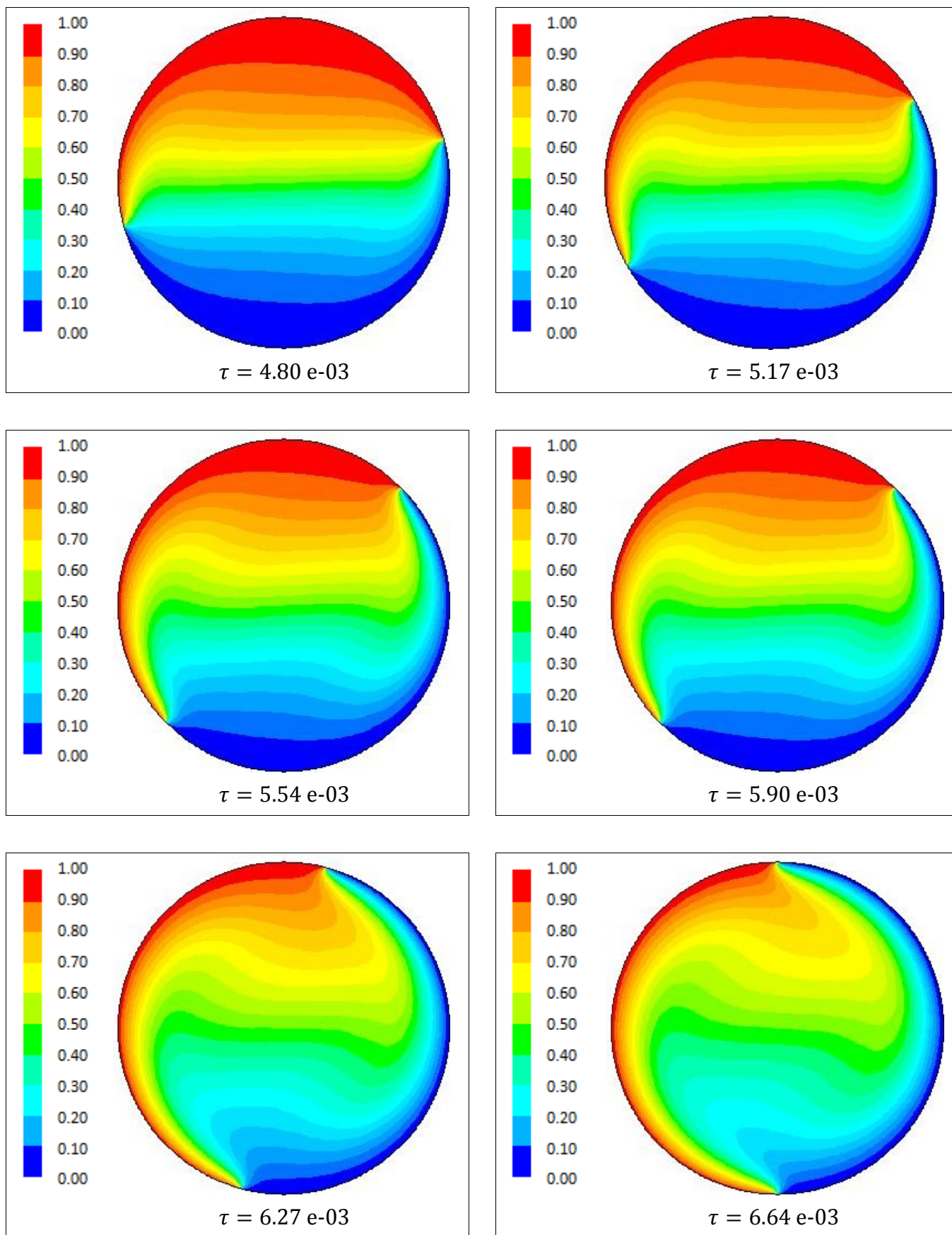


Figure V.24. (c) : évolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps

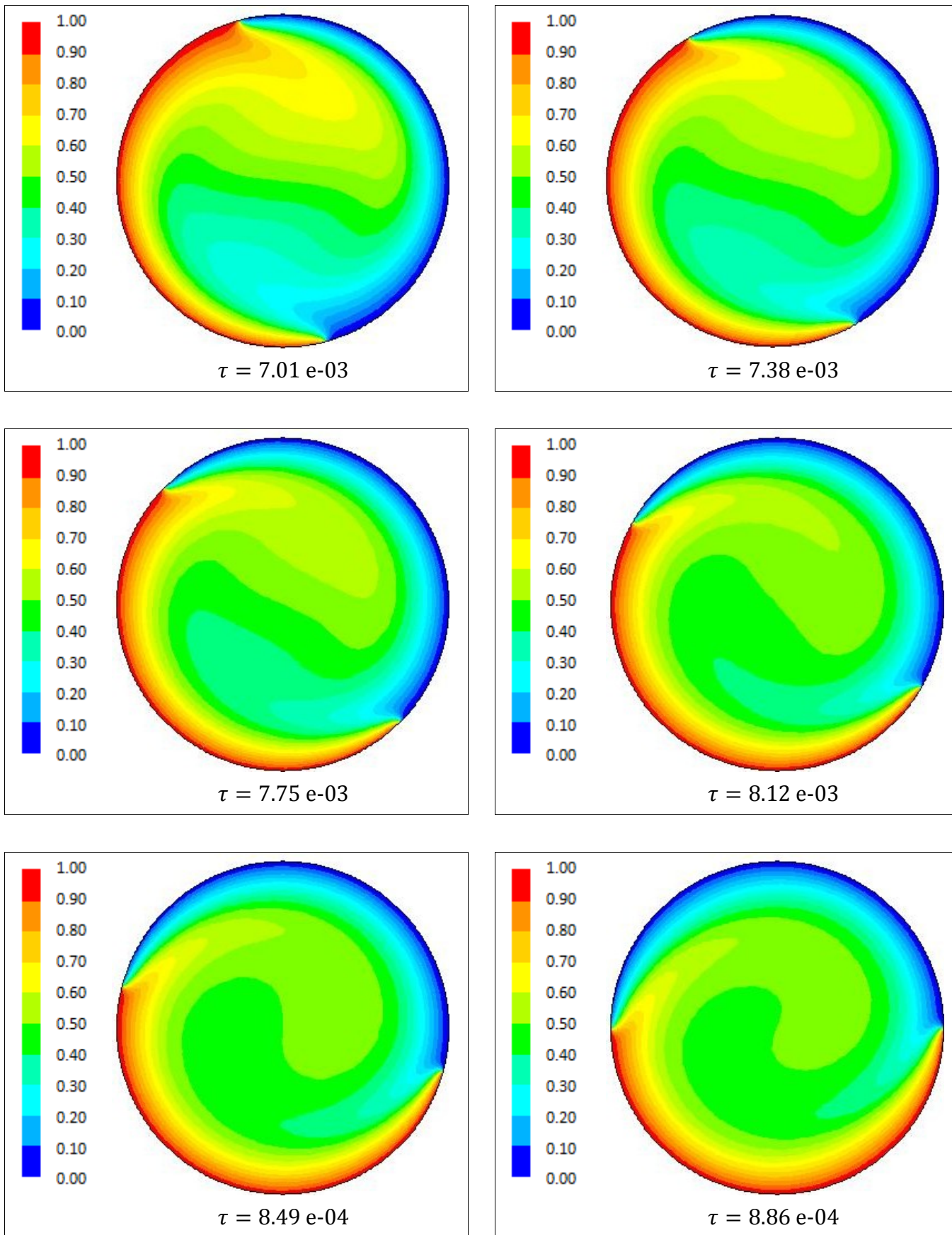
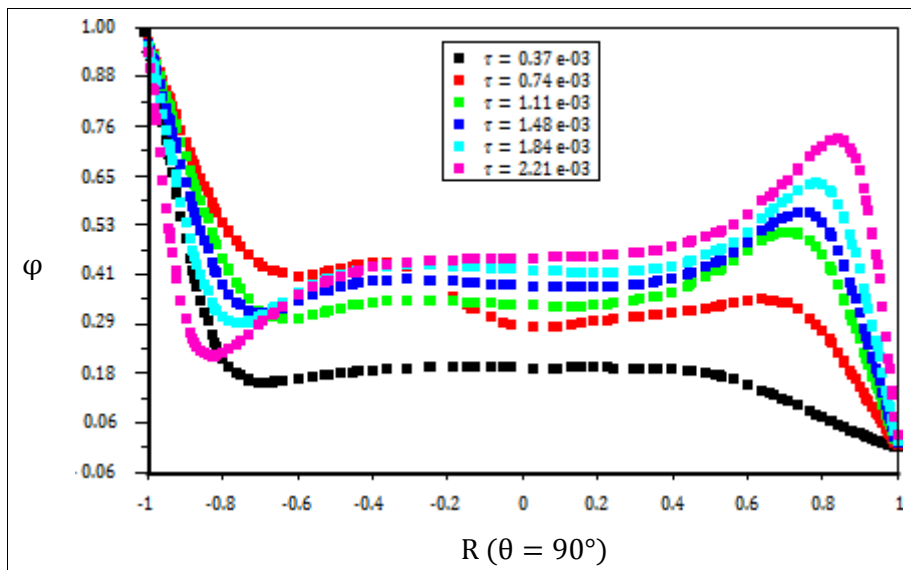
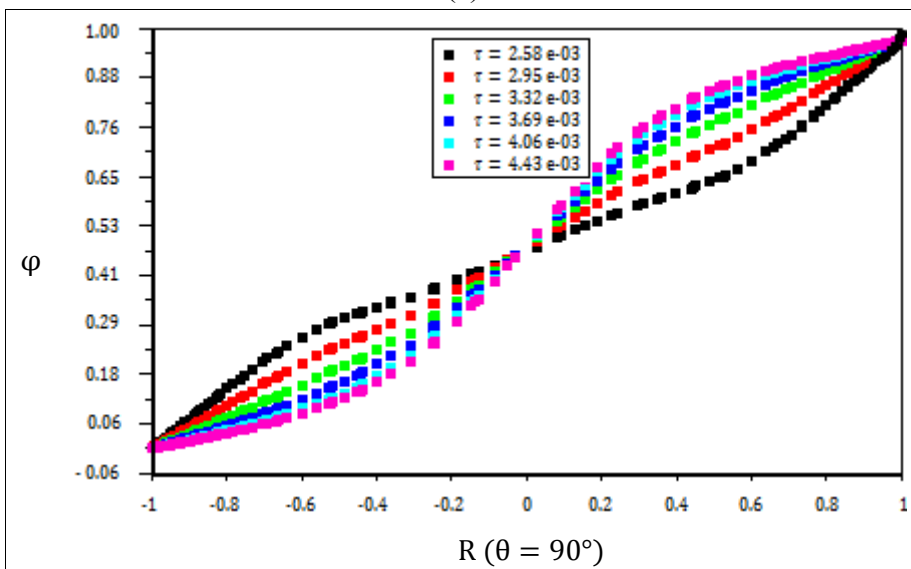


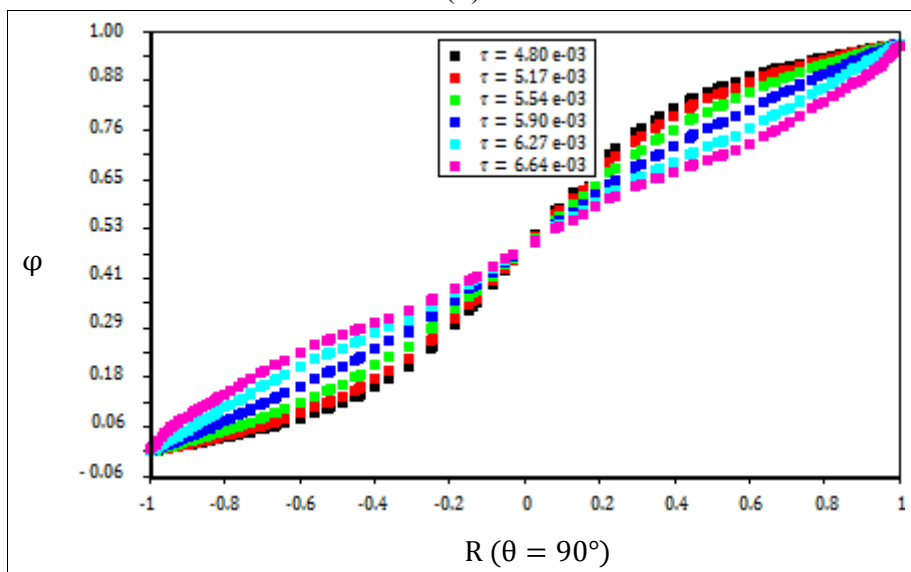
Figure V.23. (d) : évolution des champs de température dans le réservoir en fonction du temps



(a)



(b)



(c)

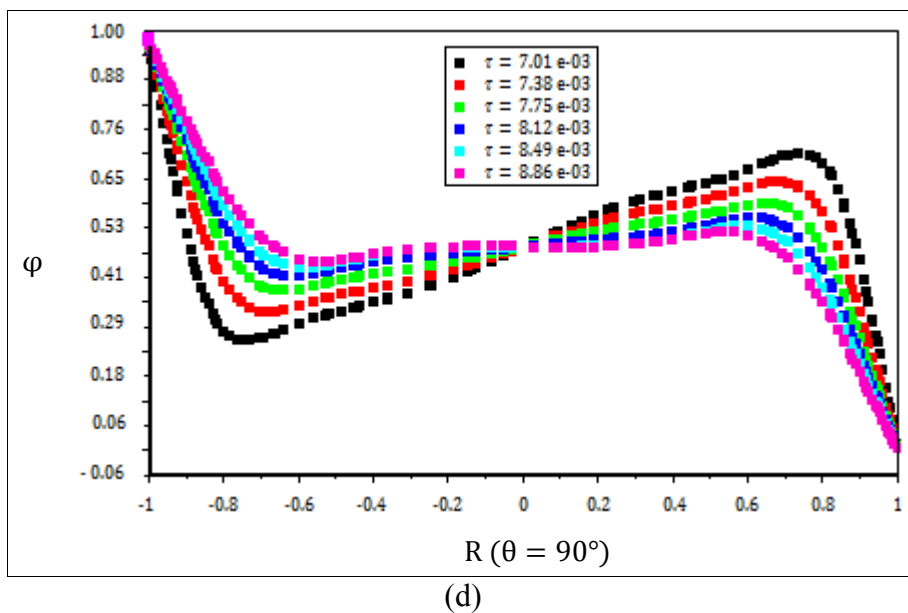


Figure V.25 : profils d'évolution des températures au plan médium : (a) : temps compris entre 0 et 6 heures ; (b) : temps compris entre 7 et 12 heures ; (c) : temps compris entre 13 et 18 heures et (d) : temps compris entre 19 et 24 heures.

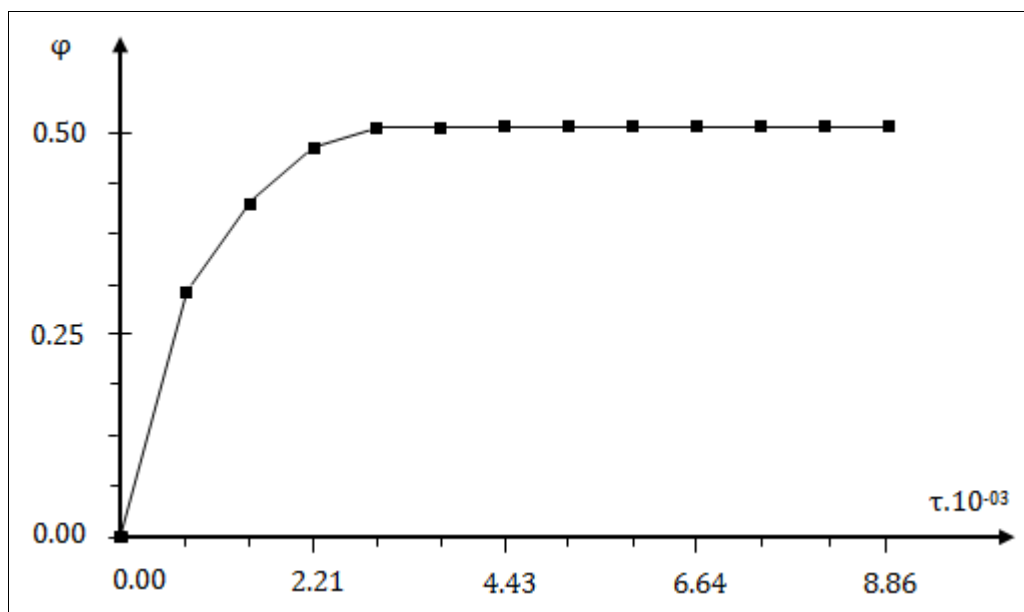


Figure V.26 : courbe d'évolution de la température au centre du réservoir en fonction du temps.

### V.2.2.2. Champs dynamiques :

Le champ dynamique est représenté par les contours des vecteurs vitesses seulement cette fois-ci dans la figure V.26. les vitesses près de la paroi sont nulles à cause de la condition de non glissement. Toute fois, en se dirigeant vers le centre, les vitesses diminuent. Initialement, on remarque la formation de deux cellules contrarotatives, puis, en fur et à mesure de la rotation des conditions aux limites on remarque la formation d'une seule cellule, vers  $\tau = 1.11.10^{-03}$ , ensuite, à l'intérieur de laquelle, deux autres petites cellules se sont formées. Vers  $\tau = 4.06.10^{-03}$ , nous avons quatre cellules avant de redevenir deux vers  $\tau = 4.80.10^{-03}$ . finalement, la formation d'une seule cellule vers  $\tau = 8.12.10^{-03}$ .

La figure V.27 représente l'évolution de la vitesse dans le plan medium en fonction du temps. Premièrement, on remarque que les courbes ont tous les mêmes allures sauf durant les premières deux heures. Elles se décomposent en quatre parties. La première caractérise une croissance rapide de la vitesse avant de décroître rapidement dans la deuxième partie, puis une croissance rapide dans la troisième partie avant de décroître de nouveau rapidement dans la quatrième partie. On remarque aussi que les vitesses à proximité des parois sont nulles ainsi que les vitesses au centre du réservoir ont des valeurs négligeables sauf au début.

Les courbes de l'évolution des vitesses maximales et celle au centre du réservoir sont représentées par la figure V.28. on commence par celles de l'évolution de la vitesse maximale, on remarque une croissance très rapide de plus en plus ralentie durant  $\tau \in [0, 2.21].10^{-03}$  ensuite une décroissance linéaire rapide pendant  $\tau \in [2.58, 4.43].10^{-03}$  qui suivent avant de croître de plus en plus ralentie durant la durée restante. La courbe de la vitesse du centre se décompose en trois zones. La première caractérise une croissance rapide de la vitesse pendant  $\tau \in [0, 0.74].10^{-03}$ , la deuxième caractérise sa diminution rapide  $\tau \in [1.11, 2.21].10^{-03}$  avant de stabiliser durant la troisième.

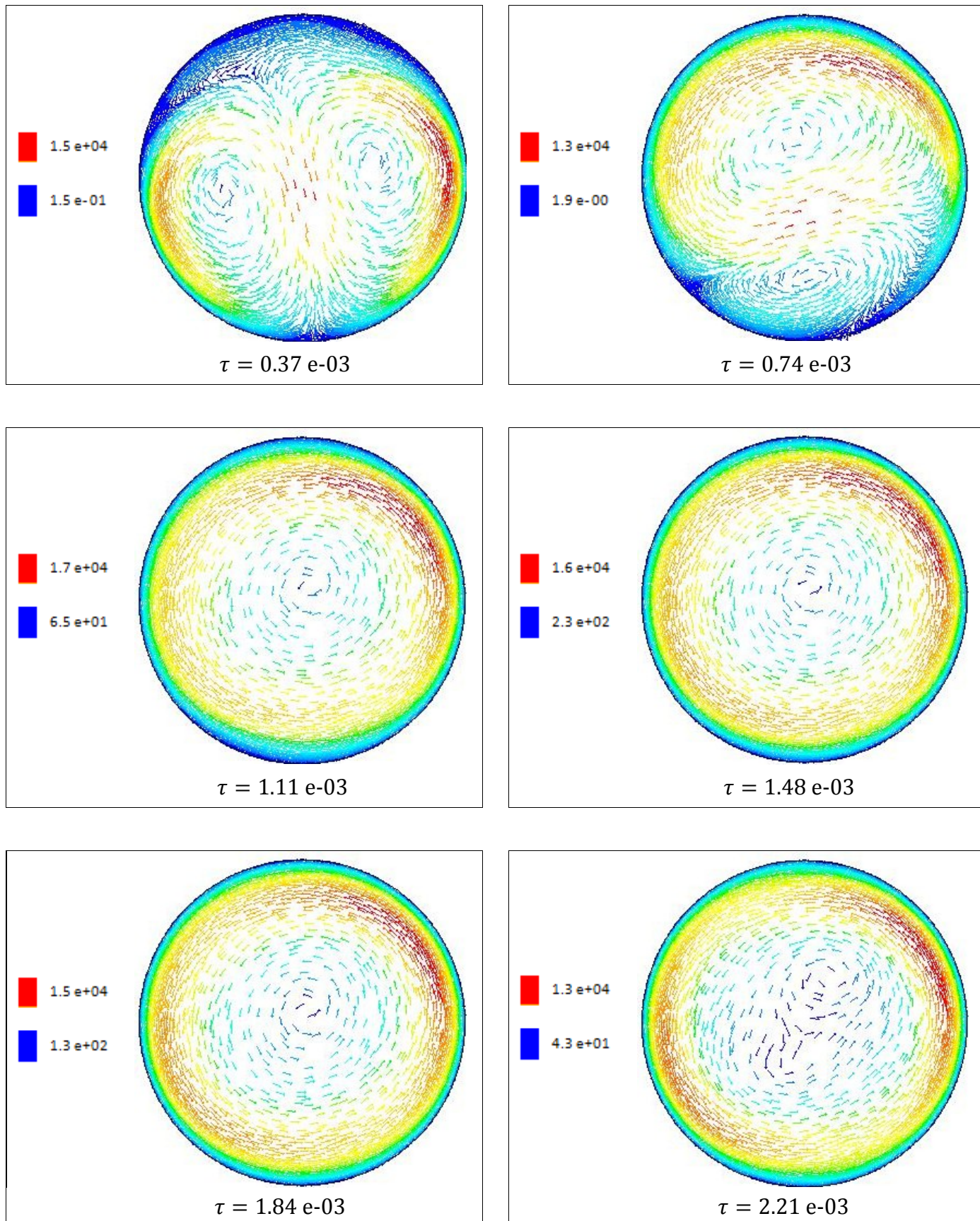


Figure V.27. (a) : évolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps

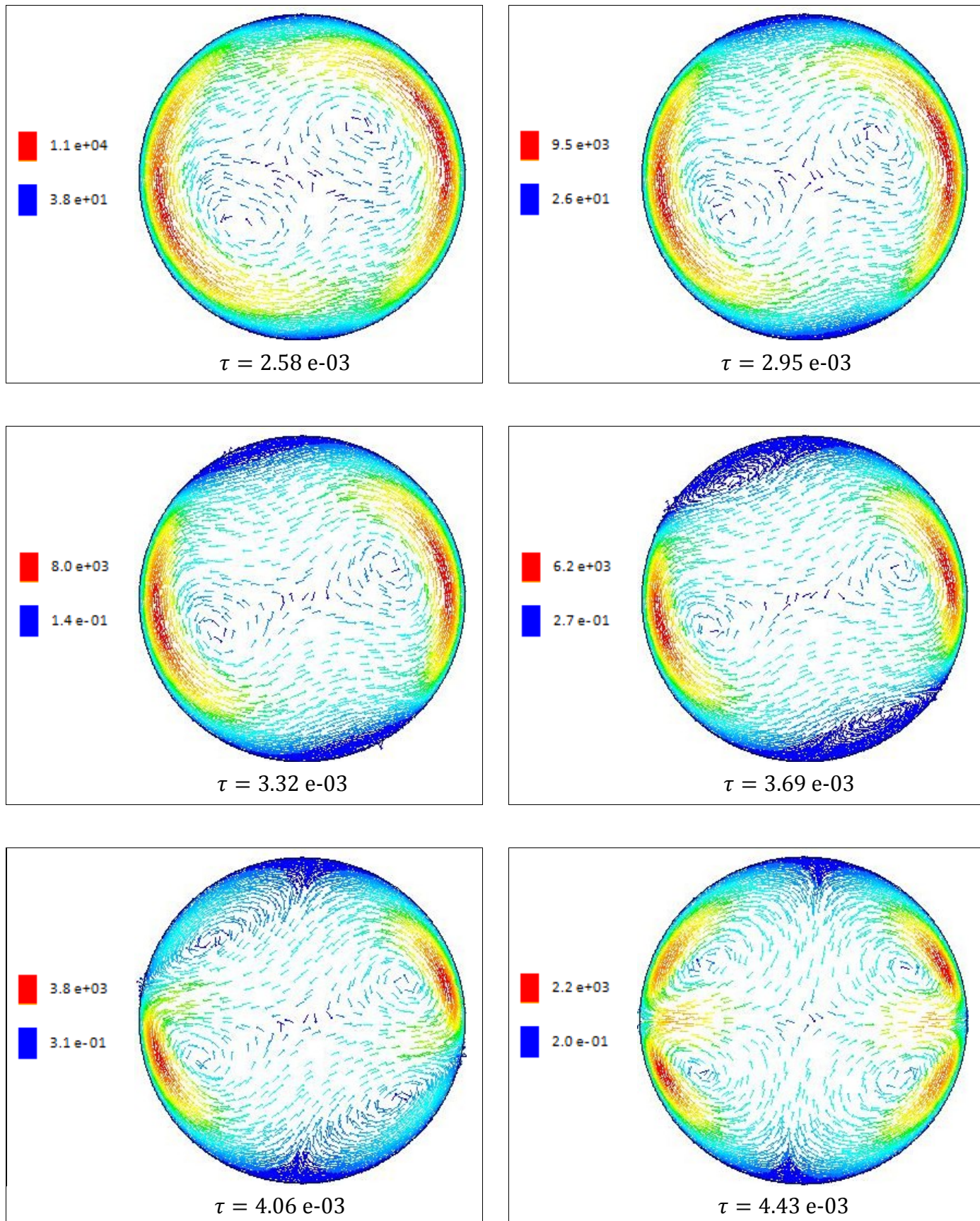


Figure V.27. (b) : évolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps

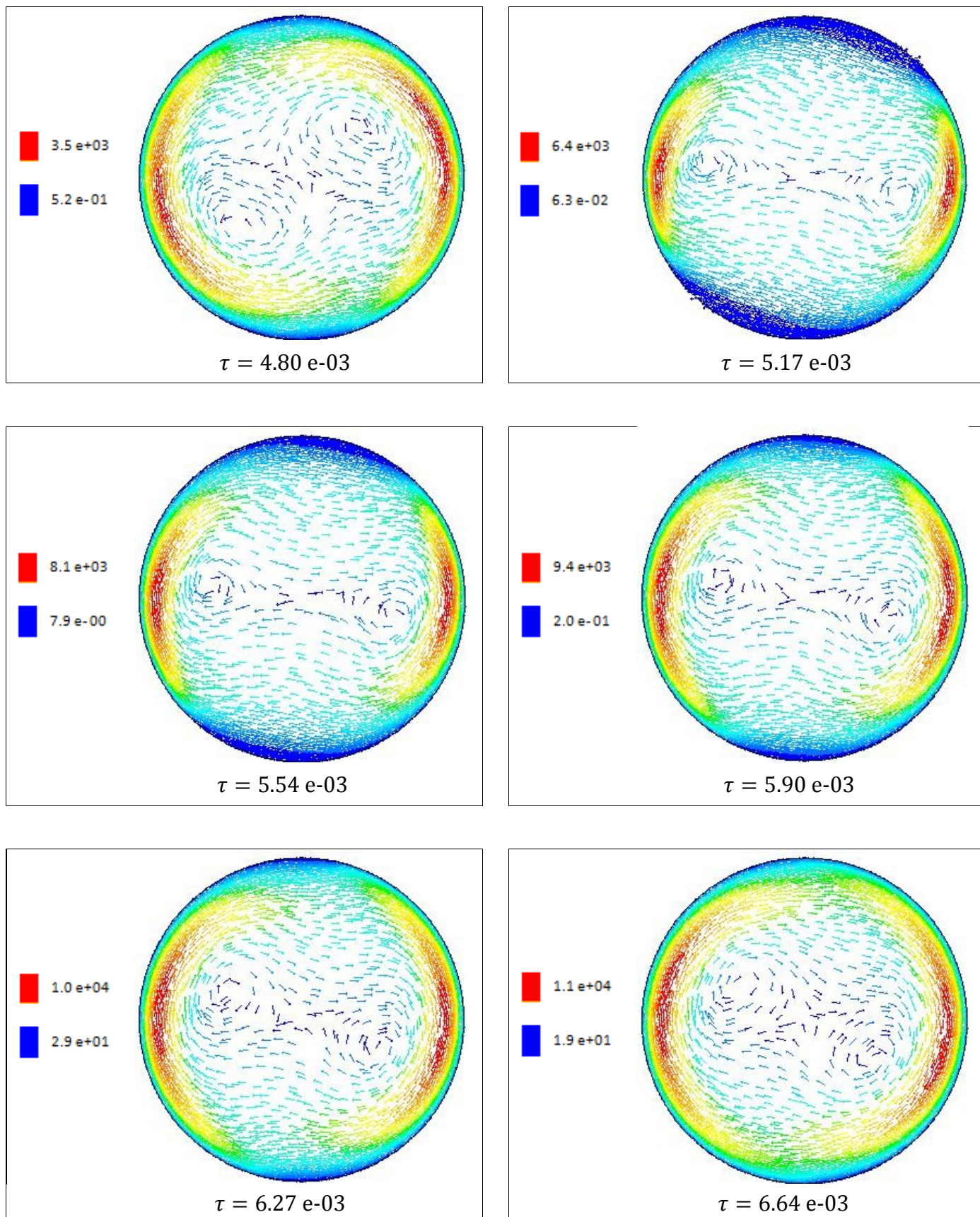


Figure V.27. (d) : évolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps

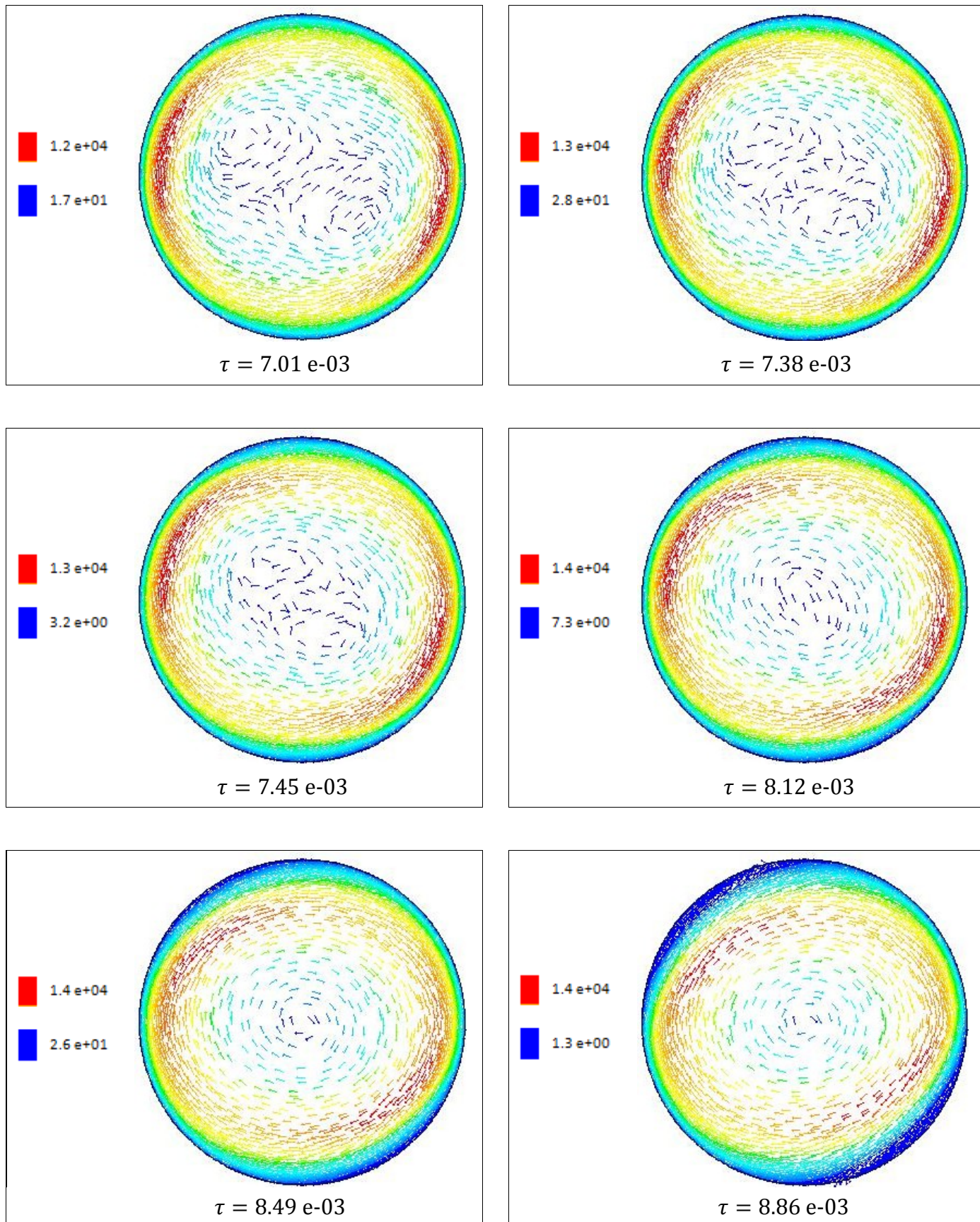
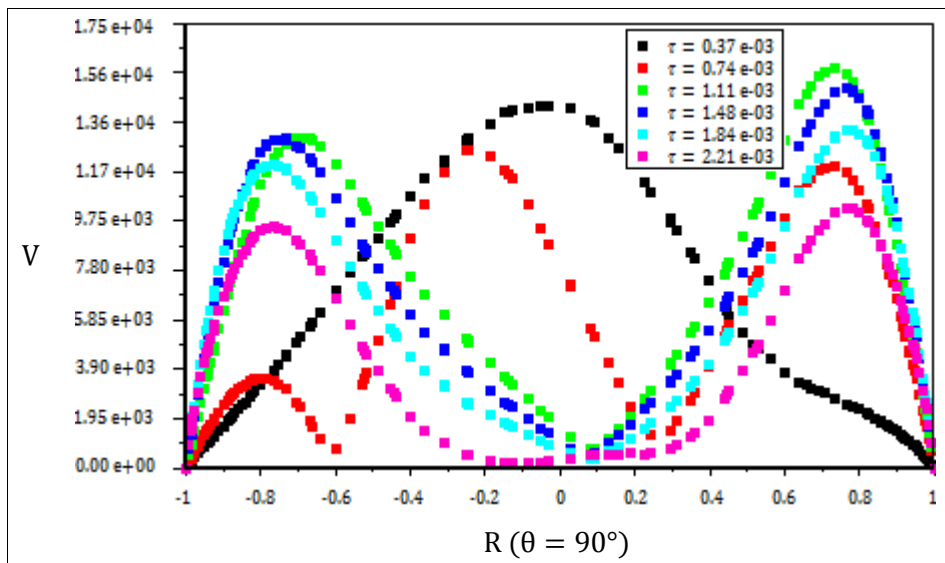
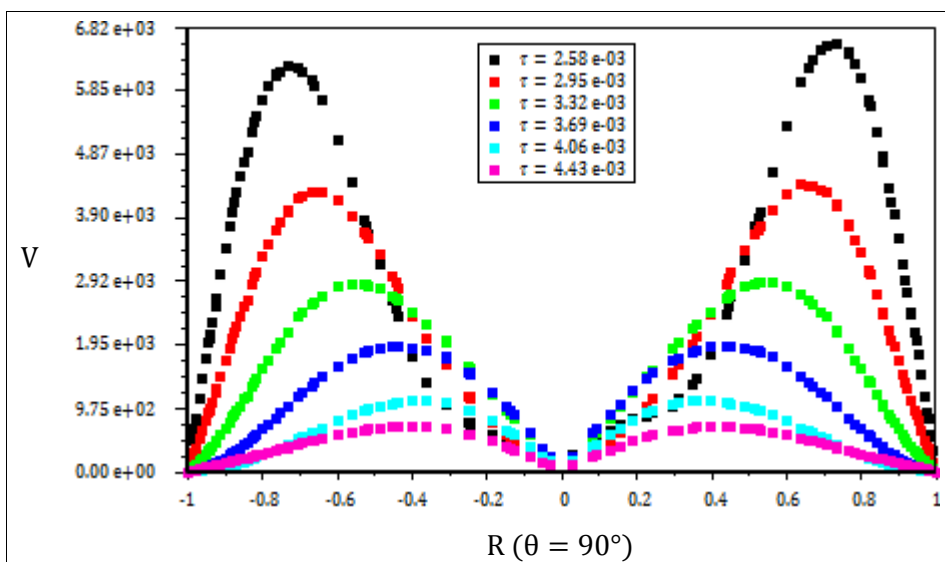


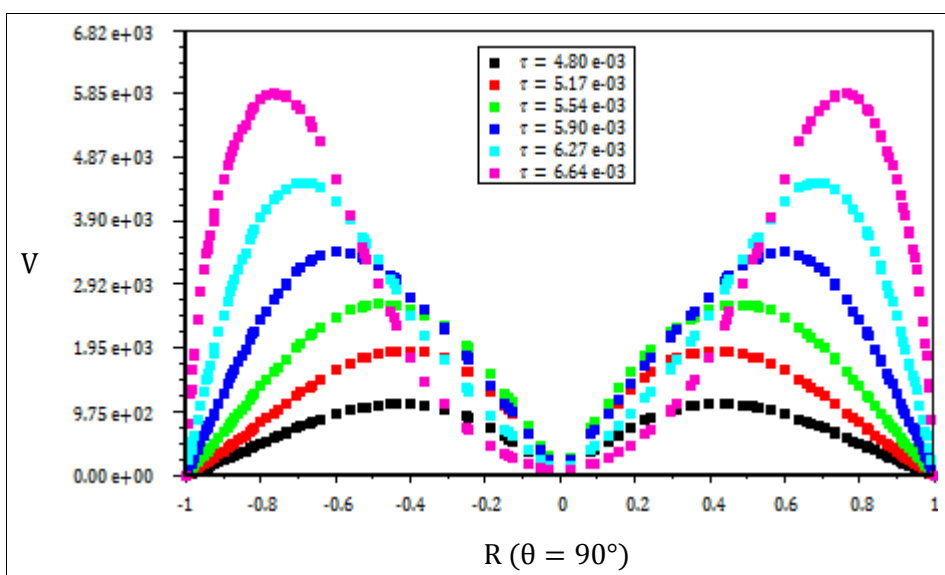
Figure V.27. (d) : évolution des vecteurs vitesses dans le réservoir en fonction du temps



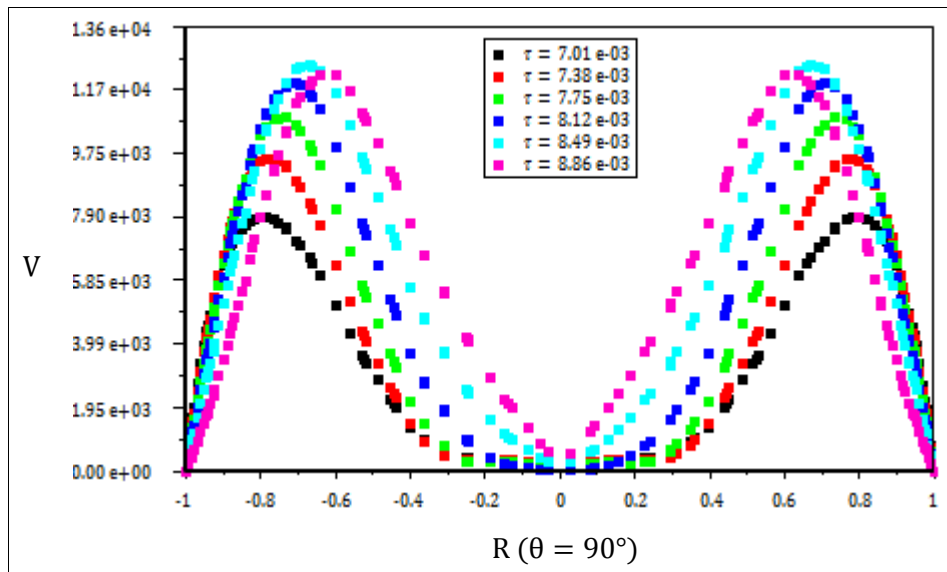
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure V.28 : profils d'évolution des modules de vitesses au plan médium en fonction du temps

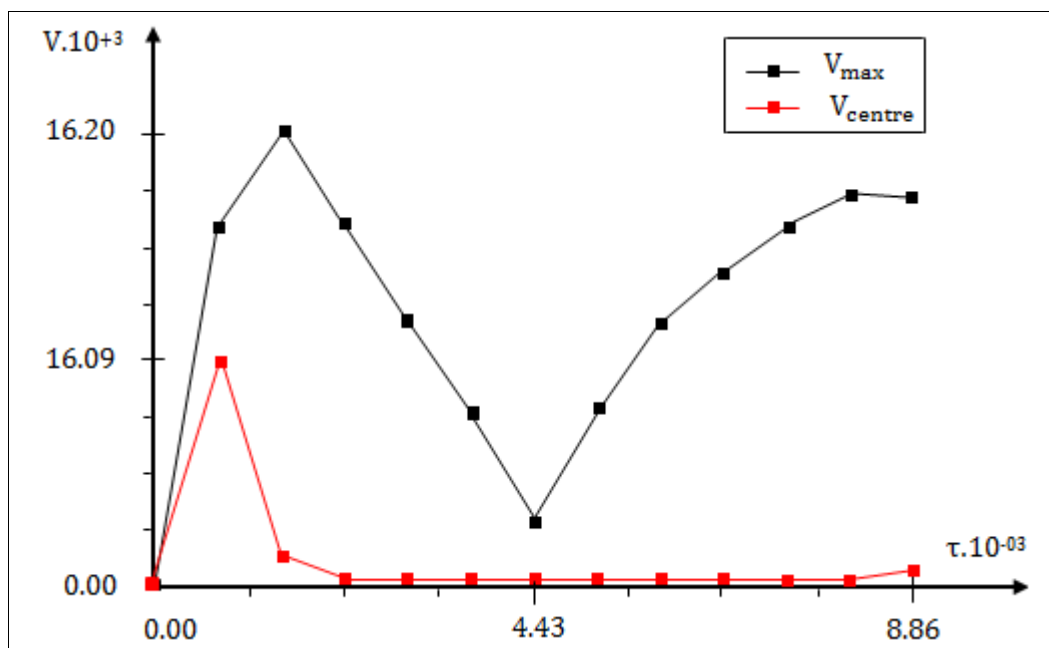


Figure V.29 : courbes d'évolution des vitesses maximale et celle au centre du réservoir en fonction du temps

### V.3. Comparaison :

Après avoir fait l'étude du comportement thermique d'un réservoir cylindrique horizontal remplis du GNL, pour deux cas différents des conditions aux limites (fixes et mobiles), nous allons dans cette partie nous intéresser à une étude comparative entre ces deux cas. Les champs thermique et dynamique pour les deux cas, dans des positions similaires ainsi que pour les mêmes durées d'apport de chaleur sont présentés. Le but de cette étude comparative est d'estimer la différence entre un cas rassemblant beaucoup au cas réel (conditions aux limites mobiles) et un autre cas qui est très loin d'être réel.

Nous avons choisi les quatre configurations traités dans la première partie de cette étude (chauffée par le bas, différentiellement chauffée et chauffée par le haut) et quatre configurations correspondantes à ces dernières ( $\tau = 2.21.10^{-03}$ ,  $\tau = 4.43.10^{-03}$ ,  $\tau = 6.64.10^{-03}$  et  $\tau = 8.86.10^{-03}$ ) choisi de la deuxième partie. Nous avons imposé un apport de chaleur constant pendant  $\tau = 1.23.10^{-04}$  pour chaque configuration. La variation de la température au plan médium pour chaque cas sont représentées deux à deux afin d'estimer la valeur de la différence.

#### V.3.1. Comparaison et discussion des résultats :

Les figures V.29, V.30, V.31 et V.32 représentent les champs thermiques et dynamiques d'un réservoir chauffé : par le bas, par la droite, par le haut et par la gauche respectivement, pour les deux cas des conditions aux limites (fixes et mobiles). Elles montrent que la différence causée par le mouvement des conditions aux limites est totale. Cette différence est toute à fait naturelle à cause de la différence enregistrée au niveau des conditions initiales. Pour le cas de conditions aux limites fixes, le phénomène de transfert de chaleur s'initie à partir du repos, c.à.d. qu'à l'instant initial, tout le fluide est isotherme ainsi que toutes les vitesses sont nulles. Par contre, pour le cas de conditions aux limites mobiles, le transfert de chaleur ne s'initie pas à partir du repos. Initialement, le fluide n'est pas isotherme, sa température moyenne est largement supérieure à celle de stockage, ainsi qu'il possède des vitesses initiales relativement élevées.

Pour toutes les configurations, on remarque l'existence d'une paroi chaude (selon la configuration) au voisinage de laquelle les températures maximales sont localisées, ainsi plus en s'éloignant, la température diminue considérablement pour le cas des conditions aux limites fixes et diminue lentement pour le deuxième cas.

D'après la figure V.29 (configuration 1), on remarque la formation de deux cellules contrarotatives dont celle de la gauche tourne dans le sens horaire et celle de la droite tourne dans le sens inverse pour le premier cas, alors que, pour le deuxième, on remarque la formation d'une seule cellule tourne dans le sens horaire. Les vitesses au voisinage des parois sont nulles du fait de la condition de non glissement.

D'après la figure V.30 (configuration 2), on remarque la formation d'une cellule pour les deux cas, mais qu'elles ne sont pas identiques. Les vitesses au voisinage des parois ainsi qu'au centre de deuxième cas sont nulles.

D'après la figure V.31 (configuration 3), on remarque la formation de deux cellules contrarotatives dont celle de la gauche tourne dans le sens horaire et celle de la droite tourne dans le sens inverse pour le premier cas, alors que, pour le deuxième, on remarque la formation de quatre cellules contrarotatives, deux dans la partie inférieure de la cavité et deux dans la partie supérieure comparables à ceux du premier cas. Les vitesses au voisinage des parois sont nulles du fait de la condition de non glissement.

D'après la figure V.32 (configuration 4), on remarque aussi la formation d'une cellule pour les deux cas. Ces cellules ne sont pas identiques. Les faibles vitesses sont enregistrées au voisinage des parois, ce qui est normale à cause de la condition de non glissement. Pour le cas de conditions aux limites mobiles, les vitesses à proximité du centre sont aussi très faibles voir nulles.

La figure V.33 illustre les profile des températures au plan medium. Pour le cas de conditions aux limites fixes, il caractérise une diminution rapide dans une première partie avant de se stabiliser dans la deuxième. Pour le deuxième cas, il se décompose en trois parties, la première caractérise une diminution rapide de la température puis, elle se stabilise dans la deuxième partie avant de diminuer rapidement jusqu'à ce qu'il atteint la température de la paroi froide dans la troisième partie.

La figure V.34 représente les profile des températures le long de l'axe des X. Pour le premier cas, il se décompose en deux parties, la première caractérise une température constante et la deuxième caractérise une augmentation rapide de cette température jusqu'à ce qu'elle atteint celle de la paroi chaude. Pour le deuxième cas, il se décompose en trois parties, la première caractérise une augmentation rapide de la température puis, une diminution lente dans le deuxième avant d'augmenter dans la troisième.

La figure V.35 illustre les profils des températures dans le plan médium. Pour le premier cas, la courbe est de forme parabolique. Elle caractérise une augmentation rapide de la température. Pour le deuxième cas, la courbe se décompose en deux parties, la première partie est de forme parabolique, elle caractérise une augmentation de la température. La deuxième est de forme hyperbolique, elle caractérise leur augmentation jusqu'à ce qu'il atteigne la température de la paroi chaude.

Les profils des températures le long de l'axe des X pour les deux cas sont illustrés par la figure V.36. Pour le cas des conditions aux limites fixes, la courbe se décompose en deux parties, la première caractérise une diminution rapide de la température et la deuxième caractérise sa stabilisation à la température de stockage. Pour le cas des conditions aux limites mobiles, la courbe se décompose en trois parties, la première caractérise une diminution rapide de la température puis, une augmentation lente dans la deuxième avant de diminuer dans la troisième.

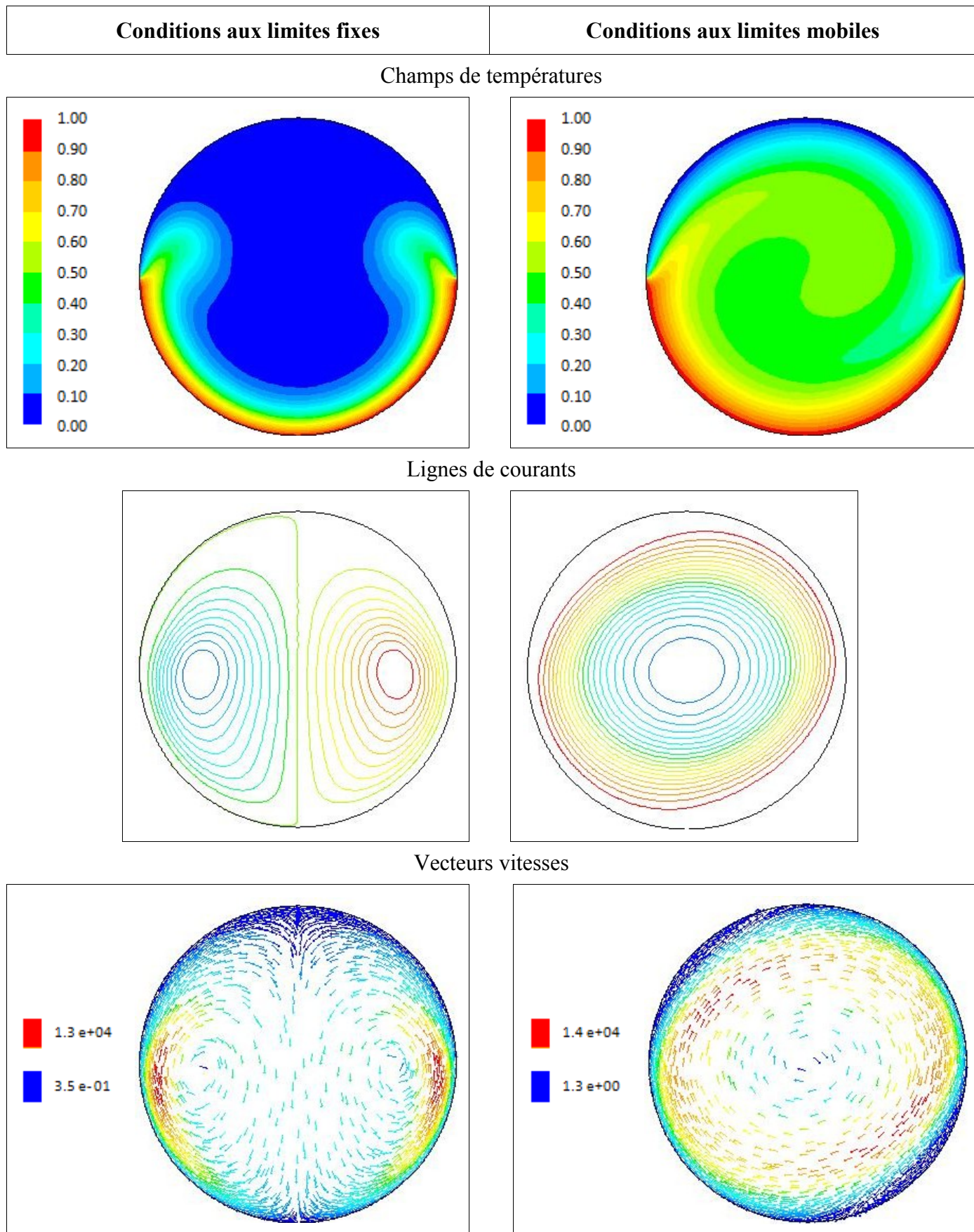


Figure V.30 : Champs thermique et dynamique selon la configuration 1 pour les deux cas

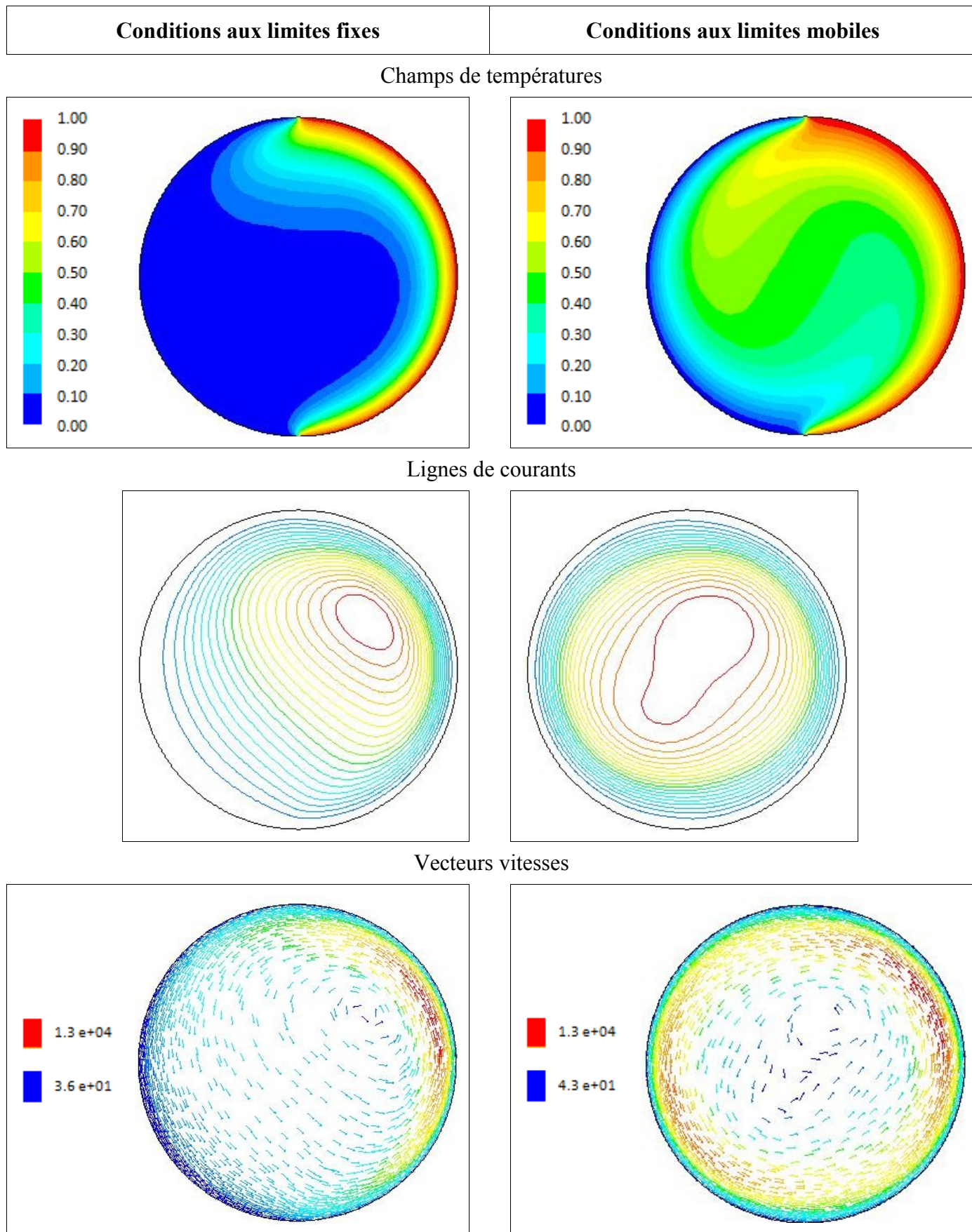


Figure V.31 : Champs thermique et dynamique selon la configuration 2 pour les deux cas

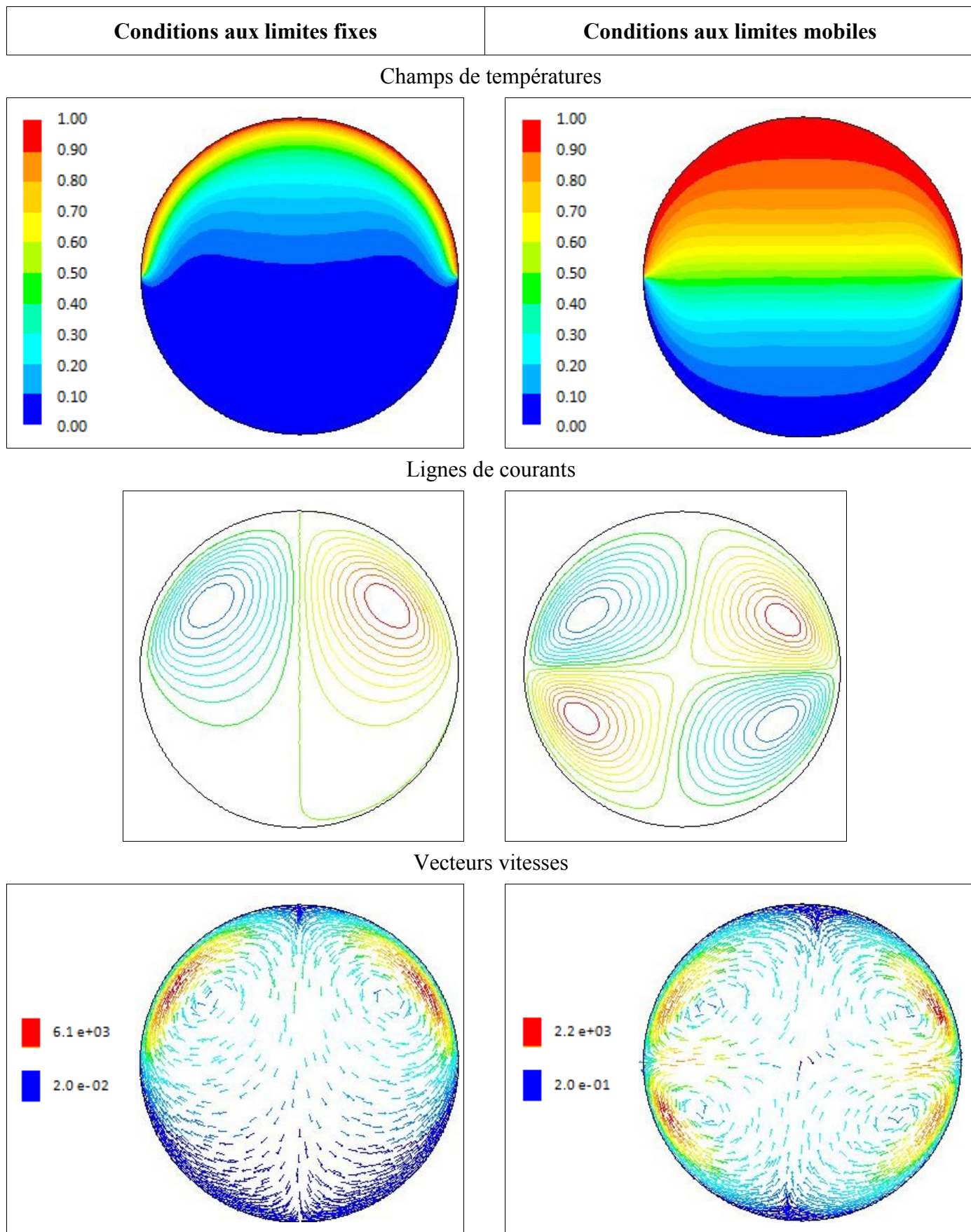


Figure V.32 : Champs thermique et dynamique selon la configuration 3 pour les deux cas

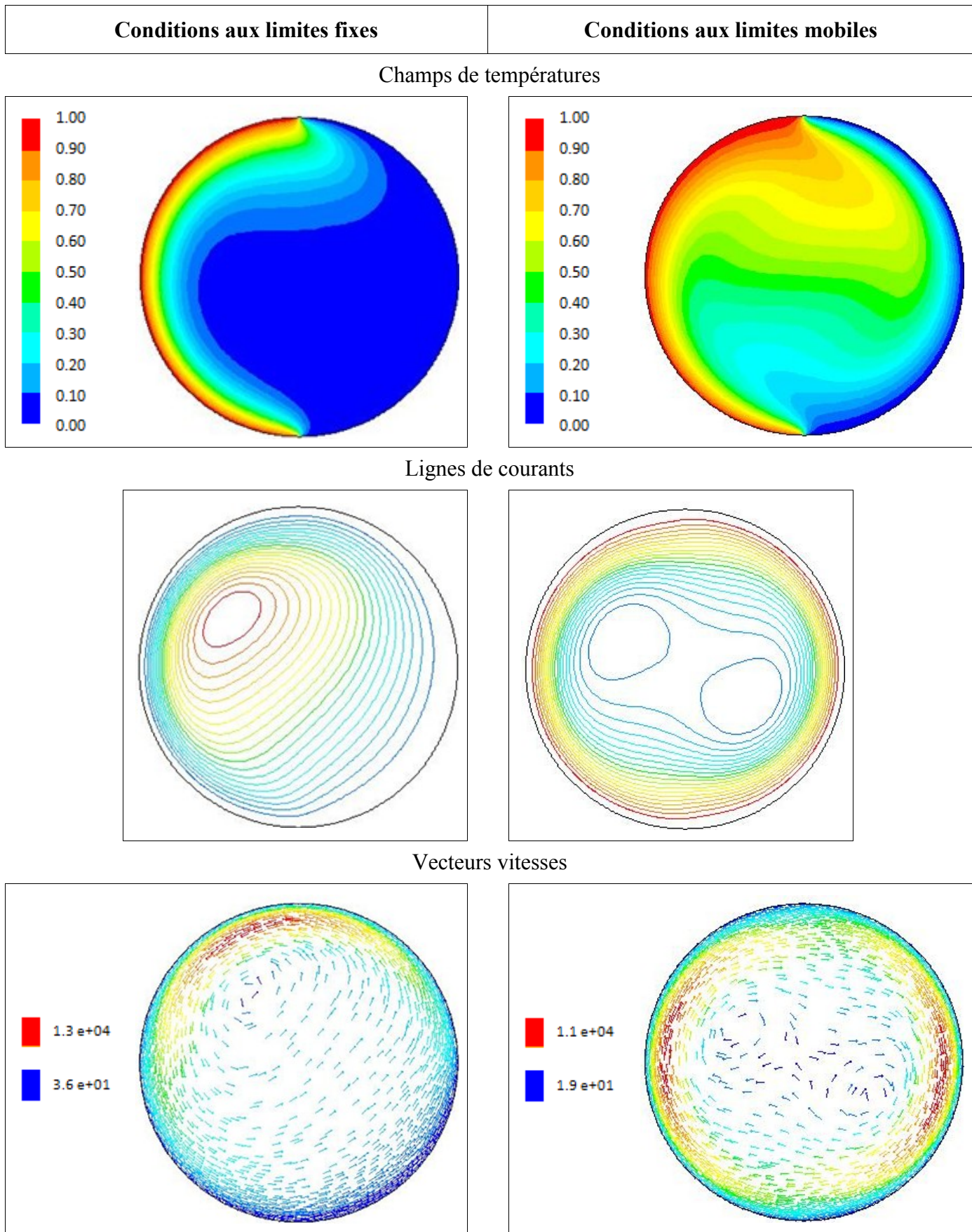


Figure V.33 : Champs thermique et dynamique selon la configuration 4 pour les deux cas

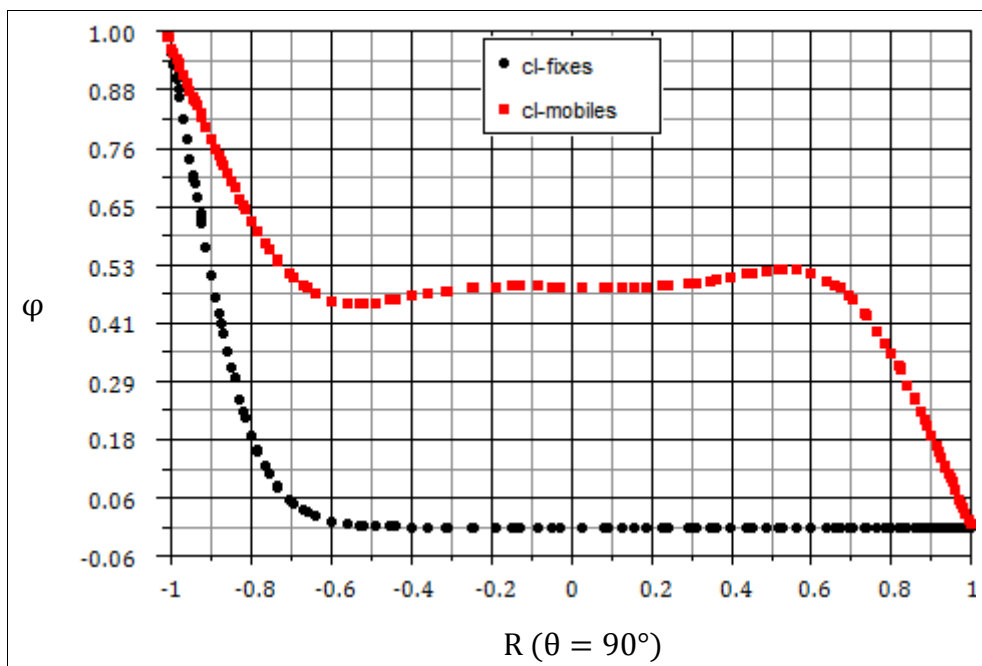


Figure V.34: comparaison de profils d'évolutions de la température au plan médium d'un réservoir chauffé par le bas en fonction du temps

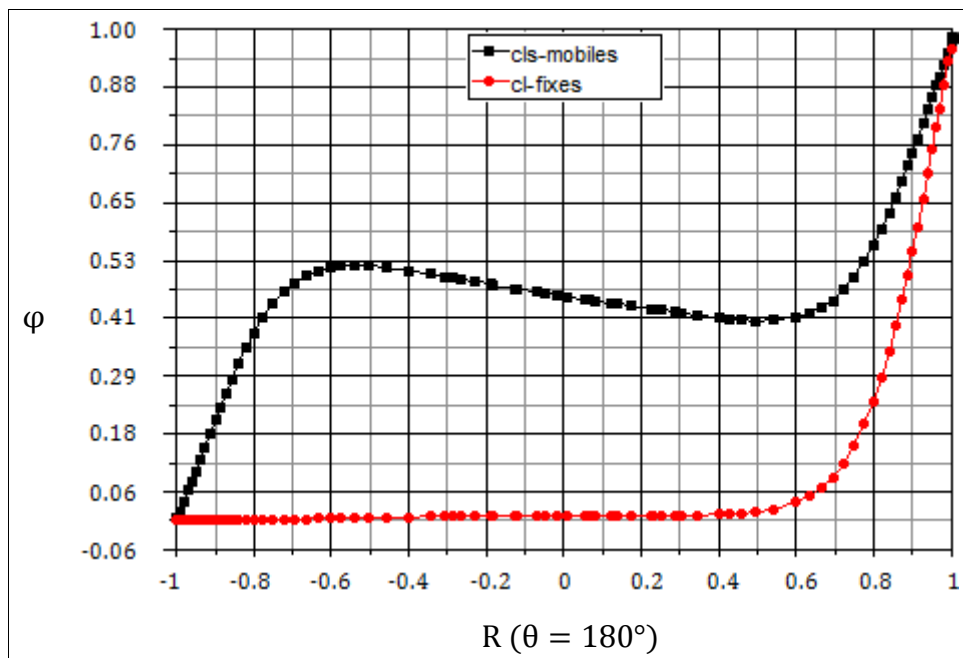


Figure V.35 : comparaison de profils d'évolutions de la température au plan  $R (\theta=180^\circ)$  d'un réservoir chauffé par sa paroi droite en fonction du temps

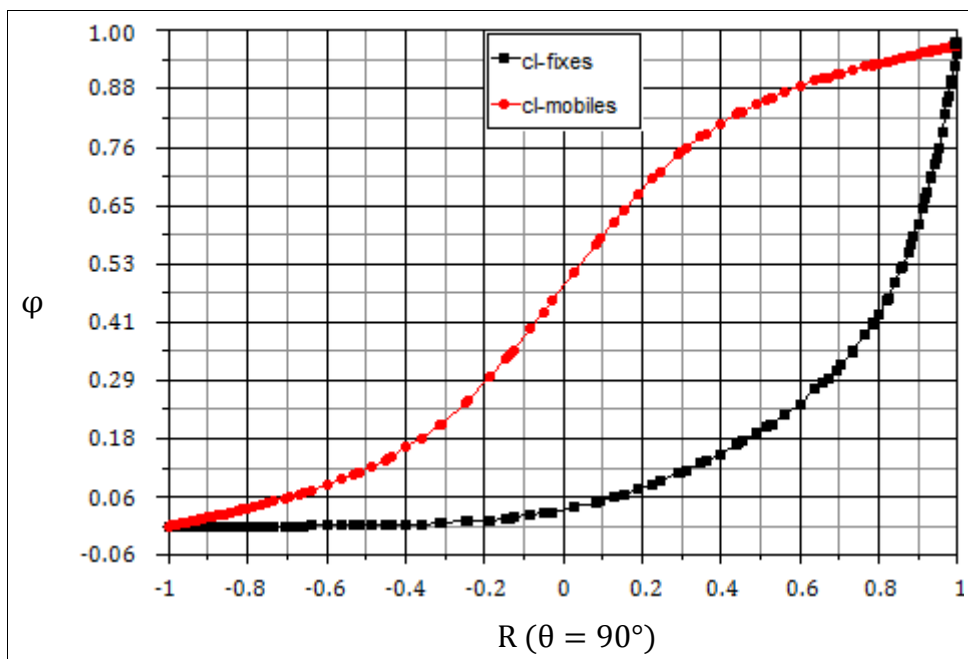


Figure V.36 : comparaison de profils d'évolutions de la température au plan médium d'un réservoir chauffé par le haut en fonction du temps

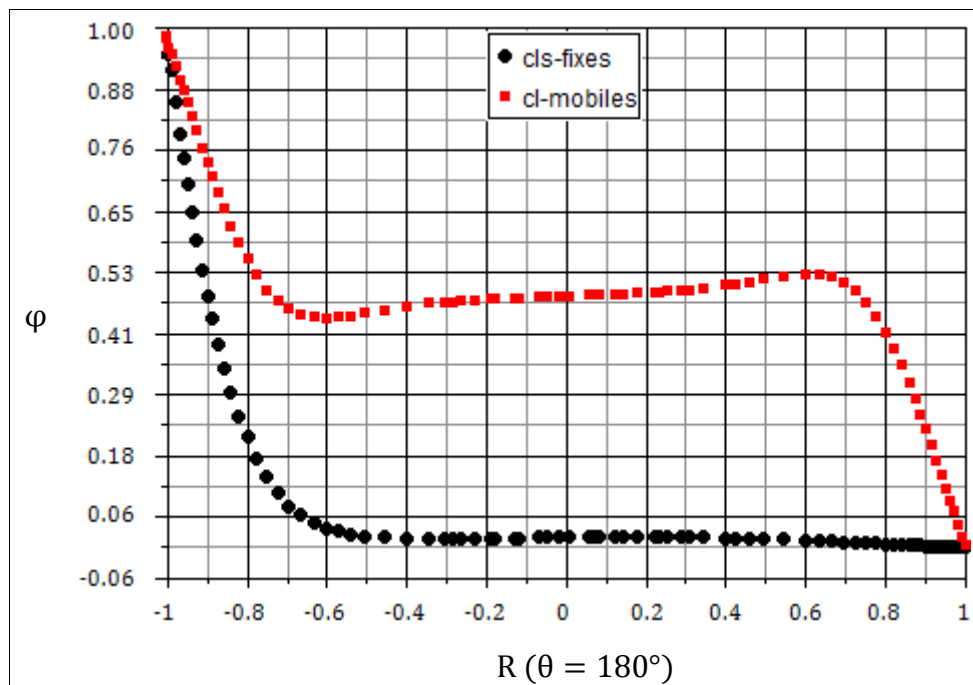


Figure V.37 : comparaison de profils d'évolutions de la température au plan  $R (\theta=180^\circ)$  d'un réservoir chauffé par sa paroi gauche en fonction du temps

---

## *CONCLUSION GENERALE*

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Nous avons étudié lors de ce travail la convection naturelle dans un réservoir cylindrique horizontal de stockage cryogénique. Pour ce faire, nous avons commencé par une étude bibliographique qui nous a permis de nous familiariser avec les réservoirs cryogéniques ainsi de connaître leurs caractéristiques. Ensuite, en se basant sur l'approximation de Boussinesq, nous avons établi les équations régissant la convection naturelle dans le réservoir qui ont par la suite, été discrétisées à l'aide de la méthode des volumes finis en utilisant le schéma Quick pour discrétiser le terme convectif et l'algorithme SIMPLER pour résoudre le couplage vitesse-pression. Ces équations sont par ailleurs les mêmes qui seront utilisées par le code de calcul qui nous a permis d'effectuer les simulations numériques.

Les simulations numériques ont été faites à l'aide du code de calcul Fluent. Dans une première étape, on a considéré le cas de la convection naturelle dans un réservoir qui reçoit un flux de chaleur constant et fixe sur sa surface extérieure. Ce flux est simulé selon trois configurations (flux par le bas, flux par la droite et flux par le haut). Les résultats obtenus montrent une bonne concordance entre la modélisation numérique et les résultats prévus en se basant sur l'expérience de Rayleigh surtout en ce qui concerne les cellules formées ainsi que le sens de l'écoulement.

Dans une deuxième étape, nous avons considéré le cas de la convection naturelle dans un réservoir qui reçoit un flux solaire constant et mobile durant toute la journée sur la surface extérieure de ce dernier. Le mouvement des conditions aux limites a été établi pour simuler exactement le mouvement du soleil en termes de vitesse et de position. Les résultats obtenus nous ont montré le comportement thermique du réservoir pendant un jour.

Une comparaison à été faite entre les deux cas des conditions aux limites (fixes et mobiles) pour estimer l'influence du mouvement des conditions aux limites sur les résultats finals de la simulation. Pour les mêmes configurations, nous avons obtenu une différence totale entre ces deux cas, cette différence est due aux conditions initiales qui ne sont pas les mêmes. On estime donc que les conditions aux limites et les conditions initiales ont une importance majeure du fait de leur influence directe sur la précision et l'exactitude des résultats, pour cela, on conseil de les adopter soigneusement et précisément afin d'aboutir à des bons résultats.

En perspective de ce travail, nous jugeons intéressant de traiter les points suivant :

- ✓ Etudier le comportement thermique du réservoir cryogénique en tridimensionnelle et en tenant compte de l'effet d'orientation du soleil (flux de chaleur).
- ✓ Faire une étude de la convection naturelle dans le réservoir cryogénique en régime turbulent.
- ✓ Traiter le phénomène de la convection naturelle en imposant un flux de chaleur variable sur la paroi latérale du réservoir en fonction de la géométrie et de la position.
- ✓ Etudier le comportement thermique du réservoir en imposant un flux de chaleur variable sur sa paroi latérale en fonction du temps.
- ✓ Finalement, on peut combiner entre les propositions précédentes à savoir l'étude de la convection naturelle en régime turbulent d'un réservoir cryogénique à conditions aux limites variables en fonction de la géométrie et mobiles en fonction du temps.

# BIBLIOGRAPHIE :

- [1] L. A. BENDAOU, « *Détermination analytique et numérique des champs de températures dans un cryostat à azote liquide* », Mémoire de magistère en génie mécanique, école nationale polytechnique d'Alger, Algérie, (2005).
- [2] M. GUESTAL, « *Modélisation de la convection naturelle laminaire dans une enceinte avec une paroi chauffée partiellement* », Mémoire de magistère en mécanique, université de Constantine, Algérie, (2010).
- [3] A. DJEMAA, « *Transfert thermiques couplés avec transfert de masse dans les réservoirs de stockage des fluides cryogéniques* », Mémoire de magistère en mécanique, Université ce Constantine, (2009).
- [4] N. DJELLAS, « *Programme de simulation d'un bac de stockage aérien du GNL, modèle mathématique* », C.E.R.H.Y.D., Dar-El-Beida, (1991).
- [5] A, LEMEMBRE, J. P. PETIT. « *Laminar natural convection in a laterally heated and upper cooled vertical cylindrical enclosure* », Int. J. Heat Mass Transfer 41 (16) 2437-2454, (1995).
- [6] S. BATE and D. S. MORRISON, « *Modeling the behavior of stratified liquid natural gas in storage tanks: a study of the rollover phenomenon* », Int. J. Heat Mass Transfer, volume 40, issue 8, pages 1875-1884, (1997).
- [7] A. BENKHELIFA, M. A. HARHAD, M. BELHAMEL, « *Etude numérique de la convection naturelle dans une cuve cylindrique* », Rev. Energ. Ren: valorisation 37- 41, (1999).

- [8] R. C. OLIVESKI, A. KRENZINGER, and H. A. VIELMO, « *cooling of cylindrical tanks submitted to natural internal convection* », Int. J. Heat Mass Transfer 45, 1425-1444, (2003).
- [9] Q. S. CHEN, J. WEGRZYN, V. PRASAD, « *Analysis of temperature and pressure changes in liquefied natural gas (LNG) cryogenic tanks* », Cryogenics 44 701-709, (2004).
- [10] O. KHEMIS, R. BESSAIH, M. AIT ALI, M. X. FRANCOIS, « *Measurement of heat transfers in cryogenic tank with several configurations* », Applied Thermal Engineering Volume 24, (2004).
- [11] R. HARITI, A. BENBRIK, D. LEMONNIER, K. KHALDI, « *Etude du phénomène d'évaporation de GNL dans les bacs de stockages aérien* », Albi, France, (2007).
- [12] S. A. JAZAYERAI, E. M. H. KHOEI, « *Numerical comparison of thermal stratification due natural convection in densified L<sub>O2</sub> tanks* », American journal of applied sciences 5 (12): 1773-1779, (2008).
- [13] H. KIM, M. W. SHIN, E. S. YOON, « *Optimization of operating procedure of LNG storage facilities using rigorous BOR model* », Proceeding of the 17<sup>th</sup> world congress the international federation of automatic control Seoul. Korea. July 6-11, 10932-10926, (2008).
- [14] M. S. KHELIFI TOUHAMI, A. BENBRIK, D. LEMONNIER, D. BALY, « *Laminar natural convection flow in a cylindrical cavity application to the storage of LNG* », Journal of petroleum science and engineering, volume 71, issues 3-4, Pages 126-132, (2010).
- [15] J. REN, J. SHI, P. LIU, M. BIA, K. JIA. « *Simulation on thermal stratification and destratification in liquefied gas tanks* », International journal of hydrogen energy, (2013).
- [16] T. CHERGUI, « *Modélisation des Ecoulements dans les Cheminées Solaires* », Mémoire de magistère en génie mécanique, école nationale polytechnique d'Alger, Algérie, (2007).
- [17] S. V. PATANKAR, « *Numerical heat transfer and fluid flow* », Ed. Hemisphere Publishing Corporation, New York, (1980).
- [18] S. V. PATANKAR, « *Computational of Conduction and Duct Flow Heat Transfer* », Hemisphere Publishing Corporation, New York, (1988).

- [19] J. H. M. BEYERS, T. M. HARMS, D. G. KROGER, « *A finite volume analysis of turbulent convective heat transfer for accelerating radial flows* », Numerical Heat Transfer, Part A, 40: 117-138, (2001).
- [20] F. Z. AZIL, « *Etude des paramètres climatiques sous serres chauffées en présence de la plante* », Mémoire de magister, Institut de Génie Mécanique, Université de Batna, Algérie, (2007).
- [21] H. K. VERSTEEG, W. MALALASEKERA, « *An Introduction to Computational Fluid Dynamics* », The Finite Volume Method, Prentice Hall, England, (1995).
- [22] Manuel Ansys FLUENT 2.6.
- [23] M. TAKEUCHI, K. C. CHENG, « *Transient natural convection in horizontal cylinders with constant cooling rate* », Edmonton, Alberta, Canada, (1976).