

$\leq$

**UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM**  
**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE**  
**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**En vue d'obtenir le diplôme de Mémoire de**  
**MASTER**

**Option :** Analyse Fonctionnelle

*Intitulée*

Quelques résultats sur l'exposant de convergence itératif des  
solutions des équations différentielles linéaires

**Présenté par :** Mlle Hayat MAAMAR

Encadreur : Mme Mansouria SAIDANI U. MOSTAGANEM .

Président : Mme Karima AZIZ HAMANI U. MOSTAGANEM.

Examineur : Mme Louiza TABHARIT U. MOSTAGANEM.

**Année universitaire : 2016-2017**

---

## Dédicace

---

Merci Allah (mon Dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire "Ya Allah"

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite à ma mère...

À mon père, écho de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie m'encourager, à me donner l'aide et me protéger.

Que Dieu les garde et les protège.

À mes sœurs, pour mon frère, Mohammed. À toute ma famille Maamar. À mes amies. À tous mes professeurs. À tous ceux qui me sont chères. Et à mon encadreur Mansouria SAIDANI, je dédie ce travail.

---

# Remerciements

---

Tout d'abord, je remercie le Dieu, le tout-puissant qui m'a donné le courage et la patience durant toutes ces années d'études.

En second lieu, je tiens à remercier Mme SAIDANI qui a accepté de diriger ce travail, et m' a fourni tous les moyens nécessaires et sa présence lors de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie aussi Mme AZIZ HAMANI Karima qui m'a fait l'honneur de présider le jury et pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document.

Je remercie avec autant de ferveur Mme TABHARIT Louiza qui a bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Enfin, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous mes amis et ma famille qui m'ont donné leur soutien et leur encouragement .

Merci à tous.

# Table des matières

|                                                                                                                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                                                                                                  | <b>1</b>  |
| <b>1 Quelques Éléments de la Théorie de Nevanlinna</b>                                                                                                               | <b>3</b>  |
| 1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna . . . . .                                                                                                              | 3         |
| 1.2 Ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et entière . .                                                                                    | 10        |
| 1.3 La notion d'ordre $p$ -itératif d'une fonction . . . . .                                                                                                         | 11        |
| 1.4 L'exposant de convergence des zéros, l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes, l'exposant de convergence $p$ -itératif des zéros . . . . . | 12        |
| <b>2 Lemmes Auxiliaires</b>                                                                                                                                          | <b>15</b> |
| 2.1 Lemmes préliminaires . . . . .                                                                                                                                   | 15        |
| <b>3 L'exposant de convergence itératif des solutions des E.D.L aux coefficients méromorphes</b>                                                                     | <b>19</b> |
| 3.1 Introduction et résultats . . . . .                                                                                                                              | 19        |
| 3.2 Preuve du Théorème 3.1.6 . . . . .                                                                                                                               | 23        |
| 3.3 Preuve du Théorème 3.1.7 . . . . .                                                                                                                               | 25        |
| 3.4 Preuve du Corollaire 3.1.3 . . . . .                                                                                                                             | 25        |
| 3.5 Exemple . . . . .                                                                                                                                                | 26        |
| 3.5.1 Exemple . . . . .                                                                                                                                              | 26        |
| 3.5.2 Exemple . . . . .                                                                                                                                              | 27        |

|                   |           |
|-------------------|-----------|
| <b>Conclusion</b> | <b>29</b> |
|-------------------|-----------|

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| <b>Bibliographie</b> | <b>29</b> |
|----------------------|-----------|

---

## Résumé

---

Ce mémoire est consacré à l'étude de la relation entre les solutions et leurs dérivées de l'équation différentielle de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

où  $k \geq 2$ ,  $A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$  sont des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini. On obtient quelques résultats sur l'ordre de croissance de la solutions  $f$  et l'exposant de convergence  $p$ -itératif des ses dérivés de la fonction  $f$ . Enfin, on donnera quelques exemples illustratifs.

---

# Introduction

---

La théorie de Nevanlinna est un outil incontournable dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, notamment la croissance et l'oscillation des solutions. En effet depuis 1925, l'année où R. Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans la même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence en particulier avec la théorie analytique des équations différentielles.

Pour une introduction à la théorie des équations différentielles dans le plan complexe avec la théorie de Nevanlinna voir [3]

La recherche active dans ce domaine a été lancée par H. Wittich et ses étudiants dans les années 1950 et 1960 concernant la croissance des solutions des équations différentielles linéaires. Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans **le premier chapitre**, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxième chapitre, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques définitions concernant l'ordre de croissance des solutions  $f$  et l'exposant de convergence  $p$ -itératif.

**Le deuxième chapitre** contient des lemmes préliminaires et quelques preuves sur lesquels basent les démonstrations des résultats du troisième chapitre.

Dans **le troisième chapitre**, on s'intéresse à l'étude de la relation entre les solutions et leurs dérivés de l'équation différentielle de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

où  $k \geq 2$ ,  $A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$  sont des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini. On obtient quelques résultats sur l'ordre de croissance des solutions  $f$  et l'exposant de

convergence  $p$ -itératif des dérivés de la fonction  $f$ . La dernière partie de ce chapitre contient des exemples d'applications et une bibliographie.



# Quelques Eléments de la Théorie de Nevanlinna

---

On commence par donner quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Pour plus de détails voir W.K. Hayman ([10]) et I. Laine ([12]).

## 1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

**Théorème 1.1.1 (*Formule de Jensen*)** ([10], [12]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe telle que  $f(0) \neq 0, \infty$  et  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (respectivement  $b_1, b_2, \dots, b_m$ ) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

**Définition 1.1.1** ([10], [12]) *Pour tout réel  $x \geq 0$ , on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**Lemme 1.1.1** ([12]) *On a les propriétés suivantes :*

- (a)  $\log x \leq \log^+ x$  pour  $x \geq 0$ ,
- (b)  $\log^+ x \leq \log^+ y$  pour  $0 < x \leq y$ ,
- (c)  $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$ ,
- (d)  $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$ ,
- (e)  $\log^+ \left( \prod_{j=1}^n x_j \right) \leq \sum_{j=1}^n \log^+ x_j$ ,

$$(f) \cdot \log^+ \left( \sum_{j=1}^n x_j \right) \leq \log n + \sum_{j=1}^n \log^+ x_j.$$

**Preuve.**

□

Montrons (c), (d), (e) et (f).

(c) On a

$$\begin{aligned} \log x^+ - \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) - \max\left(\log \frac{1}{x}, 0\right) \\ &= \max(\log x, 0) + \min(\log x, 0) \\ &= \log x. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \log x^+ + \log^+ \frac{1}{x} &= \max(\log x, 0) + \max\left(\log \frac{1}{x}, 0\right) \\ &= \max(\log x, 0) - \min(\log x, 0) \\ &= |\log x|. \end{aligned}$$

(e) Si  $\prod_{j=1}^n x_j \leq 1$ , alors l'inégalité est évidente. Supposons que  $\prod_{j=1}^n x_j > 1$ . Alors

$$\begin{aligned} \log^+ \left( \prod_{j=1}^n x_j \right) &= \log \left( \prod_{j=1}^n x_j \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \log^+ x_j, \text{ d'après (a).} \end{aligned}$$

(f) On a d'après (b) et (e)

$$\begin{aligned} \log^+ \left( \sum_{j=1}^n x_j \right) &\leq \log^+ (n \max_{1 \leq j \leq n} x_j) \\ &\leq \log n + \log^+ \left( \max_{1 \leq j \leq n} x_j \right) \\ &\leq \log n + \sum_{j=1}^n \log^+ x_j. \end{aligned}$$

**Définition 1.1.2 (Fonction  $a$ -points)**([10], [12]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe  $a$ , on désigne par  $n(t, a, f)$  le nombre des racines de l'équation  $f(z) = a$  situées dans le disque  $|z| \leq t$ . Chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par  $\bar{n}(t, a, f)$  le nombre des racines distinctes de l'équation  $f(z) = a$  dans

le disque  $|z| \leq t$ , et on désigne par  $n(t, \infty, f)$  le nombre des pôles de la fonction  $f$  dans le disque  $|z| \leq t$ , chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par  $\bar{n}(t, \infty, f)$  le nombre des pôles distincts de  $f$  dans le disque  $|z| \leq t$ . Posons

$$\begin{aligned} N(r, a, f) &= \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \quad a \neq \infty, \\ N(r, \infty, f) &= N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r, \\ \bar{N}(r, a, f) &= \bar{N}(r, \frac{f}{f-a}) = \int_0^r \frac{[\bar{n}(t, a, f) - \bar{n}(0, a, f)]}{t} dt + \bar{n}(0, a, f) \log r \quad (a \neq \infty), \end{aligned}$$

et

$$\bar{N}(r, \infty, f) = \bar{N}(r, f) = \int_0^r \frac{[\bar{n}(t, \infty, f) - \bar{n}(0, \infty, f)]}{t} dt + \bar{n}(0, \infty, f) \log r.$$

$N(r, a, f)$  (respectivement  $\bar{N}(r, a, f)$ ) est appelée fonction  $a$ -points (respectivement  $a$ -points distincts) de la fonction  $f$  dans le disque  $|z| \leq r$ . Elle caractérise la densité des zéros de l'équation  $f(z) = a$  dans le disque  $|z| \leq r$ .

**Définition 1.1.3 (Fonction de proximité)** ([10], [12]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe  $a$ , on définit la fonction de proximité de  $f$  par

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(r \exp^{i\theta}) - a|} d\theta \quad (a \neq \infty)$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r \exp^{i\theta})| d\theta.$$

**Définition 1.1.4 (Fonction caractéristique)** ([10], [12]) On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction  $f$  par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

**Exemple 1.1.1** Pour la fonction  $f(z) = e^z$ , nous avons  $n(t, f) = 0$  car  $f$  n'admet pas de pôles, par conséquent  $N(r, f) = 0$ . De plus

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ (e^{r \cos \theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta d\theta \\ &= \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

D'où

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

**Proposition 1.1.1** (*Propriétés de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna*) ([12])

soient  $f, f_1, f_2, \dots, f_n$  des fonctions méromorphes et  $a, b, c, d$  des constantes complexes telles que  $ab - cd \neq 0$ . Alors

1.

$$T(r, \sum_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j) + \log n \text{ pour } r \geq 1,$$

2.

$$T(r, \prod_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j), \text{ pour } r \geq 1,$$

3.

$$T(r, f^n) = nT(r, f), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

4.

$$T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1), \quad f \neq \frac{-d}{c}.$$

**Preuve.**

□

1. On a.

$$T(r, \sum_{j=1}^n f_j) = m(r, \sum_{j=1}^n f_j) + N(r, \sum_{j=1}^n f_j),$$

$$\begin{aligned} m(r, \sum_{j=1}^n f_j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \sum_{j=1}^n f_j(re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \log^+ |f_j(r, (re^{i\theta}))| + \log n \, d\theta \\ &= \sum_{j=1}^n m(r, f_j) + \log n. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$N(r, \sum_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n N(r, f_j)$$

car si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $\lambda_j \geq 0$  pour la fonction  $f_j$ , alors  $z_0$  est un pôle d'ordre au plus  $\max \lambda_j \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j$ , par suite

$$\begin{aligned} T(r, \sum_{j=1}^n f_j) &= m(r, \sum_{j=1}^n f_j) + N(r, \sum_{j=1}^n f_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n m(r, f_j) + \log n + \sum_{j=1}^n N(r, f_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j) + \log n. \end{aligned}$$

2. On a

$$T(r, \prod_{j=1}^n f_j) = m(r, \prod_{j=1}^n f_j) + N(r, \prod_{j=1}^n f_j),$$

comme

$$\begin{aligned} m(r, \prod_{j=1}^n f_j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \prod_{j=1}^n f_j(re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &= \sum_{j=1}^n m(r, f_j), \end{aligned}$$

de plus, si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $\lambda_j \geq 0$  pour la fonction  $f_j$ , alors  $z_0$  est un pôle d'ordre au plus  $\sum_{j=1}^n \lambda_j$  pour la fonction  $\prod_{j=1}^n f_j$ , ce qui donne

$$N(r, \sum_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n N(r, f_j).$$

Donc

$$T(r, \prod_{j=1}^n f_j) \leq \sum_{j=1}^n T(r, f_j).$$

3. On a  $|f| \leq 1$  équivaut à  $|f|^n \leq 1$ .

(a) Si  $|f| \leq 1$ , alors

$$m(r, f^n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f^n(re^{i\theta})| d\theta = 0,$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f),$$

d'où

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= nN(r, f) \\ &= nT(r, f). \end{aligned}$$

(b) Si  $|f| > 1$ , alors

$$\begin{aligned} m(r, f^n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f^n(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &= nm(r, f), \end{aligned}$$

et

$$N(r, f^n) = nN(r, f),$$

d'où

$$T(r, f^n) = nT(r, f).$$

4. Posons  $g = \frac{af+b}{cf+d}$ , alors

$$\begin{aligned} gcf + gd &= af + b \\ \Leftrightarrow f &= \frac{b - gd}{gc - a}, \text{ avec } ad - cb \neq 0 \end{aligned}$$

il suffit donc de montrer que

$$T(r, g) = T(r, f) + O(1).$$

(a) Si  $c = 0$ , alors

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T(r, \frac{af+b}{d}) \\ &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \log 2 \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

(b) Si  $c \neq 0$ , alors

$$\begin{aligned}
T(r, g) &= T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) \\
&= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{cb-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\
&\leq T\left(r, \frac{a}{d}\right) + T\left(r, \frac{cb-ad}{c^2}\right) + T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + \log 2 \\
&\leq \log^+ \left|\frac{a}{d}\right| + \log^+ \left|\frac{cb-ad}{c^2}\right| + T(r, f) + \log^+ \left|\frac{d}{c}\right| + \log 2 + O(1) \\
&= T(r, f) + O(1).
\end{aligned}$$

**Exemple 1.1.2** Soit  $f(z) = \cos^2 z$ . Alors

$$\begin{aligned}
T(r, f) &= T(r, \cos^2 z) \\
&= 2T(r, \cos z), \text{ d'après la troisième propriété du théorème précédent} \\
&= 2 \left[ T\left(r, \frac{e^{2iz} + 1}{2e^{iz}}\right) \right] \\
&= 2 \left[ 2T(r, e^{iz}) + O(1) \right], \text{ d'après la quatrième propriété du théorème précédent} \\
&= 2 \left[ 2\frac{r}{\pi} + O(1) \right] \\
&= \frac{4r}{\pi} + O(1).
\end{aligned}$$

**Théorème 1.1.2 (Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna dans le plan complexe)** ([10], [12]) Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe  $a \neq \infty$ , on a

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + \varepsilon(r, a),$$

où  $\varepsilon(r, a) = O(1)$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

## 1.2 Ordre de croissance et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe et entière

**Définition 1.2.1** ([10], [12]) Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante. Alors l'ordre de la croissance de  $f$  est défini par

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

On dit que la fonction  $f$  est d'ordre infini si

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty.$$

**Définition 1.2.2** ([10], [12]) Soit  $f$  une fonction entière non constante; alors l'ordre de la croissance de  $f$  est défini par

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r},$$

où  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

Dans le cas où l'ordre d'une fonction méromorphe est infini, on introduit une autre notion qui donne plus de précision sur la croissance qui est appelée l'hyper ordre et est définie comme suivant

$$\rho_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r},$$

et pour une fonction entière, on a

$$\rho_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r}.$$

**Exemple 1.2.1** Pour la fonction  $f(z) = e^z$ ,

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{r}{\pi}}{\log r} = 1$$

$$\text{et } \rho_2(f) = 0.$$

**Exemple 1.2.2** Pour la fonction  $f(z) = e^{e^z}$ , on a

$$T(r, f) = T(r; e^{e^z}) \asymp \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, r \rightarrow +\infty$$

d'où  $\rho(f) = +\infty$  et  $\rho_2(f) = 1$ .

**Remarque 1.2.1** Si  $f$  est d'ordre fini, alors l'hyper ordre de cette fonction est nulle.



## 1.3 La notion d'ordre $p$ -itératif d'une fonction

Si l'hyper-ordre d'une fonction entière ou méromorphe est infini, on définit ordre  $p$ -itératif de cette fonction.

Pour la définition de l'ordre  $p$ -itératif d'une fonction méromorphe, on a besoin de définir les expressions suivantes : pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , on pose  $\exp_1 r := e^r$  et  $\exp_{p+1} r := \exp(\exp_p r)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . De la même façon on définit  $\log_1 r := \log r$  et  $\log_{p+1} r := \log(\log_p r)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et ceci pour  $r$  suffisamment grand.

**Définition 1.3.1** ([11], [12]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'ordre  $p$ -itératif de croissance de la fonction  $f$  par*

$$\rho_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log r} \quad (p \geq 1, p \text{ entier}),$$

où  $T(r, f)$  est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si  $f$  est entière, alors l'ordre  $p$ -itératif de la fonction  $f$  est défini par

$$\rho_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log r} \quad (p \geq 1, p \text{ entier}),$$

où  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

**Exemple 1.3.1** *Pour la fonction  $f(z) = \exp_q(z)$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$\rho_p(f) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p < q, \\ 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p > q. \end{cases}$$

**Définition 1.3.2** ([11]) *L'indice de croissance d'ordre  $p$ -itératif d'une fonction méromorphe  $f$  est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f \text{ est rationnelle} \\ \min_{j \in \mathbb{N}} \{\rho_j(f) < +\infty\}, & \text{si } f \text{ est transcendante} \\ +\infty, & \text{si } \rho_j(f) = +\infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

## 1.4 L'exposant de convergence des zéros, l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes, l'exposant de convergence *p-itératif* des zéros

**Définition 1.4.1** ([11], [12]) *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe  $f$  sont définis respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \quad \lambda_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que  $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$  désigne le nombre des zéros de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq r$ .

**Remarque 1.4.1** *L'exposant de convergence des zéros de la fonction  $\frac{1}{f}$  est aussi dit exposant de convergence des pôles de la fonction  $f$ .*

**Définition 1.4.2** ([11], [12]) *On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts d'une fonction méromorphe  $f$  respectivement par*

$$\bar{\lambda}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que  $\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$  désigne le nombre des zéros distincts de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq r$ .

**Définition 1.4.3** ([5], [14]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction  $f$  respectivement par*

$$\tau(f) = \lambda(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\tau_2(f) = \lambda_2(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

**Définition 1.4.4** ([5], [14]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes distincts de la fonction  $f$  respectivement par

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\lambda}(f - z) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\bar{\tau}_2(f) = \bar{\lambda}_2(f - z) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

**Exemple 1.4.1** L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f(z) = e^{e^z} + 2$  sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.

**Exemple 1.4.2** L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f(z) = e^{e^z} + e^z$  sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.

**Exemple 1.4.3** L'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction  $f(z) = \cos(e^z)$  sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.

**Définition 1.4.5** ([11]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence  $p$ -itératif des zéros de la fonction  $f$  par

$$\lambda_p(f) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

On définit l'exposant de convergence  $p$ -itératif des zéros distincts de la fonction  $f$  par

$$\bar{\lambda}_p(f) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

**Définition 1.4.6** ([11]) On définit l'exposant de convergence  $p$ -itératif des points fixes d'une fonction méromorphe  $f$  par

$$\lambda_p(f - z) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

et l'exposant de convergence  $p$ -itératif des points fixes distincts de  $f$  par

$$\bar{\lambda}_p(f - z) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

**Définition 1.4.7** ([11]) *Le degré de finitude de l'exposant itératif de convergence *p*-itératif des zéros d'une fonction méromorphe *f* est défini par*

$$i_{\lambda}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n(r, \frac{1}{f}) = O(\log r), \\ \min \{ n \in \mathbb{N} : \lambda_n(f) < \infty \} & \text{si } \lambda_n(f) < \infty \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \\ +\infty & \text{si } \lambda_n(f) = \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

*De même, nous pouvons définir l'indice de croissance  $i_{\bar{\lambda}}(f)$  de  $\lambda_n(f)$ .*

# Lemmes Auxiliaires

---

Pour prouver les principaux résultats dans le chapitre 3, nous avons besoin des lemmes suivants.

## 2.1 Lemmes préliminaires

**Lemme 2.1.1** ([4]) *Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F (\neq 0)$  des fonctions méromorphes et  $f$  une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F, \quad (2.1.1)$$

*tel que  $i(f) = \rho + 1, (0 < \rho < 1)$ . Si*

$$\max \{i(F), i(A_j), j = 0, 1, \dots, k-1\} < \rho + 1$$

*ou*

$$\max \{\rho_{p+1}(F), \rho_{p+1}(A_j), j = 0, 1, \dots, k-1\} < \rho_{p+1}(f),$$

*alors, on a*

$$i_{\bar{\lambda}}(f) = i_{\lambda}(f) = i(f) = \rho + 1 \text{ et } \bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f).$$

**Lemme 2.1.2** ([12]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe avec  $i(f) = p$ , alors  $\rho_p(f') = \rho_p(f)$ .*

**Lemme 2.1.3** ([11]) *Soient  $k \geq 2$  et  $(A_j), (j = 0, 1, \dots, k-1)$  des fonctions entières d'ordre  $p$ -itératif fini tel que  $i(A_0) = p, (0 < p < +\infty)$ . Supposons que*

$$\max \{i(A_j), (j = 1, \dots, k-1)\} < i(A_0)$$

ou

$$\max \{ \rho_p(A_j), (j = 1, \dots, k-1) \} < \rho_p(A_0) < +\infty.$$

Alors toute solution  $f \not\equiv 0$  de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \quad (2.1.2)$$

satisfait  $i(f) = p+1$  et  $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0)$ .

Soient  $A_j$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) des fonction. Nous définissons la suite suivante des fonctions :

$$\begin{cases} A_j^0 = A_j, & j = 0, 1, \dots, k-1 \\ A_{k-1}^i = A_{k-1}^{i-1} - \frac{(A_0^{i-1})'}{A_0^{i-1}}, & i \in \mathbb{N} \\ A_j^i = A_j^{i-1} + A_{j+1}^{i-1} \frac{(\Psi_{j+1}^{i-1})'}{\Psi_{j+1}^{i-1}}, & j = 0, 1, \dots, k-2, i \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

où  $\Psi_{j+1}^{i-1} = \frac{A_{j+1}^{i-1}}{A_0^{i-1}}$ .

**Remarque 2.1.1** Dans le cas où l'une des fonctions  $A_j^i$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) est égal à zéro alors  $A_j^{i+1} = A_{j-1}^i$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ).

**Lemme 2.1.4** ([?]) Supposons que  $f$  est une solution de (2.1.2). Alors  $g_i = f^{(i)}$  est une solution de l'équation

$$g_i^{(k)} + A_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + \dots + A_0^i g_i = 0, \quad (2.1.4)$$

où  $A_j^i$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) sont donnés par (2.1.3).

**Preuve** Supposons que  $f$  est une solution de l'équation (2.1.2) et soit  $g_i = f^{(i)}$ . On prouve que  $g_i$  est une solution entière de l'équation (2.1.4). Notre preuve est faite par induction.

Pour  $i = 1$ , dérivons les deux côtés de l'équation (2.1.2), on obtient

$$f^{(k+1)} + A_{k-1} f^{(k)} + (A_{k-1}' + A_{k-2}) f^{(k-1)} + \dots + (A_1' + A_0) f' + A_0' f = 0, \quad (2.1.5)$$

et en remplaçant  $f$  par

$$f = -\frac{(f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_1 f')}{A_0},$$

on obtient

$$f^{(k+1)} + \left( A_{k-1} - \frac{A_0'}{A_0} \right) f^{(k)} + (A_{k-1}' + A_{k-2} - A_{k-1} \frac{A_0'}{A_0}) f^{(k-1)} + \dots + (A_1' + A_0 - A_1 \frac{A_0'}{A_0}) f' = 0.$$

Ce qui donne

$$g_1^{(k)} + A_{k-1}^1 g_1^{(k-1)} + A_{k-2}^1 g_1^{(k-2)} + \dots + A_0^1 g_1 = 0$$

Supposons que l'assertion soit vraie pour les valeurs qui sont strictement inférieures à un certain  $i$ . On suppose que  $g_{i-1}$  est une solution de l'équation

$$g_{i-1}^{(k)} + A_{k-1}^{i-1} g_{i-1}^{(k-1)} + A_{k-2}^{i-1} g_{i-1}^{(k-2)} + \dots + A_0^{i-1} g_{i-1} = 0 \quad (2.1.6)$$

Dérivation de deux termes de (2.1.6), on peut écrire

$$g_{i-1}^{(k+1)} + A_{k-1}^{i-1} g_{i-1}^{(k)} + \left( (A_{k-1}^{i-1})' + A_{k-2} \right) g_{i-1}^{(k-1)} + \dots + \left( (A_1^{i-1})' + A_0^{i-1} \right) g_{i-1}' + A_0' g_{i-1} = 0. \quad (2.1.7)$$

Dans (2.1.7), en remplaçant  $g_{i-1}$  par

$$g_{i-1} = - \frac{\left( g_{i-1}^{(k)} + A_{k-1}^{i-1} g_{i-1}^{(k-1)} + A_{k-2}^{i-1} g_{i-1}^{(k-2)} + \dots + A_0^{i-1} g_{i-1}' \right)}{A_0^{i-1}},$$

on obtient

$$g_{i-1}^{(k+1)} + \left( A_{k-1}^{i-1} - \frac{(A_0^{i-1})'}{A_0^{i-1}} \right) g_{i-1}^{(k)} + \left( (A_{k-1}^{i-1})' + A_{k-2} - A_{k-1}^{i-1} \frac{(A_0^{i-1})'}{A_0^{i-1}} \right) g_{i-1}^{(k-1)} + \dots + \left( (A_1^{i-1})' + A_0^{i-1} - A_1^{i-1} \frac{(A_0^{i-1})'}{A_0^{i-1}} \right) g_{i-1}' = 0. \quad (2.1.8)$$

Ce qui donne

$$g_i^{(k)} + A_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + A_{k-2}^i g_i^{(k-2)} + \dots + A_0^i g_i = 0.$$

Le lemme 2.1.4 est donc prouvé.

**Lemme 2.1.5** ([8]) Soient  $A_j$ , ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) des fonctions méromorphes d'ordre fini telle que toute solution de l'équation (2.1.2) est d'ordre  $p$ -itératif infini et  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ . Soient  $A_j^i$ , ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) définies comme dans (2.1.3). Alors, toute solution meromorphe non triviale de l'équation

$$g^{(k)} + A_{k-1}^i g^{(k-1)} + A_{k-2}^i g^{(k-2)} + \dots + A_0^i g = 0, \quad k \geq 2 \quad (2.1.9)$$

satisfait  $\rho_p(g) = +\infty$  et  $\rho_{p+1}(g) = \rho$ .

**Preuve** Soit  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  un système fondamental de solutions de (2.1.2). On montre que  $\{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_k^{(i)}\}$  est un système fondamental de solutions de (2.1.9). D'après Lemme 2.1.4, il s'ensuit que  $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_k^{(i)}$  sont des solutions de (2.1.9). Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  des constantes telles que :

$$\alpha_1 f_1^{(i)} + \alpha_2 f_2^{(i)} + \dots + \alpha_k f_k^{(i)} = 0. \quad (2.1.10)$$

Alors

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k = P(z),$$

où  $P(z)$  est un polynôme de degré inférieur à  $i$ . Puisque  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k$  est une solution de (2.1.2), alors  $P$  est une solution de (2.1.2) et d'après les conditions du Lemme 2.1.7, on conclut que  $P$  est une solution infini de (2.1.2), cela conduit à une contradiction. Par conséquent,  $P$  est une solution triviale. On déduit que  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k = 0$ . En utilisant le fait que  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  est une solution fondamentale de (2.1.2), on obtient  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ . Maintenant, soit  $g$  une solution non triviale de (2.1.9). Alors, en utilisant le fait que  $\{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_k^{(i)}\}$  est une solution fondamentale de (2.1.2), on conclut qu'il existe des constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  pas tous nuls, tels que  $g = \alpha_1 f_1^{(i)} + \alpha_2 f_2^{(i)} + \dots + \alpha_k f_k^{(i)}$ . Soit  $h = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k$ ,  $h$  est une solution de (2.1.2) et  $h^{(i)} = g$ . Donc, d'après le Lemme 2.1.2, on a  $\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(g)$ , et par les conditions du lemme 2.1.5, on a  $\rho_p(h) = \rho_p(g) = +\infty$  et  $\rho_{p+1}(h) = \rho_{p+1}(g) = \rho$ .

**Lemme 2.1.6** ([4]) Soient  $p \geq 1$  un nombre entier et  $f(z)$  une solution méromorphe de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F, \quad (2.1.11)$$

où  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  et  $F (\neq 0)$  sont des fonctions méromorphes :

i) si  $\max \{\rho_p(F), \rho_p(A_j), (j = 0, 1, \dots, k-1)\} < \rho_p(f) = \rho \leq \infty$  alors  $\bar{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f)$ ,

ii) si  $\max \{\rho_{p+1}(F), \rho_{p+1}(A_j), (j = 0, 1, \dots, k-1)\} < \rho_{p+1}(f) = \rho < \infty$ , alors  $\bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f)$ .



# L'exposant de convergence itératif des solutions des E.D.L aux coefficients méromorphes

---

## 3.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on va prouver des nouveaux résultats sur l'ordre et l'exposant de convergence itératif des dérivées des solutions des équations différentielles linéaires de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

où  $k \geq 0$ ,  $A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$  sont des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini, en donnant une relation entre ces solutions et leurs dérivées.

Avant d'entamer notre étude, on cite, d'abord, quelques résultat dans ce domaine.

Dans [17], Wang et Lü ont étudié les points fixes et hyper-ordre des solutions d'équations différentielles linéaires de second ordre aux coefficients méromorphes et leurs dérivés. Ils ont obtenu le résultat suivant.

**Théorème 3.1.1** ([17]) *Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante satisfaisant  $\delta(\infty, A) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r, A)}{T(r, A)} = \delta > 0$ ,  $\rho(A) = \rho < +\infty$ . Alors toute solution meromorphe  $f(z) \not\equiv 0$  de l'équation*

$$f'' + A(z)f = 0 \tag{3.1.1}$$

satisfait que  $f, f'$  et  $f''$  ont un nombre infini de points fixes et

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = \rho(f) = +\infty, \quad (3.1.2)$$

et

$$\bar{\tau}_2(f) = \bar{\tau}_2(f') = \bar{\tau}_2(f'') = \rho_2(f) = \rho. \quad (3.1.3)$$

Le théorème 3.1.1 a été généralisé aux équations différentielles d'ordre supérieur par Liu et Zhang comme suit (voir [15]).

**Théorème 3.1.2** ([15]) *Soient  $k \geq 2$ , et  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante satisfait  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ ,  $\rho(A) = \rho < +\infty$ . Alors toute solution meromorphe  $f(z) \not\equiv 0$  de l'équation*

$$f^{(k)} + A(z)f = 0 \quad (3.1.4)$$

satisfait que tous les fonctions  $f$  et  $f', f'', \dots, f^{(k)}$  ont infiniment nombreux points fixes et

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = \dots = \bar{\tau}(f^{(k)}) = \rho(f) = +\infty, \quad (3.1.5)$$

et

$$\bar{\tau}_2(f) = \bar{\tau}_2(f') = \bar{\tau}_2(f'') = \dots = \bar{\tau}_2(f^{(k)}) = \rho_2(f) = \rho. \quad (3.1.6)$$

Les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 ont été généralisés par B. Belaïdi pour l'ordre  $p$ -itératif (voir [1]).

**Théorème 3.1.3** ([1]) *Soient  $k \geq 2$  et  $A(z)$  la fonction méromorphe transcendante d'ordre itératif fini  $\rho_p(f) = \rho > 0$  tel que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ . Supposons, en outre, que l'un des résultats suivants est vérifié*

- i) tous les pôles de  $f$  sont de multiplicité uniformément bornée ou que
- ii)  $\delta(\infty, f) > 0$ .

Si  $\varphi \not\equiv 0$  est une fonction meromorphe d'ordre  $p$ -itératif fini  $\rho_p(\varphi) < +\infty$ , alors toute solution meromorphe  $f(z) \not\equiv 0$  satisfait

$$\bar{\lambda}_p(f - \varphi) = \bar{\lambda}_p(f' - \varphi) = \dots = \bar{\lambda}_p(f^{(k)} - \varphi) = \rho_p(f) = +\infty, \quad (3.1.7)$$

et

$$\bar{\lambda}_{p+1}(f - \varphi) = \bar{\lambda}_{p+1}(f' - \varphi) = \dots = \bar{\lambda}_{p+1}(f^{(k)} - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho. \quad (3.1.8)$$

Pour  $k \geq 2$ , nous considérons l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0. \quad (3.1.9)$$

Récemment Bouabdelli et Belaïdi ([3]) ont étudié la relation entre les fonctions et dérivée de solutions de l'équation (3.1.9) et ils obtiennent quelques théorèmes qui étendent les résultats précédents donnés par Xu, Tu et Zheng (voir ([16])).

**Théorème 3.1.4** ([3]) *Soit  $k \geq 2$  et soient  $(A_j)_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$  des fonctions entières d'ordre  $p$ -itératif fini avec  $i(A_0) = p$  ( $0 < p < +\infty$ ) satisfaisant l'une des conditions suivantes*

$$(i) \max \{ \rho_p(A_j), (j = 1, \dots, k-1) \} < \rho_p(A_0),$$

$$(ii) \max \{ \rho_p(A_j), (j = 1, \dots, k-1) \} \leq \rho_p(A_0) = \rho$$

$$\text{et } \max \{ \tau_p(A_j), \rho_p(A_j) = \rho_p(A_0) (j = 1, \dots, k-1) \} < \tau_p(A_0) = \tau (0 < \tau < +\infty).$$

Alors, pour toute solution  $f(z) \not\equiv 0$  de l'équation (2.1.9) et pour toute fonction entière  $\varphi \not\equiv 0$  satisfaisant  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$ , on a

$$\bar{\lambda}_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0), i \in \mathbb{N}. \quad (3.1.10)$$

**Théorème 3.1.5** ([3]) *Soit  $k \geq 2$  et soient  $(A_j)_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$  des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini avec  $i(A_0) = p$  ( $0 < p < +\infty$ ) satisfaisant :*

$$\max \{ \rho_p(A_j), (j = 1, \dots, k-1) \} < \rho_p(A_0) = \rho < +\infty$$

$$\text{et } \delta(\infty, A_0) > 0. \quad (3.1.11)$$

Alors, pour toute solution méromorphe  $f(z) \not\equiv 0$  de (3.1.9) dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée et pour toute fonction méromorphe  $\varphi \not\equiv 0$  satisfaisant  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho$ , on a

a

$$\bar{\lambda}_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho, i \in \mathbb{N}. \quad (3.1.12)$$

Dans tous les théorèmes précédents, nous notons que les conditions sur les coefficients donnent que toute solution de l'équation (3.1.9) est d'ordre  $p$ -itératif infini et de même  $(p+1)$ -ordre. D'autre part, il y a plusieurs livres où les auteurs montrent que sous certaines conditions toutes les solutions de l'équation (3.1.9) sont d'ordre  $p$ -itératif infini et de même ordre  $(p+1)$ -itératif (voir [2], [8], [9]).

La question qui se pose est : si une solution de l'équation est d'ordre  $p$ -itératif infini et de même  $(p+1)$ -ordre, est ce que nous avons les mêmes résultats ?.

Dans ce chapitre, nous donnons une réponse de la question ci-dessus et nous prouvons les théorèmes suivant.

**Théorème 3.1.6** [9] *Soient  $k \geq 2$  et  $(A_j)_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$  des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini. Supposons que toute solution de l'équation (3.1.9) d'ordre  $p$ -itératif infini et  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ . Si  $\varphi \not\equiv 0$  est une fonction méromorphe avec  $i(\varphi) < p+1$  ou  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho$ . Alors toute solution méromorphe  $f \not\equiv 0$  de (3.1.9) satisfait :*

$$i_{\bar{\lambda}}(f^{(i)} - \varphi) = i_{\lambda}(f^{(i)} - \varphi) = i(f) = p+1, i \in \mathbb{N}, \quad (3.1.13)$$

et

$$\bar{\lambda}_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho, i \in \mathbb{N}. \quad (3.1.14)$$

**Théorème 3.1.7** [9] *Soient  $k \geq 2$  et  $(A_j)_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$  des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini. Supposons que toute solution de l'équation (3.1.9) d'ordre  $p$ -itératif infini. Si  $\varphi \not\equiv 0$  est une fonction méromorphe avec  $\rho_p(\varphi) < +\infty$ , alors toute solution méromorphe  $f \not\equiv 0$  de (3.1.9) satisfait*

$$\bar{\lambda}_p(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_p(f^{(i)} - \varphi) = \rho_p(f) = \infty, i \in \mathbb{N}. \quad (3.1.15)$$

**Remarque 3.1.1** *Les preuves des théorèmes 3.1.6, 3.1.7 sont différentes de celles de théorèmes 3.1.4, 3.1.5, nous donnons une simple preuve de théorèmes. L'ingrédient principal de la preuve est le lemme 2.1.5.*

**Corollaire 3.1.1** *Sous les hypothèses du théorème 3.1.6, si  $\varphi(z) = z$ , alors, pour toute solution méromorphe  $f$  de (3.1.9), nous avons*

$$i_{\bar{\tau}}(f^{(i)}) = i_{\tau}(f^{(i)}) = i(f) = p+1, i \in \mathbb{N}$$

et

$$\bar{\tau}_{p+1}(f^{(i)}) = \tau_{p+1}(f^{(i)}) = \rho_{p+1}(A_0) = \rho_p(A_0) = \rho, i \in \mathbb{N}.$$

**Corollaire 3.1.2** *Supposons que  $k \geq 2$  et  $A(z)$  est une fonction méromorphe transcendante telle que  $0 < \rho_p(A) = \rho < +\infty$ . Si  $\varphi \not\equiv 0$  est une fonction meromorphe avec  $i(\varphi) < p+1$  ou  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho$ , alors toute solution  $f(z) \not\equiv 0$  de (3.1.4) satisfait (3.1.13) et (3.1.14).*

**Corollaire 3.1.3** *Soient  $k \geq 2$  et  $(A_j)_{j=0,1,2,\dots,k-1}$  des fonctions entières d'ordre  $p$ -itératif fini tel que  $i(A_0) = p$ ,  $0 < p < \infty$ . Supposons que  $\max\{i(A_j), (j=1, \dots, k-1)\} < i(A_0)$  ou  $\max\{\rho_p(A_j), (j=1, \dots, k-1)\} < \rho_p(A_0) < +\infty$ .*

Si  $\varphi \not\equiv 0$  est une fonction entière avec  $i(\varphi) < p+1$  ou  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho_p(A_0)$ , alors toute solution  $f(z) \not\equiv 0$  de (3.1.9) satisfait (3.1.13) et (3.1.14).

Pour  $p = 1$  dans le théorème 3.1.6, on obtient le corollaire suivant (voir [9]).

**Corollaire 3.1.4** [9] *Soit  $k \geq 2$  et  $(A_j), (j=0, 1, \dots, k-1)$  des fonctions meromorphes d'ordre fini telle que toute solution de l'équation (3.1.9) satisfasse  $\rho(f) = +\infty$  et  $\rho_2(f) = \rho$ . Alors si  $\varphi \not\equiv 0$  est une fonction meromorphe avec  $\rho_2(\varphi) < \rho$ , alors tout solution  $f(z) \not\equiv 0$  de (3.1.9) satisfait*

$$\bar{\lambda}(f^{(i)} - \varphi) = \lambda(f^{(i)} - \varphi) = \rho(f) = +\infty, i \in \mathbb{N},$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_2(f^{(i)} - \varphi) = \rho_2(f) = \rho, i \in \mathbb{N}.$$

**Remarque 3.1.2** *Le théorème 2.1.6 est l'amélioration des théorèmes **A**, **B**, **C** et le théorème 3.1.7 est l'amélioration du théorème **D**.*

## 3.2 Preuve du Théorème 3.1.6

Supposons que  $f$  est une solution de l'équation (3.1.9). D'après les conditions du théorème 3.1.6, on peut écrire  $i(f) = p+1$ ,  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ . Posons  $g_i = f^{(i)}$ , alors, en utilisant le lemme 2.1.2, on obtient

$$i(g_i) = i(f^{(i)}) \text{ et } \rho_{p+1}(g_i) = \rho_{p+1}(f^{(i)}) \quad (3.2.1)$$

ce qui implique

$$i(g_i) = p + 1, \rho_{p+1}(g_i) = \rho. \quad (3.2.2)$$

Maintenant, soit  $w(z) = g_i(z) - \varphi(z)$ , où  $\varphi$  est une fonction méromorphe avec  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho$ .

Alors

$$\begin{aligned} i(w) &= i(g_i) = p + 1, \\ \text{et } \rho_{p+1}(w) &= \rho_{p+1}(g_i) = \rho_{p+1}(f) = \rho. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Pour démontrer les deux formules (3.1.13) et (3.1.14), il suffit de démontrer que

$$i_{\bar{\lambda}}(g_i - \varphi) = i_{\lambda}(g_i - \varphi) = p + 1 \quad (3.2.4)$$

et

$$\bar{\lambda}_{p+1}(g_i - \varphi) = \lambda_{p+1}(g_i - \varphi) = \rho. \quad (3.2.5)$$

Les formules (3.2.4) et (3.2.5) deviennent

$$i_{\bar{\lambda}}(w) = i_{\lambda}(w) = p + 1 \text{ et } \bar{\lambda}_{p+1}(w) = \lambda_{p+1}(w) = \rho. \quad (3.2.6)$$

En utilisant le fait que  $g_i = w + \varphi$ , et le Lemme 2.1.4, on obtient

$$(w^{(k)} + A_{k-1}^i w^{(k-1)} + \dots A_0^i w) + (\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \dots A_0^i \varphi) = 0. \quad (3.2.7)$$

L'équation (3.2.7) peut s'écrire comme suit

$$w^{(k)} + A_{k-1}^i w^{(k-1)} + \dots A_0^i w = -(\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \dots A_0^i \varphi) = F. \quad (3.2.8)$$

En utilisant les conditions  $\rho_p(A_j^i) < \infty$ ,  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho$  et Lemme 2.5.5, on obtient  $F \not\equiv 0$  et  $\rho_{p+1}(F) < \infty$ . Par Lemme 2.1.1, on peut déduire que

$$\begin{aligned} i_{\bar{\lambda}}(w) &= i_{\lambda}(w) = p + 1, \\ \text{et } \bar{\lambda}_{p+1}(w) &= \lambda_{p+1}(w) = \rho_{p+1}(w) = \rho. \end{aligned}$$

La démonstration du théorème 3.1.6 est achevée.

### 3.3 Preuve du Théorème 3.1.7

Supposons que  $f$  est une solution de l'équation (3.1.9). D'après les conditions du théorème 3.1.7, on peut écrire  $\rho_p(f) = \infty$ . Posons  $g_i = f^{(i)}$ , alors, en utilisant le lemme 2.1.2, on obtient

$$\rho_p(g_i) = \rho_p(f^{(i)}) = \rho_p(f^{(i-1)}) = \dots = \rho_p(f), \quad (3.3.1)$$

donc  $\rho_p(g_i) = \infty$ . Maintenant, soit  $w(z) = g_i(z) - \varphi(z)$ , où  $\varphi$  est une fonction méromorphe avec  $\rho_p(\varphi) < \infty$ . Alors

$$\rho_p(w) = \rho_p(g_i) = \rho_p(f) = \infty. \quad (3.3.2)$$

Pour démontrer la formule (3.1.15), il suffit de démontrer que

$$\bar{\lambda}_p(w) = \lambda_p(w) = \infty \quad (3.3.3)$$

En utilisant le fait que  $g_i = w + \varphi$ , et le Lemme 2.1.4, on obtient

$$(w^{(k)} + A_{k-1}^i w^{(k-1)} + \dots A_0^i w) + (\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \dots A_0^i \varphi) = 0. \quad (3.3.4)$$

L'équation (3.3.4) peut s'écrire comme suit

$$w^{(k)} + A_{k-1}^i w^{(k-1)} + \dots A_0^i w = -(\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \dots A_0^i \varphi) = F. \quad (3.3.5)$$

En utilisant les conditions  $\rho_p(A_j^i) < \infty$ ,  $\rho_p(\varphi) < \rho$  et Lemme 2.1.6, on obtient

$$\bar{\lambda}_p(w) = \lambda_p(w) = \rho_p(w) = \infty. \quad (3.3.6)$$

La démonstration du théorème 3.1.7 est achevée.

### 3.4 Preuve du Corollaire 3.1.3

Supposons que  $f$  est une solution de l'équation (3.1.9). D'après les conditions du Corollaire 3.1.3, et le lemme 2.1.3, on a

$$i(f) = p + 1 \text{ et } \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A_0). \quad (3.4.1)$$

Posons  $g_i = f^{(i)}$ , alors, en utilisant le lemme 2.1.2, on obtient

$$i(g_i) = i(f^{(i)}) \text{ et } \rho_{p+1}(g_i) = \rho_{p+1}(f^{(i)}) \quad (3.4.2)$$

ce qui implique

$$i(g_i) = p + 1, \rho_{p+1}(g_i) = \rho(A_0). \quad (3.4.3)$$

Maintenant, soit  $w(z) = g_i(z) - \varphi(z)$ , où  $\varphi$  est une fonction méromorphe avec  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho(A_0)$ . Alors

$$\begin{aligned} i(w) &= i(g_i) = p + 1, \\ \text{et } \rho_{p+1}(w) &= \rho_{p+1}(g_i) = \rho_{p+1}(f) = \rho(A_0). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Il suffit de démontrer que

$$i_{\bar{\lambda}}(w) = i_{\lambda}(w) = p + 1 \text{ et } \bar{\lambda}_{p+1}(w) = \lambda_{p+1}(w) = \rho(A_0). \quad (3.4.5)$$

En utilisant le fait que  $g_i = w + \varphi$ , et le Lemme 2.1.4, on obtient

$$(w^{(k)} + A_{k-1}^i w^{(k-1)} + \dots A_0^i w) + (\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \dots A_0^i \varphi) = 0. \quad (3.4.6)$$

L'équation 3.4.6 peut s'écrire comme suit

$$w^{(k)} + A_{k-1}^i w^{(k-1)} + \dots A_0^i w = -(\varphi^{(k)} + A_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + \dots A_0^i \varphi) = F. \quad (3.4.7)$$

En utilisant les conditions  $\rho_p(A_j^i) < \infty$ ,  $\rho_{p+1}(\varphi) < \rho$  et Lemme 2.1.5, on obtient  $F \not\equiv 0$  et  $\rho_{p+1}(F) < \infty$ . Par Lemme 2.1.1, on peut déduire que

$$\begin{aligned} i_{\bar{\lambda}}(w) &= i_{\lambda}(w) = p + 1, \\ \text{et } \bar{\lambda}_{p+1}(w) &= \lambda_{p+1}(w) = \rho_{p+1}(w) = \rho(A_0). \end{aligned}$$

Ainsi la démonstration du Corollaire 3.1.3 est complète.

## 3.5 Exemple

### 3.5.1 Exemple

Considérons l'équation différentielle suivante

$$f^{(4)} + \frac{2}{z} f^{(3)} - \left( e^{2z} + e^z + \frac{4}{z^2} \right) f^{(2)} - \left( 4e^{2z} + 2e^z - \frac{4}{z^3} \right) f' - (e^z + 4e^{2z}) f = 0.$$

or les coefficients de cette équation sont d'ordre fini. Cette équation admet une solution

$$f(z) = \frac{e^{e^z}}{z} \text{ où}$$



$$\rho_1(f) = +\infty, \rho_2(f) = 1.$$

Soit  $\varphi(z) = e^z$ . On a  $\rho_1(\varphi) = 1, \rho_2(\varphi) = 0$ . Il est clair que

$$\rho_2(\varphi) < \rho_2(f).$$

Donc les conditions du théorème 2.1.6, et les conditions du théorème 2.1.7 sont vérifiées et

$$i_{\bar{\lambda}}(f^{(i)} - \varphi) = i_{\lambda}(f^{(i)} - \varphi) = i(f) = p + 1, i \in \mathbb{N}, \quad (3.5.1.1)$$

et

$$\bar{\lambda}_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho, i \in \mathbb{N}. \quad (3.5.1.2)$$

et

$$\bar{\lambda}_p(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_p(f^{(i)} - \varphi) = \rho_p(f) = \infty, i \in \mathbb{N}. \quad (3.5.1.3)$$

### 3.5.2 Exemple

Considérons l'équation différentielle suivante

$$f^{(3)} + \frac{3}{z}f'' - \frac{1}{z}(1 - e^{2z})f - f' + 3e^{2z}f = 0$$

Les coefficients de cette équation sont d'ordre fini. Cette équation admet une solution  $f(z) = \frac{\cos(e^z)}{z}$  où

$$\rho_1(f) = +\infty, \rho_2(f) = 1.$$

Soit  $\varphi(z) = \frac{e^{-z}}{z}$ . On a  $\rho_1(\varphi) = 1, \rho_2(\varphi) = 0$ . Il est clair que

$$\rho_2(\varphi) < \rho_2(f).$$

Donc les conditions du théorème 2.1.6, et les conditions du théorème 2.1.7 sont vérifiées et

$$i_{\bar{\lambda}}(f^{(i)} - \varphi) = i_{\lambda}(f^{(i)} - \varphi) = i(f) = p + 1, i \in \mathbb{N}, \quad (3.5.2.1)$$

et

$$\bar{\lambda}_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_{p+1}(f^{(i)} - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho, i \in \mathbb{N}. \quad (3.5.2.2)$$

et

$$\overline{\lambda}_p(f^{(i)} - \varphi) = \lambda_p(f^{(i)} - \varphi) = \rho_p(f) = \infty, i \in \mathbb{N}. \quad (3.5.2.3)$$

---

# CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, on a étudié la relation entre les solutions et leurs dérivés de l'équation différentielle de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0$$

où  $k \geq 2$ ,  $A_0(z) \neq 0$ ,  $A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$  sont des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini.

Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions méromorphes d'ordre  $[p, q]$ -itératif fini ?

# Bibliographie

- [1] **B. Belaïdi**, Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations, Acta. Math. Univ. Comenianae, 77 (2008), 263-269.
- [2] **L. G. Bernal**, On growth  $k$ -order of solutions of a complex homogeneous linear differential equation, Proceedings of the American Mathematical Society, 101 (1987), 317-322.
- [3] **R. Bouabdelli** and **B. Belaïdi**, On the iterated exponent of convergence of solutions of linear differential equations with entire and meromorphic coefficients, Journal of Mathematics, 2013 (2013), Article ID 429083.
- [4] **T.B. Cao**, **Z.X. Chen** and **X.M. Zheng**, and **J. Tu**, On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Annals of Differential Equations, 21(2005),111-122.
- [5] **Z.X. Chen**, The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. 20, no. 3, (2000), 425-432 ; (in Chinese).
- [6] **Z.X. Chen** and **C. C. Yang**, *Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations*, Complex Var. 42 (2000), 119-133.
- [7] **Z.X. Chen** and **C.C. Yang**, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 22 (1999), 273-285.
- [8] **A. El Farissi**, and **M. Benbachir**, Oscillation of fixed points of solutions to complex linear differential equations, Electron. J. Diff. Equ., 2013 (2013), Article ID 41.

- 
- [9] **A. El Farissi**, Value Distribution of Meromorphic Solutions and their Derivatives of Complex Differential Equations, Hindawi publishing corporation, ISRN Mathematical Analysis, 2013 (2013), Article ID 497921.
  - [10] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.
  - [11] **L. Kinnunen**, Linear differentiel equations with solutions of finile iterated order, southeast Asian Bull, Math, 22(1998),385-405.
  - [12] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1993.
  - [13] **I. Laine**, *Complex differential equations*, Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations, 4(2008), 269-363.
  - [14] **I. Laine** and **J. Rieppo**, Differential polynomials generated by linear differential equations. Complex Var. Theory Appl. 49, no. 12, (2004), 897-911.
  - [15] **M.S. Liu** and **X.M. Zhang**, Fixed points of meromorphic solutions of higher order Linear differential equations, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 31 (2006), 191-211.
  - [16] **H.Y. Xu**, **J. Tu** and **X.M. Zheng**, On the hyper exponent of convergence of zeros of  $f^{(j)} - \varphi$  of higher order linear differential equations, Advances in Difference Equations, 2012 (2012), article 114.
  - [17] **J. Wang** and **W. R. Lü**, The fixed points and hyper-order of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coeffecients, Acta Math. Appl. Sin. 27 (2004), 72-80, (in Chinese).