

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté par

M. Yahia Cherif Abdelaziz

Pour Obtenir

LE DIPLÔME DE

MAGISTÈR

Spécialité : Mathématiques

Option : *Analyse Fonctionnelle*

Intitulé :

*Etude d'un problème de transmission sur un domaine avec
couche mince dans les espaces de Hölder*

Soutenue le 20 Mai 2012

Devant le jury

Président

M. B. BELAIDI, *Professeur*, UMAB

Examineur

M. Dj. BOUAGADA, *Maître de conférences A*, UMAB

M.M. CHEGGAG, *Maître de conférences A*, ENSET d'Oran

Encadreur

M. A. MEDEGHRI, *Professeur*, UMAB

Co-Encadreur

M.O. BELHAMITI, *Maître de conférences A*, UMAB

Année universitaire 2011 / 2012

Ne regrette pas ce que le destin ne t'a pas donné

Regrette ce que toi tu n'as pas donné

Y. Cherif

Quand une chose est juste, il faut la faire

Aurait-on mille raisons de s'abstenir

Marie Curie

A ma mère tant aimée

B. Djemaia

A la mémoire de mon cher père

Mohamed

A mes trois filles

Khouloud

Nedjlaa

Hiba

Page blanche...

Remerciements

D'habitude, quand on rédige une thèse et plus particulièrement un mémoire ce qui est le cas, on donne peu d'importance à la page de remerciement, naturellement, puisqu'on est pris par le travail et la rédaction de l'article lui même.

C'est après qu'on se rend compte de la lourdeur de la tâche, si vite que l'on prend conscience que ce n'est pas aussi simple que l'on croyait.

La page de remerciement est la première page lue, il est donc nécessaire de lui octroyé un certain temps de réflexion et de lui apporter un soin particulier.

Je tiens à remercier tout mes professeurs que j'ai l'occasion de les côtoyer au cours de cette année de préparation. Des noms comme Bekkar, Belaidi, Bendoukha, Medeghri, Cheggag, qui par leurs expériences et leurs savoir mon beaucoup fait progresser dans le chemin de la recherche, qui dans des moments très difficiles ont su comment m'apporter leurs aides si précieuses et dieu sait combien j'en avais besoin.

Ce n'est pas simplement un remerciement mais une profonde gratitude et une reconnaissance pour m'avoir aidé dans ces moments difficiles. Que leurs noms resteront graver pour toujours dans ma mémoire.

Certes, la tâche n'était pas facile, alors qu'ils veuillent accepter de ma part toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance.

Je tiens vivement à remercier mon encadreur monsieur Medeghri de m'avoir accepté dans son équipe, et qui par des moments a su me donner confiance par ses remarques et ses questions instructifs. Pour tout ca, je lui en suis reconnaissant.

Je tiens à remercier vivement l'ami et le frère de toujours, mon Co-encadreur monsieur Belhamiti Omar, qui par sa patience et sa compassion à su me tenir aide, toujours disponible pour répondre à mes questions et de me poser d'autres. Certes, je lui dois beaucoup.

Qu'il veuille accepter de ma part, tout mon profond respect et ma reconnaissance de m'avoir aidé à terminer ce travail qui sans lui, n'aurait jamais vu le jour.

Je remercié chaleureusement le professeur Benharrat Belaidi pour l'honneur qu'il me fait en président le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à Dj. Bouagada et M. Cheggag qui ont acceptés de faire parti du jury.

Je tiens aussi à remercier mes amis et collègues que j'ai la chance de les connaitre au cours de cette année qui ont su me donner courage et sagesse, sans oublier bien sur ma grande famille et plus particulièrement ma mère que dieu la garde, qui a su me donner courage et une volonté et surtout un soutien moral pour réussir. Elle était toujours là, près à m'aider. Merci

Table des matières

Introduction	7
0.1 Origine du problème	7
0.1.1 Motivation : Equation de la chaleur	7
0.1.2 En dimension 1	8
0.1.3 En dimension 2	8
0.1.4 En dimension quelconque	9
0.2 Cadre des équations différentielles abstraites	9
1 Rappels	12
1.1 Lemmes techniques	12
1.1.1 Propriétés	12
1.1.2 Dérivation sous le signe somme	21
1.2 Détermination principale de la racine carrée	22
1.3 Fonctions de Green	23
1.3.1 Construction de la fonction de Green	23
1.3.2 Détermination de la fonction de Green	28
1.4 Théorie spectrale & espaces d'interpolation	29
1.4.1 Préliminaires	29
1.4.2 ensemble résolvant-Résolvante	30
1.4.3 Operateurs sectoriels	30
1.4.4 Racine carrée d'un operateur	31
1.5 Généralités sur les espaces d'interpolation	32
1.5.1 Espaces d'intersection et sommes	32
1.5.2 Espaces intermédiaires	33
1.5.3 Espaces d'interpolation	33
1.5.4 Méthodes d'interpolation	37
1.5.5 Procédés de réétiration	38
1.5.6 Interpolation des opérateurs linéaires	38
1.5.7 Caractérisation des espaces d'interpolation	40
1.6 Semigroupes	42
1.6.1 Semigroupes fortement continus	42
1.6.2 Semigroupes analytiques	46
1.7 Opérateur d'impédance	46
1.7.1 Expression de l'opérateur d'impédance	46
2 Problèmes aux limites et de transmission	47
2.1 Resolution du problème modèle	48
2.2 Le problème (P δ)	50
2.2.1 La condition d'impedance.	50
2.3 Solution du problème (P-)	52
2.4 Solution complète du problème	52

3	Etude du cas abstrait (Synthèse de l'article)	55
3.1	Résolution du problème (P δ)	56
3.2	Résolution du problème (P+).	57
3.2.1	Représentation de la solution	57
3.2.2	La Représentation par les semigroupes	58
3.2.3	Etude de la convergence des intégrales	59
3.3	Régularité de la solution du problème (P δ)	61
3.3.1	Conditions nécessaires	61
3.4	Expression formelle de Au(x)	63
3.5	Régularité de la solution	71
3.6	Régularité maximale	79
3.6.1	Etude de la convergence des intégrales	83
3.7	Régularité de la solution du problème (P-).	85
3.7.1	Représentation de la solution	86
3.7.2	Représentatio par les semigroupe	87
3.7.3	Etude de la convergence des intégrales	88
3.8	Régularité de la solution	90
3.9	Régularité maximale	100
3.10	Opérateur d'impedance	109
4	Solution du problème (P) sans le paramètre ψ	111
4.1	Solution complète du problème	111
4.1.1	Représentation de la solution	112
4.1.2	Etude de la convergence des intégrales	115
4.2	Régularité de la solution	117
4.2.1	Conditions nécessaires	117
4.2.2	Expression formelle de Au(x)	118
4.2.3	Convergence des intégrales	121
4.3	Solution stricte	130
4.3.1	Conditions suffisante	148
4.4	Régularité maximale	149
4.5	Solution stricte	150
	Bibliographie	160

Introduction

0.1 Origine du problème

0.1.1 Motivation : Equation de la chaleur

Historique

C'est au Baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (Aux 1768, Paris 1830) que revient le mérite d'avoir trouvé l'équation de la propagation de la chaleur dans les solides. Il mit au point une méthode pour sa résolution; L'analyse de Fourier est née et malgré toutes les contestations émises (Lagrange, Laplace, Legendre,...), l'académie des sciences lui décerna un prix en 1811 pour sa théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur en accord avec l'expérience.

Les importantes réserves émises retardèrent la publication de son traité sur la propagation de la chaleur. Ce ne fut qu'en 1822 qu'elle parut sous une forme achevée dans son livre intitulé "théorie analytique de la chaleur ". La mathématicienne Sophie Germain (1776-1831) et l'ingénieur Claude Navier étendirent la théorie de Fourier à d'autres domaines que la transmission de la chaleur.

0.1 Définition. Soit U un ouvert de classe C^∞ dont la frontière est ∂U . L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles de type parabolique donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - c\Delta u(x,t) = f(x,t) \quad (x,t) \in U \times]0, T[$$

Avec c un scalaire strictement positif et $T > 0$, complétée par des conditions aux limites adéquates

$$\begin{cases} u = 0 & (x,t) \in \partial U \times]0, T[& (1) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in U & (2) \end{cases}$$

La condition (2) donne la température à l'instant $t = 0$

C'est une équation d'évolution. En régime permanent ou stationnaire, lorsque la température $u(x,t)$ ne dépend plus du temps, alors l'équation de la chaleur prend la forme réduite

$$\Delta u(x) = f(x) \quad x \in U$$

Complétée par les conditions aux limites compatibles avec et selon la nature du problème posé, souvent du type Sturm-Liouville ou du type Robin

$$\begin{cases} u = 0 & x \in \partial U \quad (1) \\ H_{sl}(x_0) = 0 & x_0 \in \partial U \quad (2) \end{cases}$$

Remarque 0.1

Le milieu matériel, siège du phénomène de conduction peut être homogène ou non, isotrope ou non isotrope. Ces dimensions sont finies ou infinies.

0.1.2 En dimension 1

Soit S une tige hétérogène constituée d'un corps isotrope fixe $[-1,0]$ et d'une couche mince $[0, \delta]$, d'épaisseur δ , ($\delta > 0$). Alors le problème de la diffusion de la chaleur, plus précisément problème de conduction c'est à dire sans transport de matières dans S et dans le cas stationnaire pour les données physiques du problème est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + au_-^\delta(x) = g_-(x) & x \in]-1,0[\\ (u_+^\delta)''(x) + au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & x \in]0,\delta[\end{cases}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{cases}$$

et les conditions de transmission :

$$\begin{cases} u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0) \\ p_-(u_-^\delta)'(0) = p_+(u_+^\delta)'(0) \end{cases}$$

$u_\pm^\delta(x)$ représente la température au point x , p_- et p_+ les coefficients de conductivité des corps $]-1,0[$ et $]0,\delta[$, $a < 0$ est le coefficient d'échange avec le milieu extérieur, g_\pm^δ les sources de chaleur, f_- la température au point $x = -1$ et f_+^δ le flux de chaleur au point $x = \delta$.

0.1.3 En dimension 2

Comme en dimension 1, le problème de la conduction dans une plaque hétérogène $[-1,\delta] \times [-\pi, \pi]$ constituée de la jonction de deux plaques $[-1,0] \times [-\pi, \pi]$ et $[0, \delta] \times [-\pi, \pi]$ est représenté par les équations :

$$\begin{cases} \Delta u_-^\delta(x, y) = g_-(x, y) & (x, y) \in]-1,0[\times]-\pi, \pi[\\ \Delta u_+^\delta(x, y) = g_+^\delta(x, y) & (x, y) \in]0,\delta[\times]-\pi, \pi[\end{cases}$$

avec les conditions

avec les conditions

$$\begin{cases} u_-^\delta(-1, y) = f_-(y), & y \in]-\pi, \pi[\\ u_-^\delta(x, -\pi) = u_-^\delta(x, \pi) = 0, & x \in]-1, 0[\\ u_+^\delta(x, -\pi) = u_+^\delta(x, \pi) = 0, & x \in]0, \delta[\\ \frac{\partial u_+^\delta}{\partial x}(\delta, y) = f_+^\delta(y), & y \in]-\pi, \pi[\end{cases} \quad (1)$$

et les conditions de transmission

$$\begin{cases} p_- \frac{\partial u_-^\delta}{\partial x}(0, y) = p_+ \frac{\partial u_+^\delta}{\partial x}(0, y) \\ u_-^\delta(0, y) = u_+^\delta(0, y), & y \in]-\pi, \pi[\end{cases} \quad (2)$$

Le même problème peut être étudié avec des conditions périodiques aux bords

$$\begin{cases} u_-^\delta(-1, y) = f_-(y) & y \in]-\pi, \pi[\\ u_-^\delta(x, -\pi) = u_-^\delta(x, \pi) = 0 & x \in]-1, 0[\\ \frac{\partial u_-^\delta}{\partial y}(x, -\pi) = \frac{\partial u_-^\delta}{\partial y}(x, \pi) & x \in]-1, 0[\\ u_+^\delta(x, -\pi) = u_+^\delta(x, \pi) = 0 & x \in]0, \delta[\\ \frac{\partial u_+^\delta}{\partial y}(x, -\pi) = \frac{\partial u_+^\delta}{\partial y}(x, \pi) & x \in]0, \delta[\\ \frac{\partial u_+^\delta}{\partial x}(\delta, y) = f_+^\delta(y) & y \in]-\pi, \pi[\end{cases} \quad (3)$$

Dans ce cas, l'outil utilisé est bien sur l'analyse de Fourier

0.1.4 En dimension quelconque

En dimension quelconque, le segment $[-\pi, \pi]$ peut être remplacé par un ouvert quelconque, régulier ou non de \mathbb{R}^{n-1} , $n > 2$ et plus généralement par le bord d'une variété de dimension n .

0.1.5 Cadre des équations différentielles abstraites

Cas général. Formulation abstraite

Dans le cadre des équations différentielles abstraites, on note

$$\begin{aligned} u^\delta(x, y) &= u^\delta(x, \cdot)y = u^\delta(x)(y) \\ g^\delta(x, y) &= g^\delta(x, \cdot)y = g^\delta(x)(y) \end{aligned}$$

u^δ et g^δ deviennent alors des fonctions vectorielles de la variable x dans un espace E , où E est un espace de variable y . Alors les problèmes précédents peuvent être réécrits dans le cadre des équations différentielles abstraites sous la forme (ici on cache la variable y)

$$(P_\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x) & x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[\\ u^\delta(-1) = f_- \\ (u^\delta)'(\delta) = f_+ \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+) \\ p_-(u^\delta)'(0^-) = p_+(u^\delta)'(0^+) \end{cases}$$

A étant un opérateur fermé de domaine $D(A)$, non nécessairement dense inclus dans un espace de Banach complexe E , g^δ une donnée dans $C([-1, \delta]; E)$ et f_-, f_+ des données dans E ; p_-, p_+ des scalaires strictement positifs représentant respectivement les propriétés intrinsèques telle que la conductivité des deux corps joints $]-1, 0[$ et $]0, \delta[$.

Dans l'exemple précédent (1), l'opérateur A est l'action de dérivation seconde par rapport à la variable y complétée des conditions aux limites et de domaine $D(A)$

$$D(A) = \left\{ \varphi \in C^2([-\pi, \pi]) : \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0 \right\}$$

Le problème de transmission avec couche mince a été traité par de nombreux auteurs, mais dans des cadres différents. Citons à titre d'exemple A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et S. Maingot [6], en considérant des données homogènes, et en utilisant un changement d'échelle, ces auteurs ont obtenu des résultats d'existence d'unicité et de régularité dans les espaces L^p tout en supposant le second membre dans un espace d'interpolation.

Dans ce travail, le problème (P^δ) sera traité avec des conditions non homogènes dans le cadre des espaces de Hölder, en utilisant la notion d'impédance « défini » par un opérateur T_δ comme suit

La résolution du problème

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & x \in]0, \delta[\\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{cases}$$

où ψ est un paramètre donné dans E , conduit à définir formellement l'opérateur d'impédance par

$$(u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)$$

Ensuite le problème (P^δ) est entièrement décrit par le problème :

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x) & x \in]-1, 0[\\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)) \end{cases}$$

Noter que T_δ permet de transporter les informations requises du problème (P_+^δ) vers le problème (P_-^δ) de domaine fixe, d'où son avantage.

Comme il a été mentionné, on traitera le problème dans le cadre Holderien. On supposera par la suite que

$$\begin{cases} g_-^\delta \in C^{2\alpha}([-1, 0], E) \\ g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta], E) \end{cases} \quad 0 < 2\alpha < 1$$

Mais on ne supposera pas, compte tenu des caractéristiques différentes des deux corps que

$$g_+^\delta(0) = g_-(0)$$

Dans ce cas, on montre (voir plus loin) que g^δ est holdérienne par morceau sur $]-1, 0[$ et $]0, \delta]$.

Ce présent travail se divise en deux parties, la première est une partie synthèse de l'article " Omar Belhamiti, Rabah Labbas, Keddour Lemrabet, Ahmed Medeghri – *Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces. Applied Mathematics and computation* 202 (2008) 608– 619. ". Les auteurs traitent le problème de transmission dans un domaine avec couche mince dans le cadre des équations différentielles abstraites en supposant le second membre plongé dans un espace de Hölder. L'outil d'analyse utilisé est le calcul fonctionnel de Dunford qui par sa richesse s'adapte mieux à ce genre de problème puisqu'il permet d'écrire formellement la solution du problème posé.

Pour la deuxième partie, on présentera l'écriture de la solution u^δ tel que

$$u^\delta = \begin{cases} u_+^\delta & \text{sur } [0, \delta] \\ u_-^\delta & \text{sur } [-1, 0] \end{cases}$$

Indépendamment du paramètre ψ , basée sur le calcul fonctionnel de Dunford, suivi à nouveau d'une étude sur l'existence l'unicité et la régularité maximale de la solution. On essaye de dégager les différences majeures entre l'étude faite dans la partie I et celle faite dans cette partie II.

Chapitre 1

Les rappels

1.1 Lemmes techniques

On présente dans cette section, un rappel sur les propriétés élémentaires des fonctions hyperboliques sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique définies dans le champ complexes, puis on exposera les lemmes techniques de majoration et de minoration qui seront utilisés tout le long de cet article, suivi d'un lemme de dérivation sous le signe somme puis d'un rappel sur les fonctions de Green et une méthode de leurs constructions, à noter qu'on ne mentionnera pas la théorie des distributions pour la construction de telles fonctions, malheureusement souvent utilisée en physique. Après, on fera un petit rappel sur la détermination principale de la racine carrée. Une chose qui peut sembler à première vue dérisoire, mais nécessaire pour la résolution des équations différentielles du second ordre dans le champ complexe. On terminera par un bref rappel sur les espaces d'interpolation et la théorie spectrale et enfin la théorie des semigroupes

Définition 1.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Les fonctions $z \rightarrow \cosh z$ et $z \rightarrow \sinh z$ sont holomorphes sur tout \mathbb{C} .

1.1.1 Propriétés

1.a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} |\cosh z|^2 = \cosh^2(\operatorname{Re} z) - \sin^2(\operatorname{Im} z) \\ |\sinh z|^2 = \cosh^2(\operatorname{Re} z) - \cos^2(\operatorname{Im} z) \end{cases}$$

1.b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z \geq 0$

$$\begin{cases} |\cosh z| \leq \cosh(\operatorname{Re} z) \leq e^{\operatorname{Re} z} \\ |\sinh z| \leq \cosh \operatorname{Re} z \leq e^{\operatorname{Re} z} \end{cases}$$

1.c) Pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh(\operatorname{Re} z) \geq 1$$

Si $\operatorname{Re} z \geq 1$

$$\sinh(\operatorname{Re} z) \geq \operatorname{Re} z$$

1.d)

$$\begin{aligned} |\cosh \xi z| &\leq \cosh \xi \operatorname{Re} z \leq e^{\xi \operatorname{Re} z} && \text{si } \xi \geq 0 \\ |\cosh \xi z| &\leq \cosh \xi \operatorname{Re} z \leq e^{-\xi \operatorname{Re} z} && \text{si } \xi \leq 0 \end{aligned}$$

Preuve

1.a) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |\cosh z|^2 &= (\cosh z)(\overline{\cosh z}) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + \operatorname{Re}(e^z \overline{e^{-z}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\cosh 2x + \cos 2y) = \cosh^2 x - \sin^2 y \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} |\sinh z|^2 &= (\sinh z)(\overline{\sinh z}) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \operatorname{Re}(e^z \overline{e^{-z}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\cosh 2x - \cos 2y) = \cosh^2 x - \cos^2 y \end{aligned}$$

1.b) Supposons que $\operatorname{Re} z = x \geq 1$. Grâce à la décroissance de $1 + e^{-2x}$, on a

$$\cosh x \leq e^x \left(\sup_{x \geq 0} \frac{1 + e^{-2x}}{2} \right) = e^x$$

Alors,

$$|\cosh z| \leq \cosh x \leq e^x$$

De la même manière, on démontre aussi

$$|\sinh z| \leq \cosh x \leq e^x$$

1.c) Élémentaire. Si $x \geq 0$, la courbe d'équation $y = \sinh x$ est située au dessus de sa demi-tangente à l'origine qui est précisément la demi-droite d'équation : $(y = x, x \geq 0)$.

1.d) Pour $\xi \geq 0$, le résultat est immédiat. Supposons que $\xi \leq 0$

$$\cosh \xi x = \frac{e^{\xi x} + e^{-\xi x}}{2} = e^{-\xi x} \left(\frac{e^{2\xi x} + 1}{2} \right) \leq e^{-\xi x}$$

Une première application de ces propriétés est la preuve du lemme suivant

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $\xi \in [-1,0]$ et $\delta \in [0,1]$, On note

$$\Delta_z(\xi, \delta) = \cosh \delta z \cosh \xi z - p \sinh \delta z \sinh \xi z$$

Lemme 1.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z \geq 0$ et p un réel strictement positif, on a

$$|\Delta_z(\xi, \delta)| \leq (p+1)e^{(\delta-\xi)\operatorname{Re} z}$$

Preuve

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} |\Delta_z(\xi, \delta)| &\leq |\cosh \delta z \cosh \xi z| + p |\sinh \delta z \sinh \xi z| \\ &\leq (p+1) \cosh \delta \operatorname{Re} z \cosh \xi \operatorname{Re} z \\ &\leq (p+1) e^{\delta \operatorname{Re} z} e^{-\xi \operatorname{Re} z} \\ &\leq (p+1) e^{(\delta-\xi)\operatorname{Re} z} \end{aligned}$$

Lemme 1.2 Pour tout nombre complexe z non nul tel que $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{cases} \arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) \leq \arg z & \text{si } 0 < \arg z < \pi/2 \\ \arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) \geq \arg z & \text{si } -\pi/2 < \arg z < 0 \end{cases}$$

Preuve

Soit z un nombre complexe non nul tel que $|\arg z| < \pi/2$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-z}}{1 + e^{-z}} &= \frac{(1 - e^{-z})(1 + \overline{e^{-z}})}{|1 + e^{-z}|^2} = \frac{1 - |e^{-z}|^2 - (e^{-z} - \overline{e^{-z}})}{|1 + e^{-z}|^2} \\ &= \frac{1 - e^{-2x} - 2i \operatorname{Im} e^{-z}}{|1 + e^{-z}|^2} = \frac{1 - e^{-2x} + 2ie^{-x} \sin y}{|1 + e^{-z}|^2} \end{aligned}$$

On déduit

$$\arg \left(\frac{1 - e^{-z}}{1 + e^{-z}} \right) = \arctan \left(\frac{2e^{-x} \sin y}{1 - e^{-2x}} \right)$$

a) Supposons que $0 < \arg z < \pi/2$, alors x et y sont deux réels strictement positifs. Par suite,

$$\frac{2e^{-x} \sin y}{1 - e^{-2x}} \leq \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}$$

Alors, puisque $\operatorname{Re} z > 0$

$$\arg\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right) \leq \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arg z$$

b) Si $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$, alors

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right) &= \arctan\left(\frac{2e^{-x}\sin y}{1-e^{-2x}}\right) \\ &\geq \arctan\frac{2y}{2x} \end{aligned}$$

Donc

$$\arg\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right) \geq \arg z$$

Interprétation géométrique

On rappelle que si A, B, C sont trois points d'affixes respectives $1; -e^{-z}; e^{-z}$, on a

$$\arg\left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right) = \text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

Alors si D est un point d'affixe $z = x + iy$, $x > 0$ et $y > 0$, on peut interpréter géométriquement ce résultat simplement par

$$\text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \geq \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$$

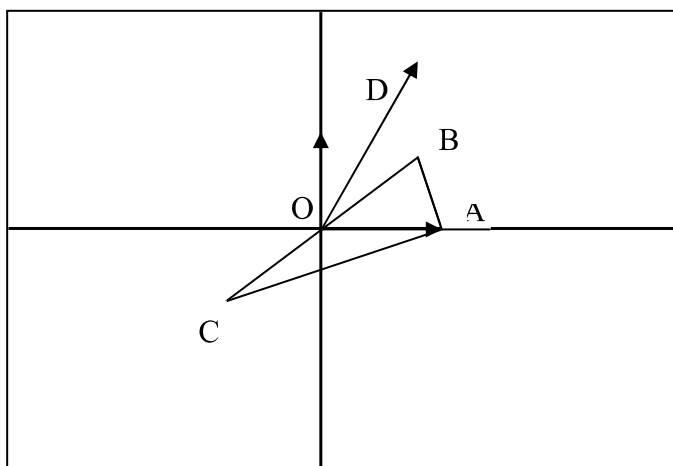


FIG. 1.1

Par récurrence sur l'entier n , on a de même

$$\begin{cases} \arg(1-e^{-nz}) - \arg(1+e^{-nz}) \leq \arg z & \text{si } 0 < \arg z < \pi/2 \\ \arg(1-e^{-nz}) - \arg(1+e^{-nz}) \geq \arg z & \text{si } -\pi/2 < \arg z < 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Lemme 1.3 Soit z un nombre complexe tel que $|\arg z| = \theta < \pi/2$.
Il existe une constante C_θ strictement positive pour laquelle on a

$$|1 + e^{-z}| \geq C_\theta$$

Preuve. Pour $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} |1 + e^{-z}|^2 &= (1 + e^{-z})(1 + \overline{e^{-z}}) \\ &= 1 + |e^{-z}|^2 + 2\operatorname{Re}(e^{-z}) \\ &= 1 + e^{-2x} + 2e^{-x} \cos y \\ &= (e^{-x} + \cos y)^2 + \sin^2 y \end{aligned}$$

Selon le signe de $\cos y$, on distinguera deux cas

Premier cas. Supposons que $\cos y \geq 0$. Alors

$$|1 + e^{-z}|^2 = (e^{-x} + \cos y)^2 + \sin^2 y \geq \cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

Deuxième cas. Supposons que $\cos y < 0$. On a

$$|1 + e^{-z}|^2 = (e^{-x} + \cos y)^2 + \sin^2 y \geq \sin^2 y$$

et le minimum est atteint si

$$e^{-x} + \cos y = 0$$

autrement

$$y = \arccos(-e^{-x}) \quad (1.1)$$

Soit (x_0, y_0) un point de la courbe d'équation (1.1). On a

$$\begin{cases} |1 + e^{-z}|^2 \geq \sin^2(\arccos(-e^{-x_0})) \\ \sin^2(\arccos(-e^{-x_0})) = (1 - e^{-2x_0}) \end{cases}$$

Or le point (x_0, y_0) existe si $\cos y_0 < 0$. Par suite

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2 \tan \beta_0} < x_0 < \frac{\pi}{\tan \beta_0} \\ \beta_0 = \arg(x_0 + iy_0) \end{cases}$$

D'autre part, de (1.1)

$$x_0 > 0 \text{ si et seulement si } \operatorname{Ln}|\cos y_0| < 0$$

Inégalité toujours vérifiée. Par conséquent $\tan \beta_0 > 0$ et l'on a

$$\left|1 + e^{-z}\right|^2 \geq 1 - e^{-\frac{\pi}{\tan \beta_0}}$$

Dans les deux cas on a

$$\left|1 + e^{-z}\right|^2 \geq 1 > 1 - e^{-\frac{\pi}{\tan \beta_0}}$$

A la limite, lorsque x_0 tend vers $+\infty$ on a

$$\lim_{\beta_0 \rightarrow 0^-} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\tan \beta_0}}\right) = 1$$

Le minimum égal à 1 apparaît donc comme une valeur limite à l'infini. On a toujours

$$\left|1 + e^{-z}\right|^2 \geq 1$$

Remarque 1.1 La constante C_θ ne dépend pas de $\arg z$

Lemme 1.4 Il existe une constante C_θ strictement positive telle que pour tout z , un nombre complexe vérifiant $\operatorname{Re} z > 0$, on a

$$\left|1 - e^{-z}\right| \geq C_\theta$$

Preuve. Soit la transformation \mathcal{T} du plan complexe dans lui-même définie par

$$(u, v) \rightarrow (2 - u, -v)$$

L'image de $1 + e^{-z}$ par \mathcal{T} est le nombre complexe $1 - e^{-z}$. On a

$$\begin{aligned} \|(2 - u, -v)\|^2 &= \|2 - u\|^2 + \|-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 4u + 4 \\ &= |u|^2 + |v|^2 - 4e^{-x} \cos y \\ &= (e^{-x} - \cos y)^2 + \sin^2 y \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left|1 + e^{-z}\right| &\leq \left|1 - e^{-z}\right| \quad \text{si } \cos(\operatorname{Im} \sqrt{z}) < 0 \\ \left|1 - e^{-z}\right|^2 &\geq (1 - e^{-x})^2 \geq C_\theta \quad \text{si } \cos(\operatorname{Im} \sqrt{z}) \geq 0 \end{aligned}$$

La suite est triviale.

Lemme 1.5 Sous les mêmes conditions que le lemme 1.4 précédent et pour tout $\delta \in]0, 1]$, il existe une constante strictement positive C_θ indépendante de δ telle que

$$\left|1 \pm e^{-\delta z}\right| \geq C_\theta$$

Preuve. C_θ ne dépend pas de $|z|$ et l'homothétie $z \rightarrow \delta z$, ($\delta > 0$) laisse invariant l'argument de z , d'où le résultat

Le lemme suivant est utile par la suite. Il sera souvent utilisé

Lemme 1.6 Soit z un nombre complexe tel que $|\arg z| < \pi/2$. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$|\Delta_z(-1, \delta)| \geq \frac{1}{4} (C_\theta)^2 \cos \theta e^{(\delta+1)\operatorname{Re} z}$$

Pour rappel

$$\begin{cases} \Delta_z(\xi, \delta) = \cosh z\delta \cosh z\xi - p \sinh z\delta \sinh z\xi \\ \xi \in [-1, 0] \end{cases}$$

Preuve. Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant

Lemme 1.7 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. On a

$$|z_1 + z_2| \geq (|z_1| + |z_2|) \cos\left(\frac{\arg z_1 - \arg z_2}{2}\right)$$

Preuve. Posons

$$\begin{cases} \alpha = \arg z_1 \\ \beta = \arg z_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \cos(\alpha - \beta) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \left(\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= (|z_1|^2 + |z_2|^2) \left(\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + 2|z_1||z_2| \left(\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= (|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|) \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + (|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|) \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + (|z_1| - |z_2|)^2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

On déduit

$$|z_1 + z_2| \geq (|z_1| + |z_2|) \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Mais on a aussi démontré l'inégalité suivante

$$|z_1 + z_2|^2 \geq (|z_1| - |z_2|)^2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

A titre facultatif, on a aussi

$$|z_1 - z_2|^2 \geq (|z_1| - |z_2|)^2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$|z_1 - z_2|^2 \geq (|z_1| + |z_2|)^2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Passons à la démonstration du lemme 1.6. On a

$$4|\Delta_z(-1, \delta)| = \left| (1 + e^{-2\delta z})(1 + e^{-2z}) + p(1 - e^{-2\delta z})(1 - e^{-2z}) \right|$$

Posons

$$\begin{cases} (a, b) = (1 + e^{-2\delta z}, 1 + e^{-2z}) \\ (c, d) = (1 - e^{-2\delta z}, 1 - e^{-2z}) \end{cases}$$

Alors, par le lemme 1.7

$$4|\Delta_z(-1, \delta)| \geq e^{(\delta+1)z} (|ab| + p|cd|) \left| \cos \left(\frac{\arg a + \arg b}{2} - \frac{\arg c + \arg d}{2} \right) \right|$$

Par le lemme 1.2

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\arg a + \arg b}{2} - \frac{\arg c + \arg d}{2} \right) \right| &\leq \left| \frac{\arg a - \arg c}{2} \right| + \left| \frac{\arg b - \arg d}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2}(2 \arg z) = \arg z \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 4|\Delta_z(-1, \delta)| &\geq e^{(\delta+1)z} (|ab| + p|cd|) \cos \theta \\ &\geq e^{(\delta+1)z} |ab| \cos \theta \end{aligned}$$

Par le lemme 1.3

$$4|\Delta_z(-1, \delta)| \geq (C_\theta)^2 e^{(\delta+1)\operatorname{Re} z} \cos \theta \quad \blacksquare$$

Remarque 1.2 Si $p = 1$

$$\begin{aligned} |\Omega_z(-1, \delta)| &= |\cosh \delta z \cosh z + \sinh \delta z \sinh z| \\ &= |\cosh(\delta + 1)z| \end{aligned}$$

d'où

$$|\Delta_z(-1, \delta)| \geq \frac{1}{2} C_\theta e^{\delta \operatorname{Re} z}$$

Ce que l'on a gagné en facteur, on l'a perdu en puissance !

Soit (γ) le contour du domaine

$$S_{\theta_0} = \left\{ z : |\arg z| < \theta_0, \theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[\right\} \cup \overline{B(o, \varepsilon_0)}$$

Lemme 1.8 Il existe une constante positive C ne dépendant que du contour (γ) telle que pour tout $r > 0$, on a

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|r \pm z||z|^{\nu}} \leq \frac{C}{r^{\nu}} \quad , \nu \in]0, 1[$$

Preuve. Voir figure 1.2

$$|z \pm r| \geq AB = r \sin \theta_0$$

et

$$|z \pm r| \geq CD = |z| \sin \theta_0$$

On note

$$\gamma_+^r = \{z \in \gamma : |z| \geq r\} \quad , \quad \gamma_-^r = \{z \in \gamma : |z| > r\}$$

Alors,

$$\int_{\gamma_+^r} \frac{|dz|}{|r \pm z||z|^{\nu}} \leq K \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z|^{1+\nu}} \leq \frac{K}{r^{\nu}}$$

$$\int_{\gamma_-^r} \frac{|dz|}{|r \pm z||z|^{\nu}} \leq \frac{K}{r} \int_{\varepsilon_0}^r \frac{|dz|}{|z|^{\nu}} \leq \frac{K}{r^{\nu}}$$

Le reste est immédiat.

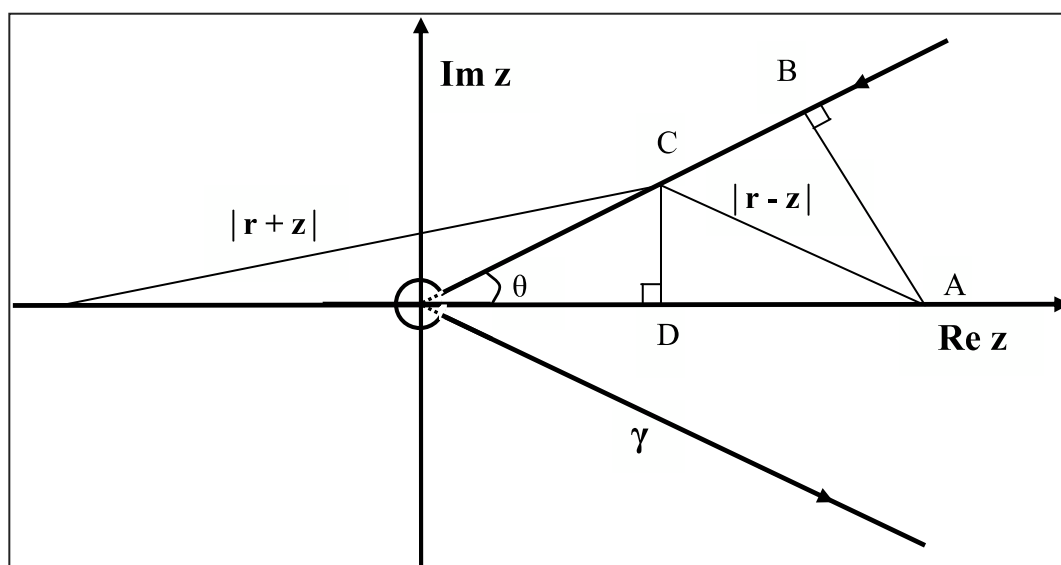


Fig. 1. 2

1.1.2 Dérivation sous le signe somme

Lemme 1.9. Soit G une application continue, dérivable de $[a, b] \times [a, b]$ dans un Banach E . f une application continue de $[a, b]$ dans E ; Alors l'application

$$u : x \rightarrow \int_a^x G(s, x) f(s) ds$$

est dérivable sur le segment $[a, b]$ et l'on a

$$u'(x) = G(x, x) f(x) + \int_a^x \frac{\partial G}{\partial x}(s, x) f(s) ds$$

Preuve. Soit h un scalaire strictement positif tel que $a < x + h < b$. On a

$$\begin{aligned} u(x+h) - u(x) &= \int_a^{x+h} G(s, x+h) f(s) ds - \int_a^x G(s, x) f(s) ds \\ &= \int_a^x [G(s, x+h) - G(s, x)] f(s) ds + \int_x^{x+h} G(s, x+h) f(s) ds \end{aligned}$$

D'autre part, f et G étant continues sur $[a, b]$, alors

$$\int_x^{x+h} G(s, x+h) f(s) ds = h G(\theta_h, x+h) f(\theta_h)$$

θ_h un réel compris entre x et $x+h$. En prenant la limite lorsque h tend vers 0 du rapport

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \text{ et en remarquant que } \theta_h \text{ tend vers } x, \text{ on obtient le résultat voulu.}$$

1.2 Détermination principale de la racine carrée

Définition 1.2 On appelle détermination de la racine carrée sur un ouvert U de \mathbb{C} , toute fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$[f(z)]^2 = z$$

On note la détermination principale de la racine carrée par \sqrt{z}

\sqrt{z} est la détermination principale de la racine carrée définie par :

$$\theta \in]-\pi, \pi[, \quad z = r e^{i\theta} \quad \text{alors} \quad \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

On conclut facilement que :

$$z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \text{ et } \operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0$$

Soit $\varphi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. Notons $S_{\lambda\varphi}$ le secteur

$$S_{\lambda\varphi} = \left\{ z : |\arg z| < \lambda \left(\frac{\pi - \varphi}{2} \right) \right\}$$

Alors,

$$-z \in S_{2\varphi} \text{ implique } \sqrt{-z} \in S_{\varphi}$$

On rappelle que $\sqrt{-z}$ est holomorphe dans S_{φ}

Propriétés

❖ Il n'est pas difficile de vérifier l'équivalence suivante :

$$-z \in S_{2\varphi} \Leftrightarrow z \in \Sigma_{\varphi} = \{z : \varphi < \arg z < 2\pi - \varphi\}$$

D'une manière équivalente

$$-z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \Leftrightarrow z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$$

❖ Si $-z \in S_{2\varphi}$, alors $\arg(\sqrt{-z}) = \frac{\pi - \varphi}{2}$

❖ Si $-z \in S_{2\varphi}$, alors $\operatorname{Re}(\sqrt{-z}) > 0$

❖ Pour des raisons topologiques, il est impossible de prolonger la fonction racine carrée de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ en une fonction continue f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} vérifiant $[f(z)]^2 = z$

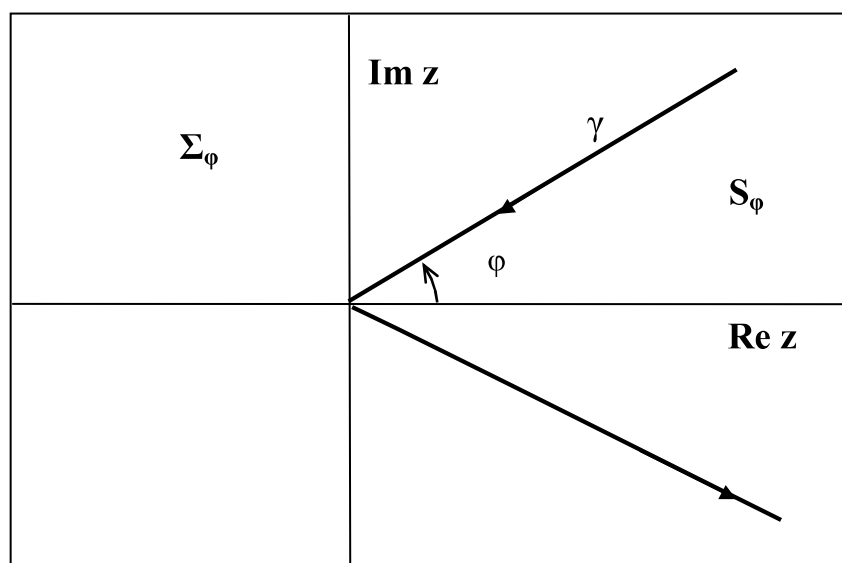


Figure 1.2

Remarque 1.2. Par la suite, on utilisera selon les cas, l'une ou l'autre des deux notations Σ_φ ou S_φ .

A noter que tout ce qu'a été énoncé dans les lemmes techniques est encore valable pour la détermination de la racine carrée. On retiendra l'estimation suivante

$$|\Lambda_z(-1, \delta)| \geq \frac{1}{4} (C_\theta)^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{(\delta+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}$$

avec

$$\begin{cases} \Lambda_z(\xi, \delta) = \cosh \delta \sqrt{-z} \cosh \xi \sqrt{-z} - p \sinh \delta \sqrt{-z} \sinh \xi \sqrt{-z} \\ \xi \in [-1, 0] \end{cases}$$

1.3 Fonctions de Green

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. On ne traitera dans ce paragraphe que les équations différentielles ordinaires de type Sturm-Liouville et plus particulièrement, l'équation de la chaleur stationnaire.

Définition 1.3. s étant un point arbitraire du segment $[0, \delta]$, z une fonction continue sur $[0, \delta]$ à valeurs dans un espace de Banach. On appelle fonction de Green de l'équation de la chaleur stationnaire, la fonction qui est solution au sens des distributions de l'équation :

$$u'' + zu = \delta_s \quad (\text{E})$$

où δ_s est la distribution de Dirac, avec les conditions aux limites homogènes posées :

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0 \\ \alpha_2 u(\delta) + \beta_2 u'(\delta) = 0 \end{cases} \quad (1.0)$$

avec α_i, β_j des scalaires. La fonction de Green de l'équation de la chaleur stationnaire ou noyau de chaleur apparait comme la solution de l'équation différentielle

$$\mathcal{L}u = \delta_s$$

où \mathcal{L} est l'opérateur différentiel du type Sturm-Liouville

$$\mathcal{L}u = u'' + zu$$

Donc a priori c'est une distribution, mais dans la plus part des cas c'est une fonction, d'où le nom de fonction de Green.

1.3.1 Construction de la fonction de Green

Cette fonction notée $G(s, t)$ se construit de la façon suivante :

❖ Pour $0 \leq t \leq s \leq \delta$, c'est la solution u_1 de l'équation

$$u'' + zu = 0 \quad (1.1)$$

qui satisfait à la première condition

$$\alpha_1 u_1(0) + \beta_1 u_1'(0) = 0 \quad (1.2)$$

Pour $0 \leq s \leq t \leq \delta$, c'est la solution u_2 de l'équation

$$u'' + zu = 0$$

qui satisfait à la seconde condition

$$\alpha_2 u_2(\delta) + \beta_2 u_2'(\delta) = 0 \quad (1.3)$$

- ❖ elle est continue pour $t = s$
- ❖ la dérivée est discontinue au point $t = s$ et subit en ce point un saut de valeur 1.

Pour construire la fonction de Green, on choisit une solution particulière u_1 de (1.1) satisfaisant aux conditions (1.2) en 0 et une autre solution u_2 de (1.1) satisfaisant aux conditions (1.3) en δ . D'après la définition, u_1 ou u_2 ne vérifie pas simultanément les conditions (1.0).

On pose alors

$$G(s, t) = \begin{cases} W^{-1}(u_1, u_2) u_1(s) u_2(t) & \text{si } s \leq t \leq \delta \\ W^{-1}(u_1, u_2) u_1(t) u_2(s) & \text{si } t \leq s \leq \delta \end{cases}$$

où $W(u_1, u_2)(s)$ étant le Wronskien du système $\{u_1(s), u_2(s)\}$. On vérifie que la fonction $G(s, t)$ ainsi définie vérifie les conditions données dans la définition, et de plus $G(s, t)$ est une fonction symétrique en s et t

Vérifions maintenant que $G(s, t)$ est bien la solution de l'équation (E).

On a besoin du lemme suivant

Lemme 1.10. Soit f une fonction nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$, continue, dérivable sur $[a, b]$ sauf au point s de $]a, b[$ tel que

$$f(s+0) - f(s-0) = \sigma$$

Alors $(T_f)'$, la dérivée de f au sens des distributions est donnée par

$$(T_f)' = f' + \sigma \delta_s$$

Preuve. Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ comme suit

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & t \leq s \\ f(t) - \sigma Y(t-s) & t > s \end{cases}$$

où Y désigne la fonction échelon unité.

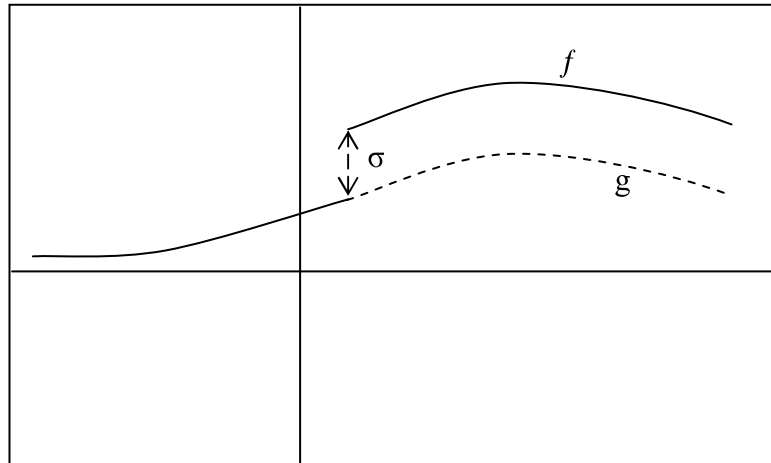


Figure 1.3

g est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sauf peut être au point $t = s$. Alors g définit une distribution T_g à support borné et dont la dérivée est donnée par

$$(T_g)' = (T_f)' - \sigma \delta_s$$

Mais g est continue, alors $T_g = g$ (au sens du produit scalaire défini sur D'), alors

$$(T_f)' = g' + \sigma \delta_s$$

Ce qui se traduit par

La dérivée au sens des distributions de la fonction discontinue f est égale à la somme de la dérivée de sa partie continue et de la distribution de Dirac $\sigma \delta_s$

Alors, par définition de G et pour s fixé, $G(s, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + zG = 0$$

G est partout continue, dérivable sauf au point $t = s$; Comme $\frac{\partial G}{\partial t}$ subit un saut égal à 1 en s , alors par le lemme 1.10

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)_{distribution} = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)_{fonction} + \delta_s$$

Donc, au sens des distributions,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + zG = \delta,$$

Proposition 1.1. Si $G(s, t)$ est la solution de l'équation non homogène

$$u'' + zu = \delta,$$

satisfaisant aux conditions aux limites, la solution de l'équation

$$u'' + zu = f$$

est donnée par

$$u(t) = \int_0^{\delta} G(s,t) f(s) ds$$

Preuve

En effet, $G(s, t)$ est continue partout, dérivable sauf au point $t = s$ où elle subit en ce point un saut égal à 1, alors par application du lemme 1.10 précédent, on obtient

$$\begin{aligned} u''(t) &= \int_0^t \Delta^{-1} u_1(s) u_2(t) f(s) ds + \int_t^{\delta} \Delta^{-1} u_1(t) u_2(s) f(s) ds \\ &\quad + \frac{u_1(t)(u_2)'(t) - (u_1)'(t)u_2(t)}{\Delta} f(t) \end{aligned}$$

Avec Δ désigne à priori le Wronskien du système $\{u_1, u_2\}$ au point s

D'ailleurs,

$$\frac{u_1(t)(u_2)'(t) - (u_1)'(t)u_2(t)}{\Delta} f(t) = f(t)$$

Donc

$$\begin{aligned} &u''(t) + zu(t) \\ &= \int_0^t \frac{u_1(s)}{\Delta} [(u_2)''(t) + zu_2(t)] f(s) ds + \int_t^{\delta} \frac{u_2(s)}{\Delta} [(u_1)''(t) + zu_1(t)] f(s) ds + f(t) \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de u_1 et u_2 , on obtient

$$u''(t) + zu(t) = f(t)$$

Au passage il faut remarquer qu'on n'a pas mentionné la notion de distribution. Reste à vérifier que la solution ainsi construite, vérifie les conditions aux limites.

On a

$$u(t) = \int_0^t \Delta^{-1} u_1(s) u_2(t) f(s) ds + \int_t^{\delta} \Delta^{-1} u_1(t) u_2(s) f(s) ds$$

Alors

$$\begin{cases} u(0) = u_1(0) \int_0^{\delta} \Delta^{-1} u_2(s) f(s) ds \\ u'(0) = (u_1)'(0) \int_0^{\delta} \Delta^{-1} u_2(s) f(s) ds \end{cases} \quad (1.4)$$

D'où, par définition de u_1

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0$$

Il l'en est de même au point $t = \delta$. Pour le voir, il suffit simplement de remplacer u_1 par u_2 et la valeur 0 par δ dans l'expression (1.4)

Proposition 1.2. Soit f une fonction continue sur $[0, \delta]$. Si v est la solution du problème homogène vérifiant les conditions aux limites, la solution complète de l'équation donnée

$$u'' + zu = f$$

satisfaisant aux mêmes conditions aux limites est de la forme :

$$u(t) = v(t) + \int_0^{\delta} G(s,t) f(s) ds$$

Preuve.

Soit u la solution du problème

$$\begin{cases} u'' + zu = f \\ u(a) + u'(a) = \alpha \\ u(b) + u'(b) = \beta \end{cases}$$

Si v est la solution du problème homogène

$$\begin{cases} v'' + zv = 0 \\ v(a) + v'(a) = \alpha \\ v(b) + v'(b) = \beta \end{cases}$$

Alors $u - v$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \omega'' + z\omega = f \\ \omega(a) + \omega'(a) = 0 \\ \omega(b) + \omega'(b) = 0 \end{cases}$$

On applique alors la proposition 1.1 et conclure.

1.3.2 Détermination de la fonction de Green

Pour déterminer la fonction de Green du problème

$$\begin{cases} u'' + zu = \delta_s \\ \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0 \\ \alpha_2 u(\delta) + \beta_2 u'(\delta) = 0 \end{cases}$$

On détermine la solution du problème

$$\begin{cases} u'' + zu = 0 \\ \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = a \\ \alpha_2 u(\delta) + \beta_2 u'(\delta) = b \end{cases} \quad (1.5)$$

La fonction de Green est alors donnée par

$$G(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{W(\psi_1, \psi_2)(s)} \psi_1(s) \psi_2(t) & 0 \leq s \leq t \leq \delta \\ \frac{1}{W(\psi_1, \psi_2)(s)} \psi_1(t) \psi_2(s) & 0 \leq t \leq s \leq \delta \end{cases}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont deux solutions de problème (1.5) vérifiant respectivement

$$\begin{cases} \alpha_1 \psi_1(0) + \beta_1 \psi_1'(0) = 0 \\ \alpha_2 \psi_2(\delta) + \beta_2 \psi_2'(\delta) = 0 \end{cases}$$

$W(\psi_1, \psi_2)(s)$ désigne le Wronskien du système $\{\psi_1, \psi_2\}$ au point s . (Attention à l'ordre)

Méthode pratique-Exemple.

f une fonction continue sur $[0,1]$. Trouver la fonction de Green du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

La solution générale du problème

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y(1) = \beta \end{cases}$$

est

$$y(x) = \alpha(1-x) + \beta x$$

L'ensemble de toutes les fonctions $x \rightarrow y(x)$ quand α, β varient est un espace vectoriel de dimension 2 dont les générateurs sont

$$x \rightarrow 1-x \quad \text{et} \quad x \rightarrow x$$

La fonction de Green du problème posé est donc définie par

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1-x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Comme on peut le vérifier, la solution du problème posé est

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t) dt$$

1.4 Théorie spectrale et espaces d'interpolation

1.4.1 Notions préliminaires

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|$. On désigne par I l'identité de E

Définition 1.4 Un opérateur linéaire non borné dans E est un couple $(A, D(A))$ où $D(A)$ est un espace vectoriel et A une application linéaire de $D(A)$ dans E . Le sous-espace $D(A)$ est le domaine de A .

Définition 1.5 Un opérateur $(A, D(A))$ non borné dans E est fermé si son graphe

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

est fermé dans $E \times E$.

On munit $D(A)$ de la norme du graphe

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$$

Proposition 1.3 L'espace $(D(A), \| \cdot \|_{D(A)})$ est un espace de Banach et

$$A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), E)$$

1.4.2 Ensemble résolvant. Résolvante

Définition 1.6 Soit A un opérateur non borné dans E . L'ensemble résolvant est l'ensemble $\rho(A)$ des nombres complexes défini par

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \right\}$$

La résolvante est l'application :

$$\lambda \in \rho(A) \rightarrow (A - \lambda I)^{-1}$$

On note la résolvante par $R(\lambda, A)$. On a les propriétés suivantes

- ❖ $\rho(A)$ est un ouvert de \mathbb{C}
- ❖ Pour $\lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda, A)$ est holomorphe et

$$(R(\lambda, A))' = (R(\lambda, A))^2$$

- ❖ $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda, A) = 0$

- ❖ 1^{ère} identité de la résolvante. Pour $\lambda \in \rho(A)$ tel que $\lambda \neq 0$, on a

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{A(A - \lambda)^{-1}}{\lambda} - \frac{I}{\lambda}$$

❖ 2^{me} identité de la résolvante. Pour λ, μ dans $\rho(A)$

$$(A - \lambda I)^{-1} - (A - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)(A - \lambda I)^{-1}(A - \mu I)^{-1}$$

1.4.3 Opérateurs sectoriels

Définition 1.6 Un opérateur linéaire A est dit sectoriel s'il est d'image dense, $\rho(A) \supset (0, +\infty)$ et

$$\sup_{t>0} \|t(t - A)^{-1}\| < \infty$$

Soit A un opérateur sectoriel. Il existe un angle $\theta \in (0, \pi)$ tel que le secteur

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \theta\}$$

soit contenu dans $\rho(A)$. On peut alors définir l'angle spectral θ_A de la manière suivante

Définition 1.7 l'angle spectral θ_A de l'opérateur A est défini par

$$\theta_A = \inf \{ \theta \in (0, \pi) : S_{\pi-\theta} \subset \rho(A) \text{ et } M_{\pi-\theta} < \infty \}$$

avec

$$M_{\pi-\theta} = \sup_{\lambda \in S_{\pi-\theta}} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| < \infty$$

Proposition 1.4 Soit A un opérateur tel que

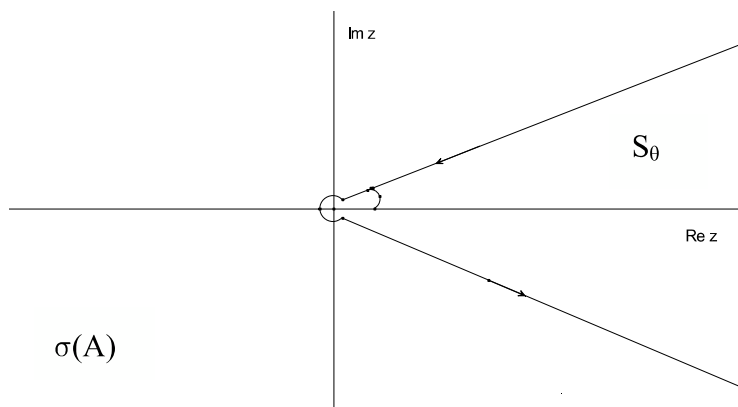
- i) $\rho(A) \supset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$
- ii) Il existe une constante positive M telle que

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$$

Alors A est sectoriel.

Plus précisément, il existe $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\varepsilon_0 > 0$ telles que

- i) $\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \theta_0\} \cup \overline{B(0, \varepsilon_0)}$
- ii) $\sup_{z \in S_{\theta_0}} \|z(z - A)^{-1}\| \leq M$



1.4.4 Racine carrée d'un opérateur.

Soit A un opérateur fermé, de domaine $D(A)$ et $\varphi \in D(A)$. Pour tout $\lambda > 0, \lambda \in \rho(A)$ on définit l'opérateur $J^{1/2}$ par :

$$J^{1/2}\varphi = \int_0^{\infty} \lambda^{-1/2} (\lambda - A)^{-1} (-A)\varphi d\lambda$$

Lemme 1.11. L'opérateur $J^{1/2}$ admet une extension fermée.

En d'autres termes $J^{1/2}$ est fermable.

Pour la démonstration, voir BALAKRISHNAN [6]

Alors on a la définition suivante :

Définition 1.8. $(-A)^{1/2}$ est la plus petite extension fermée de $J^{1/2}$

Propriétés

- $(-A)^{1/2}$ est fermé
- $-(-A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique non fortement continu en 0, noté

$$\left\{ e^{-((-A)^{1/2})^2 t} \right\}_{t>0}$$

Soit (γ) la courbe simple direct, frontière du domaine S_{θ_0}

- $(-A)^{-1/2} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (-\lambda)^{-1/2} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$ est un opérateur borné.

En utilisant les propriétés des intégrales de Dunford, on peut écrire

$$(-A)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int f(z)(z-A)^{-1} \varphi dz = \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{f(z)}{\sqrt{-z}} (z-A)^{-1} \varphi dz$$

et puisque $(-A)^{-1/2}$ est borné, alors

$$(-A)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int f(z)(z-A)^{-1} \varphi dz = \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int f(z)(z-A)^{-1} (-A)^{-1/2} \varphi dz$$

Ce qui donne en définitive

$$\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{f(z)}{\sqrt{-z}} (z-A)^{-1} \varphi dz = \frac{-1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{f(z)}{z} (z-A)^{-1} (-A)^{-1/2} \varphi dz$$

Lemme 1.12. Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense. On a

$$\overline{D(A)} = \overline{D(-A)^{1/2}}$$

Pour la démonstration voir Haase [8]

1.5 Généralités sur les espaces d'interpolation

Définition 1.9. On dit que deux espaces X et Y forment un couple d'interpolation si tous deux s'injectent continument dans un espace vectoriel normé Z . Autrement dit, ils existent deux constantes positives C_1 et C_2 telles que

$$\|x\|_Z \leq C_1 \|x\|_X \quad \text{et} \quad \|x\|_Z \leq C_2 \|x\|_Y$$

Exemple : $X = H^1(\mathbb{R})$, $Y = W^2(\mathbb{R})$, $Z = L^2(\mathbb{R})$ $X = H^1(\mathbb{R})$

1.5.1 Espaces intersections et sommes

Soient X et Y des espaces de Banach formant un couple d'interpolation, alors $X \cap Y$ et $X + Y$ sont des espaces de Banach si on les munit des normes respectives

$$\|u\|_{X \cap Y} = \max(\|u\|_X, \|u\|_Y)$$

et

$$\|u\|_{X+Y} = \inf_{x+y=u} (\|x\|_X + \|y\|_Y)$$

De plus,

$$X \cap Y \subset X \quad \text{et} \quad Y \subset X + Y$$

avec injections continues.

Preuve. Il est clair que l'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel et que $X \cap Y$ muni de la norme $\| \cdot \|_{X \cap Y}$ est un evn donc complet puisque c'est l'intersection de deux Banach.

Reste à vérifier la complétude de $X + Y$. Alors si l'on pose

$$D = \{(x, -x), x \in X \cap Y\}$$

On a

$$X + Y \approx (X \times Y) / D$$

D étant un espace fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue : $(x, y) \rightarrow x + y$. Par suite $X + Y$ est complet.

Maintenant, X et Y s'injectent continument dans $X + Y$, en effet, par définition des

normes définies sur $X \cap Y$ et $X + Y$

Si $u \in X$

$$\|u\|_{X+Y} \leq \|u\|_X \leq \|u\|_{X \cap Y}$$

Si $v \in Y$

$$\|v\|_{X+Y} \leq \|v\|_Y \leq \|v\|_{X \cap Y}$$

Ce qui établit les injections demandées.

1.5.2 Espaces intermédiaires

Définition 1.10. Soient X et Y deux espaces de Banach, formant un couple d'interpolation.

On appelle espace intermédiaire entre X et Y , tout espace de Banach E vérifiant

$$X \cap Y \subset E \subset X + Y$$

Avec injections continues de $X \cap Y$ dans E et de E dans $X + Y$

Remarque 1.5.1 Quand on établit qu'un espace de Banach est un espace intermédiaire entre X et Y , on cherche toujours à établir une estimation de la forme

$$\|u\| \leq F(\|u\|_X, \|u\|_Y)$$

Où F une fonction strictement positive, et le plus courant de la pratique est celui où la fonction F est de la forme :

$$F(a, b) = Ca^{1-\theta}b^\theta \quad 0 < \theta < 1, C > 0$$

1.5.3 Espaces d'interpolation

Soient X, Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation et soit E un espace intermédiaire entre X et Y

Définition 1.11. On dit que E est un espace d'interpolation entre X et Y , si toute application linéaire de $X + Y$ dans $X + Y$, continue de X dans X et de Y dans Y est continue de E dans E .

Si $T : X + Y \rightarrow X + Y$ linéaire telle que

$$\begin{cases} T : X \rightarrow X \\ \|T\|_{X \rightarrow X} < \infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} T : Y \rightarrow Y \\ \|T\|_{Y \rightarrow Y} < \infty \end{cases}$$

Alors

$$\|T\|_{E \rightarrow E} < \infty$$

L'espace d'interpolation est dit d'exposant θ , ($0 < \theta < 1$) si

$$\|T\|_{E \rightarrow E} < C (\|T\|_{X \rightarrow X})^{1-\theta} (\|T\|_{Y \rightarrow Y})^\theta$$

On note

$$L_*^p(\mathbb{R}_+, E) = L^p\left(\mathbb{R}_+, E, \frac{d\mu}{\mu}\right)$$

Lemme 1.13 (Inégalité de Hardy). Soient H et L deux opérateurs définis par

$$\begin{cases} (Hf)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \\ (Lf)(x) = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} f(t) dt \end{cases}$$

On note

$$L_\alpha^p = \left\{ f \in L^p(0, +\infty) : \int_0^{+\infty} |t^\alpha f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

i) Si $\frac{1}{p} + \alpha < 1$, alors $H \in \mathcal{L}(L_\alpha^p, L_\alpha^p)$ et

$$\|H\| \leq \left(1 - \alpha - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

ii) Si $\frac{1}{p} + \alpha > 1$, alors $L \in \mathcal{L}(L_\alpha^p, L_\alpha^p)$ et

$$\|L\| \leq \left(\frac{1}{p} + \alpha - 1\right)^{-1}$$

Définition 1.12. Soient E_0 et E_1 deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique Z .

Pour $p \geq 1$ et $0 < \theta < 1$, on dit que

$$u \in (E_0, E_1)_{\theta, p}$$

si et seulement si

i) $\forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1$ tels que

$$u = u_0(t) + u_1(t)$$

ii) $t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0)$ et $t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1)$

Avec les définitions usuelles lorsque $p = \infty$

On peut aussi définir les espaces d'interpolation $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ par

Définition 1.13. On définit la fonction K de Lions par

$$t > 0, K(t, x, E_0, E_1) = \inf_{\substack{x=a+b \\ a \in E_0, b \in E_1}} (\|a\| + t\|b\|)$$

Pour $p \geq 1$ et $0 < \theta < 1$, on définit l'espace d'interpolation réelle $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ par

$$\left\{ \begin{aligned} (E_0, E_1)_{\theta, p} &= \left\{ x \in E_0 + E_1 : t \mapsto t^{-\theta} K(t, x, E_0, E_1) \in L_*^p(0, +\infty) \right\} \\ \|x\|_{\theta, p} &= \left\| t^{-\theta} K(t, x, E_0, E_1) \right\|_{L_*^p(0, +\infty)} \end{aligned} \right.$$

Définition 1.14. Pour $p \geq 1$ et $0 < \theta < 1$, on définit l'espace $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ par

$$u \in (E_0, E_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \exists u(t) \in E_0 \cap E_1 : u = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \\ e^{-\alpha t} u \in L^p(\mathbb{R}, E_0); e^{(1-\alpha)t} u \in L^p(\mathbb{R}, E_1) \end{aligned} \right.$$

Avec une éventuelle modification lorsque $p = \infty$

Remarque 1.5.2 Les définitions 1.12, 1.13 et 1.14 sont équivalentes

Proposition 1.6 l'espace $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ muni de la norme

$$\|u\|_{\theta, p} = \inf_{\substack{u_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow E_i, i=0,1 \\ u = u_0(t) + u_1(t)}} \left\{ \left\| t^{-\theta} u_0 \right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0)} + \left\| t^{1-\theta} u_1 \right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1)} \right\}$$

est un espace de Banach vérifiant

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta, p} \subset E_0 + E_1$$

Avec injection continues.

$(E_0, E_1)_{\theta, p}$ est donc un espace intermédiaire entre $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$

Propriétés

- Pour tout $0 < \theta < 1$ et $p \geq 1$

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} = (E_1, E_0)_{1-\theta, p}$$

- Si $E_0 \subset E_1$, pour $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$

$$(E_0, E_1)_{\theta_2, +\infty} \subset (E_0, E_1)_{\theta_1, 1}$$

En particulier, pour tout $p \geq 1$

$$(E_0, E_1)_{\theta_2, p} \subset (E_0, E_1)_{\theta_1, p}$$

- Pour $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta, p_1} \subset (E_0, E_1)_{\theta, p_2} \subset (E_0, E_1)_{\theta, +\infty} \subset E_0 + E_1$$

L'espace $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ est un espace d'interpolation est une conséquence du théorème suivant

Théorème 1.1 (théorème d'interpolation réelle abstraite). Soient (X_0, X_1) et (Y_0, Y_1) deux couples d'interpolation. $T : X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$ un opérateur tel que

$$\begin{cases} T \in \mathcal{L}(X_0, Y_0) \\ T \in \mathcal{L}(X_1, Y_1) \end{cases}$$

Alors, pour tous $\theta \in (0, 1)$ et $p \in [1, +\infty[$

$$T \in \mathcal{L}\left((X_0, X_1)_{\theta, p}, (Y_0, Y_1)_{\theta, p}\right)$$

De plus, on a l'estimation suivante

$$\|T\|_{\mathcal{L}\left((X_0, X_1)_{\theta, p}, (Y_0, Y_1)_{\theta, p}\right)} \leq \|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}^{1-\theta} \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1}^{\theta}$$

Cas particulier. Pour $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ prendre $X_0 = Y_0 = E_0$ et $X_1 = Y_1 = E_1$

Exemple 1.5.1

On désigne par $C_b(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues bornées sur \mathbb{R}^n muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$ et par $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des fonctions continues de classe C^k dont les différentielles sont bornées sur \mathbb{R}^n , muni de la norme

$$\|f\|_{\infty} + \sum_1^k \|D_i f\|_{\infty}$$

Pour $0 < \theta < 1$ et $p \geq 1$, on désigne par $W^{\theta, p}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$[f]_{W^{\theta, p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{\theta p + n}} dx dy \right)^{1/p} < \infty$$

Muni de la norme

$$\| \cdot \|_{W^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)} = \| \cdot \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + [\cdot]_{W^{\theta,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$C^\theta(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder des fonctions continues $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$[f]_{C^\theta(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\theta} < +\infty$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_\infty + [f]_{C^\theta(\mathbb{R}^n)}$$

Alors

$$\begin{aligned} (C_b(\mathbb{R}^n), C_b^k(\mathbb{R}^n))_{\theta, +\infty} &= C^\theta(\mathbb{R}^n) \\ (L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta, p} &= W^{\theta,p}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

1.5.4 Méthodes d'interpolation

Il existe deux méthodes qui caractérisent l'interpolation la **K-Méthode** et la **J-Méthode**

Définition 1.13. Soit $\theta \in (0,1)$ et E un espace intermédiaire entre X et Y

i) E est dit de classe J_θ entre X et Y s'il existe une constante c telle que

$$\forall x \in X \cap Y, \quad \|x\|_E \leq c \|x\|_X^{1-\theta} \|x\|_Y^\theta$$

Notation $J_\theta(X, Y)$

ii) E est dit de classe K_θ'' entre X et Y s'il existe $k > 0$ telle que

$$K(t, x) \leq k t^\theta \|x\|_E$$

où $K(t, x)$ désigne la fonction de Lions

$$K(t, x) = \inf_{x=u+v} (\|u\|_X + t\|v\|_Y), \quad t > 0$$

Notation $K_\theta''(X, Y)$

Caractérisation de la classe J_θ

Proposition 1.7 Soit E un espace intermédiaire entre X et Y . Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- i) E est de classe $J_\theta(X, Y)$
- ii) $(X, Y)_{\theta, 1} \subset E$

Définition 1.14 Soit E un espace intermédiaire entre X et Y . E est dit de classe K_θ entre X et Y si

$$(X, Y)_{\theta, 1} \subset E \subset (X, Y)_{\theta, +\infty}$$

Autrement dit

$$K_\theta(X, Y) = J_\theta(X, Y) \cap K_\theta''(X, Y)$$

Exemple 1.5.2 $C^1(\mathbb{R}^n) \in K_{1/2}(C(\mathbb{R}^n), C^2(\mathbb{R}^n))$ par contre $C^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un espace d'interpolation entre $C^1(\mathbb{R}^n)$ et $C^2(\mathbb{R}^n)$

1.5.5 Procédés de réitération

Théorème 1.2 Soient θ_0, θ_1 tels que $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$ et $\theta \in [0, 1]$. Si $E_i, i = 0, 1$ sont respectivement de classe K_{θ_i} entre X et Y alors

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1, p}$$

Relation de commutation. Il est facile de voir que

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1, p} \text{ si et seulement si } (X, Y)_{\theta, p} = (E_0, E_1)_{\frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}, p}$$

Exemples 1.5.2

$$(C^{\theta_1}(\mathbb{R}^n), C^{\theta_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta, +\infty} = C^{(1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2}(\mathbb{R}^n)$$

Plus généralement, si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} (C^{\theta_1}(\bar{\Omega}), C^{\theta_2}(\bar{\Omega}))_{\theta, +\infty} &= C^{(1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2}(\bar{\Omega}) \\ (L^{p_0, q_0}(\Omega), L^{p_1, q_1}(\Omega))_{\theta, p} &= L^{p, q}(\Omega) \end{aligned}$$

Avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

1.5.6 Interpolation des opérateurs linéaires

Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$. On définit les espaces d'interpolations $D_A(\theta, p)$ par

$$D_A(\theta, p) = (D(A), E)_{1-\theta, p} = (E, D(A))_{\theta, p}$$

Eventuellement

$$D_A(\theta, +\infty) = (D(A), E)_{1-\theta, +\infty}$$

Proposition 1.8. Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$. on suppose que

$$\rho(A) \supset (0, +\infty), \quad \exists M > 0, \quad \forall \lambda > 0 \quad \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq M$$

Alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in E : \lambda \rightarrow \lambda^\theta A(\lambda - A)^{-1} \in L^p(\mathbb{R}_+, E) \right\}$$

Eventuellement

$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{ \varphi \in E : \sup_{\lambda > 0} \left\| \lambda^\theta A(\lambda - A)^{-1} \varphi \right\| < \infty \right\}$$

Preuve. Soit $x \in D_A(\theta, p)$ tel que

$$\begin{cases} u_0(t) \in D(A), u_1(t) \in E \\ x = u_0(t) + u_1(t), t > 0 \end{cases}$$

Alors

$$A(\lambda - A)^{-1} x = (\lambda - A)^{-1} A u_0(t) + A(\lambda - A)^{-1} u_1(t)$$

Par suite

$$\begin{aligned} \left\| \lambda^\theta A(\lambda - A)^{-1} x \right\| &\leq M \lambda^{\theta-1} \|A u_0\| + (M+1) \lambda^\theta \|u_1\| \\ &\leq (M+1) \lambda^\theta K(\lambda^{-1}, x, D(A), E) \end{aligned}$$

Par le changement de variable $t = \lambda^{-1}$ on déduit facilement

$$\lambda \mapsto \lambda^\theta A(\lambda - A)^{-1} x \in L_*^p(0, +\infty)$$

Réciproquement, soit $x \in L_*^p(0, +\infty)$

$$x = -A(\lambda - A)^{-1} x + \lambda(\lambda - A)^{-1} x = a_\lambda + \lambda b_\lambda$$

Alors

$$\|a_\lambda\| + \lambda \|b_\lambda\| \leq \left\| A(\lambda - A)^{-1} x \right\| + \lambda \left\| (\lambda - A)^{-1} x \right\|_{D(A)}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \lambda^\theta K(\lambda^{-1}, x, D(A), E) &\leq \lambda^\theta (\|a_\lambda\| + \|b_\lambda\|) \\ &\leq \lambda^\theta \left(2 \left\| A(\lambda - A)^{-1} x \right\| + \left\| (\lambda - A)^{-1} x \right\| \right) \\ &\leq c \lambda^\theta \|x\| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hardy

$$\begin{aligned} \lambda^\theta \|x\| \in L_*^p(1, +\infty) &\Leftrightarrow \lambda^{\theta+1} \frac{\|x\|}{\lambda} \in L_*^p(1, +\infty) \\ &\Leftrightarrow \left(\lambda^{\theta+1-1/p} \|x\| \right) \in L^p(1, +\infty) \\ &\Leftrightarrow \|x\| \in L_*^p(1, +\infty) \end{aligned}$$

Par suite

$$\lambda^\theta K(\lambda^{-1}, x, D(A), E) \in L_*^p(1, +\infty)$$

Par le changement de variable $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$, on montre de la même manière

$$\lambda^{-\theta} K(\lambda, x, D(A), E) \in L_*^p(0, 1)$$

Finalement, $x \in D_A(\theta, p)$

Définition 1.15 Pour $0 < \theta < 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\begin{cases} D_A(\theta + k, p) = \{x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta, p)\} \\ \|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\| + \|A^k x\|_{D_A(\theta,p)} \end{cases}$$

On rappelle que dans le cas particulier où $k = 2$

$$D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$$

Muni de la norme

$$\|x\|_{D(A^2)} = \|x\|_E + \|Ax\|_E + \|A^2x\|_E$$

$D(A^2)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.9 Pour $0 < \theta < 1$ et $p \geq 1$

$$D_A(\theta, p) = (D(A^2), D(A))_{1-\theta, p}$$

Preuve. il suffit de voir que l'application $(I - A)^{-1}$ est un isomorphisme de E dans $D(A)$ et un isomorphisme de $D(A)$ dans $D(A^2)$. Par le théorème 1.1, $(I - A)^{-1}$ est aussi un isomorphisme de $D_A(\theta, p)$ vers $(D(A^2), D(A))_{1-\theta, p}$. ■

1.5.7 Caractérisation des espaces d'interpolation entre E et $D(A^2)$

Proposition 1.10 Sous les mêmes conditions que la proposition 1.8

$$D(A) \in K_{1/2}(D(A^2), E)$$

et si $\theta \neq 1/2$

$$(D(A^2), E)_{\theta, p} = D_A(2\theta, p)$$

Preuve. Soit $x \in D(A^2) \subset D(A)$, $x = (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x$, alors

$$Ax = (\lambda - A)^{-1}A^2x - \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax$$

Par l'identité de la résolvante

$$\|Ax\|_E \leq \frac{M}{\lambda} \|A^2x\|_E + \lambda(M+1) \|x\|_E$$

Le premier terme ne dépend pas de λ , alors

$$\|Ax\|_E \leq \min_{\lambda > 0} \left(\frac{M}{\lambda} \|A^2x\|_E + \lambda(M+1) \|x\|_E \right)$$

$$\|Ax\|_E \leq 2(M(M+1))^{1/2} \|A^2x\|^{1/2} \|x\|^{1/2}$$

Mais $Ax \in D(A)$, alors

$$\|x\|_{D(A)} \leq c \|x\|^{1/2} \|x\|_{D(A^2)}^{1/2}$$

Par suite

$$D(A) \in J_{1/2}(D(A^2), E)$$

Reste à montrer que

$$D_A(\theta, p) \in K''_{1/2}(D(A^2), E)$$

Pour $x \in D(A)$, On écrit

$$x = \lambda(\lambda - A)^{-1}x - (\lambda - A)^{-1}Ax$$

Avec

$$\|(\lambda - A)^{-1}Ax\| \leq \frac{M}{\lambda} \|x\|_{D(A)}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_{D(A^2)} &= \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\| + \|\lambda A(\lambda - A)^{-1}Ax\| \\ &\leq M\|x\| + \lambda(M+1)\|Ax\| \end{aligned}$$

Alors en prenant $\lambda = t^{-2}$, on trouve

$$K(t, x, D(A^2), E) \leq Mt^{1/2} \|x\|_{D(A)} + Mt\|x\| + (M+1)t^{1/2} \|Ax\|$$

Comme on peut le remarquer la fonction $t \mapsto K(t, x, D(A^2), E)$ est borné sur $[0,1]$ et

$$K(t, x, D(A^2), E) \leq (2M+1)\|x\|_{D(A)}$$

Par le changement de variable $t \mapsto t^{-1}$, la fonction $t \mapsto K(t, x, D(A^2), E)$ est borné sur $[1, +\infty[$, alors

$$D(A) \in K''_{1/2}(D(A^2), E)$$

Supposons que $\theta \neq 1/2$. Par l'application du théorème de réitération 1.2 et par un choix convenable des espaces E_0 et E_1 , on a

Si $E_0 = D(A^2)$, $E_1 = D(A)$ alors

$$E_0 \in K_0(D(A^2), E) \text{ et } E_1 \in K_{1/2}(D(A^2), E)$$

Pour $0 < \alpha < 1$

$$\left(D(A^2), D(A)\right)_{\alpha, p} = \left(D(A^2), E\right)_{(1-\alpha)0 + \frac{\alpha}{2}, p} = \left(D(A^2), E\right)_{\frac{\alpha}{2}, p}$$

Pour $\alpha = 2\theta$, la suite est immédiate

Maintenant , si

$$E_0 = D(A) \text{ et } E_1 = E$$

Alors

$$(D(A), E)_{\alpha, p} = (D(A^2), E)_{\frac{1+\alpha}{2}, p}$$

On conclut facilement pour $\alpha + 1 = 2\theta$, $1/2 < \theta < 1$. Il suffit de se rappeler que

$$(D(A), E)_{1-\alpha, p} = D_A(\alpha, p)$$

Pour plus de détails voir Lunardi [19] et [20]

1.6 Semigroupes

1.6.1 Semigroupes fortement continus

Définition 1.16 soit E un espace de Banach. On dit qu'une famille d'opérateurs linéaires bornés $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semigroupe fortement continu si les trois conditions suivantes sont vérifiées

- i) Pour tous $t \geq 0, s \geq 0$ $S(t+s) = S(t)S(s)$
- ii) $S(0) = I_E$
- iii) Pour tout $x \in E$, l'application $t \rightarrow S(t)x$ est continue de $]0, +\infty[$ dans E

Un semigroupe fortement continu est appelé C_0 semigroupe

La continuité de l'application $t \rightarrow S(t)x$ n'entraîne pas en général que l'application $t \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(E)$ est continue. Pour le voir il suffit de considérer $E = L^p(\mathbb{R})$ et pour $t \geq 0$, on définit $S(t) = \tau_t$ par

$$\tau_t(u(x)) = u(x-t)$$

Il est clair que $S(t)$ est un C_0 semigroupe. Par contre si l'on considère u , l'indicatrice du segment $[0, t[$

$$\tau_t(u(x)) = u(x-t) = \begin{cases} x-t & x \in [t, 2t[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\|u\|_{L^p} = \frac{t^{p+1}}{p+1}$$

et

$$\|\tau_t - I\| \geq \frac{1}{2^p} \text{ qui ne tend pas vers } 0$$

Définition 1.17 soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un C_0 semigroupe. Le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire de domaine $D(A)$, défini par

$$D(A) = \left\{ \varphi \in E : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$\forall \varphi \in D(A) \quad A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)\varphi - \varphi}{t}$$

Théorème 1.2 Soient $(S(t))_{t \geq 0}$, $(T(t))_{t \geq 0}$ deux C_0 semigroupes. Si A, B sont deux générateurs de $(S(t))_{t \geq 0}$, $(T(t))_{t \geq 0}$ telles que $A = B$, alors $(S(t))_{t \geq 0} = (T(t))_{t \geq 0}$

Un semigroupe est donc caractérisé par son générateur infinitésimal.

Le théorème suivant caractérise le générateur infinitésimal d'un semigroupe

Théorème 1.3 Soit A le générateur infinitésimal du C_0 semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$. Alors

1. Pour tout $t \geq 0$, $D(A)$ est stable par $(S(t))_{t \geq 0}$ et pour tout $\varphi \in D(A)$

$$AS(t)\varphi = S(t)A\varphi$$

2. $D(A)$ est dense dans E
3. A est un opérateur fermé

Question : Etant donné un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach E . A quelle condition est-il le générateur infinitésimal d'un semigroupe

Théorème 1.4 Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe est

- i) A est fermé densément défini
- ii) $\exists \omega \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda > \omega \quad \lambda \in \rho(A)$, et pour tout entier n , il existe un réel positif M pour lequel

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

Exemple. On prend $E = C([0, \pi])$ et l'on définit l'opérateur A par

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in C^2([0, \pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\} \\ Af = f'' \end{cases}$$

On montre que A vérifie ii) mais le domaine de A n'est pas dense dans E car

$$\overline{D(A)} = \{f \in C([0, \pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$$

Alors A n'est pas un générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe.

1.6.2 Semigroupes analytiques

Définition 1.18 un semigroupe analytique est une famille $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés sur E et vérifiant

- i) $T(0) = I_E$
- ii) Pour tous $t, s \geq 0$, $T(t+s) = T(t)T(s)$
- iii) Pour tout $x \in E$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$
- iv) Pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est analytique

Le théorème suivant donne une caractérisation des semigroupes analytiques

Théorème 1.5 Soit A un opérateur linéaire vérifiant

1. A est fermé densément défini
2. $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. $\exists L > 0 \quad \forall \lambda \in \rho(A) :$

$$\|R(\lambda, A)\|_{L(E)} \leq \frac{L}{|\lambda|}$$

Alors A est générateur infinitésimal d'un semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$ vérifiant

- i) $\exists M > 0 \quad \forall t > 0, \quad \|T(t)\| \leq M$
- ii) $\forall t > 0, T(t) \in L(E, D(A))$ et

$$\|AT(t)\|_{L(E)} \leq \frac{M}{t}$$

On a déjà rappelé la définition des opérateurs sectoriels. En voici l'application

Théorème 1.6 soit A un opérateur linéaire. Alors $-A$ est sectoriel si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique $(T(t))_{t > 0}$ donné par

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda$$

Avec (γ) un contour simple dans $\rho(A)$ et $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\arg \lambda| = \theta$, $\theta \in]\pi/2, \pi[$

Maintenant on intéresse au cas où le domaine $D(A)$ n'est pas dense dans E .

Soit A un opérateur vérifiant

1. ils existent $\varphi \in]\pi/2, \pi[$ et $M > 0$ tels que

$$\rho(A) \supset \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \varphi\}$$

2. Pour tout $\lambda \in S_\varphi$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

D'après le théorème 1.5, si $D(A)$ est dense dans E alors A est générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique. Mais si n'est pas dense, on peut définir une application de $]0, +\infty[$ vers $\mathcal{L}(E)$ par

$$e^{At} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda$$

Où est une courbe entourant le spectre $\sigma(A)$ de A .

On pose :

$$e^{A0} = I_E$$

L'application ainsi construite possède les propriétés suivante

1. Pour tous $t, s > 0$

$$e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$$

2. pour tous $t > 0$

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$$

3. $t \mapsto e^{At}$ est analytiquement prolongeable dans un secteur contenant le demi-axe réel positif

4. Si $x \in D(A)$,

$$Ae^{At}x = e^{At}Ax$$

5. $t \mapsto e^{At}$ commute avec la résolvante

$$R(\lambda, A)e^{At} = e^{At}R(\lambda, A)$$

Définition 1.19 l'application ainsi construite est appelée semigroupe analytique généralisé.

Notation

$$(e^{At})_{t>0}$$

L'une des plus importantes conséquences est la proposition suivante, utile par la suite

Proposition 1.11 Soit $(e^{At})_{t>0}$ un semigroupe généralisé.

1. Si $x \in \overline{D(A)}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{At}x = x$

Inversement si $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{At}x = y$ et $x \in \overline{D(A)}$, alors $y = x$

2. si $x \in D(A)$ et $Ax \in \overline{D(A)}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{At}x - x}{t} = Ax$

1.7 L'opérateur d'impédance

1.7.1 Exemple illustratif

Deux barres rigides A et B de coefficients de conductivité σ_A et σ_B distincts sont mises bout à bout. On suppose que $\sigma_A < \sigma_B$, alors la diffusion de la chaleur de A vers B subit au niveau de la jonction de ces deux barres un obstacle ou plus précisément une résistance qui crée au niveau de la jonction une zone appelée zone d'impédance par analogie au courant électrique.

Pour pouvoir modéliser la diffusion de la chaleur au niveau de la jonction, une nouvelle condition aux limites a été introduite, c'est la condition d'impédance.

Mais cette nouvelle condition trouva son essor dans la théorie de la diffraction des ondes, citons à titre d'exemple la pénétration d'une onde dans un matériau parfait dont la surface est recouverte d'une fine couche diélectrique.

Historiquement, elle a été introduite par Leontovitch. Pour plus d'amples renseignements, on peut consulter le livre de B.Engquist et J.C.Nedelec : Effective boundary conditions for electromagnetic scattering in thin layers.

On peut aussi consulter le thème de C.Casenave et E.Montseny : Opérateur d'impédance sur frontière circulaire pour l'équation des ondes.

1.7.2 Expression de la condition d'impédance

Une manière d'écrire la condition d'impédance est $\mathcal{F}(u / \partial\Omega, \partial_n u / \partial\Omega) = 0$, où $\partial\Omega$ désigne le bord du domaine Ω , $\partial_n u$ la dérivée suivant la normale à Ω et \mathcal{F} un opérateur linéaire.

On démontre et nous l'admettrons qu'il existe une condition d'impédance particulière pour laquelle, la restriction à Ω de toute solution u du problème posé sur tout le plan coïncide avec une solution u_0 du problème sur Ω .

Dans ce cas, la condition d'impédance est la trace de Borin de la solution u sur $\partial\Omega$.

Autrement dit,

$$u / \partial\Omega = Z(\partial_n u / \partial\Omega)$$

ou d'une manière équivalente

$$\partial_n u / \partial\Omega = T(u / \partial\Omega)$$

Avec $T = Z^{-1}$ est l'opérateur d'admittance.

Dans notre cas, la condition d'impédance s'écrit :

$$u'(0) = T_\delta(u(0))$$

Chapitre 2

Problème aux limites et transmission : Cas scalaire

On considère le problème aux limites et transmission suivant :

$$(P^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + zu_-^\delta(x) = g_-(x) & x \in]-1, 0[\\ (u_+^\delta)''(x) + zu_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & x \in]0, \delta[\\ (cl) \begin{cases} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{cases} \\ (ct) \begin{cases} u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0) \\ p_-(u_-^\delta)'(0) = p_+(u_+^\delta)'(0) \end{cases} \end{cases}$$

La méthode utilisée consiste à résoudre le problème (P_+^δ) défini sur $[0, \delta]$ comme suit :

$$(P_+^\delta) : \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + zu_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & x \in]0, \delta[\\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{cases}$$

où $z \in \Sigma_{\theta_0} = \{\lambda : |\arg \lambda| > \theta_0\}$, f_-, f_+^δ des données dans un Banach complexe

$E, g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ et ψ un paramètre auxiliaire qui sera explicité plus loin. Ensuite, on

résout le problème (P_-^δ) sur le domaine fixe $[-1, 0]$, où (P_-^δ) est défini comme suit

$$(P_-^\delta) : \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + zu_-^\delta(x) = g_-(x) & x \in]-1, 0[\\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)) \end{cases}$$

où $z \in \Sigma_{\theta_0}$, f_-, f_+^δ des données dans un Banach complexe E , $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ et ψ un paramètre auxiliaire qui sera explicité plus loin. Ensuite, on résout le problème (P_-^δ) sur le domaine fixe $[-1, 0]$, où (P_-^δ) est défini comme suit

$$(P_-^\delta) : \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + zu_-^\delta(x) = g_-(x) & x \in]-1, 0[\\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)) \end{cases}$$

Avec f_- une donnée dans E , $p = p_+ / p_-$ un scalaire strictement positif, $g_- \in C([-1, 0]; E)$ et $T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0))$ (égal à $T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0))$) est l'opérateur d'impédance dont l'avantage est de transporter avec précision les informations requises sur le problème (P_+^δ) vers (P_-^δ) .

Vu les conditions aux limites, il est bon de se rappeler que le problème (P_+^δ) ainsi que (P_-^δ) ne peuvent se ramener à un problème d'ordre 1 de Cauchy.

2.1 Résolution du problème modèle

Comme on peut le remarquer, la similitude entre les deux problèmes (P_+^δ) et (P_-^δ) incite à résoudre un problème plus général noté (P) :

$$(P) : \begin{cases} u''(x) + zu(x) = g(x) & \text{sur }]a, b[\\ u(a) = \omega \\ u'(b) = \mu \end{cases}$$

Avec ω, μ deux données dans E et $g \in C([a, b]; E)$. z un complexe dans Σ_{θ_0} .

La solution générale du problème (P) homogène est de la forme :

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-z}x} + Be^{-\sqrt{-z}x}$$

où A, B sont deux constantes et $\sqrt{-z}$ est la détermination principale de la racine carrée définie par

La méthode de la variation de la constante donne :

$$\begin{cases} A'(x)e^{\sqrt{-z}x} + B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} = 0 \\ \sqrt{-z}A'(x)e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} = g(x) \end{cases}$$

Le déterminant du système est non nul. Le système admet une solution unique à savoir :

$$(A'(x), B'(x)) = \left(\frac{1}{2\sqrt{-z}} e^{-\sqrt{-z}x} g(x), -\frac{1}{2\sqrt{-z}} e^{\sqrt{-z}x} g(x) \right)$$

par suite,

$$A(x) = A + \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_a^x e^{-\sqrt{-z}s} g(s) ds, B(x) = B - \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_a^x e^{\sqrt{-z}s} g(s) ds$$

Ce qui donne

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-z}x} + Be^{-\sqrt{-z}x} + \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_a^x \sinh \sqrt{-z}(x-s) g(s) ds$$

A et B sont deux constantes à déterminer selon les conditions initiales du problème (P) :

$$\begin{cases} Ae^{\sqrt{-z}a} + Be^{-\sqrt{-z}a} = \omega \\ A\sqrt{-z}e^{\sqrt{-z}b} - B\sqrt{-z}e^{-\sqrt{-z}b} = \mu - \int_a^b \cosh \sqrt{-z}(b-s) g(s) ds \end{cases}$$

On trouve

$$A = \frac{-e^{-\sqrt{-z}a}}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \int_a^b \cosh \sqrt{-z}(b-s) g(s) ds \\ + \frac{e^{-\sqrt{-z}a}}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \mu + \frac{e^{-\sqrt{-z}b}}{2 \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \omega$$

et

$$B = \frac{e^{\sqrt{-z}a}}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \int_a^b \cosh \sqrt{-z}(b-s) g(s) ds \\ - \frac{e^{\sqrt{-z}a}}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \mu + \frac{e^{\sqrt{-z}b}}{2 \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \omega$$

Finalement, l'expression de la solution u du problème (P) est

$$u(x) = \frac{-1}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \int_a^b \cosh \sqrt{-z}(b-s) \sinh \sqrt{-z}(x-a) g(s) ds \\ + \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_a^x \sinh \sqrt{-z}(x-s) g(s) ds \\ + \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \mu + \frac{\cosh \sqrt{-z}(b-x)}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)} \omega$$

La solution du problème homogène relatif à (P) est

$$x \rightarrow \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \mu + \frac{\cosh \sqrt{-z}(b-x)}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)} \omega$$

Les générateurs sont donc les applications :

$$x \rightarrow \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)}, \quad x \rightarrow \frac{\cosh \sqrt{-z}(b-x)}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)}$$

dont le Wronskien est $W(x) = \frac{-1}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)}$ non nul, alors

Finalement, l'expression de $u(x)$

$$u(x) = \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} \mu + \frac{\cosh \sqrt{-z}(b-x)}{\cosh \sqrt{-z}(b-a)} \omega - \int_a^b G(x,s) g(s) ds$$

dont l'expression du noyau est :

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-z}(s-a) \cosh \sqrt{-z}(b-x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} & a \leq s \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-a) \cosh \sqrt{-z}(b-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(b-a)} & x \leq s \leq b \end{cases}$$

2.2 Le problème (P_+^δ)

La solution du problème (P_+^δ) est donnée par :

$$u_+^\delta(x) = \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta + \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi - \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x,s) g_+^\delta(s) ds$$

Avec

$$K_{z,+}^\delta(x,s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} & x \leq s \leq \delta \end{cases}$$

2.2.1 La condition d'impédance

Un simple calcul de la dérivée de (u_+^δ) (sans le noyau) donne

$$(u_+^\delta)'(0) = \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi - \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \int_0^\delta \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) g_+^\delta(s) ds$$

L'opérateur d'impédance T_δ est l'application :

$$(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \rightarrow T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) = (u_+^\delta)'(0)$$

Par suite

$$\begin{aligned} & T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \\ &= \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi - \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \int_0^\delta \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) g_+^\delta(s) ds \end{aligned}$$

Pour l'étude du comportement de T_δ , on donne la proposition suivante

Proposition 2.1 Soient ψ et f_+^δ dans E , g_+^δ un élément dans $C([0, \delta], E)$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$.

Alors

$$\|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\| \leq C |z|^{1/2} \left[\frac{1}{|z|} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} + \frac{1}{|z|^{1/2}} \|f_+^\delta\| + \|\psi\| \right]$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\| &\leq \int_0^\delta \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} ds \\ &\quad + \frac{\|f_+^\delta\|}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} + |z|^{1/2} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} \|\psi\| \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes techniques précédemment vus, on obtient

$$\begin{aligned} \|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\| &\leq \frac{(1 - e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}) \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}}{|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2) |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} + \frac{2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} \|f_+^\delta\|}{|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} + |z|^{1/2} \frac{1 + e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \|\psi\| \\ &\leq \frac{2|z|^{1/2}}{|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \frac{1}{2|z| \sin(\theta_0/2)} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} + \frac{1}{|z|^{1/2}} \|f_+^\delta\| + \|\psi\| \\ &\leq \frac{2|z|^{1/2}}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \frac{1}{|z|} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} + \frac{1}{|z|^{1/2}} \|f_+^\delta\| + \|\psi\| \end{aligned}$$

D'où la continuité de T_δ , autant que application linéaire opérant sur l'espace produit

$$C([0, \delta[; E) \times E \times E$$

2.3 Solution du problème (P_-^δ)

Le problème avec condition d'impédance s'écrit

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + zu_-^\delta(x) = g_-(x) & x \in]-1, 0[\\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+, f_+, u_-^\delta(0)) \end{cases}$$

avec $z \in \Sigma_{\theta_0}$

Par la résolution du problème modèle (P), la solution du problème (P_-^δ) est donnée par :

$$u_-^\delta(x) = p \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} (u_+^\delta)'(0) + \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}} f_- - \int_{-1}^0 H(x,s) g_-(s) ds$$

Avec

$$H(x,s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1) \cosh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} & -1 \leq s \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} & x \leq s \leq 0 \end{cases}$$

2.4 Solution complète du problème (P^δ)

On doit calculer ψ

$$\begin{aligned} \psi = u_-^\delta(0) &= p \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} f_+^\delta - p \frac{\sinh \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta}{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} \psi \\ &\quad - p \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} \int_0^\delta \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{f_-}{\cosh \sqrt{-z}} - \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} g_-(s) ds \end{aligned}$$

Posons

$$\Delta_z(x, \delta) = \cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}\delta - p \sinh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}\delta$$

Alors, l'expression de ψ est :

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{-1}{\Delta_z(-1, \delta)} \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}} \cosh \sqrt{-z} (\delta - s) g_+^\delta(s) ds \\ & - \frac{1}{\Delta_z(-1, \delta)} \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (s+1)}{\sqrt{-z}} g_-(s) ds \\ & + \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- + p \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta \end{aligned}$$

Le paramètre ψ dépend effectivement de f_- , f_+^δ et de p . Substituant l'expression de ψ dans celle de la représentation de $u_+^\delta(x)$. On obtient

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) = & - \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s) g_+^\delta(s) ds + \frac{\sinh \sqrt{-z} x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} f_+^\delta \\ & \left[- \int_0^\delta \frac{p \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \cosh \sqrt{-z} (\delta - s) g_+^\delta(s) ds \right. \\ & + \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \left. - \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z} (s+1) g_-(s) ds \right. \\ & \left. + \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- + p \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta \right] \end{aligned}$$

Pour $x \in [0, \delta]$, on a

$$\begin{aligned} & p \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} + \frac{\sinh \sqrt{-z} x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} \\ & = \frac{p \cosh \sqrt{-z} x \sinh \sqrt{-z} + \sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} w_z(x, \delta) = p \cosh \sqrt{-z} x \sinh \sqrt{-z} + \sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} \\ x \in [0, \delta] \end{cases}$$

Alors, la solution complète u_+^δ du problème (P_+^δ) est

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) = & - \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x, s) g_+^\delta(s) ds - \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x) \sinh \sqrt{-z} (s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-(s) ds \\ & + \frac{w_z(x, \delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta + \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- \end{aligned}$$

Avec

$$N_{z,+}^\delta(x,s) = \begin{cases} \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} & 0 \leq s \leq x \leq \delta \\ \frac{w_z(x,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} & 0 \leq x \leq s \leq \delta \end{cases}$$

De la même manière que pour u_+^δ , l'expression de la solution u_-^δ du problème (P_-^δ) est

$$u_-^\delta(x) = \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,s) g_-(s) ds + \frac{\Delta_z(x,\delta)}{\Delta_z(-1,\delta)} f_- + \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} f_+^\delta - \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} g_+^\delta(s) ds$$

où

$$K_{z,-}^\delta(x,s) = \begin{cases} -\frac{\Delta_z(x,\delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} & -1 \leq s \leq x \leq 0 \\ -\frac{\Delta_z(s,\delta) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} & -1 \leq x \leq s \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, la solution u du problème (P^δ) est entièrement déterminée. Notons qu'elle n'est pas dérivable en 0 (à cause de la condition d'impédance).

Chapitre 3

Etude du cas abstrait (Synthèse de l'article)

Dans tout ce qui suit, E désignera toujours un espace de Banach complexe, I est l'identité de E . $\|\cdot\|$ désignera toujours la norme sur E .

Après avoir étudié le problème aux limites et de transmission dans le cas scalaire, on se consacre dans ce chapitre à étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte du problème:

$$(P^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x) & \text{sur }]-1, 0[\cup]0, \delta[\\ u^\delta(-1) = f_- & (u^\delta)'(\delta) = f_+ \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+) & (u^\delta)'(0^+) = p(u^\delta)'(0^-) \end{cases}$$

A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans E , indépendant de la variable x , f_- , f_+ des données dans E , δ un paramètre dans $]0, 1[$ et p un scalaire strictement positif et g^δ une application qui vérifie l'hypothèse :

$$(2b) \begin{cases} g_- = g^\delta|_{[-1, 0]} \in C^{2\alpha}([-1, 0], E) \\ g_+ = g^\delta|_{[0, \delta]} \in C^{2\alpha}([0, \delta], E) \end{cases} \quad 0 < 2\alpha < 1$$

Notons alors que $g^\delta \in C^{2\alpha}([-1, \delta], E)$ si et seulement si $g_-(0) = g_+(0)$

En effet soient x, x' tels que $x < 0 < x'$, alors

$$\begin{aligned} \|g^\delta(x) - g^\delta(x')\| &\leq \|g^\delta(x) - g^\delta(0)\| + \|g^\delta(0) - g^\delta(x')\| \\ &\leq \|g_-(x) - g_-(0)\| + \|g_+(0) - g_+(x')\| \\ &\leq C[(x)^{2\alpha} + (-x')^{2\alpha}] \\ &\leq C[(x-x')^{2\alpha} + (x'-x)^{2\alpha}] \\ &\leq C(x-x')^{2\alpha} \end{aligned}$$

Vu les caractéristiques différentes des deux corps, on n'a pas généralement $g_-(0) = g_+^\delta(0)$, donc en plus des conditions de Holderianité (2b), on supposera aussi que

$$g_-(0) \neq g_+^\delta(0)$$

3.1 Résolution du problème (P^δ)

Comme dans le cas scalaire, on introduit un nouveau paramètre auxiliaire noté ψ en posant :

$$u_+^\delta(0) = u_-^\delta(0) = \psi$$

puis on étudiera d'abord le problème aux limites noté aussi (P_+^δ) et défini par

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur }]0, \delta[\\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{cases}$$

qui, une fois résolu, nous permet de déterminer la forme explicite de l'opérateur d'impédance T_δ défini par :

$$(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \rightarrow T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) = (u_+^\delta)'(0)$$

Vu les conditions aux limites, on remarquera que les deux problèmes ainsi posés ne peuvent se ramener à un problème de Cauchy du premier ordre.

On supposera par la suite que l'opérateur A vérifie la condition d'ellipticité (h_1) :

$$\rho(A) \supset]0, +\infty[, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall \lambda \geq 0 \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + \lambda}$$

On rappelle que la condition (h_1) entraîne l'existence de $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ et $\varepsilon_0 > 0$

tels que :

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Sigma_{\theta_0} = \{z : |\arg z| < \theta_0\} \cup \overline{B(0, \varepsilon_0)} \\ \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + \lambda} \\ \theta_0 = \arg \lambda \end{cases}$$

Proposition 3.1. Soit A un opérateur linéaire fermé vérifiant l'hypothèse (h_1) . Alors $-\sqrt{-A}$ est générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique non nécessairement fortement continu en zéro.

Pour la démonstration de cette proposition voir Grisvard [8]

3.2 Résolution du problème (P_+^δ)

La méthode utilisée pour étudier le problème (P_+^δ) est essentiellement basée sur une construction formelle de la représentation de la solution sous la forme d'une intégrale de Dunford comme dans Labbas-Terreni [12], Labbas [13] et sur l'utilisation des espaces d'interpolations notamment les espaces Holderien.

3.2.1 Représentation de la solution du problème (P_+^δ)

Comme dans [7], [12] et [13], la solution du problème (P_+^δ) est donnée formellement par :

$$\begin{aligned}
 u_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi dz \\
 &+ \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}} (A - z)^{-1} f_+^\delta dz \quad (3.4) \\
 &- \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x,s) (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
 &= d_+^\delta(x, A) \psi + n_+^\delta(x, A) f_+^\delta + v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)
 \end{aligned}$$

Avec le noyau de Green

$$K_{z,+}^\delta(x,s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} & x \leq s \leq \delta \end{cases}$$

(γ) est la frontière du domaine Σ_{θ_0} orienté positivement de $+\infty e^{i\theta_0}$ vers $-\infty e^{-i\theta_0}$.

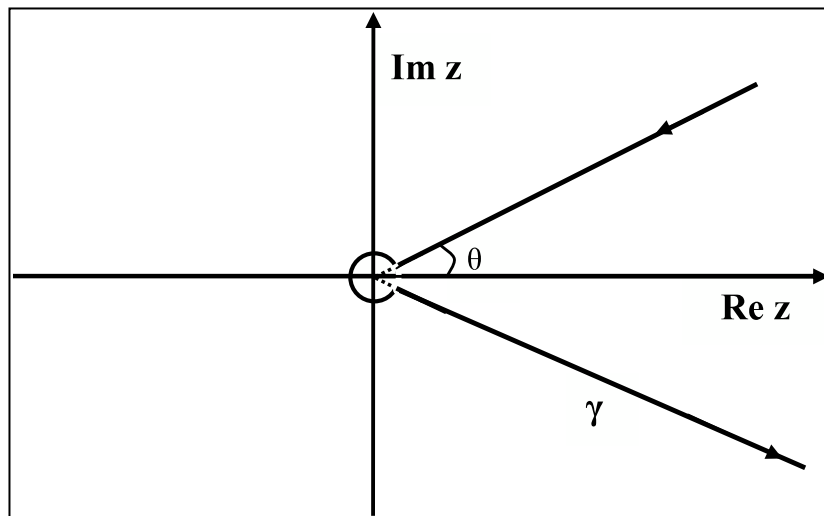


FIG 3.1

3.2.2 Représentation de la solution par les semigroupes

Sous l'hypothèse d'ellipticité (h_1) , l'opérateur $-(-A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique non nécessairement fortement continu en zéro

$$\left(e^{-x\sqrt{-A}} \right)_{x \geq 0}$$

Défini pour $x > 0$ par

$$e^{-(-A)^{1/2}x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{\lambda x} (-(-A)^{1/2} - \lambda)^{-1} x d\lambda$$

(γ) est une courbe entourant le spectre de $(-A)^{1/2}$.

Alors en utilisant l'intégrale de Dunford-Riesz

$$h(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} h(z)(A - z)^{-1} dz$$

h étant holomorphe dans le domaine Σ_{θ_0} , chaque terme de la représentation de la solution $u_+^\delta(\cdot)$ peut être réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} d_+^\delta(x, A)\psi &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\sqrt{-z}x} (1 + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-z}})}{(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta})} (A - z)^{-1} \psi dz \\ &= (I + e^{-2\delta\sqrt{-A}})^{-1} (I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}}) e^{-x\sqrt{-A}} \psi \end{aligned}$$

Par Lunardi [21], l'opérateur

$$\left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)$$

est bien défini, et admet un inverse borné.

De même

$$\begin{aligned} n_+^\delta(x, A)f_+^\delta &= \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)^{-1} \left(I - e^{-2x\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+^\delta \end{aligned}$$

Pour $v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)$, on rappelle que

$$\begin{aligned} v_+^\delta(x, A, g_+^\delta) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{\sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta}$$

$$= I_1 + I_2$$

Alors

$$I_1 + I_2 =$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^x \frac{(1 - e^{-2s\sqrt{-z}})(1 + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-z}}) e^{-(x-s)\sqrt{-z}}}{2(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}})} \frac{A(A-z)^{-1} g_+^\delta(s)}{\sqrt{-z}} ds dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{(1 - e^{-2x\sqrt{-z}})(1 + e^{-2(\delta-s)\sqrt{-z}}) e^{-(s-x)\sqrt{-z}}}{2(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}})} \frac{A(A-z)^{-1} g_+^\delta(s)}{\sqrt{-z}} ds dz$$

Ce qui donne

$$I_1 + I_2$$

$$= -\frac{1}{2} T^{-1} (I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}}) (-A)^{-1/2} \int_0^x (I - e^{-2s\sqrt{-A}}) e^{-(x-s)\sqrt{-A}} g_+^\delta(s) ds$$

$$-\frac{1}{2} T^{-1} (I - e^{-2x\sqrt{-A}}) (-A)^{1/2} \int_x^\delta (I + e^{-2(\delta-s)\sqrt{-A}}) (e^{-(s-x)\sqrt{-A}}) g_+^\delta(s) ds$$

où l'on a posé

$$T = (I + e^{-2\delta\sqrt{-A}})$$

Finalement

$$u_+^\delta(x)$$

$$= \left((I + e^{-2\delta\sqrt{-A}}) \right)^{-1} (I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}}) e^{-x\sqrt{-A}} \psi$$

$$+ \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)^{-1} (I - e^{-2x\sqrt{-A}}) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+^\delta$$

$$-\frac{1}{2} T^{-1} (I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}}) (-A)^{-1/2} \int_0^x (I - e^{-2s\sqrt{-A}}) e^{-(x-s)\sqrt{-A}} g_+^\delta(s) ds$$

$$-\frac{1}{2} T^{-1} (I - e^{-2x\sqrt{-A}}) (-A)^{1/2} \int_x^\delta (I + e^{-2(\delta-s)\sqrt{-A}}) (e^{-(s-x)\sqrt{-A}}) g_+^\delta(s) ds$$

3.2.3 Etude de la convergence des intégrales

L'existence de la solution du problème posé est liée à la convergence en norme des intégrales dans l'expression (3.4) de $u_+^\delta(x)$

Pour $v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)$

En tenant compte du lemme 1.1 et 1.3 et de la condition d'ellipticité (h₁), on a

$$\begin{aligned}
\|v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_0^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s)}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_0^x \frac{e^{s \operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{(\delta-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{e^{x \operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{(\delta-s) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{|z|^2 \sin(\theta_0 / 2) |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{2 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta-x)} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{|z|^2 |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}| \sin(\theta_0 / 2)} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}
\end{aligned}$$

Par le lemme 1.5, on a

$$\|v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)\| \leq \frac{1}{\pi C_{\theta_0} \sin(\theta_0 / 2)} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^2} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \leq C \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}$$

Pour $n_+^\delta(x, A) f_+^\delta$

$$\begin{aligned}
\|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\| &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-(\delta-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{3/2} C_{\theta_0}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|f_+^\delta\|_E \leq C \|f_+^\delta\|_E
\end{aligned}$$

Pour $d_+^\delta(x, A) \psi$

Soit $x \in]0, \delta[$. On découpe le contour (γ) en

$$\gamma_+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{x^2} \right\} \quad \text{et} \quad \gamma_- = \left\{ z \in \gamma : \varepsilon_0 \leq |z| \leq \frac{1}{x^2} \right\}$$

Alors, en posant $\sigma = |z|^{1/2} x$, on déduit

$$\begin{aligned} \|d_+^\delta(x, A)\psi\| &\leq C \left(\int_{\gamma_+} \frac{e^{-x \operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| + \int_{\gamma_-} \frac{|dz|}{|z|} \right) \|\psi\| \\ &\leq C \left(2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^{1/x^2} \frac{d\xi}{\xi} \right) \|\psi\| \leq C \|\psi\| \end{aligned}$$

Comme on peut le remarquer l'intégrale converge uniformément sur tout compact inclus dans l'intervalle $]0, \delta[$.

Conclusion. Pour $x \in]0, \delta[$

$$u_+^\delta(x) \in C(]0, \delta[; E)$$

Remarque. Dans toute la suite et selon les cas, on ne tient guère des estimations et l'on désignera toutes par la lettre C

On étudie maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et la régularité de la représentation u^δ de la solution du problème (P^δ)

3.3 Régularité de la solution u^δ

3.3.1 Conditions nécessaires

On dira que u est solution stricte du problème (P^δ) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- a) $u \in C^2([-1, \delta]; E) \cap C([-1, \delta]; D(A))$
- b) u vérifie (P^δ)

Une solution stricte du problème (P^δ) est une solution classique si $D(A) = E$, c'est-à-dire si elle est complètement définie, ce qui ne sera pas réalisé dans notre cas à cause de la densité de $D(A)$.

La proposition suivante va nous donner les conditions nécessaires pour que l'application u^δ définie par

$$u^\delta(x) = \begin{cases} u_-^\delta(x) & -1 \leq x \leq 0 \\ u_+^\delta(x) & 0 \leq x \leq \delta \end{cases}$$

soit solution stricte du problème (3.1)

Proposition 3.2. Soient $g_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ et $g_+ \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$, $0 < 2\alpha < 1$

On suppose que

$$\begin{cases} u_-^\delta \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A)) \\ u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)) \end{cases}$$

Alors, nécessairement

$$\begin{cases} g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \\ Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Preuve. Grace aux majorations précédentes, il est facile de voir que

$$u_+^\delta \in C(]0, \delta[; E)$$

et si l'on suppose que pour tout x appartenant à $[0, \delta]$, on a

$$u(x) \in D(A)$$

alors

$$\begin{aligned} u'(0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(r) - u(0)}{r} \in \overline{D(A)} \\ u''(0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(2r) - 2u(r) + u(0)}{r^2} \in \overline{D(A)} \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{cases} (u_-^\delta)''(0) = g_-(0) - Au_-^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (u_+^\delta)''(0) = g_+^\delta(0) - Au_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Finalement

$$g_-(0) - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$$

De même pour $u''(-1)$, il suffit de remarquer que $u(-1) = f_-$

Pour la suffisance, on étudiera séparément la régularité des deux solutions u_+^δ sur $[0, \delta]$ et u_-^δ sur $] -1, 0[$ et on cherche à montrer qu'il ya des conditions suffisantes de compatibilités entre le second membre g^δ et les données pour que le problème (P^δ) admet une solution stricte. Plus précisément on montrera en premier temps le théorème suivant qui assure l'existence l'unicité et la régularité de la solution u_+^δ sous les conditions de compatibilités

$$\begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Théorème. Soit $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} \psi \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}) \end{cases}$$

Alors

1. u_+^δ de la représentation (3.2) est la solution du problème (P_+^δ) sur $]0, \delta[$.
2. $u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A)) \cap C^2([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Afin de démontrer ce théorème, on doit auparavant expliciter la forme de $Au_+^\delta(x)$

3.4 Expression formelle de $Au_+^\delta(x)$

Les intégrales définies dans la représentation de u_+^δ sont absolument convergentes, alors

$$u_+^\delta(x) \in D(A)$$

On peut donc appliquer l'opérateur A à $u_+^\delta(x)$. Pour cela, on a besoin du résultat suivant

$$\int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x,s) ds = \frac{-1}{z} + \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta}$$

et des lemmes :

Lemme 3.1

$$\int_{\gamma} \frac{(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz = 2i\pi A^{-1} g_+^\delta(x)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_R \cup \Gamma_\theta} \frac{(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz - \int_{\Gamma_\theta} \frac{(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \right) \\ &= 2i\pi A^{-1} g_+^\delta(x) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} (A - \operatorname{Re}^{i\theta})^{-1} d\theta \\ &= 2i\pi A^{-1} g_+^\delta(x) \end{aligned}$$

Avec

$$\gamma_R = \{z \in \gamma : |z| = R\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\theta_0} = \{z \in \gamma : |\arg z| \leq \theta_0, |z| = R\}$$

Lemme 3.2. Soit $f(z)$ une fonction analytique sur le domaine \mathcal{D} , sauf pour un nombre fini de points, continue sur $\partial\mathcal{D}$.

Si pour tout $\alpha > 0$ et r assez grand, on a

$$|f(re^{i\theta})| = o(|r^{-(\alpha+1)}|)$$

Alors,

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| = o\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$$

où

$$C_r = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = r \text{ et } \theta_0 \leq \arg z \leq 2\pi - \theta_0, r > 0 \right\}$$

Preuve. La démonstration de ce lemme ne présente aucune difficulté.

Remarque 3.1 Par le lemme 3.2, dans tout ce qui suit, chaque fois qu'on utilise l'identité de la résolvante, le terme sans la résolvante est nul.

Supposons que $x \in]0, \delta[$, alors

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s)(A-z)^{-1}(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-z)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\ &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s)(A-z)^{-1}(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-z)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &\quad + A^{-1} g_+^\delta(x) \end{aligned}$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer les propositions nécessaires pour la preuve du théorème énoncé précédemment.

Proposition 3.3 Il existe une constante C strictement positive ne dépendant que de (γ) , telle que

1. Pour tout $\psi \in E$ et $x > 0$

$$\|d_+^\delta(x, A)\psi\| \leq C\|\psi\|$$

2. $d_+^\delta(x, A)\psi \rightarrow \psi$ quand $x \rightarrow 0^+$ si et seulement si $\psi \in \overline{D(A)}$

3. $d_+^\delta(\cdot, A)\psi \in C^{2\alpha}([0, \delta])$ si et seulement si $\psi \in D_A(\alpha, +\infty)$

Preuve

1. Comme précédemment, on considère le découpage de γ en

$$\gamma_+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{x^2} \right\} \quad \text{et} \quad \gamma_- = \left\{ z \in \gamma : \varepsilon_0 \leq |z| \leq \frac{1}{x^2} \right\}$$

Puis

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta_0, |z| = 1/x^2 \right\}$$

alors

$$\begin{aligned} & d_+^\delta(x, A)\psi \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi dz + \int_{\gamma_-} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) - \cosh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (A - z)^{-1} \psi dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - z)^{-1} \psi dz \\ &= \sum_1^4 I_j \end{aligned}$$

I_3 est nul par analyticité.

D'autres parts

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{e^{(\delta-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z| e^{\delta \operatorname{Re}\sqrt{-z}} |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} |dz| \|\psi\| \\ &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{e^{-x \operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| \|\psi\| \\ &\leq C \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|\psi\| \leq C \|\psi\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I_2\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{-\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi d\tau dz \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{1/2} |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} d\tau |dz| \|\psi\| \\ &\leq C \int_{\gamma_-} \frac{x}{|z|^{1/2}} |dz| \|\psi\| \\ &\leq C \int_{\varepsilon_0}^{1/x^2} \frac{x d\xi}{\xi^{1/2}} \|\psi\| \end{aligned}$$

$$\leq 2Cx \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\varepsilon_0} \right) \leq C \|\psi\|$$

C ne dépend pas de x ni de δ

$$\begin{aligned} \|I_4\| &\leq C \int_{\Gamma} \frac{|dz|}{|z|} \|\psi\| \leq C \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta \|\psi\| \\ &\leq C \|\psi\| \end{aligned}$$

La convergence uniforme de ces intégrales entraîne la continuité de $d_+^\delta(., A)\psi$ sur $]0, \delta]$

2. Supposons pour le moment que $\psi \in D(A)$. En utilisant l'identité de la résolvante

$$(A - z)^{-1}\psi = \frac{(A - z)^{-1}A\psi}{z} - \frac{\psi}{z}$$

On peut écrire

$$2i\pi d_+^\delta(x, A)\psi = \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)(A - z)^{-1}A\psi}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} dz - \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)\psi}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} dz$$

Le terme sans la résolvante est nul comme on peut le voir en intégrant à gauche de (γ) ,

En effet,

$$\left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} \right| = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Alors,

$$\lim_{x \xrightarrow{\gamma} 0} 2i\pi d_+^\delta(x, A)\psi = \int_{\gamma} \frac{(A - z)^{-1}A\psi}{z} dz$$

Par ailleurs, on sait déjà que (lemme 3.1)

$$\int_{\gamma} \frac{(A - z)^{-1}A\psi}{z} dz = 2i\pi\psi$$

Finalement

$$\lim_{x \xrightarrow{\gamma} 0} d_+^\delta(x, A)\psi = \psi$$

Supposons que $\psi \in \overline{D(A)}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\psi \in D(A)$ tel que

$$\|\psi - y_\psi\| < \varepsilon$$

et

$$d_+^\delta(x, A)\psi - \psi = d_+^\delta(x, A)\psi - d_+^\delta(x, A)y_\psi + d_+^\delta(x, A)y_\psi - y_\psi + y_\psi - f_+^\delta$$

Puisque $(f_+^\delta - \psi) \in D(A)$, alors par l'assertion 1) de la proposition en cours

$$\|d_+^\delta(x, A)\psi - d_+^\delta(x, A)y_\psi\| \leq C\|\psi - y_\psi\|$$

entraîne pour x voisin de 0 à droite

$$\|d_+^\delta(x, A)\psi - \psi\| \leq \|d_+^\delta(x, A)\psi - d_+^\delta(x, A)y_\psi\| + \|d_+^\delta(x, A)y_\psi - y_\psi\| + \|y_\psi - \psi\| \leq 3\varepsilon$$

Par suite,

$$\lim_{x \xrightarrow{\gamma} 0} d_+^\delta(x, A)\psi = \psi$$

(La limite étant prise au sens de la norme dans E)

Réciproquement, pour tout $x \in]0, \delta[$

$$d_+^\delta(x, A)\psi \in D(A)$$

On déduit aisément que

$$\psi = \lim_{x \xrightarrow{\gamma} 0} d_+^\delta(x, A)\psi \in \overline{D(A)}$$

3. On rappelle la caractéristique de l'espace $D_A(\alpha, +\infty)$

$$D_A(\alpha, +\infty) = \left\{ \zeta \in E : \sup_{t>0} \|t^\alpha A(A-z)^{-1}\zeta\| < \infty \right\}$$

Soit u, v tels que $0 \leq u < v \leq \delta$. On a

$$d_+^\delta(v, A)\psi - d_+^\delta(u, A)\psi = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_u}^v \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} A(A-z)^{-1} \psi d\tau dz$$

Alors

$$\begin{aligned} \|d_+^\delta(v, A)\psi - d_+^\delta(u, A)\psi\| &\leq C \int_{\gamma_u}^v \frac{e^{-\tau \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2+\alpha}} |dz| \|\psi\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-\tau \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha}} \right] d\tau \|\psi\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v \left[2\tau^{2\alpha-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha}} d\sigma + 2\tau^{2\alpha-1} \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{2\alpha}} \right] d\tau \|\psi\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v \tau^{2\alpha-1} d\tau \|\psi\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C(v-u)^{2\alpha} \|\psi\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

Pour la réciproque, on utilise l'approche des semigroupes. De la condition (h_1) , on sait que $-\sqrt{-A}$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique non fortement continu en zéro

$$\left(e^{-\sqrt{-A}x} \right)_{x \geq 0}$$

En utilisant l'intégrale de Dunford-Riesz

$$h(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} h(z)(A-z)^{-1} dz$$

Le terme $d_+^\delta(x, A)\psi$ peut être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d_+^\delta(x, A)\psi &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\sqrt{-z}x} (1 + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-z}})}{(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta})} (A-z)^{-1} \psi dz \\ &= (I + e^{-2\delta\sqrt{-A}})^{-1} (I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}}) e^{-x\sqrt{-A}} \psi \end{aligned}$$

Grâce à Lunardi [21], l'opérateur

$$(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}})$$

est bien défini et admet un inverse borné

Par Sinestrari [10], on déduit

$$d_+^\delta(x, A)\psi \rightarrow \psi \text{ quand } x \rightarrow 0^+ \text{ si et seulement si } \psi \in \overline{D(A)}$$

Pour $d_+^\delta(x, A)\psi \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ alors $\psi \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty)$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Conclusion $d_+^\delta(., A)\psi \in C([0, \delta]; E)$ pourvu que $\psi \in \overline{D(A)}$.

-On étudie maintenant les propriétés de l'intégrale :

$$\frac{+1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}x (A-zI)^{-1} f_+^\delta}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} dz$$

Proposition 3.4. Il existe une constante C ne dépendant que de (γ) telle que

1. Pour tout $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in E$, on a

$$\|n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\| \leq C \|f_+^\delta\|_E$$

et $n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$

2. Si $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha, +\infty)$, alors pour tout $x \in [0, \delta]$

$$\|n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_{D(A)} \leq K \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha, \infty)}$$

3. Soit $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors $An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$$

4. Soit $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors $An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, \infty) = D_A(\alpha, \infty)$$

Preuve.

1. déjà fait (voir 3.3).

2. Soient $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha, +\infty)$. On a

$$\begin{aligned} \|An_+^\delta(x, A)f_+^\delta\| &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1+\alpha}} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha}} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha, +\infty)} \leq C \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2+\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

Alors

$$\|n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E + \|An_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E \leq K \left(\|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha, \infty)} + \|f_+^\delta\|_E \right)$$

Par l'injection continue de $D_A(\alpha, +\infty)$ dans E , on déduit le résultat.

3. Puisque

$$D_A(1/2 + \alpha, +\infty) \subset D_A(1/2, 1) \subset D(\sqrt{-A})$$

Alors,

$$f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$$

4. Comme précédemment

$$\begin{aligned} &\|An_+^\delta(v, A)f_+^\delta - An_+^\delta(u, A)f_+^\delta\| \\ &\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{-(\delta-\tau)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} \|A(A-z)^{-1}(-A)^{1/2} f_+^\delta\| d\tau |dz| \\ &\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{-(\delta-\tau)}}{|z|^{1/2+\alpha}} |dz| d\tau \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_u^v \int_\gamma \frac{e^{-(\delta-s)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2+\alpha}} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C \int_u^v \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(\delta-\tau)^2}} \frac{e^{-(\delta-\tau)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\delta-\tau)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha}} \right) d\tau \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C \int_u^v \frac{d\tau}{(\delta-\tau)^{1-2\alpha}} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)}
\end{aligned}$$

- **Condition nécessaire.** En procédant de la même manière que pour l'étude faite précédemment, le terme $n_+^\delta(x, A)f_+^\delta$ peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned}
n_+^\delta(x, A)f_+^\delta &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{-(\delta-x)\sqrt{-z}} (1 - e^{-2x\sqrt{-z}})}{\sqrt{-z} (1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}})} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz \\
&= \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)^{-1} \left(I - e^{-2x\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+^\delta
\end{aligned}$$

Alors,

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta = \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)^{-1} \left(I - e^{-2x\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{1/2} f_+^\delta$$

Par Sinestrari [10], théorème 3.1

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

et

$$An_+^\delta(., A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \text{ alors } (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty)$$

Ce qui achève la démonstration.

On s'intéresse maintenant à la régularité de la solution. On a le théorème suivant

Théorème 3.1. Soit $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} \psi \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}) \end{cases}$$

Alors,

1. u_+^δ de la représentation (3.2) est la solution du problème P_+^δ sur $]0, \delta[$
2. $u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A)) \cap C^2([0, \delta]; E)$ si et seulement si

2. $u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A)) \cap C^2([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Preuve. On rappelle que

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s)(A-z)^{-1}(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x))dsdz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A-z)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &\quad + A^{-1} g_+^\delta(x) \end{aligned}$$

Par l'application des deux propositions 3.3 et 3.4, il est aisé de voir que

$$u_+^\delta(\cdot) \in C([0, \delta]; D(A))$$

Condition nécessaire et suffisante. On suppose la condition (E) réalisée

$$(E) \quad \begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Au_+^\delta(x) &= d_+^\delta(x, A)(A\psi - g_+^\delta(0)) + d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) + An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s)A(A-z)^{-1}(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x))dsdz \\ &\quad + g_+^\delta(x) \end{aligned}$$

De la proposition 3.3, on a

$$\|d_+^\delta(x, A)(A\psi - g_+^\delta(0))\| \leq C \|A\psi - g_+^\delta(0)\|$$

$$\|d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0))\| \leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}$$

et de la proposition 3.4, assertion 3)

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$$

Reste à estimer l'intégrale

$$I = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s)A(A-z)^{-1}(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x))dsdz$$

Pour cela et grâce à l'inégalité de Hölder

$$\int_0^x \cosh \tau \operatorname{Re} \sqrt{-z} |\tau - x|^{2\alpha} d\tau \leq C \frac{\sinh x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{\frac{1}{2} + \alpha}}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^x \cosh \tau \operatorname{Re} \sqrt{-z} |\tau - x|^{2\alpha} d\tau &= \int_0^x \left(\cosh \tau \operatorname{Re} \sqrt{-z} \right)^{1-2\alpha} \left(|\tau - x| \cosh \tau \operatorname{Re} \sqrt{-z} \right)^{2\alpha} d\tau \\ &\leq \left(\int_0^x \cosh \tau \operatorname{Re} \sqrt{-z} d\tau \right)^{1-2\alpha} \left(\int_0^x |\tau - x| \cosh \tau \operatorname{Re} \sqrt{-z} d\tau \right)^{2\alpha} \\ &\leq \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right)^{1-2\alpha} \left(\frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x - 1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^2} \right)^{2\alpha} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \|I\| &\leq C \int_\gamma \int_0^\delta |K_{z,+}^\delta(x,s)| |s-x|^{2\alpha} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s |s-x|^{2\alpha} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\quad + C \int_\gamma \frac{e^{-(\delta-x) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} \int_x^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta-s) |s-x|^{2\alpha} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \end{aligned}$$

Ce qui rassure la continuité de u_+^δ sur $[0, \delta]$. Réciproquement, on doit montrer

$$u_+^\delta(\cdot) \in C([0, \delta]; D(A)) \text{ alors } \begin{cases} d_+^\delta(x, A)\psi \in C([0, \delta]; D(A)) \\ An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E) \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer de nouveau les propositions 3.3 et 3.4 pour aboutir à la condition (E).

3. Par le lemme 1.9, L'expression de la dérivée de $u_+^\delta(\cdot)$ est donnée formellement par

$$\begin{aligned} (u_+^\delta)'(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A - z)^{-1} \psi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z} x}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A - z)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\sinh \sqrt{-z} s \sinh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ & = \sum_1^4 I_j \end{aligned}$$

Pour I_1 , puisque

$$\begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Alors, par l'identité de la résolvante

$$\begin{aligned} \|I_1\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}} (A - z)^{-1} A\psi dz \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|A\psi\| \leq C \|\psi\|_{D(A)} \end{aligned}$$

Pour I_2

$$\begin{aligned} \|I_2\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} x}{\sqrt{-z}} (A - z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq C \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_E \end{aligned}$$

Pour I_3

$$\begin{aligned} \|I_3\| &\leq C \int_{\gamma} \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (s-x)}}{|z|} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{1 - e^{-x \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \leq C \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

La convergence de I_4 se démontre de la même façon que I_3

Toujours par le lemme 1.9, Le calcul formel de la dérivée de $(u_+^\delta)'(\cdot)$ donne

$$\begin{aligned}
(u_+^\delta)''(x) &= \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{z \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} f_+^\delta dz \\
&- \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_0^\delta z K_{z,+}^\delta(x, s) (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int (A - z)^{-1} g_+^\delta(x) dz
\end{aligned}$$

Le dernier terme n'étant pas bien défini, on ne peut pas exprimer directement l'expression de la dérivée de $(u_+^\delta)'(\cdot)$.

Afin de remédier à ce problème, on adopte la méthode utilisée par Tanabé

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit et x tels que

$$0 < \varepsilon < x < \delta - \varepsilon < \delta$$

Alors, on écrit

$$\begin{aligned}
\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon(x) &= -\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}} (A - z)^{-1} \psi dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} f_+^\delta dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&- \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&= \sum_1^4 I'_\alpha
\end{aligned}$$

Maintenant, on exprime formellement l'expression de la dérivée de $\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon(x)$. On traite chaque terme séparément afin d'éclairer un peu la situation... (les Bourbakistes sont loin)

$$\begin{aligned}
I_1'' &= -\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{z \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \psi dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} A \psi dz \\
&= -d_+^\delta(x, A)(A\psi)
\end{aligned}$$

Pour I_2'

$$\begin{aligned} I_2'' &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} x}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} x}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1} f_+^\delta}{\sqrt{-z}} dz \\ &= -An_+^\delta(x, A) f_+^\delta \end{aligned}$$

On se concentre sur les deux dernières intégrales

$$\begin{aligned} I_3'' + I_4'' &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x-\varepsilon) \sinh \sqrt{-z} (\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A-z)^{-1} g_+^\delta(x-\varepsilon) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta-x-\varepsilon) \cosh \sqrt{-z} x}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A-z)^{-1} g_+^\delta(x+\varepsilon) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} s \cosh \sqrt{-z} (\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A-z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A-z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \end{aligned}$$

Par l'identité de la résolvante

$$\begin{aligned} I_3'' + I_4'' &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x-\varepsilon) \sinh \sqrt{-z} (\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x-\varepsilon) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta-x-\varepsilon) \cosh \sqrt{-z} x}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x+\varepsilon) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z} s \cosh \sqrt{-z} (\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(s) ds dz \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_{\varepsilon} \right)'(x) \\ &= -d_+^\delta(x, A)(A\psi - g_+^\delta(0)) - An_+^\delta(x, A) f_+^\delta - d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z} s \cosh \sqrt{-z} (\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta - x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
 & + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x - \varepsilon) \sinh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\
 & + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left[\cosh \sqrt{-z} (\delta - 2x - \varepsilon) - \cosh \sqrt{-z} (\delta - 2x + \varepsilon) \right] \frac{A(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

- Etude de la convergence des intégrales entre crochets, pour les autres, elles ont été déjà étudiées.

Pour I_1

$$\begin{aligned}
 \|I_1\| & \leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \varepsilon}}{|z|} \varepsilon^{2\alpha} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\
 & \leq C \varepsilon^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}
 \end{aligned}$$

I_2 se traite de la même manière que I_1 . On trouve

$$\|I_2\| \leq C \varepsilon^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}$$

Pour I_3

$$\begin{aligned}
 \|I_3\| & = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\gamma} \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \sinh \sqrt{-z} (\delta - \tau) \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(x) d\tau dz \right\| \\
 & \leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \tau}}{|z|^{1/2}} |dz| d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
 & \leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \tau}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right] d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
 & \leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left(2\tau^{-1} \int_1^{+\infty} e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} + \tau^{-1} - \sqrt{\varepsilon_0} \right) d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
 & \leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \tau^{-1} d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
 & \leq C \ln \left(\frac{2x + \varepsilon}{2x - \varepsilon} \right) \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}
 \end{aligned}$$

Pour montrer que $u_+^\delta(\cdot) \in C^2([0, \delta]; E)$, il suffit de montrer que

$$\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)' + Au_+^\delta - g_+^\delta \rightarrow 0 \text{ fortement, lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

Ce que nous allons faire.

On a

$$\begin{aligned} & Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \\ &= d_+^\delta(x, A)(A\psi - g_+^\delta(0)) + An_+^\delta(x, A)f_+^\delta + d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^\delta \dots ds = \int_0^{x-\varepsilon} \dots ds + \int_{x-\varepsilon}^x \dots ds + \int_x^{x+\varepsilon} \dots ds + \int_{x+\varepsilon}^\delta \dots ds$$

alors

$$\begin{aligned} & \left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)' + Au_+^\delta - g_+^\delta \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^{x+\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x+\varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-\varepsilon) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x-\varepsilon) - g_+^\delta(x)) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left[\cosh \sqrt{-z}(\delta-x-2\varepsilon) - \cosh \sqrt{-z}(\delta-x+2\varepsilon) \right] \frac{A(A-z)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\ &= \sum_1^5 I_j \end{aligned}$$

Pour la convergence absolue, on a

$$\|I_1\| \leq C \int_\gamma \int_{x-\varepsilon}^x \frac{e^{-(x-s)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} (x-s)^{2\alpha} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \int_{x-\varepsilon}^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{e^{-(x-s)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right] (x-s)^{2\alpha} ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
 &\leq C \int_{x-\varepsilon}^x \left[2(x-s)^{-1} \int_1^{+\infty} e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} d\sigma + 2(x-s)^{-1} \int_{\varepsilon_0}^1 d\xi \right] (x-s)^{2\alpha} ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
 &\leq C \int_{x-\varepsilon}^x (x-s)^{2\alpha-1} ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
 &\leq C \varepsilon^{2\alpha} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
 \end{aligned}$$

De la même manière pour I_2 . On trouve

$$\|I_2\| \leq C \varepsilon^{2\alpha} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}$$

Maintenant,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|I_j\| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C \varepsilon^{2\alpha} \left\| g_+^\delta \right\|) = 0$$

Alors

$$\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)' + Au_+^\delta - g_+^\delta \rightarrow 0 \text{ (fortement) lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

Mais

$$Au_+^\delta(\cdot) - g_+^\delta(\cdot) \in C([0,\delta];E)$$

Finalement,

$$u_+^\delta(\cdot) \in C^2([0,\delta];E)$$

Reste à montrer que $u_+^\delta(\cdot)$ est la solution du problème (P_+^δ) . D'après ce qui précède $u_+^\delta(\cdot)$ vérifie l'équation

$$(u_+^\delta)'' + Au_+^\delta = g_+^\delta$$

En utilisant l'assertion 2) de la proposition 3.3

$$d_+^\delta(x, A)\psi \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \psi, \text{ car } \psi \in D(A).$$

En prolongeant par continuité en zéro à droite, on obtient

$$u_+^\delta(0) = \psi$$

Alors, $u_+^\delta(\cdot)$ est bien la solution stricte du problème (P_+^δ)

Pour l'unicité, on supposera qu'il existe une autre solution $v_+^\delta(\cdot)$ du problème (P_+^δ) , alors $(u_+^\delta(\cdot) - v_+^\delta(\cdot))$ est la solution du problème homogène

$$(\tilde{u}_+^\delta)''(x) + A(\tilde{u}_+^\delta) = 0$$

Il suffit d'appliquer la proposition 1.1 pour avoir l'unicité. ■

3.6 Régularité maximale

3.6.1 Préliminaires

L'un des problèmes prédominant qui a suscité l'intérêt de la communauté mathématique dans le cadre des équations différentielles est la régularité maximale. Le problème de la régularité maximale revient à se poser la question suivante : si le second membre de l'équation du problème (3.2)

$$(u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \quad (1)$$

est dans l'espace de Banach $C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$, en est-il de même pour $(u_+^\delta)''$ et Au_+^δ où u_+^δ est la solution de l'équation (1). Si c'est le cas, on dit que A a la régularité maximale.

Dans le cadre des espaces L^p , un des premiers résultats obtenus est le théorème de De Simon [24]. Il s'énonce que si E est un espace de Hilbert et $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique, alors A a la régularité maximale.

Brézis a ensuite demandé sous la forme d'une question, pour quel espace de Banach le résultat de De Simon était encore valable.

Il fallait attendre le début des années 2000 pour que Kalton et Lucian[25] apportent la réponse à cette question longtemps restée ouverte : le cadre Hilbertien était finalement le seul.

Néanmoins, la régularité maximale peut s'avérer trop restrictive sur l'opérateur A . en effet

Baillon [26] a montré que sur les espaces réflexifs, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy

$$(u)'(x) + Au(x) = f(x)$$

appartenant à $C^1([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A))$ pour tout f continue entraîne que A soit borné. En revanche le cadre des espaces L^p est beaucoup plus favorable.

Revenons à notre problème. Dans quel espace doivent vivre les données initiales ψ, f_+^δ du problème (P_+^δ) pour préserver la régularité optimale et sous quelles conditions a-t-on la régularité maximale.

Théorème 3.2. Soit $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$; $0 < 2\alpha < 1$, on suppose que

$$\begin{cases} \psi \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}) \end{cases}$$

Alors

1. u_+^δ de la représentation (3.2) est la solution du problème (P_+^δ) .
2. $u_+^\delta(\cdot) \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ si et seulement si la condition suivante est réalisée

$$\begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

Preuve

- 1) Pour la majeure partie, cette assertion a été prouvée lors de la démonstration du théorème 3.1
- 2) **Suffisance.** On rappelle que pour $x \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned} Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) &= d_+^\delta(x, A)(A\psi - g_+^\delta(0)) + An_+^\delta(x, A)f_+^\delta + d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \end{aligned}$$

Par la proposition 3.3 assertion 2) et la proposition 3.4 assertion 4), on a

$$\begin{aligned} d_+^\delta(\cdot, A)(A\psi - g_+^\delta(0)) &\in C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \\ An_+^\delta(\cdot, A)f_+^\delta &\in C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \end{aligned}$$

Pour le terme

$$\begin{aligned} d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz \end{aligned}$$

Posons

$$J(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)) ds dz$$

Par la suite, pour simplifier l'écriture on notera provisoirement

$$A_z = A(A-z)^{-1}$$

Pour rappel, le noyau de Green est donnée par

$$K_{z,+}^\delta(x, s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-z} s \cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} & 0 \leq s \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} & x \leq s \leq \delta \end{cases}$$

Soient u, v tels que $0 \leq u < v \leq \delta$. Alors

$$\begin{aligned}
& J(v) - J(u) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^{\delta} \int_0^{\delta} K_{z,+}^{\delta}(u,s) A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^{\delta} \int_0^{\delta} K_{z,+}^{\delta}(v,s) A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^u \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - u)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_u}^{\delta} \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}u \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^v \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_v}^{\delta} \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}v \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^u \int_0^v \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) d\tau ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^u \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^u \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_u}^v \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_v}^{\delta} \int_0^v \int_0^{\delta} \frac{\cosh \sqrt{-z}\tau \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) d\tau ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_v}^{\delta} \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}u \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz
\end{aligned}$$

et

$$I_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}u \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) ds dz$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^\delta \frac{\sinh \sqrt{-z}u \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) ds dz$$

Ce qui donne, en regroupant les termes semblables

$$J(v) - J(u)$$

$$= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) d\tau ds dz$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^u \int_u^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}\tau \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(v)) d\tau ds dz$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(v)) ds dz$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}u \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) ds dz$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \frac{\sinh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) ds dz$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^\delta \frac{\sinh \sqrt{-z}u \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) ds dz$$

$$= \sum_1^6 I_j$$

La somme des deux dernières intégrales donne

$$I_5 + I_6 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}u \sinh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}u \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

$$= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}u \sinh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} u \cosh \sqrt{-z} (\delta - v)}{z \cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

$$+ d_+^\delta(v, A)(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u))$$

Par suite

$$d_+^\delta(v, A)(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(v)) - d_+^\delta(u, A)(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(u)) + J(v) - J(u)$$

$$= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z} s \sinh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) d\tau ds dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^\delta \int_u^v \frac{\cosh \sqrt{-z} \tau \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) d\tau ds dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z} s \cosh \sqrt{-z} (\delta - v)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(v)) ds dz$$

$$+\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z} v \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(v)) ds dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} u \sinh \sqrt{-z} (\delta - v)}{z \cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} u \cosh \sqrt{-z} (\delta - v)}{z \cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

$$+ (d_+^\delta(v, A) - d_+^\delta(u, A))(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(u))$$

$$= (d_+^\delta(v, A) - d_+^\delta(u, A))(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(u)) + \sum_1^6 I_j$$

Remarque 3.2.5 Malgré les apparences, le simple fait de changer la décomposition de I_2 par celle de I_4 et vice versa nous ramènerait à l'intégrale

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} v \sinh \sqrt{-z} (\delta - u)}{z \cosh \sqrt{-z} \delta} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

qui est naturellement divergente. Le choix n'est donc pas sans risque !

3.6.1 Etude de la convergence des intégrales

Pour I_1 . Grâce à l'inégalité de Hölder

$$\|I_1\| \leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{(-\tau) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|1 + e^{-2\delta \sqrt{-z}}|} \left(\int_0^u \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} |s - u|^{2\alpha} ds \right) d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\gamma}^v \int_u^v e^{-\tau \operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(\frac{\sin \operatorname{Re} \sqrt{-z} u}{|z|^{1/2+\alpha}} \right) d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_u^v \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(\tau-u)^2}} \frac{e^{-(\tau-u) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\tau-u)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha}} \right] d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_u^v \left(2(\tau-u)^{2\alpha-1} \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha}} d\sigma + (\tau-u)^{2\alpha-1} \right) d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_u^v (\tau-u)^{2\alpha-1} d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

I_2, I_3, I_4 se traitent de la même façon que I_1 .

Pour I_5

$$\begin{aligned}
\|I_5\| &\leq C \int_{\gamma}^v \frac{e^{(u-v) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2+\alpha}} |v-u|^{2\alpha} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \left(\int_{\sigma \geq \varepsilon_0(u-v)} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \right) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

I_6 se traite de la même manière que I_5

Maintenant

$$\begin{aligned}
&(d_+^\delta(v, A) - d_+^\delta(u, A))(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(u)) \\
&= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma}^v \int_u^v \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} (A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(u)) dz
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\| (d_+^\delta(v, A) - d_+^\delta(u, A))(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(u)) \| \\
&\leq C \int_{\gamma}^v \int_u^v \frac{e^{-\tau \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} u^{2\alpha} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq 2C \int_u^v \left(\int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\tau} d\sigma + \frac{1}{\tau} - \sqrt{\varepsilon_0} \right) d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

$$\leq C(v^{2\alpha} - u^{2\alpha}) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}$$

Conclusion

$$u_+^\delta(\cdot) \in C^{2\alpha}([0,\delta];D(A))$$

Condition nécessaire. Par le calcul fonctionnel de Dunford, le terme

$d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) + Av_+^\delta(x, A, g_+^\delta))$ Peut être réécrit sous la forme suivant

$$\begin{aligned} & d_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) + Av_+^\delta(x, A, g_+^\delta)) \\ &= S^{-1} \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}(\delta-x)} \right) e^{-(-A)^{1/2}x} g_+^\delta(0) \\ & \quad - S^{-1} \left(I + e^{-2(\delta-x)(-A)^{1/2}} \right) (-A)^{1/2} \int_0^x \left(I - e^{-2s(-A)^{1/2}} \right) e^{-(x-s)(-A)^{1/2}} g_+^\delta(s) ds \\ & \quad - S^{-1} \left(I + e^{-2x(-A)^{1/2}} \right) (-A)^{1/2} \int_x^\delta \left(I + e^{-2(\delta-s)(-A)^{1/2}} \right) e^{-(s-x)(-A)^{1/2}} g_+^\delta(s) ds \end{aligned}$$

Par Lunardi [23], l'opérateur

$$S^{-1} = \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right)^{-1}$$

est bien défini et admet un inverse borné. En effet

$$\left\| e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{-2\delta \|(-A)^{1/2}\|} \leq e^{-2\delta M} < 1$$

Par Sinestrari [10]

$d_+^\delta(\cdot, A)g_+^\delta(0) + Av_+^\delta(\cdot, A, g_+^\delta) \in C^{2\alpha}([0,\delta];E)$ implique

$$d_+^\delta(\cdot, A)(A\psi - g_+^\delta(0)) \in C^{2\alpha}([0,\delta];E)$$

Alors

$$A\psi - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha, +\infty)$$

et par les propositions 3.3 et 3.4, on déduit

$$u_+^\delta(\cdot) \in C^{2\alpha}([0,\delta];E) \text{ alors } \begin{cases} (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty) \\ A\psi - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

La preuve du théorème est enfin achevée. ■

3.7 Solution du problème (P_-^δ)

Dans cette section, comme pour le problème (P_+^δ) , on étudiera l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la représentation de la solution du problème (P_-^δ)

$$(P_-^\delta): \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x) & x \in]-1, 0[\\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+, f_+, u_-^\delta(0)) \end{cases}$$

3.7.1 Représentation de la solution u_-^δ

On rappelle que la représentation de la solution du problème (P_-^δ) est donnée par

$$u_-^\delta(x) = \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,s)g_-(s)ds + \frac{\Delta_z(x,\delta)}{\Delta_z(-1,\delta)}f_- + \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}f_+^\delta - \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}g_+^\delta(s)ds$$

où

$$K_{z,-}^\delta(x,s) = \begin{cases} -\frac{\Delta_z(x,\delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} & -1 \leq s \leq x \leq 0 \\ -\frac{\Delta_z(s,\delta) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} & -1 \leq x \leq s \leq 0 \end{cases}$$

Alors, le calcul fonctionnel de Dunford donne formellement la représentation de la solution du problème (P_-^δ) sur $] -1, 0[$

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 K_{z,-}^\delta(x,s)(A-z)^{-1}g_-(s)dsdz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(x,\delta)}{\Delta_z(-1,\delta)}(A-z)^{-1}f_-dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}(A-z)^{-1}f_+^\delta dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z}(\delta-s) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}(A-z)^{-1}g_+^\delta(s)dsdz \\ &= w_-^\delta(x, A, g_-) + d_-^+(x, A)f_- + n_-^\delta(x, A)f_+^\delta - v_-^\delta(x, A, g_+^\delta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.7.2 Représentation de la solution par les semigroupes

Comme pour $u_+^\delta(x)$, en utilisant à nouveau le calcul fonctionnel de Dunford, les termes représentant la solution $u_-^\delta(x)$ peuvent être réécrits de la manière suivante

Pour $d_-^\delta(x, A)f_-$. Soit $x \in]-1, 0[$, écrivons

$$\begin{aligned} & \Delta_z(x, \delta) \\ &= \frac{1}{4} e^{(-x+\delta)\sqrt{-z}} \left[\left(1 + e^{-2|x|\sqrt{-z}}\right) \left(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right) - p \left(1 - e^{-2|x|\sqrt{-z}}\right) \left(1 - e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right) \right] \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} & \Delta_z(-1, \delta) \\ &= \frac{1}{4} e^{(1+\delta)\sqrt{-z}} \left[\left(1 + e^{-2\sqrt{-z}}\right) \left(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right) + p \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}}\right) \left(1 - e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right) \right] \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & d_-^\delta(x, A)f_- \\ &= T^{-1} \left[\left(1 + e^{-2|x|\sqrt{-A}}\right) \left(1 + e^{-2\delta\sqrt{-A}}\right) + p \left(1 - e^{-2|x|\sqrt{-A}}\right) \left(1 - e^{-2\delta\sqrt{-A}}\right) \right] e^{-(x+1)\sqrt{-A}} f_- \end{aligned}$$

Avec

$$T = \left[\left(1 + e^{-2\sqrt{-A}}\right) \left(1 + e^{-2\delta\sqrt{-A}}\right) + p \left(1 - e^{-2\sqrt{-A}}\right) \left(1 - e^{-2\delta\sqrt{-A}}\right) \right]$$

De la même manière, on montre que $n_-^\delta(x, A)f_+$ peut être réécrit sous la forme suivante

$$n_-^\delta(x, A)f_+ = T^{-1} p \left(1 - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}}\right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+$$

Pour $v_-^\delta(x, A, g_-)$, écrivons

$$p \cosh \sqrt{-z}(\delta - s) \sinh \sqrt{-z}(x + 1) = \left(1 + e^{-2(\delta-s)\sqrt{-z}}\right) \left(1 - e^{-2(x+1)\sqrt{-z}}\right) e^{(x+1+\delta-s)\sqrt{-z}}$$

Alors

$$v_-^\delta(x, A, g_+) = p T^{-1} \left(1 - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}}\right) \int_0^\delta \left(1 + e^{-2(\delta-s)\sqrt{-A}}\right) e^{-(s-x)\sqrt{-A}} g_+(s) ds$$

Pour $w_-^\delta(x, A, g_-)$

$$\begin{aligned} \Delta_z(x, \delta) &= \cosh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} \delta - p \sinh \sqrt{-z} x \sinh \sqrt{-z} \delta \\ &= \frac{1}{4} e^{(-x+\delta)\sqrt{-z}} \left[\left(1 + e^{-2|x|\sqrt{-z}}\right) \left(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right) + p \left(1 - e^{-2|x|\sqrt{-z}}\right) \left(1 - e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right) \right] \end{aligned}$$

Posons

$$T_x \\ = \frac{1}{4} e^{(-x+\delta)\sqrt{-z}} \left[(1 + e^{-2|x|\sqrt{-z}}) (1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}) + p (1 - e^{-2|x|\sqrt{-z}}) (1 - e^{-2\delta\sqrt{-z}}) \right]$$

Alors

$$w_-^\delta(x, A, g_-) \\ = -\frac{1}{2} T^{-1} T_x (-A)^{-1/2} \int_{-1}^x (I - e^{-2(s+1)\sqrt{-A}}) e^{-(x-s)\sqrt{-A}} g_-(s) ds \\ - \frac{1}{2} T^{-1} (I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}}) (-A)^{-1/2} \int_x^0 T_s e^{-(s-x)\sqrt{-A}} g_-(s) ds$$

Finalement

$$u_-^\delta(x) = T^{-1} T_x e^{-(x+1)} f_- \\ + p T^{-1} (I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}}) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+^\delta \\ - p T^{-1} (I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}}) \int_0^\delta (I + e^{-2(\delta-s)\sqrt{-A}}) e^{-(s-x)\sqrt{-A}} g_+^\delta(s) ds \\ - \frac{1}{2} T^{-1} T_x (-A)^{-1/2} \int_{-1}^x (I - e^{-2(s+1)\sqrt{-A}}) e^{-(x-s)\sqrt{-A}} g_-(s) ds \\ - \frac{1}{2} T^{-1} (I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}}) (-A)^{-1/2} \int_x^0 T_s e^{-(s-x)\sqrt{-A}} g_-(s) ds$$

Par [5] l'opérateur T est bien défini.

3.7.3 Etude de la convergence des intégrales

Pour que $u_-^\delta(x) \in D(A)$, il suffit que les intégrales données par (3.7) soient absolument convergentes.

Pour $w_-^\delta(x, A, g_-)$

$$\begin{aligned} \|w_-^\delta(x, A, g_-)\| &\leq C \int_{\gamma-1}^0 \int \frac{|K_{z,-}^\delta(x, s)|}{|z|} ds |dz| \|g_-\|_{C([-1,0]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma-1}^x \int \frac{e^{(\delta-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} e^{(s+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2} e^{(\delta+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}} ds |dz| \|g_-\|_{C([-1,0]; E)} \\ &\quad + C \int_{\gamma}^0 \int_x \frac{e^{(\delta-s)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} e^{(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2} e^{(\delta+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}} ds |dz| \|g_-\|_{C([-1,0]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma-1}^x \int \frac{e^{-(x-s)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-\|_{C([-1,0]; E)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C \int_{\gamma} \int_x^0 \frac{e^{-(s-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{-1}^x \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{e^{-(x-s)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \right) ds \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& + C \int_x^0 \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(s-x)^2}} \frac{e^{-(s-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(s-x)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \right) ds \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{-1}^x \left(2(x-s) \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^2} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - C \int_x^0 \left(2(x-s) \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^2} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right) \right) ds \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \right) \\
& \leq C \|g_-\|_{C([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour $d_-^\delta(x, A)f_-$. Soit $x \in]-1, 0[$, alors

$$\begin{aligned}
\|d_-^\delta(x, A)f_-\| & \leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| \|f_-\| \\
& \leq C \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{e^{-(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{|dz|}{|z|} \right) \|f_-\| \\
& \leq C \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{\sigma} \right) \|f_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq C \|f_-\|_{C([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour $n_-^\delta(x, A)f_+^\delta$

$$\begin{aligned}
\|n_-^\delta(x, A)f_+^\delta\| & \leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-(\delta-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\| \\
& \leq 2Cx \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^2} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right) \|f_+^\delta\| \\
& \leq C \|f_+^\delta\|
\end{aligned}$$

Pour $v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)$

$$\begin{aligned}
\|v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)\| &\leq C \int_{\gamma}^{\delta} \int_0^{\delta} \frac{e^{-(s-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-(\delta-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} - e^{x\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^2 \sin(\theta_0/2)} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^2} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}
\end{aligned}$$

Les intégrales sont donc absolument convergentes par suite

$$u_-^\delta(x) \in D(A)$$

et pour tout $x \in]-1, 0]$

$$u_-^\delta \in C([-1, 0]; E)$$

On étudie maintenant, l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème posé.

3.8 Régularité de la solution

3.8.1 Conditions nécessaires

Proposition 3.5. Soient $g_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$, $0 < 2\alpha < 1$
Si

$$\begin{cases} u_-^\delta \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A)) \\ u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)) \end{cases}$$

Alors nécessairement

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

Preuve. Voir proposition 3.2

Pour la réciproque, on commence par donner l'expression formelle de $Au_-^\delta(x)$.

Soit $x \in]-1, 0[$, on a

$$\begin{aligned}
Au_-^\delta(x) &= +d_-^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1)) + d_-^\delta(x, A)(g_-(-1) - g_-(x)) \\
&+ An_-^\delta(x, A)f_+^\delta + Av_-^\delta(x, A, g_+^\delta) + g_-(x) \\
&+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(x)) ds dz \\
&- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} g_-(x) dz
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
Av_-^\delta(x, A, g_+^\delta) &- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} g_-(x) dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z} (\delta - s) \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(0)) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0)) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(x) - g_-(0)) dz
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
Au_-^\delta(x) &= An_-^\delta(x, A) f_+^\delta + g_-(x) \\
&\quad + d_-^\delta(x, A) (Af_- - g_-(-1)) + d_-^\delta(x, A) (g_-(-1) - g_-(x)) \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int K_{z,-}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(x)) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z} (\delta - s) \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(0)) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0)) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(x) - g_-(0)) dz \\
&= An_-^\delta(x, A) f_+^\delta + g_-(x) \\
&\quad + d_-^\delta(x, A) (Af_- - g_-(-1)) + d_-^\delta(x, A) (g_-(-1) - g_-(x)) \\
&\quad + \sum_1^4 I_j
\end{aligned}$$

Pour la convergence, on va utiliser les propositions suivantes

Proposition 3.6. Il existe une constante strictement positive C , telle que pour tout $f_- \in E$ et $x \in]-1, 0]$

$$\|d_-^\delta(x, A) f_-\| \leq C \|f_-\|$$

2. $d_-^\delta(x, A) f_- \rightarrow f_-$ fortement quand $x \rightarrow -1^+$ si et seulement si $f_- \in \overline{D(A)}$

3. $d_-^\delta(\cdot, A) f_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ si et seulement si $f_- \in D_A(\alpha, +\infty)$.

Preuve

1. Pour l'estimation et la continuité de $d_-^\delta(\cdot, A)f_-$, on écrit

$$\begin{aligned} & d_-^\delta(x, A)f_- \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_- dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_- dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup C_x} (A-z)^{-1} f_- dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_x} (A-z)^{-1} f_- dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{(x+1)^2} \right\} & \gamma_- &= \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{(x+1)^2} \right\} \\ C_x &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{(x+1)^2}, |\arg z| \leq \theta_0 \right\} \end{aligned}$$

I_3 est nul par analyticité.

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{(1+p)e^{-(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| \|f_-\| \\ &\leq C \int_{|z| \geq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{e^{-(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| \|f_-\| \\ &\leq 2C \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|f_-\| \leq C \|f_-\| \end{aligned}$$

Pour I_2

$$\begin{aligned} \|I_2\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{\partial_x \Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_- d\tau dz \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{e^{(\tau+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|f_-\| \\ &\leq C \int_{\gamma_-} \frac{x+1}{|z|^{1/2}} |dz| \|f_-\| \leq C \|f_-\| \end{aligned}$$

Pour I_4

$$\|I_4\| = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_x} (A-z)^{-1} f_- dz \right\| \leq C \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta \|f_-\|$$

Grace à la convergence uniforme, on déduit

$$d_-^\delta(., A)f_- \in C([-1, 0]; E)$$

Remarque 3.8.1 Comme dans la proposition 3.3, la constante C est indépendante de δ .

2. Soit $x \in]-1, 0[$. Supposons que $f_- \in D(A)$, alors par l'identité de la résolvante, on a

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} d(x, A)f_- = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\int_{\gamma} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A-z)^{-1} Af_-}{z} dz - \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{f_-}{z} dz \right)$$

Le terme sans la résolvante est nul en intégrant à gauche de (γ) et

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A-z)^{-1} Af_-}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{(A-z)^{-1} Af_-}{z} dz = 2i\pi f_-$$

Par suite,

$$d_-^\delta(x, A)f_- = f_-$$

Pour $f_- \in \overline{D(A)}$, il existe $h \in D(A)$ tel que $\forall \varepsilon > 0 \quad \|f_- - h\| < \varepsilon$

et

$$d_-^\delta(x, A)f_- - f_- = (d_-^\delta(x, A)f_- - d_-^\delta(x, A)h) + (d_-^\delta(x, A)h - h) + (h - f_-)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} (d_-^\delta(x, A)f_- - f_-) &\leq \lim_{x \rightarrow -1^+} (d_-^\delta(x, A)f_- - d_-^\delta(x, A)h) + \lim_{x \rightarrow -1^+} (d_-^\delta(x, A)h - h) \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow -1^+} (h - f_-) \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Remarque. Pour plus de détails, voir la démonstration de la proposition 3.3

Réciproquement, pour tout $x \in]-1, 0[$

$$d_-^\delta(x, A)f_- \in D(A)$$

En effet, $D(A)$ est stable par $d_-^\delta(x, A)$ autant que application de E dans $D(A)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (d_-^\delta(x, A)f_-) \in \overline{D(A)}.$$

Finalement, $d_-^\delta(., A)f_-$ est continue sur le compact $[-1, 0]$ pourvu que $f_- \in \overline{D(A)}$

- **Condition suffisante.** Soient $f_- \in D_A(\alpha, +\infty)$ et $u, v \in [-1, 0]$ tels que $-1 \leq u < v \leq 0$.

On a

$$\|d_-^\delta(v, A)f_- - d_-^\delta(u, A)f_-\| = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(v, \delta) - \Delta_z(u, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_- dz \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{\gamma}^v \int_u \frac{w_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_- d\tau dz \right\| \\
&\leq C \int_u^v \int_{\gamma} \frac{e^{-(\tau+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C \int_u^v \left(\int_{\frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{(1+\tau)^2}} \frac{e^{-(\tau+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| + \int_{\frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{(1+\tau)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \right) d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C \left(\int_u^v 2(\tau+1)^{2\alpha-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha}} d\sigma + 2(\tau+1)^{2\alpha-1} \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{2\alpha}} \right) d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C \int_u^v (1+\tau)^{2\alpha-1} d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C \left[(1+v)^{2\alpha} - (1+u)^{2\alpha} \right] \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)}
\end{aligned}$$

Donc

$$d_-^\delta(x, A)f_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$$

- **Condition nécessaire.** En utilisant le calcul fonctionnel de Dunford, Le terme $d_-^\delta(x, A)f_-$ peut être réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned}
&d_-^\delta(x, A)f_- \\
&= T^{-1} \left[\left(I + e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) \right] e^{-(x+1)\sqrt{-A}} f_-
\end{aligned}$$

où

$$T = \left[\left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) \right]$$

En écrivant

$$\begin{aligned}
T &= \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) \\
&\times \left[I + p \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)^{-1} \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right)^{-1} \right]
\end{aligned}$$

Les deux opérateurs

$$\left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right)^{-1}$$

sont bien définis et admettent des inverses bornés. Pour l'opérateur

$$K = p\left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}}\right)\left(I - e^{-2\sqrt{-A}}\right)\left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}}\right)^{-1}\left(I + e^{-2\sqrt{-A}}\right)^{-1}$$

voir [5]

Par Sinestrari [10], théorème 3.1 et proposition 1.2, on a

$$d_-^\delta(x, A)f_- \rightarrow f_- \text{ quand } x \rightarrow -1^+ \text{ si et seulement si } f_- \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

De plus, si

$$d_-^\delta(x, A)f_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$$

Alors,

$$f_- \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty) \quad (\text{R iteration de Lions})$$

La preuve de la proposition est achev e.

Conclusion

$$u_-^\delta \in C([-1, 0]; E)$$

Proposition 3.7. Il existe une constante C strictement positive indépendante de δ telle que

1. Pour tout $x \in [-1, 0]$ et $f_+^\delta \in E$, on a

$$\|n_-^\delta(x, A)f_+^\delta\| \leq C\|f_+^\delta\|$$

2. pour tout $x \in [-1, 0]$ et $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha, +\infty)$,

$$\|n_-^\delta(x, A)f_+^\delta\|_{D(A)} \leq C\|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha, +\infty)}$$

3. Soit $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$. On a

i) $An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([-1, 0]; E)$ si et seulement si $\sqrt{-A}f_+^\delta \in \overline{D(A)}$

ii) $An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ si et seulement si $\sqrt{-A}f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty)$

Preuve

1. Déjà trait e.

2. Soit $f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty)$. Pour tout $x \in [-1, 0]$, on a

$$\begin{aligned} \|An_-^\delta(x, A)f_+^\delta\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-(\delta-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha}} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha}} \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha, +\infty)} \\ &\leq C \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

C est une constante qui ne dépend pas de δ

Mais,

$$D_A(1/2 + \alpha, +\infty) \subset D_A(1/2, 1) \subset D(\sqrt{-A})$$

Alors

$$f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$$

ce qui permet d'écrire

$$An_-^\delta(x, A)f_+^\delta = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz$$

3. i) On a

$$\begin{aligned} \|An_-^\delta(x, A)f_+^\delta\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-(\delta-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_E \\ &\leq C \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(\delta-x)^2}} \frac{e^{-(\delta-x)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\delta-x)^2}} \frac{|dz|}{|z|} \right) \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\| \\ &\leq 2C \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^{1/(\delta-x)^2} \frac{d\tau}{\tau} \right) \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\| \\ &\leq 2C \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^{1/(\delta-x)^2} \frac{d\tau}{\tau} \right) \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\| \\ &\leq C \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\| \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que la constante C ne dépend pas de δ !

Réciproquement, en utilisant le calcul fonctionnel de Dunford, $n_-^\delta(x, A)f_+^\delta$ peut être réécrit de la manière suivante

$$n_-^\delta(x, A)f_+^\delta = T^{-1} p \left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+^\delta$$

avec

$$T = \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)$$

D'après [5], T est bien définie ainsi que l'opérateur $\left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right)$

et pour tout $x \in [-1, 0]$

$$An_-^\delta(x, A)f_+^\delta = T^{-1} p \left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{1/2} f_+^\delta$$

Par Sinestrari (théorème 3.1 et proposition 1.2)

$An_-^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in C([-1, 0]; E)$ si et seulement si $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$

ii) Soit $f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty)$. Pour u, v tels que $-1 \leq u < v \leq 0$, on a

$$\begin{aligned} & \left\| An_-^\delta(v, A)f_+^\delta - An_-^\delta(u, A)f_+^\delta \right\| \\ & \leq C \int_u^v \int_{\gamma} \frac{p \cosh(\tau + 1) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{\frac{1}{2} + \alpha} |\Delta_z(-1, \delta)|} d\tau |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ & \leq C \int_u^v \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(\delta - \tau)^2}} \frac{e^{-(\delta - \tau) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{(1/2) + \alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\delta - \tau)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{(1/2) + \alpha}} \right] d\tau \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ & \leq C \int_u^v (\delta - \tau)^{2\alpha - 1} d\tau \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ & \leq C \left[(\delta - u)^{2\alpha} - (\delta - v)^{2\alpha} \right] \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ & \leq C (v - u)^{2\alpha} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

Pour la réciproque, comme précédemment. Par Sinestrari

$An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ implique $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty)$.

- Estimations des $\sum I_j$

Pour cela, on utilise les estimations déjà vues, à savoir

$$\left| \int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s) s^{2\alpha} ds \right| \leq C \frac{|\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta|}{|z|^{\frac{1}{2} + \alpha}}$$

et

$$\int_{-1}^0 |K_{z,-}^\delta(x, s)| |x - s|^{2\alpha} \leq \frac{C}{|z|^{1 + \alpha}}$$

Pour I_2

$$\begin{aligned} \|I_2\| & \leq \int_\gamma \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x + 1)}{|z|^{1/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} \left[\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s) s^{2\alpha} ds \right] |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ & \leq C \int_\gamma \frac{e^{-|x| \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1 + \alpha}} |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \leq C \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

Pour I_1

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq C \int_{\gamma-1}^0 \int |K_{z,-}^\delta(x,s)| |s-x|^{2\alpha} ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha}} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \end{aligned}$$

Pour I_4

$$\begin{aligned} \|I_4\| &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-|x|\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |x|^{2\alpha} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\ &\leq C |x|^{2\alpha} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^{1/x^2} \frac{d\xi}{\xi} \right) \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\ &\leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \end{aligned}$$

Maintenant pour I_3 , on a la proposition suivante

Proposition 3.8. Soit $x \in [-1,0]$. L'application L qui à x associé

$$L(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0)) dz$$

est un élément de $C([-1,0];E)$ si et seulement si

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

Preuve. Pour la preuve voir proposition 4.5

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer le théorème de régularité suivant

Théorème 3.3

Soient $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0,\delta];E)$, $g_- \in C^{2\alpha}([-1,0];E)$; $0 < 2\alpha < 1$, on suppose que

$$\begin{cases} f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}) \\ f_- \in D(A) \end{cases}.$$

1. u_-^δ de la représentation de (3.2) est la solution du problème (P_-^δ) sur $] -1,0[$.
2. $u_-^\delta \in C^2([-1,0];E) \cap C([-1,0];D(A))$ si et seulement si

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Preuve

On commence par montrer l'assertion 2.

On sait déjà que

$$u_-^\delta \in C([-1, 0]; D(A))$$

Par la proposition 3.5, puisque $Af_- - g_-(-1) \in D(A) \subset \overline{D(A)}$, il existe C ne dépendant que du contour (γ) telle que pour tout $x \in [-1, 0]$

$$\|d_-^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1))\| \leq C \|Af_- - g_-(-1)\|$$

et

$$\|d_-^\delta(x, A)(g_-(x) - g_-(-1))\| \leq C \|g_-(x) - g_-(-1)\|$$

Par la proposition 3.6 i), puisque $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$, on a

$$An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([-1, 0]; E)$$

et réciproquement.

Par la proposition 3.7

$$L \in C([-1, 0]; E) \Leftrightarrow g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

On conclut facilement que

$$\underline{Au_-^\delta(\cdot) \in C([-1, 0]; E)}$$

La suite ne présente aucune difficulté.

Remarque

Comme pour u_+^δ , l'équation différentielle abstraite définie dans (P_-^δ) a un effet régularisant sur la représentation u_-^δ

Pour 1. Il suffit de s'assurer que u_-^δ vérifie

$$\begin{cases} (u_-^\delta)'' + Au_-^\delta = g_- \\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)) \end{cases}$$

Ce cas sera étudié dans la partie II

3.9 Régularité maximale

Théorème 3.4. Soient $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$, $g_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$, $0 < 2\alpha < 1$.

On suppose que

$$\begin{cases} f_- \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}) \end{cases}$$

Alors

1. u_-^δ est solution du problème (P_-^δ) sur $] -1, 0[$
2. $Au_-^\delta(\cdot) \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ si et seulement si la condition suivante notée \mathcal{MR} est vérifiée

$$\mathcal{MR} \begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ \sqrt{-A}f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

3. $(u_-^\delta)'' \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ si et seulement si \mathcal{MR} est vérifiée.

Preuve

1. Voir théorème 3.3
2. Condition suffisante

On rappelle que

$$\begin{aligned} Au_-^\delta(x) &= An_-^\delta(x, A)f_+^\delta + g_-(x) \\ &\quad + d_-^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1)) + d_-^\delta(x, A)(g_-(-1) - g_-(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(x)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\gamma}^{\delta} \frac{p \cosh \sqrt{-z}(\delta - s) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(0)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0)) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(x) - g_-(0)) dz \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$= An_-^\delta(x, A)f_+^\delta + g_-(x) + d_-^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1)) + d_-^\delta(x, A)(g_-(-1) - g_-(x)) \\ + \sum_1^4 J_i$$

Par l'application des deux propositions 3.5 et 3.6, on a

$$d_-^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1)) \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$$

et

$$An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$$

Soient u, v tels que $-1 \leq u < v \leq 0$

$$\begin{aligned} & \|J_3(v) - J_3(u)\| \\ &= \left\| \frac{p}{2i\pi} \int_{\gamma}^v \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z} \delta \cosh \sqrt{-z} (\tau + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0)) d\tau dz \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma}^v \int_u^v \frac{e^{-|\tau| \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2} + \alpha}} |dz| d\tau \|g_+^\delta - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-|\tau| \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2} + \alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2} + \alpha}} \right] d\tau \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v \left[2|\tau|^{2\alpha-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha}} d\sigma + 2|\tau|^{2\alpha-1} \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha}} \right] d\tau \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v |\tau|^{2\alpha-1} d\tau \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

De même pour J_2

$$\begin{aligned} & \|J_2(v) - J_2(u)\| \\ &= \left\| \frac{p}{2i\pi} \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int_u^v \frac{\cosh \sqrt{-z} (\tau + 1)}{\Delta_z(-1, \delta)} d\tau \right) \cosh \sqrt{-z} (\delta - s) A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(s) - g_+^\delta(0)) ds dz \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma}^v \left(\int_u^v e^{-(\delta-\tau) \operatorname{Re} \sqrt{-z}} d\tau \right) \left(\int_0^{\delta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s) s^{2\alpha} ds \right) \|dz\| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder

$$\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - s) s^{2\alpha} ds \leq K \frac{e^{\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

On déduit

$$\begin{aligned} \|J_2(v) - J_2(u)\| &\leq C \int_u^v \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-|\tau| \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \right) d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \int_u^v \tau^{2\alpha-1} d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

Maintenant, on s'intéresse à $J_1(x)$

On rappelle que le noyau de Green est donné par

$$K_{z,-}^\delta(x, s) = \begin{cases} -\frac{\Delta_z(x, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} & -1 \leq s \leq x \leq 0 \\ -\frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} & -1 \leq x \leq s \leq 0 \end{cases}$$

Comme pour $Au_+^\delta(x)$, on a

$$\begin{aligned} &J_1(v) - J_1(u) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^v \int \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma}^0 \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(v+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^u \int \frac{\Delta_z(u, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma}^0 \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz \\ &= \sum_1^4 I_j \end{aligned}$$

D'autres parts,

$$2i\pi I_3 = - \int_{\gamma-1}^u \int \int \frac{\partial_\tau \Delta_z(\tau, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) d\tau ds dz$$

$$+\int_{\gamma-1}^u \int \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz$$

et

$$2i\pi I_1 = -\int_{\gamma-1}^u \int \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz$$

$$-\int_{\gamma u}^v \int \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz$$

De même

$$2i\pi I_2 = -\int_{\gamma}^0 \int \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) d\tau ds dz$$

$$-\int_{\gamma v}^0 \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz$$

et

$$2i\pi I_4 = \int_{\gamma u}^v \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz$$

$$+\int_{\gamma v}^0 \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz$$

Donc

$$2i\pi (J_1(v) - J_1(u))$$

$$= -\int_{\gamma-1}^u \int \int \frac{\Delta_z^+(\tau, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) d\tau ds dz$$

$$+\int_{\gamma-1}^u \int \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) ds dz$$

$$-\int_{\gamma u}^v \int \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz$$

$$-\int_{\gamma}^0 \int \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) d\tau ds dz$$

$$+\int_{\gamma v}^0 \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) ds dz$$

$$+\int_{\gamma u}^v \int \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz$$

$$= 2i\pi \sum_1^6 I_i$$

Mais,

$$\begin{aligned} I_2 + I_5 &= \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(v, \delta)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(v, \delta) \cosh \sqrt{-z}(u+1)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z^+(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z}(u+1) \sinh \sqrt{-z}\delta}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\ &= d_-^\delta(v, A)(g_-(v) - g_-(u)) + \sum_1^3 k_i(u, v) \end{aligned}$$

et où l'on a posé

$$\Delta_z^+(v, \delta) = \sinh \sqrt{-z}v \sinh \sqrt{-z}\delta - p \cosh \sqrt{-z}v \cosh \sqrt{-z}\delta$$

La dernière intégrale va nous être utile pour J_4 dans la décomposition (3.7)

$$\begin{aligned} &J_4(v) - J_4(u) + k_4(u, v) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(u) - g_-(0)) dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(v+1)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(0)) dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\ &= \\ &\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(0)) d\tau dz \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} &J_1(v) - J_1(u) + J_4(v) - J_4(u) \\ &= d_-^\delta(v, A)(g_-(v) - g_-(u)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^u \int_u^v \frac{\Delta_z^+(\tau, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) d\tau ds dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^0 \int_u^v \frac{\Delta_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) d\tau ds dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(v, \delta) \cosh \sqrt{-z}(u+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z^+(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(0)) d\tau dz
\end{aligned}$$

On n'a pas encore fini. Pour $d_-^\delta(x, A)(g_-(-1) - g_-(x))$, on a

$$\begin{aligned}
& d_-^\delta(v, A)(g_-(-1) - g_-(v)) - d_-^\delta(u, A)(g_-(-1) - g_-(u)) + d_-^\delta(v, A)(g_-(v) - g_-(u)) \\
& = (d_-^\delta(v, A) - d_-^\delta(u, A))(g_-(-1) - g_-(u))
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
& J_1(v) - J_1(u) + J_4(v) - J_4(u) \\
& + d_-^\delta(v, A)(g_-(-1) - g_-(v)) - d_-^\delta(u, A)(g_-(-1) - g_-(u)) \\
& = (d_-^\delta(v, A) - d_-^\delta(u, A))(g_-(-1) - g_-(u)) \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^u \int_u^v \frac{\Delta_z^+(\tau, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) d\tau ds dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\Delta_z(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) ds dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^0 \int_u^v \frac{\Delta_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(v)) d\tau ds dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\Delta_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(s) - g_-(u)) ds dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(v, \delta) \cosh \sqrt{-z}(u+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z^+(v, \delta) \sinh \sqrt{-z}(u+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(u)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(v) - g_-(0)) d\tau dz \\
& = \sum_1^8 I_j
\end{aligned}$$

Pour la convergence absolue de ces intégrales, on commence par

$$\begin{aligned}
& (d_-^\delta(v, A) - d_-^\delta(u, A))(g_-(-1) - g_-(u)) = I_1 \\
\|I_1\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z(v, \delta) - \Delta_z(u, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-z)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(u)) dz \right\| \\
&= \left\| \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\Delta_z^+(\xi, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(-1) - g_-(u)) d\xi dz \right\| \\
&\leq C \int_u^v \left(\int_{\gamma} \frac{e^{-(\xi+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} |dz| \right) (\xi+1)^{2\alpha} d\xi \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \int_u^v (\xi+1)^{2\alpha-1} d\xi \\
&\leq C \left[(v+1)^{2\alpha} - (u+1)^{2\alpha} \right] \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour I_2

$$\begin{aligned}
\|I_2\| &\leq C \int_{\gamma} \int_u^v e^{-(\tau+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \left(\int_{-1}^u \cosh(s+1) \operatorname{Re}\sqrt{-z} (s-u)^{2\alpha} ds \right) d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_u^v e^{-(\tau+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(u+1)}{|z|^{1+\alpha}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{-(\tau-u)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_u^v \left(\int_{\frac{|z| \geq \frac{1}{(\tau-u)^2}} \frac{e^{-(\tau-u)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+2\alpha}} |dz| + \int_{\frac{|z| \leq \frac{1}{(\tau-u)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1+2\alpha}} \right) d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_u^v \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha} (\tau-u)^{1-2\alpha}} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{2\alpha} (\tau-u)^{1-2\alpha}} \right) d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_u^v (\tau-u)^{2\alpha-1} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour I_3

Grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_u^v \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z} (s+1) |s-v|^{2\alpha} ds \leq K \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z} (u+1)}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{(\delta-v)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}} |\Delta_z(-1, \delta)|} \left(\int_u^v \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z} (s+1) |s-v|^{2\alpha} ds \right) |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{-(u-v)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq 2C(v-u)^{2\alpha} \left(\int_{\frac{|z| \geq \frac{1}{(u-v)^2}} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha+1}} d\sigma + \int_{\frac{|z| \leq \frac{1}{(u-v)^2}} \frac{d\sigma}{\sigma^{2\alpha+1}} \right) \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour I_6

$$\begin{aligned}
\|I_6\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-(v-u)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} |dz| |v-u|^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq 2C(v-u)^{2\alpha} \left(\int_{\frac{|z| \geq \frac{1}{(v-u)^2}} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma + \int_{\frac{|z| \leq \frac{1}{(v-u)^2}} \frac{d\sigma}{\sigma} \right) \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour I_8

$$\begin{aligned}
\|I_8\| &\leq C \int_u^v \int \frac{e^{-|\tau|\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} |dz| d\tau v^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq 2C \int_u^v \left(\int_{|z|\geq\frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-\sigma\sin(\theta_0/2)}}{|\tau|} d\sigma + \int_{|z|\leq\frac{1}{\tau^2}} \frac{d\sigma}{|\tau|} \right) d\tau |\tau|^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \quad \text{car } |\tau| \geq |v| \\
&\leq C \int_u^v |\tau|^{2\alpha-1} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour le reste des intégrales, on adopte selon les cas la même méthode de démonstration. Par conséquent

$$u_-^\delta \in C^{2\alpha}([-1,0];E)$$

Condition nécessaire

On utilise la même technique que pour u_+^δ . Par le calcul fonctionnel de Dunford, on a

$$\begin{aligned}
u_-^\delta(x) &= T^{-1} T_x e^{-(1+x)\sqrt{-A}} f_- \\
&\quad - \frac{1}{2} T^{-1} T_x \int_{-1}^x \left(I - e^{-2(\tau+1)\sqrt{-A}} \right) e^{-(x-\tau)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} g_-(\tau) d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2} T^{-1} \left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right) \int_x^0 T_\tau e^{-(\tau-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} g_-(\tau) d\tau \\
&\quad + p T^{-1} \left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{1/2} f_+^\delta \\
&\quad - p T^{-1} \left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right) \int_0^\delta e^{-(\tau-x)\sqrt{-A}} \left(I + e^{-2(\delta-\tau)\sqrt{-A}} \right) (-A)^{1/2} g_+^\delta(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
T_x &= \left(I + e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) \\
T &= \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)
\end{aligned}$$

Par Sinestrari [10]

$$u_-^\delta(\cdot) \in C^{2\alpha}([-1,0];D(A)) \text{ si et seulement si } \begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_+^\delta(0) - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

Conclusion

Le résultat suivant est une conséquence du précédent, facile à vérifier

$$(u_-^\delta)'' \in C^{2\alpha}([-1,0];E) \text{ si et seulement si } \begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_+^\delta(0) - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

Le théorème (3.4) est complètement démontré ■

3.10 L'opérateur d'impédance

On exprime dans ce paragraphe l'expression de l'opérateur d'impédance sans le paramètre ψ . On rappelle que

$$\begin{aligned} (u_+^\delta)'(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^x \frac{w_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s + 1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_-(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} f_+^\delta dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} f_- dz \end{aligned}$$

L'opérateur d'impédance est par définition, l'application T_δ qui à $u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E)$ associé l'application $(u_+^\delta)'(0)$. Comme u_+^δ dépend linéairement de $g_+^\delta, g_-, f_+^\delta, f_-$, on note l'opérateur d'impédance par

$$T_\delta(g_+^\delta, g_-, f_+^\delta, f_-)$$

et l'on considère que T_δ opère sur l'espace produit

$$C([0, \delta]; E) \times C([-1, 0]; E) \times E \times E$$

On a formellement

$$\begin{aligned} T_\delta(g_+^\delta, g_-, f_+^\delta, f_-) &= \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}(s + 1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_-(s) ds dz \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_+^{\delta} dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_- dz \\
& = \sum_1^4 I_j
\end{aligned}$$

Soit h_+^{δ} l'application qui à $\xi \in (0,1)$ associée $h_+^{\delta}(\xi) = g_+^{\delta}(\delta\xi)$.

On a

$$\|g_+^{\delta}\|_{C([0,\delta];E)} = \|h_+^{\delta}\|_{C([0,1];E)}$$

et

$$\begin{aligned}
\|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} &= \max_{x \in [0,1]} \|h_+^{\delta}\| + \frac{1}{\delta^{2\alpha}} \sup_{x, \tau \in [0,1]} \frac{\|h_+^{\delta}(x) - h_+^{\delta}(\tau)\|}{|x - \tau|^{2\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{\delta^{2\alpha}} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,1];E)}
\end{aligned}$$

On suppose qu'il existe $l_+ > 0$ tel que

$$\sup_{\delta \in [0,1]} \left(\left\| \frac{1}{\delta} f_+^{\delta} \right\| \right) \leq l_+ \quad (3.8)$$

Alors, on a la proposition suivante

Proposition 3.9 Pour tout $h_+^{\delta} \in C([0,1];E)$, $g_- \in C([-1,0];E)$, $f_+^{\delta} \in E$, et $f_- \in D_A(1/2 + \alpha, +\infty)$, il existe une constante $K > 0$ indépendante de δ tel que

$$\|T_{\delta}(g_+^{\delta}, g_-, f_+^{\delta}, f_-)\| \leq K \left(\|g_+^{\delta}\|_{C([0,\delta];E)} + \|g_-\|_{C([-1,0];E)} + \|f_+^{\delta}\| + \|f_-\|_{D_A(1/2+\alpha, +\infty)} \right)$$

Preuve. Il suffit d'estimer chacune des intégrales I_j dans (3.8)

Pour I_1

$$\begin{aligned}
\|I_1\| &\leq C \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{e^{-s \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} ds |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{1 - e^{-\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|h_+^{\delta}\|_{C([0,1];E)} \leq K \|h_+^{\delta}\|_{C([0,1];E)}
\end{aligned}$$

I_2 se traite de la même manière que I_1 . On trouve

$$\|I_2\| \leq K \|g_-\|_{C([-1,0];E)}$$

Pour I_4

$$I_4 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} \delta}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} f_- dz$$

Alors

$$\begin{aligned} \|I_4\| &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha}} |dz| \|f_-\|_{D_A(1/2+\alpha, +\infty)} \\ &\leq K \|f_-\|_{D_A(1/2+\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

Pour I_3 . On note

$$\gamma_+^\delta = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{\delta^2} \right\} \quad \text{et} \quad \gamma_-^\delta = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{\delta^2} \right\}$$

On a

$$\begin{aligned} \|I_3\| &\leq C \left(\int_{\gamma_+^\delta} \frac{e^{-\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} |dz| + \int_{\gamma_-^\delta} \frac{|dz|}{|z|} \right) \|f_+^\delta\| \\ &\leq 2C \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^{1/\delta^2} \frac{d\xi}{\xi} \right) \|f_+^\delta\| \\ &\leq K \|f_+^\delta\| + C(-2 \ln \delta - \ln \varepsilon_0) \|f_+^\delta\| \leq K \|f_+^\delta\| \end{aligned}$$

Ce qui assure la convergence des intégrales I_j et par suite

$$T_\delta \in C(C([0, \delta]; E) \times C([-1, 0]; E) \times E \times E, E)$$

On suppose maintenant que

$$\{f_+^\delta; \delta \in]0, 1]\} \text{ est borné sur } D_A(1/2 + \alpha, +\infty)$$

Il existe alors une constante positive notée $l_{+,1/2}$ telle que

$$\sup_{0 \leq \delta \leq 1} \|f_+^\delta\|_E \leq l_{+,1/2}$$

Proposition 3.10 Pour tout $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$, $g_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$, $f_- \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D_A(1/2, +\infty)$, il existe une constante positive K indépendante de δ telle que

$$\text{i) } T_\delta(g_+^\delta, g_-, f_+^\delta, f_-) \in D_A(1/2, +\infty)$$

$$\text{ii) } \|T_\delta(g_+^\delta, g_-, f_+^\delta, f_-)\|_{D_A(1/2, +\infty)} \leq K \left(\|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} + \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1, 0]; E)} + l_{+,1/2} + \|f_-\|_{D(A)} \right)$$

Preuve

i) On doit estimer chacune des $A(A - \lambda)^{-1} I_j$. Pour cela, on applique la troisième identité de la résolvante :

$$\lambda, z \in \rho(A) \quad A(A - \lambda)^{-1}(A - z)^{-1} = \frac{z}{z - \lambda}(A - z)^{-1} - \frac{\lambda}{z - \lambda}(A - \lambda)^{-1}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} A(A - \lambda)^{-1} I_1 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} A(A - \lambda)^{-1}(A - z)^{-1} g_+^{\delta}(s) ds dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{z}{z - \lambda} (A - z)^{-1} g_+^{\delta}(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{\lambda}{z - \lambda} (A - \lambda)^{-1} g_+^{\delta}(s) ds dz \end{aligned}$$

La seconde intégrale est nulle comme on peut le constater en intégrant à gauche de (γ) . Alors

$$\begin{aligned} \|A(A - \lambda)^{-1} I_1\|_E &\leq C \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{e^{-s \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z - \lambda|} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2} |z - \lambda|} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{1/2} |z - \lambda|} \|g_+^{\delta}\|_{C([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

Par le lemme 1.9

$$\|A(A - \lambda)^{-1} I_1\| \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|g_+^{\delta}\|_{C([0, \delta]; E)}$$

Donc

$$I_1 \in D_A(1/2, +\infty)$$

En procédant de la même manière que pour I_1 , on a aussi

$$\begin{aligned} \|A(A - \lambda)^{-1} I_2\| &\leq C \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{e^{s \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z - \lambda|} ds |dz| \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z - \lambda| |z|^{1/2}} \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \\ &\leq \frac{C}{\lambda^{1/2}} \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$I_2 \in D_A(1/2, +\infty)$$

$$\begin{aligned} A(A-\lambda)^{-1}I_3 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{z}{z-\lambda} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}}{(z-\lambda)\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} f_+^\delta dz \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|A(A-\lambda)^{-1}I_3\| &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\delta \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z-\lambda||z|^{1/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2, +\infty)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z-\lambda||z|^{1/2}} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2, +\infty)} \\ &\leq \frac{K}{|\lambda|^{1/2}} \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2, +\infty)} \leq \frac{K}{|\lambda|^{1/2}} I_{+,1/2} \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} A(A-\lambda)^{-1}I_3 &\in D_A(1/2, +\infty) \\ A(A-\lambda)^{-1}I_4 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{z}{z-\lambda} (A-z)^{-1} f_- dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} \delta}{(z-\lambda)\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} A f_- dz \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|A(A-\lambda)^{-1}I_4\| &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z-\lambda||z|^{1/2}} |dz| \|f_-\|_{D(A)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z-\lambda||z|^{1/2}} \|f_-\|_{D(A)} \leq \frac{K}{|\lambda|^{1/2}} \|f_-\|_{D(A)} \end{aligned}$$

Donc

$$A(A-\lambda)^{-1}I_4 \in D_A(1/2, +\infty)$$

ii) immédiat

Conclusion L'opérateur T_δ est continue de

$$C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \times C^{2\alpha}([-1, 0]; E) \times D(1/2, +\infty) \times D(A)$$

vers l'espace $D_A(1/2, +\infty)$

Chapitre 4

4.1 Solution complète du problème (P_+^δ)

On se consacre maintenant à écrire la solution du problème (P_+^δ) sans le paramètre ψ

4.11 Construction de la solution

On rappelle que dans le cas scalaire, la représentation de la solution u_+^δ sans le paramètre ψ du problème (P_+^δ) est donnée par

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= -\int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x,s)g_+^\delta(s)ds - \int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}g_-(s)ds \\ &\quad + \frac{w_z(x,\delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}f_+^\delta + \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z(-1,\delta)}f_- \end{aligned}$$

Avec le noyau de Green

$$N_{z,+}^\delta(x,s) = \begin{cases} \frac{w_z(s,\delta)\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} & 0 \leq s \leq x \leq \delta \\ \frac{w_z(x,\delta)\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} & 0 \leq x \leq s \leq \delta \end{cases}$$

et où l'on a posé

$$\begin{cases} w_z(x,\delta) = p \cosh\sqrt{-z}x \sinh\sqrt{-z} + \sinh\sqrt{-z}x \cosh\sqrt{-z} \\ x \in [0,\delta] \end{cases}$$

Comme dans la partie I, par le calcul fonctionnel de Dunford, une représentation de la solution u_+^δ du problème (P_+^δ) est donnée par

$$\begin{aligned}
u_+^\delta(x) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_0}^\delta \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x,s)(A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{-1}}^0 \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} (A-zI)^{-1} g_-(s) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_z(x,\delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A-zI)^{-1} f_- dz \\
&= v_+^\delta(x, A, g_+^\delta) + w_+^\delta(x, A, g_-) + n_+^\delta(x, A) f_+^\delta + d_+^\delta(x, A) f_-
\end{aligned} \tag{4.1}$$

(γ) est la frontière simple du domaine Σ_{θ_0} orienté positivement de $+\infty e^{i\theta_0}$ vers $-\infty e^{-i\theta_0}$

4.1.2 Etude de la convergence des intégrales

L'existence de la solution du problème posé est liée à la convergence en norme des intégrales dans l'expression (4.1) de $u_+^\delta(x)$

Pour $v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)$

On a

$$\begin{aligned}
& \left| W_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \right| \\
& \leq (1+p) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \\
& \leq (1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}
\end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de

$$\operatorname{Re} \sqrt{-z} = \left| \sqrt{-z} \right| \cos\left(\frac{\pi - \theta_0}{2}\right) = |z|^{1/2} \sin \frac{\theta_0}{2}$$

et du lemme (1.3) on déduit :

$$\left| \int_0^x N_{z,+}^\delta(x,s) g_+^\delta(s) ds \right| \leq \frac{4(1+p) \|g_+^\delta(s)\|_E}{|z| (C_{\theta_0})^2 (\sin \frac{\theta_0}{2})^2}$$

Alors, en utilisant l'hypothèse d'ellipticité (h_1)

$$\left\| \int_{\gamma_0}^x \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x,s)(A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \right\|_E \leq \frac{4M(1+p) \|g_+^\delta(s)\|}{(C_{\theta_0})^2 (\sin \frac{\theta_0}{2})^2} \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz|$$

Pour $0 \leq x \leq s \leq \delta$

$$\left| \int_x^\delta N_{z,+}^\delta(x,s) g_+^\delta(s) ds \right| \leq (1+p) \int_x^\delta \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^{1/2} |\Delta_z(-1,\delta)|} \|g_+^\delta(s)\| ds$$

En procédant de la même manière que précédemment, on trouve

$$\left\| \int_\gamma \int_x^\delta N_{z,+}^\delta(x,s) (A-zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \right\|_E \leq \frac{4M(1+p) \|g_+^\delta(s)\|}{(C_{\theta_0})^2 (\sin \frac{\theta_0}{2})^2} \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz|$$

Finalemment

$$\|v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E \leq C \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta],E)}$$

Avec

$$C = \frac{4M(1+p)}{\pi(C_{\theta_0})^2 (\sin \frac{\theta_0}{2})^2} \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz|$$

La constante C ne dépend que du contour (γ)

Pour $w_+^\delta(x, A, g_-)$. Comme

$$\cosh \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(s+1) \leq e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)}$$

Il vient

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\gamma^{-1}} \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) (A-zI)^{-1} g_-(s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} ds dz \right\|_E \\ & \leq \frac{M \|g_-(s)\|}{2\pi(C_{\theta_0})^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \int_\gamma \frac{dz}{|z|^2} \\ & \leq C \|g_-\|_{C([-1,0],E)} \end{aligned}$$

Pour $n_+^\delta(x, A) f_+^\delta$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E & \leq \frac{2(1+p)M \|f_+^\delta\|_E}{\pi(C_{\theta_0})^2 \sin \frac{\theta_0}{2}} \int_\gamma \frac{dz}{|z|^{3/2}} \\ & \leq C \|f_+^\delta\|_E \end{aligned}$$

De même, pour $d_+^\delta(x, A) f_-$. On a la majoration uniforme suivante

$$\left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z(-1,\delta)} \right| \leq \frac{1}{(C_{\theta_0})^2 \sin \frac{\theta_0}{2}} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|d_+^\delta(x, A)f_-\|_E &\leq \frac{M\|f_-\|_E}{2\pi(C_{\theta_0})^2 \sin \frac{\theta_0}{2}} \int \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|} |dz| \\ &\leq \tilde{D}\|f_-\|_E \end{aligned}$$

\tilde{D} étant une constante qui ne dépend que de (γ) .

Remarque. Comme dans la partie I, Dans toute la suite et selon les cas, on ne tient guère des estimations et l'on désignera toutes par la lettre C

Au prochain paragraphe, on étudie les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et la régularité de la représentation u_+^δ de la solution du problème (P_+^δ)

4.2 Régularité de la solution

4.2.1 Conditions nécessaires

De même que dans l'étude faite dans la partie I (proposition 3.1), les conditions nécessaires pour que

$$u^\delta(x) = \begin{cases} u_-^\delta(x) & -1 \leq x \leq 0 \\ u_+^\delta(x) & 0 \leq x \leq \delta \end{cases}$$

Soit solution stricte du problème (P^δ) sont données par la proposition suivante

Proposition 4.1 Soient $g_- \in C([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha < 1$

On suppose que

$$\begin{cases} u_-^\delta \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A)) \\ u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)) \end{cases}$$

Alors, nécessairement

$$\begin{cases} g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \\ Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Preuve. Voir proposition

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème fondamental suivant

Théorème. Soient $g_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} f_- \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{A}) \end{cases}$$

Alors,

1. u_+^δ de la représentation (4.1) est la solution du problème (P_+^δ) sur $]0, \delta[$
2. $u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A)) \cap C([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

On commence par

4.2.2 Expression formelle de $Au_+^\delta(x)$

Les intégrales définies dans la représentation de u_+^δ sont absolument convergentes, alors

$$u_+^\delta(x) \in D(A)$$

On peut donc appliquer l'opérateur A à $u_+^\delta(x)$. On a besoin du résultat suivant

$$\int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x,s) ds = \frac{-1}{z} + \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \cosh \sqrt{-z}}{z \Delta_z(-1, \delta)}$$

Supposons que $x \in]0, \delta[$, alors

$$\begin{aligned} Au_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_z(x, \delta) A(A-z)^{-1} f_+^\delta}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x,s) A(A-z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} g_-(s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) (A-z)^{-1} A f_-}{\Delta_z(-1, \delta)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_z(x, \delta) A(A-z)^{-1} f_+^\delta}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x,s) A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} g_-(s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) (A-z)^{-1} A f_-}{\Delta_z(-1, \delta)} dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} N_{z,+}^{\delta}(x, s) A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(x) ds dz \\
Au_+^{\delta}(x) & \\
& = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta) A(A-z)^{-1} f_+^{\delta}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} N_{z,+}^{\delta}(x, s) A(A-z)^{-1} [g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(x)] ds dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} g_-(s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) (A-z)^{-1} A f_-}{\Delta_z(-1, \delta)} dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(x)}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(x)}{z} dz
\end{aligned}$$

Par le lemme 3.1

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(x)}{z} dz = g_+^{\delta}(x) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
Au_+^{\delta}(x) & \\
& = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta) A(A-z)^{-1} f_+^{\delta}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} N_{z,+}^{\delta}(x, s) A(A-z)^{-1} [g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(x)] ds dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} g_-(s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) (A-z)^{-1} A f_-}{\Delta_z(-1, \delta)} dz
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(x)}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz + g_+^{\delta}(x)$$

Mais

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} g_-(s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} [g_-(s) - g_-(-1)]}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) A(A-z)^{-1} g_-(-1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} g_-(-1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & Au_+^{\delta}(x) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta) A(A-z)^{-1} f_+^{\delta}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_0^{\delta} \int_{\gamma} N_{z,+}^{\delta}(x, s) A(A-z)^{-1} [g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(x)] ds dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) (A-z)^{-1} (A f_- - g_-(-1))}{\Delta_z(-1, \delta)} dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} [g_-(s) - g_-(0)]}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(0) - g_-(-1)) dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^{\delta}(x) - g_+^{\delta}(0))}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^{\delta}(0) - g_-(0))}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz \\ & + g_+^{\delta}(x) \end{aligned}$$

Comme pour $Au_-^{\delta}(x)$, on a

$$\begin{aligned}
Au_+^\delta(x) &= \frac{-1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{w_z(x, \delta) A(A-z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta}{z\Delta_z(-1, \delta)} dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int_0^\delta \int_\gamma N_{z,+}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)(A-z)^{-1} (Af_- - g_-(-1))}{\Delta_z(-1, \delta)} dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} [g_-(s) - g_-(0)]}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} (g_-(0) - g_-(-1)) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0))}{z\Delta_z(-1, \delta)} dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0))}{z\Delta_z(-1, \delta)} dz \\
&\quad + g_+^\delta(x) \\
&\quad = \left(\sum_{i=1}^7 J_i \right) + g_+^\delta(x)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Pour que $u_+^\delta(x) \in D(A)$, il suffit que dans la représentation (4.2), les intégrales ainsi définies soient absolument convergentes.

C'est ce que nous allons faire à la prochaine étape

4.2.3 Convergence des intégrales

On commence par étudier les propriétés de l'intégrale :

$$n_+^\delta(x, A)f_+^\delta = \frac{+1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{w_z(x, \delta)(A-zI)^{-1} f_+^\delta}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} dz$$

Proposition 4.2. Il existe une constante C ne dépendant que de (γ) telle que

1. Pour tout $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in E$, on a

$$\|n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\| \leq C \|f_+^\delta\|_E$$

et $n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$

2. Si $f_+^\delta \in D_A(\alpha + 1/2, +\infty)$, alors pour tout $x \in [0, \delta]$

$$\|n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_{D(A)} \leq K \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha, \infty)}$$

3. Soit $f_+^\delta \in D(-(-A)^{1/2})$, Alors

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } (-(-A)^{1/2})f_+^\delta \in \overline{D(A)}$$

4. Soit $f_+^\delta \in D(-(-A)^{1/2})$. Alors

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si}$$

$$(-A)^{1/2}f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, \infty) = D_A(\alpha, \infty)$$

Preuve. 1) Déjà fait et pour rappel

$$\|n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E \leq \frac{2(1+p)M \|f_+^\delta\|_E}{\pi(C_{\theta_0})^2 \sin \frac{\theta_0}{2}} \int_{\gamma} \frac{dz}{|z|^{3/2}}$$

Pour 2) on a besoin du lemme suivant

Lemme 4.1. Soient $r > 0$ et α un réel compris strictement entre 0 et 1. Alors pour tout $\varphi \in E$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) $r^\alpha \|A(A-r)^{-1}\varphi\|_E \leq K$

ii) Pour tout $z \in \gamma$

$$|z|^\alpha \|A(A-z)^{-1}\|_E \leq K$$

Preuve. Voir Grisvard [8]

Preuve de 2). Soient $f_+^\delta \in D_A(\alpha + 1/2, +\infty)$ et $x \in [0, \delta]$. Par l'application du lemme 4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|An_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E &\leq C(p+1) \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1+\alpha}} \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha, \infty)} |dz| \\ &\leq C(p+1) \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1+\alpha}} \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha, \infty)} |dz| \\ &\leq K \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha, \infty)} \end{aligned}$$

La suite est immédiate. Il suffit d'appliquer la définition de la norme du graphe et de se rappeler que $D_A(\alpha, +\infty)$ s'injecte continument dans E.

3. **Condition suffisante.** Grace aux inclusions :

$$D_A(\alpha + 1/2, \infty) \subset D_A(1/2, 1) \subset D((-A)^{1/2})$$

on déduit que

$$f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$$

On peut donc écrire

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta) A(A-z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz$$

Alors, grâce à l'identité de la résolvante, on a

$$\begin{aligned} \|An_+^\delta(x, A)f_+^\delta\| &= \left\| \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \right\| \\ &\leq C(p+1) \left(\int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|} |dz| + \int_{\gamma_-} \frac{|dz|}{|z|} \right) \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_E \\ &\leq K \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\| \end{aligned}$$

où l'on a posé respectivement

$$\gamma_+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{(\delta-x)^2} \right\} \text{ et } \gamma_- = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{(\delta-x)^2} \right\}$$

4. Condition suffisante. Soient u, v deux réels tels que $0 \leq u < v \leq \delta$, posons

$$\begin{cases} w_{z,+}(x, \delta) = p \sinh \sqrt{-z} x \sinh \sqrt{-z} + \cosh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} \\ x \in [0, \delta] \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|An_+^\delta(v, A)f_+^\delta - An_+^\delta(u, A)f_+^\delta\| &= \left\| \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sqrt{-z} w_{z,+}(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta d\tau dz \right\| \\ &\leq C(p+1) \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} d\tau |dz| \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} d\tau |dz| \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq K \int_{\gamma} \left[\int_u^v \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| \right] d\tau \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K \int_u^v (\delta - \tau)^{2\alpha-1} d\tau \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq K [(\delta - u)^{2\alpha} - (\delta - v)^{2\alpha}] \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq K (v - u)^{2\alpha} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha, +\infty)}
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour démontrer la condition nécessaire on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2. L'opérateur T défini par :

$$T = (I + e^{-2\sqrt{-A}})(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}}) + p(I - e^{-2\sqrt{-A}})(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}})$$

est bien défini et admet un inverse borné.

Preuve. Voir [5]

On sait que (proposition 2.1) que $-(-A)^{1/2}$ génère un semigroupe analytique non nécessairement continu en zéro (à cause de la densité). Par le calcul fonctionnel de Dunford, le terme $n_+^\delta(x, A)f_+^\delta$ peut être réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned}
&n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\
&= T^{-1}[p(I + e^{-2\sqrt{-A}x})(I - e^{-2\sqrt{-A}}) + (I - e^{-2\sqrt{-A}x})(I + e^{-2\sqrt{-A}})]e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}}(-A)^{-1/2}f_+^\delta
\end{aligned}$$

avec

$$T = (I + e^{-2\sqrt{-A}})(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}}) + p(I - e^{-2\sqrt{-A}})(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}})$$

Par le lemme 2.4, T^{-1} est bien défini.

Alors pour tout $x \in [0, \delta]$, on a

$$\begin{aligned}
&An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\
&= T^{-1}[p(I + e^{-2\sqrt{-A}x})(I - e^{-2\sqrt{-A}}) + (I - e^{-2\sqrt{-A}x})(I + e^{-2\sqrt{-A}})]e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}}(-A)^{1/2}f_+^\delta
\end{aligned}$$

Par Sinestrari [10], proposition 1.2 et théorème 3.1 page 39, on déduit que

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } (-A)^{1/2}f_+^\delta \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

et

$$\begin{aligned}
&An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \text{ implique} \\
&(-A)^{1/2}f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty)
\end{aligned}$$

La preuve de la proposition est achevée ■

On étudie maintenant les propriétés de l'intégrale :

$$d_+^\delta(x, A)f_- = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} f_- dz$$

Proposition 4.3. Il existe une constante C ne dépendant que de (γ) tel que, pour tout $x \in [0, \delta]$ et $f_- \in E$, on a

$$\|d_+^\delta(x, A)f_-\| \leq C \|f_-\|_E$$

2. Si $f_- \in D_A(\alpha, +\infty)$, alors

$$\|d_+^\delta(x, A)f_-\| \leq C \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)}$$

3. $d_+^\delta(x, A)f_- \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ si et seulement si $f_- \in D_A(\alpha, +\infty)$

Preuve. 1) Déjà traitée

2) Soit $f_- \in D_A(\alpha, +\infty)$, alors pour tout $x \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned} \|d_+^\delta(x, A)f_-\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} f_- dz \right\| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha}} \|z^\alpha A(A - z)^{-1} f_-\| |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha}} |dz| \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|d_+^\delta(x, A)f_-\| \leq C \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)}$$

3) Soient u, v tels que $0 \leq u < v \leq \delta$ et $f_- \in D_A(\alpha, +\infty)$, alors

$$\begin{aligned} &\|d_+^\delta(v, A)f_- - d_+^\delta(u, A)f_-\| \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_u^v \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(\delta - \xi)}{z \Delta_z(-1, \delta)} z (A - z)^{-1} f_- d\xi dz \right\| \\ &\leq C \int_\gamma \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \xi)}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha} |\Delta_z(-1, \delta)|} \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} d\xi |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \int_u^v \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - \xi)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta + 1)}} d\xi \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \int_u^v \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\xi + 1)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| d\xi \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

$$\leq C \int_u^v \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(\xi+1)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1+\xi)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\xi+1)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \right] d\xi \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)}$$

Un peu de calcul

On pose $\sigma = |z|^{1/2}(1 + \xi)$, alors

$$\int_{|z| \geq \frac{1}{(1+\xi)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1+\xi)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| = 2(1+\xi)^{-1+2\alpha} \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \sin(\frac{\theta_0}{2})}}{\sigma^{2\alpha}} d\sigma = K_1 (1+\xi)^{2\alpha-1}$$

De même,

$$\int_{|z| \leq \frac{1}{(1+\xi)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} = (1-2\alpha) \left(\frac{1}{(1+\xi)^{1-2\alpha}} - \varepsilon_0^{\frac{1}{2}-\alpha} \right) \leq \frac{1-2\alpha}{(1+\xi)^{1-2\alpha}}$$

alors

$$\int_u^v \int_{|z| \geq \frac{1}{(\xi+1)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1+\xi)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\xi+1)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} d\xi \leq K \int_u^v (1+\xi)^{2\alpha-1} d\xi$$

où l'on a posé $K = \max(K_1, (1-2\alpha))$. Par suite

$$\begin{aligned} \|d_+^\delta(v, A)f_- - d_+^\delta(u, A)f_-\| &\leq K[(1+v)^{2\alpha} - (1+u)^{2\alpha}] \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq K(v-u)^{2\alpha} \|f_-\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

Finalement, on vient de montrer que si $f_- \in D_A(\alpha, +\infty)$ alors

$$d_+^\delta(x, A)f_- \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$$

Réciproquement, on utilise le même procédé que pour $n_+^\delta(x, A)f_+^\delta$, le terme $d_+^\delta(x, A)f_-$ peut être formulé de la manière suivante

$$d_+^\delta(x, A)f_- = T^{-1}(I + e^{-2\sqrt{-A}(\delta-x)})e^{-\sqrt{-A}(x+1)} f_-$$

avec

$$T = \frac{P}{2}(I - e^{-2\sqrt{-A}})(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}}) + (I + e^{-2\sqrt{-A}})(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}})$$

T est bien défini. (Pour la démonstration, voir [5])

Par Sinestrari, proposition 1.2 et théorème 3.1, on a

$d_+^\delta(., A)f_- \in C([0, \delta]; E)$ si et seulement si $f_- \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$
et

$d_+^\delta(\cdot, A)f_- \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ alors $f_- \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty)$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

On étudie maintenant la convergence de l'intégrale J_4 . On rappelle que

$$J_4 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} [g_-(s) - g_-(0)]}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} ds dz$$

Toujours par l'identité de la résolvante, J_4 peut être réécrit de la manière suivante

$$J_4 = +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 \frac{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) (A-z)^{-1} [g_-(s) - g_-(0)]}{\Delta_z(-1, \delta)} ds dz$$

Alors

$$\begin{aligned} \|J_4\| &\leq C \int_{\gamma-1}^0 \int_{\gamma-1}^0 \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} s^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} ds |dz|}{|z|^{\frac{1}{2}} |\Delta_z(-1, \delta)|} \\ &\leq C \int_{\gamma-1}^0 \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\frac{1}{2}} |\Delta_z(-1, \delta)|^{-1}} \left[\int_{\gamma-1}^0 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} s^{2\alpha} ds \right] \|g_-\|_{C([-1,0];E)} |dz| \end{aligned}$$

et

$$\int_{-1}^0 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} s^{2\alpha} ds = 0 + \frac{2\alpha-1}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \int_{-1}^0 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} s^{2\alpha-1} ds$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} s^{2\alpha-1} ds &\leq \left(\int_{-1}^0 e^{p \operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} ds \right)^{1/p} \left(\int_{-1}^0 s^{(2\alpha-1)q} ds \right)^{1/q} \\ \int_{-1}^0 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} s^{2\alpha-1} ds &\leq K \left(\int_{-1}^0 e^{p \operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} ds \right)^{1/p} \leq K \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2p}}} \end{aligned}$$

Alors pour $p = \frac{1}{2\alpha} > 1$, on peut écrire

$$\int_{-1}^0 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} s^{2\alpha} ds \leq \frac{K e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

Ce qui donne

$$\|J_4\| \leq C \int_{\gamma-1}^0 \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{1+\alpha}} |dz| \|g\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\ &\leq C \|g\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \end{aligned}$$

Conclusion

$$J_4 \in C([0, \delta]; E)$$

Pour J_2

$$J_2 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} N_{z,+}^{\delta}(x,s) A(A-z)^{-1} [g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(x)] ds dz ,$$

On a besoin du lemme suivant

Lemme 4.3. Pour tout $x, s \in [0, \delta]$, on a

$$\int_0^{\delta} |N_{z,+}^{\delta}(x,s)| |x-s|^{2\alpha} ds \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha}}$$

Où l'on a posé

$$N_{z,+}^{\delta}(x,s) = \begin{cases} \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} & 0 \leq s \leq x \leq \delta \\ \frac{w_z(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} & 0 \leq x \leq s \leq \delta \end{cases}$$

Preuve. La preuve n'est pas difficile, mais le calcul est un peu laborieux.

On écrit

$$|N_{z,+}^{\delta}(x,s)| |x-s|^{2\alpha} = |N_{z,+}^{\delta}(x,s)|^{1-2\alpha} \left(|N_{z,+}^{\delta}(x,s)| |x-s| \right)^{2\alpha}$$

Alors, par l'inégalité de Hölder

$$\int_0^x |N_{z,+}^{\delta}(x,s)| |x-s|^{2\alpha} ds \leq \left(\int_0^x |N_{z,+}^{\delta}(x,s)| ds \right)^{1-2\alpha} \left(\int_0^x |N_{z,+}^{\delta}(x,s)| |x-s| ds \right)^{2\alpha}$$

et

$$\left(\int_0^x |N_{z,+}^{\delta}(x,s)| ds \right)^{1-2\alpha} \leq \left(C \int_0^x \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} ds \right)^{1-2\alpha} \leq C \left(\frac{1 - e^{-x \operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} \right)^{1-2\alpha}$$

De même

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x |N_{z,+}^\delta(x,s)| |x-s| ds \right)^{2\alpha} &\leq K \left(\int_0^x \frac{(s-x) e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} ds \right)^{2\alpha} \\ &\leq K \left(\int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}u}}{|z|^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re}\sqrt{-z}} du \right)^{2\alpha} \leq K \left(\frac{1 - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\frac{3}{2}}} \right)^{2\alpha} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^x |N_{z,+}^\delta(x,s)| |x-s|^{2\alpha} ds \leq K \left(\frac{1}{|z|} \right)^{1-2\alpha} \left(\frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}} \right)^{2\alpha} \quad K = \max(C, K)$$

De la même manière, on montre que

$$\int_x^\delta |N_{z,+}^\delta(x,s)| |x-s|^{2\alpha} ds \leq \frac{K}{|z|^{1+\alpha}}$$

Alors,

$$\|J_2\| \leq C \int_\gamma \left[\int_0^\delta |N_{z,+}^\delta(x,s)| |s-x|^{2\alpha} ds \right] |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}$$

Par le lemme 4.3

$$\begin{aligned} \|J_2\| &\leq C \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \end{aligned}$$

D'où la continuité de J_2 sur le compact $[0,\delta]$.

Maintenant pour J_6

On rappelle que

$$J_6 = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x) \cosh\sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0))}{z \Delta_z(-1,\delta)} dz$$

Alors

$$\begin{aligned} \|J_6\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z| |\Delta_z(-1,\delta)|} x^{2\alpha} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq C(x)^{2\alpha} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(x)^{2\alpha} \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{x^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{x^2}} \frac{|dz|}{|z|} \right] \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C(x)^{2\alpha} \left[2 \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \sin(\frac{\theta_0}{2})}}{\sigma^2} \sigma d\sigma + K \right] \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

Finalement, J_6 est continue sur $[0,\delta]$.

Pour J_5

$$\begin{aligned}
\|J_5\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-(x+1)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|} (0 - (-1))^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Passons à l'étude de la dernière intégrale J_7 .

$$J_7 = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x) \cosh\sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0))}{z\Delta_z(-1,\delta)} dz$$

Mais dans ce cas, on ne peut plus utiliser l'identité de la résolvante, sinon

$$\|J_7\| \leq C \int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_E |dz|$$

On reconnaît au second membre une intégrale divergente au voisinage de 0.

Mais, si l'on suppose que

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha, +\infty)$$

alors

$$\begin{aligned}
\|J_7\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{1+\alpha}} |dz| \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\
&\leq C \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)}
\end{aligned}$$

4.3 SOLUTION STRICTE

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer le théorème suivant

Théorème 4.1. Soient $g_- \in C^{2\alpha}([-1,0];E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0,\delta];E)$, $0 < 2\alpha < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} f_- \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}) \end{cases}$$

Alors

- i) u_+^δ de la représentation (4.1) est la solution du problème (P_+^δ) .
 ii) $u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A)) \cap C^2([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Preuve. Par la proposition 4.3, pour tout $x \in [0, \delta]$ et $Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)}$, il existe une constante positive C qui ne dépend que du contour (γ) telles que

$$\|d_+^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1))\| \leq C \|Af_- - g_-(-1)\|$$

Par la proposition 4.2, on a

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$$

Par les majorations des J_i précédentes, on a quasiment prouvé le théorème dans le cas où

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha, +\infty)$$

Il reste à prouver que u_+^δ est bien la solution du problème.

On rappelle que

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x, s)(A - zI)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_-(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &= v_+^\delta(x, A, g_+^\delta) + w_+^\delta(x, A, g_-) + n_+^\delta(x, A) f_+^\delta + d_+^\delta(x, A) f_- \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} w_{z,+}(x, \delta) = p \sinh \sqrt{-z} x \sinh \sqrt{-z} + \cosh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} \\ x \in [0, \delta] \end{cases},$$

On déduit formellement, une représentation de $(u_+^\delta)'$

$$\begin{aligned}
(u_+^\delta)'(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^x \frac{w_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s + 1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} g_-(s) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} f_+^\delta dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} f_- dz \\
&= \sum_1^5 I_j
\end{aligned}$$

La convergence des intégrales ne présente aucune difficulté apparente sauf peut-être pour les deux dernières.

On a pour $x \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned}
\|I_5\| &\leq C \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} |dz| + \int_{|z| \geq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \right) \|f_-\|_E \\
&\leq \frac{C}{x+1} \left(\int_1^\infty e^{-\sigma \sin(\theta_0)} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^1 d\sigma \right) \|f_-\|_E \\
&\leq C(x) \|f_-\|_E
\end{aligned}$$

Posons

$$S_+^\delta(x, A) f_+^\delta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} f_+^\delta dz$$

Pour la convergence absolue de $S_+^\delta(x, A) f_+^\delta$, on a la proposition suivante

Proposition 4.4. Il existe une constante C ne dépendant que du contour (γ) tel que

1. Pour tout $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in E$

$$\|S_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E \leq C\|f_+^\delta\|_E$$

2. $S_+^\delta(x, A)f_+^\delta - f_+^\delta \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \delta^-$ si et seulement si $f_+^\delta \in \overline{D(A)}$

Preuve.

1. Soient $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in E$, alors

$$\begin{aligned} & S_+^\delta(A, x)f_+^\delta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{w_{z,+}(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \frac{w_{z,+}(x, \delta) - w_{z,+}(\delta, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup C_x} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_x} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

I_4 est nulle par analyticité et

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|} |dz| \|f_+^\delta\| \leq C \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|f_+^\delta\| \\ &\leq C \|f_+^\delta\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I_2\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \int_{\delta}^x \frac{\sqrt{-z} w_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} f_+^\delta d\tau dz \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma_-} \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} d\tau |dz| \|f_+^\delta\| \\ &\leq C \int_{\gamma_-} \frac{|dz|}{|z| \sin(\theta_0/2)} \|f_+^\delta\| \\ &\leq C \int_{\varepsilon_0}^{1/x^2} \frac{dr}{r} \|f_+^\delta\| \end{aligned}$$

$$\|I_4\| \leq C \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta \|f_+^\delta\| \leq C \|f_+^\delta\|$$

2. Supposons pour le moment que $f_+^\delta \in D(A)$.

De la même manière que pour $d_+^\delta(x, A)f_-$ (prop 3.3) et par l'identité de la résolvante

$$2i\pi S_+^\delta(x, A)f_+^\delta = \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta)(A-z)^{-1} A f_+^\delta}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz - \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta) f_+^\delta}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz$$

Le terme sans la résolvante est nul comme on peut le voir en intégrant à gauche de (γ) , alors

$$\lim_{x \xrightarrow{\leftarrow} \delta} 2i\pi S_+^\delta(x, A) f_+^\delta = \int_{\gamma} \frac{(A-z)^{-1} A f_+^\delta}{z} dz$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{(A-z)^{-1} A f_+^\delta}{z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_{R \cup C_R}} \frac{(A-z)^{-1} A f_+^\delta}{z} dz - \int_{C_R} \frac{(A-z)^{-1} A f_+^\delta}{z} dz \right) \\ &= 2i\pi f_+^\delta \end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{x \xrightarrow{\leftarrow} \delta} S_+^\delta(x, A) f_+^\delta = f_+^\delta$$

Supposons que $f_+^\delta \in \overline{D(A)}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in D(A)$ tel que

$$\|f_+^\delta - \psi\| < \varepsilon$$

et

$$S_+^\delta(x, A) f_+^\delta - f_+^\delta = S_+^\delta(x, A) f_+^\delta - S_+^\delta(x, A) \psi + S_+^\delta(x, A) \psi - \psi + \psi - f_+^\delta$$

Puisque $(f_+^\delta - \psi) \in D(A)$, alors par l'assertion 1) de la proposition en cours

$$\|S_+^\delta(x, A) f_+^\delta - S_+^\delta(x, A) \psi\| \leq C \|f_+^\delta - \psi\|$$

entraîne pour x voisin de δ à gauche

$$\|S_+^\delta(x, A) f_+^\delta - f_+^\delta\| \leq \|S_+^\delta(x, A) f_+^\delta - S_+^\delta(x, A) \psi\| + \|S_+^\delta(x, A) \psi - \psi\| + \|\psi - f_+^\delta\| \leq 3\varepsilon$$

Par suite,

$$\lim_{x \xrightarrow{\leftarrow} \delta} S_+^\delta(x, A) f_+^\delta = f_+^\delta, \text{ (La limite étant prise au sens de la norme de E)}$$

Pour la réciproque, il suffit de calquer la démonstration de la proposition 3.3.

Cependant, on ne peut pas exprimer directement l'expression de la dérivée de $(u_+^\delta)'(x)$. En effet, on rappelle (voir rappels : fonctions de Green) que

$\int_0^\delta N_{z,+}(x, s) g_+^\delta(s) ds$ est 2-différentiable et solution de l'équation différentielle aux conditions homogènes :

$$u'' + zu = g_+^\delta$$

Alors,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^\delta N_{z,+}(x,s) g_+^\delta(s) ds \right) = g_+^\delta(x) - z \left(\int_0^\delta N_{z,+}(x,s) g_+^\delta(s) ds \right)$$

Par suite, si on accepte qu'on puisse exprimer directement l'expression de la dérivée de $(u_+^\delta)(x)$, on aurait

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_\gamma^\delta \int_0^\delta N_{z,+}(x,\delta)(A-z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \right) \\ &= \int_\gamma (A-z)^{-1} g_+^\delta(x) dz - \int_\gamma^\delta \int_0^\delta z N_{z,+}(x,\delta)(A-z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \end{aligned}$$

On reconnaît dans le second membre une intégrale

$$\int_\gamma (A-z)^{-1} g_+^\delta(x) dz$$

qui n'est pas bien définie !

Pour calculer la dérivée de $(u_+^\delta)'(x)$, on doit procéder autrement (voir Tanabé [16])

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit tel que

$$\varepsilon \leq x \leq \delta - \varepsilon$$

Posons

$$\begin{aligned} \left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{w_z(s,\delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{w_{z,+}(x,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} g_+^\delta(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} g_-(s) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_{z,+}(x,\delta)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} f_+^\delta dz - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z} (A-z)^{-1} f_- dz \\ &= \sum_{j=1}^5 I_j = \sum_{j=1}^5 I_j(x) \end{aligned}$$

Il est assez facile de vérifier que les intégrales I_1, I_2, I_3 sont convergentes.

Pour I_4 . La condition $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$ est suffisante, en effet

$$\|I_4\| = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_{z,+}(x,\delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \right\|$$

$$\begin{aligned} &\leq C(p+1) \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\frac{3}{2}}} |dz| \|(-A)^{1/2} f_+^{\delta}\| \\ &\leq C(p+1) \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}} |dz| \|(-A)^{1/2} f_+^{\delta}\| \leq K \|(-A)^{1/2} f_+^{\delta}\| \end{aligned}$$

Pour I_5

$$\begin{aligned} \|I_5\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} Af_- \right\| \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\frac{3}{2}}} |dz| \|Af_-\|_E \leq K \|f_-\|_{D(A)} \end{aligned}$$

On déduit grâce à la convergence absolue des intégrales I_j , $1 \leq j \leq 5$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[(u_+^{\delta})' \right]_{\varepsilon} (x) = (u_+^{\delta})'(x)$$

La limite étant prise au sens fort.

Maintenant, on exprime la dérivée de $\left[(u_+^{\delta})' \right]_{\varepsilon} (x)$. Pour cela, le calcul de chaque terme sera explicité séparément.

$$\begin{aligned} I_1'(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x-\varepsilon, \delta) \sinh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1,\delta)} A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(x-\varepsilon) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{w_z(s, \delta) \cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(s) ds dz \\ I_2'(x) &= + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh\sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1,\delta)} A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(x+\varepsilon) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{w_z(x, \delta) \cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} A(A-z)^{-1} g_+^{\delta}(s) ds dz \\ I_3'(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x) \sinh\sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)} A(A-z)^{-1} g_-(s) ds dz \\ I_4'(x) &= + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^{\delta} dz \\ I_5'(x) &= - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A-z)^{-1} Af_- dz \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, on note

$$A_z = A(A - z)^{-1}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon' (x) &= \sum_{j=1}^5 I_j'(x) \\ &= + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} [Af_- - g_-(-1)] dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1} \int_0^{\delta} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_-(s) - g_-(0)] ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z (g_-(0) - g_-(-1)) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z}}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(0) - g_-(0)] dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z}}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)] dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x - \varepsilon, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{w_z(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{w_z(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x - \varepsilon, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_{z,+}(x-\varepsilon, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_z(x, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz$$

Mais

$$+\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_z(x-\varepsilon, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x) - w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz$$

$$= +\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_{z,+}(\delta-2x+\varepsilon, \delta)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz$$

et

$$+\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon) - w_z(x, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz$$

$$= -\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_{z,+}(\delta-2x-\varepsilon, \delta)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz$$

Donc, la somme des quatre dernières intégrales est égale à :

$$\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_{z,+}(\delta-2x+\varepsilon, \delta) - w_{z,+}(\delta-2x-\varepsilon, \delta)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz$$

En définitif, on peut écrire

$$\left[(u_+^\delta)' \right]'_\varepsilon(x)$$

$$= +\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-z)^{-1} [Af_- - g_-(-1)] dz$$

$$+\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \sinh \sqrt{-z}(s+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_-(s) - g_-(0)] ds dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z (g_-(0) - g_-(-1)) dz$$

$$+\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \cosh \sqrt{-z}}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(0) - g_-(0)] dz \quad (4.5)$$

$$+\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \cosh \sqrt{-z}}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)] dz$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(x-\varepsilon, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z[g_+^\delta(x-\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z[g_+^\delta(x+\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A_z[g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{w_z(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A_z[g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(\delta-2x+\varepsilon, \delta) - w_{z,+}(\delta-2x-\varepsilon, \delta)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz \\
& = \sum_{j=1}^{11} I_j
\end{aligned}$$

La convergence des intégrales I_1, I_2, \dots, I_6 a été déjà traitée. (Proposition 4.3)

Pour I_7

$$\begin{aligned}
\|I_7\| & \leq C \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\varepsilon+1)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z| e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} \varepsilon^{2\alpha} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\varepsilon}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \varepsilon^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}
\end{aligned}$$

I_8 se traite de la même manière que I_7

Pour I_9

$$\begin{aligned}
\|I_9\| & \leq C \int_{\gamma} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} (x-s)^{2\alpha} ds |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_0^{x-\varepsilon} \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \right] (x-s)^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_0^{x-\varepsilon} \left(\frac{1}{(x-s)} \int_1^{+\infty} 2e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} d\sigma + \frac{1}{(x-s)} \int_{\varepsilon_0}^1 2d\sigma \right) (x-s)^{2\alpha} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \bar{C} \int_0^{x-\varepsilon} (x-s)^{2\alpha-1} ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq \bar{C} \varepsilon^{2\alpha} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \end{aligned}$$

$$\text{Où } \bar{C} = \max \left\{ 2C \int_1^\infty e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} d\sigma, 2C \int_{\varepsilon_0}^1 d\sigma \right\}$$

I_{10} se traite de la même manière que I_9 . On trouve

$$\|I_9\| \leq C \varepsilon^{2\alpha} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}$$

Pour I_{11}

$$\begin{aligned} \|I_{11}\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{\delta-2x-\varepsilon}^{\delta-2x+\varepsilon} \frac{w_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(x) d\tau dz \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{w_z(\delta-\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(x) d\tau dz \right\| \\ &\leq C \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\tau+1)}}{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} d\tau \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \left\| g_+^\delta(x) \right\|_{C([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau} d\tau \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \left\| g_+^\delta(x) \right\|_{C([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{\frac{1}{2}}} |dz| d\tau \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[2\tau^{-1} \int_1^{+\infty} e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} d\sigma + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \right] d\tau \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[2\tau^{-1} \int_1^{+\infty} e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} d\sigma + \tau^{-1} - \sqrt{\varepsilon_0} \right] d\tau \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[\tau^{-1} \right] d\tau \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\ &\leq C \operatorname{Ln} \left(\frac{2x+\varepsilon}{2x-\varepsilon} \right) \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \end{aligned}$$

Reste à montrer que

$$\left[\left(u_+^\delta \right)' \right]_\varepsilon' (x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x)$$

tend vers 0 fortement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

On a par application de la décomposition (4.5)

$$\begin{aligned} & \left[\left(u_+^\delta \right)' \right]_\varepsilon' (x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \\ &= + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_z(x-\varepsilon, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(x-\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(x+\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{w_z(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_{z,+}(\delta-2x+\varepsilon) - w_{z,+}(\delta-2x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A-z)^{-1} g_+^\delta(x) dz \end{aligned}$$

Puisque $\int_0^\delta \dots ds = \int_0^{x-\varepsilon} \dots ds + \int_{x-\varepsilon}^x \dots ds + \int_x^{x+\varepsilon} \dots ds + \int_{x+\varepsilon}^\delta \dots ds$, alors

$$\begin{aligned} & \left[\left(u_+^\delta \right)' \right]_\varepsilon' (x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \\ &= + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_z(x-\varepsilon, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(x-\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_{z,+}(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(x+\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x-\varepsilon}^x \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^{x+\varepsilon} \frac{w_z(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A_z [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{w_{z,+}(\delta-2x+\varepsilon) - w_{z,+}(\delta-2x-\varepsilon)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z g_+^\delta(x) dz \\ &= \sum_{j=1}^5 I_j \end{aligned}$$

Convergence des I_j

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &\leq C \int_{\gamma} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} ds |dz| |s-x|^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{x-\varepsilon}^x \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} |dz| ds |s-x|^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{x-\varepsilon}^x (x-s)^{2\alpha-1} ds \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \varepsilon^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

I_4 se traite de la même manière que I_3 , on trouve

$$\|I_4\| \leq C \varepsilon^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}$$

Maintenant,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|I_j\| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C \varepsilon^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} = 0$$

Finalement,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)' (x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \right] = (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) = 0$$

Pour achever la démonstration, il reste à vérifier les conditions aux limites du problème.

Il est évident de voir que

$$u_+^\delta(0) = \psi$$

Par contre en δ , il suffit d'appliquer la proposition (4.4).

Finalement, u_+^δ est bien la solution stricte du problème (P_+^δ) .

Le théorème 4.1 est enfin démontré ■

Maintenant, on doit s'intéresser au cas où

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

Posons

$$J_+^\delta(x, A) \xi^\delta = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-z)^{-1} \xi^\delta dz$$

Proposition 4.5 Pour tout $x \in [0, \delta]$ et $\xi^\delta \in E$, il existe une constante C ne dépendant que du contour (γ) telle que

$$\|j_+^\delta(x.A)\xi^\delta\| \leq C\|\xi^\delta\|$$

2. $j_+^\delta(x.A)\xi^\delta - \xi^\delta \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ si et seulement si $\xi^\delta \in \overline{D(A)}$

3. $j_+^\delta(x.A)\xi^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ si et seulement si $\xi^\delta \in D_A(\alpha, +\infty)$

Preuve. Pour une estimation de $\|j_+^\delta(x, A)\xi^\delta\|$, on écrira

$$\begin{aligned} J_+^\delta(x, A)\xi^\delta &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \xi^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \xi^\delta dz \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \gamma_- = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{x^2} \right\} \\ \gamma_+ = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{x^2} \right\} \end{cases}$$

a) Estimation de J_1 . Par l'application du lemme 1.5, on a

$$\begin{aligned} \|J_1\| &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{|z| |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \|\xi^\delta\| |dz| \\ &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z| C_{\theta_0}} |dz| \|\xi^\delta\| \\ &\leq C \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|\xi^\delta\|, \\ &\leq C_1 \|\xi^\delta\| \end{aligned}$$

De même, pour J_2 on écrit

$$J_2 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) - \cosh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - z)^{-1} \xi^\delta dz$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup C_x} (A-z)^{-1} \xi^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_x} (A-z)^{-1} \xi^\delta dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \left[\int_0^x \frac{-\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} (\delta - t)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} dt \right] (A-z)^{-1} \xi^\delta dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup C_x} (A-z)^{-1} \xi^\delta dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_x} (A-z)^{-1} \xi^\delta dz \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

où
$$C_x = \left\{ |\arg| \leq \theta_0 \right\} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{x^2} \right\}$$

Reste à estimer les trois dernières intégrales.

I_1 est nulle par analyticité et

$$\begin{aligned}
\|I_2\| &\leq C \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - t)}{|z|^{\frac{1}{2}} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} dt |dz| \|\xi^\delta\| \\
&\leq C \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} t}}{|z|^{\frac{1}{2}} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} dt |dz| \|\xi^\delta\| \\
&\leq C \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}} C_{\theta_0}} dt |dz| \|\xi^\delta\| \\
&\leq C \int_{\varepsilon_0 x}^1 d\rho \|\xi^\delta\| \leq C_2 \|\xi^\delta\|
\end{aligned}$$

Pour I_3

$$\|I_3\| \leq C \int_{C_x} \frac{|dz|}{|z|} \|\xi^\delta\| \leq C_3 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{r d\theta}{r} \|\xi^\delta\|$$

Alors

$$\|j_+^\delta(x, A) \xi^\delta\| \leq C \|\xi^\delta\| \quad (C = \max C_i, 1 \leq i \leq 3)$$

Condition suffisante. Ce cas a été traité dans la proposition 3.3 et 4.4. Nous ne le ferons pas.

2. Soient $\xi^\delta \in D_A(\alpha, +\infty)$ et u, v deux réels tels que $0 \leq u < v \leq \delta$. On a

$$\begin{aligned}
& j_+^\delta(v, A) \xi^\delta - j_+^\delta(u, A) \xi^\delta \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - v) - \cosh \sqrt{-z} (\delta - u)}{\cosh \sqrt{-z} \delta} \frac{A(A-z)^{-1} \xi^\delta}{z} dz
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A-z)^{-1}}{\sqrt{-z}} \xi^\delta d\tau dz$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|j_+^\delta(v, A)\xi^\delta - j_+^\delta(u, A)\xi^\delta\| &\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} d\tau |dz| \|\xi^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v \left[\int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| + \int_{\gamma_-} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \right] d\tau \|\xi^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

L'intégrale entre crochet a été traitée plusieurs fois, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha}} \tau^{2\alpha-1} = C_1 \tau^{2\alpha-1} \\ \int_{\gamma_-} \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| &= \int_{\varepsilon_0 \tau^2}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{2\alpha}} (\tau^{2\alpha-1}) C_1 \tau^{2\alpha-1} \leq C_2 \tau^{2\alpha-1} \end{aligned}$$

On déduit facilement que

$$\begin{aligned} \|j_+^\delta(v, A)\xi^\delta - j_+^\delta(u, A)\xi^\delta\| &\leq C \int_u^v \tau^{2\alpha-1} d\tau \|\xi^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \left((v)^{2\alpha} - (u)^{2\alpha} \right) \|\xi^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C (v-u)^{2\alpha} \|\xi^\delta\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Pour la réciproque, on utilise le calcul fonctionnel de Dunford. Le terme $j_+^\delta(x, A)\xi^\delta$ peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} j_+^\delta(x, A)\xi^\delta &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-z)^{-1} \xi^\delta dz \\ &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\sqrt{-z}x} (1 + e^{-2\sqrt{-z}(\delta-x)})}{1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}} (A-z)^{-1} \xi^\delta dz \\ &= (I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}})^{-1} (I + e^{-2(\delta-x)(-A)^{1/2}}) e^{-x(-A)^{1/2}} \xi^\delta \end{aligned}$$

Par Lunardi [21] page 59 et 60, l'opérateur

$$(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}})$$

est bien défini et admet un inverse borné.

Par Sinestrari [10], proposition 1.2 et théorème 3.1, on a

a) $J_+^\delta(x, A)\xi^\delta \rightarrow \xi^\delta$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ si et seulement si $\xi^\delta \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$

b) Pour $x \in [0, \delta]$

$$j_+^\delta(x, A)\xi^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$$

Par suite, les deux applications

$$\begin{cases} x \rightarrow e^{-x(-A)^{1/2}} \\ x \rightarrow e^{-(2\delta-x)(-A)^{1/2}} \end{cases}$$

appartiennent à $C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$. Donc,

$$j_+^\delta(x, A)\xi^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty)$$

Proposition 4.6 Soit $x \in [0, \delta]$. L'application $x \rightarrow J_\gamma(x)$ définie par

$$J_\gamma(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z} A(A - z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0))}{z \Delta_z(-1, \delta)} dz$$

est un élément de $C([0, \delta]; E)$ si et seulement si, la condition suivante est vérifiée

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

Preuve. On procède par étape.

1. Posons

$$\chi = 2p \frac{e^{-2\sqrt{-z}\delta} + e^{-2\sqrt{-z}}}{(1 + e^{-2\sqrt{-z}})(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta})}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{p+1-\chi} &= 2p \frac{(e^{-2\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}\delta})}{(1+p)(1+e^{-2\sqrt{-z}})(1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}) - 2p(e^{-2\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}\delta})} \\ &= 2p \frac{(e^{-2\sqrt{-z}} + e^{-2\sqrt{-z}\delta})}{p(1-e^{-2\sqrt{-z}})(1-e^{-2\sqrt{-z}\delta}) + (1+e^{-2\sqrt{-z}})(1+e^{-2\sqrt{-z}\delta})} \end{aligned}$$

Alors,

$$\left| \frac{\chi}{1+p-\chi} \right| \leq \frac{2p(e^{-2\delta|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)} + e^{-2|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)})}{C_{\theta_0}^2}$$

2. Pour $x \in [0, \delta]$, considérons l'opérateur $\psi_+^\delta(x, A)\xi^\delta$ défini sur E par :

$$\psi_+^\delta(x, A)\xi^\delta = \frac{-1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \left(\frac{\chi}{(1+p) - \chi} \right) (A - z)^{-1} \xi^\delta dz$$

On a

$$\begin{aligned} \|\psi_+^\delta(x, A)\xi^\delta\| &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-2|z|^{1/2}\delta \sin(\theta_0)} + e^{-2|z|^{1/2}\sin(\theta_0/2)}}{|z|} |dz| \|\xi^\delta\| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-2\delta|z|^{1/2}\sin(\theta_0/2)} (1 + e^{-2(1-\delta)\sin(\theta_0/2)})}{|z|} |dz| \|\xi^\delta\| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-2\delta|z|^{1/2}\sin(\theta_0/2)}}{|z|} |dz| \|\xi^\delta\| \leq C \|\xi^\delta\| \end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie que (la clé de la proposition !)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p+1} \left(\frac{-1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \left(1 + \frac{\psi}{(1+p) - \psi} \right) (A - z)^{-1} \xi^\delta dz \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - z)^{-1} \xi^\delta dz \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$j_+^\delta(x, A)\xi^\delta + \psi_+^\delta(x, A)\xi^\delta = J_\gamma(x)$$

Par suite, par la proposition 4.5 assertion 2), on a

$$J_\gamma \in C([0, \delta]; E)$$

Par la proposition 4.5, on a aussi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} J_+^\delta(x, A)(g_+^\delta(0) - g_-(0)) &= g_+^\delta(0) - g_-(0) \text{ si et seulement si} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) &\in \overline{D(A)} \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème de régularité.

Théorème 4.2 Soient $g_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha < 1$.

On suppose que

$$\begin{cases} f_- \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{A}) \end{cases}$$

Alors

1. u_+^δ de la représentation (4.1) est la solution du problème (P_+^δ) sur $]0, \delta[$.
2. $u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A))$ si et seulement si

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Preuve. 1) déjà traitée (théorème 4.1).

2. Par la proposition 4.3, pour tout $x \in [0, \delta]$ et $Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)}$, il existe une constante C qui ne dépend que du contour (γ) telles que

$$\|d_+^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1))\| \leq C \|Af_- - g_-(-1)\|$$

Par la proposition 4.2, on a

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$$

Par la proposition 4.6

$$J_\gamma(\cdot) \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

D'où

$$Au_+^\delta(\cdot) \in C([0, \delta]; E)$$

Par suite

$$u_+^\delta(\cdot) \in C([0, \delta]; D(A))$$

Alors

$$u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A))$$

La preuve du théorème est enfin achevée. ■

Remarque 4.2.1 Comme pour u_-^δ , l'équation différentielle définie dans (P_+^δ) a un effet régularisant sur la solution u_+^δ

4.3.1 Conditions suffisante

Posons

$$\Omega^\delta = [-1, 0[\cup]0, \delta]$$

En combinant l'étude faite au chapitre 3 et celle au chapitre 4, on peut énoncer le théorème suivant

Théorème 4.3 Soit $g^\delta \in C^{2\alpha}(\Omega^\delta; E)$ avec $0 < 2\alpha < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} f_- \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{A}) \end{cases}$$

Alors

1. u^δ est solution du problème (P^δ) sur $] -1, 0[\cup] 0, \delta[$
2. $u^\delta \in C^2(\Omega^\delta; E) \cap C(\Omega^\delta; D(A))$ si et seulement si

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Preuve. il suffit de se rappeler que

$$u^\delta(x) = \begin{cases} u_+^\delta(x) & x \in [0, \delta] \\ u_-^\delta(x) & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

et d'appliquer les théorèmes 3.2 et 4.2

Dans le prochain paragraphe, on abordera le problème de la régularité maximale de la solution u_+^δ

4.4 Régularité maximale

Théorème 4.3 Soient $g_- \in C^{2\alpha}([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$, $0 < 2\alpha < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} f_- \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{A}) \end{cases}$$

. Alors, la représentation de u_+^δ définie par (4.1) vérifié :

1. u_+^δ est la solution du problème (P_+^δ) sur $]0, \delta[$
2. $Au_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ si et seulement si, la condition notée \mathcal{MR}

$$\mathcal{MR} \begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_-(-1) - g_-(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ \sqrt{-A}f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

3. $(u_+^\delta)'' \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$ si et seulement si \mathcal{MR} est vérifiée.

Preuve.

- 1). Déjà traitée (voir la démonstration du théorème 4.1)

2). Par le théorème 4.2, il est facile de vérifier que

$$u_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$$

En effet,

$$C^2([0, \delta]; E) \subset C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$$

et

$$D_A(\alpha, +\infty) \subset \overline{D(A)}$$

Maintenant pour $x \in [0, \delta]$, on a

$$\begin{aligned} Au_+^\delta(x) &= An_+^\delta(x, A)f_+^\delta + d_+^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1)) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z\Delta_z(-1, 0)} A(A-z)^{-1} (g_-(0) - g_-(-1)) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A(A-z)^{-1} [g_-(s) - g_-(0)]}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0))}{z\Delta_z(-1, \delta)} dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \cosh \sqrt{-z} A(A-z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_-(0))}{z\Delta_z(-1, \delta)} dz \\ &\quad + g_+^\delta(x) \\ &= An_+^\delta(x, A)f_+^\delta + d_+^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1)) + \sum_{i=1}^5 J_i(x) + g_+^\delta(x) \end{aligned}$$

Par l'application des deux propositions 4.2 et 4.3, on a

$$An_+^\delta(., A)f_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$$

$$d_+^\delta(., A)(Af_- - g_-(-1)) \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E)$$

Soient u, v tels que $0 \leq u < v \leq \delta$

$$\begin{aligned} &J_2(v) - J_2(u) \\ &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma-1}^0 \left(\frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - v) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - u)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} \right) \sinh \sqrt{-z}(s+1) A_z (g_-(s) - g_-(0)) ds dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^v \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \sigma)}{\Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(s+1) A_z(g_-(s) - g_-(0)) d\sigma ds dz \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \sigma)}{\Delta_z(-1, \delta)} \left(\int_{-1}^0 \sinh \sqrt{-z}(s+1)(g_-(s) - g_-(0)) ds \right) A_z d\sigma dz
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\|J_2(v) - J_2(u)\| \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - \sigma)}}{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta + 1)}} \left(\int_{-1}^0 |\sinh \sqrt{-z}(s+1)s^{2\alpha}| ds \right) \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} d\sigma |dz|
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder,

$$\int_{-1}^0 |\sinh \sqrt{-z}(s+1)s^{2\alpha}| ds \leq \frac{Ke^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

on déduit

$$\begin{aligned}
\|J_2(v) - J_2(u)\| &\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\sigma}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} d\sigma |dz| \\
&\leq C \int_u^v \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\sigma}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} |dz| d\sigma \\
&\leq C \int_u^v \sigma^{2\alpha-1} d\sigma \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C(v^{2\alpha} - u^{2\alpha}) \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)} \\
&\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_-\|_{C^{2\alpha}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour J_5

$$\begin{aligned}
&\|J_5(v) - J_5(u)\| \\
&= \left\| \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \sigma) \cosh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(0) - g_-(0)) d\sigma dz \right\| \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_u^v \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\sigma}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} d\sigma |dz| \\
&\leq C \int_u^v \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{\sigma^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\sigma}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\sigma^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \right] d\sigma \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)}
\end{aligned}$$

$$\leq C \int_u^v \sigma^{2\alpha-1} d\sigma \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)}$$

Par suite,

$$\|J_5(v) - J_5(u)\| \leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)}$$

Pour J_2

$$\begin{aligned} \|J_2(v) - J_2(u)\| &\leq C \int_u^v \int_{\gamma} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha} |\Delta_z(-1, \delta)|} d\tau |dz| \|g_-(0) - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(1+\tau)^2}} \frac{e^{-(1+\tau) \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(1+\tau)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} \right) \|g_-(0) - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} d\tau \\ &\leq C \int_u^v \left(2(1+\tau)^{2\alpha-1} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0)}}{\sigma^{2\alpha}} d\sigma + 2(1+\tau)^{2\alpha-1} \int_{(1+\tau)\sqrt{\varepsilon_0}}^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{2\sigma}} \right) d\tau \|g_-(0) - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \int_u^v (1+\tau)^{2\alpha-1} d\tau \|g_-(0) - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \left((1+v)^{2\alpha} - (1+u)^{2\alpha} \right) \|g_-(0) - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_-(0) - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \end{aligned}$$

Maintenant, on s'intéresse à $J_1(x)$

$$J_1(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(x, s) A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)] ds dz$$

Avec

$$N_{z,+}^\delta(x, s) = \begin{cases} \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z} (\delta - x)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} & 0 \leq s \leq x \leq \delta \\ \frac{w_z(x, \delta) \cosh \sqrt{-z} (\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} & 0 \leq x \leq s \leq \delta \end{cases}$$

Alors,

$$J_1(v) - J_1(u) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta N_{z,+}^\delta(v, s) A(A-z)^{-1} [g_+^\delta(s) - g_+^\delta(v)] ds dz$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} N_{z,+}^{\delta}(u,s) A(A-z)^{-1} [g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)] ds dz \\
& = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^v \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
& \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \frac{w_z(v,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
& \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-u)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\
& \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^{\delta} \frac{w_z(u,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz
\end{aligned}$$

D'autres parts,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-u)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\
& = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \int_u^v \frac{w_z(s,\delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta-\sigma)}{\Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) d\sigma ds dz \\
& \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^v \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
& = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
& \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{w_z(s,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \frac{w_z(v,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\
& = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \int_v^u \frac{w_{z,+}(\sigma,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) d\sigma ds dz \\
& \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \frac{w_z(u,\delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1,\delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^{\delta} \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & J_1(v) - J_1(u) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \int_u^v \frac{w_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - \sigma)}{\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) d\sigma ds dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(v) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \int_v^u \frac{w_{z,+}(\sigma, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) d\sigma ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(v) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^u \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(v) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_v^{\delta} \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(v) - g_+^{\delta}(u)) ds dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_{z,+}(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(v) - g_+^{\delta}(u)) dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w_z(u, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(v) - g_+^{\delta}(u)) dz \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - v) \cosh \sqrt{-z}}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz$$

La dernière intégrale va nous être utile pour J_4

$$\begin{aligned} J_4(v) - J_4(u) &= -\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh(\delta - v)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(0)) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh(\delta - u)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(u) - g_+^\delta(0)) dz \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &J_4(v) - J_4(u) \\ &+ \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - v) \cosh \sqrt{-z}}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{(\cosh \sqrt{-z}(\delta - v) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - u)) \cosh \sqrt{-z}}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(u) - g_+^\delta(0)) dz \end{aligned}$$

Ce qui donne, en définitif

$$\begin{aligned} &J_1(v) - J_1(u) + J_4(v) - J_4(u) \\ &= \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_0^u \int_u^v \frac{w_z(s, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - \sigma)}{\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) d\sigma ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_u^v \frac{w_z(s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(v)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_v^\delta \int_u^v \frac{w_{z,+}(\sigma, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(v)) d\sigma ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \int_u^v \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(s) - g_+^\delta(u)) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_{z,+}(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{w_z(u, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\delta - v)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(v) - g_+^\delta(u)) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi_\gamma} \int \frac{(\cosh \sqrt{-z}(\delta - v) - \cosh \sqrt{-z}(\delta - u)) \cosh \sqrt{-z}}{z\Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^\delta(u) - g_+^\delta(0)) dz \end{aligned}$$

$$= \sum_1^7 I_j$$

Remarque importante 4.4.1

On pourrait croire que le choix des intégrales dans la décomposition précédente était anodin. Le simple fait de changer dans la décomposition précédente, l'intégrale

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_v}^{\delta} \int_v \frac{w_z(v, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(v)) ds dz$$

par celui de

$$+\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_u}^{\delta} \int_u \frac{w_z(u, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A_z(g_+^{\delta}(s) - g_+^{\delta}(u)) ds dz$$

et moyennant quelques changements, nous ramènerait à une intégrale divergente ; Un choix qui n'était pas sans risque.

Pour I_7

$$I_7 = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_u}^v \int_u \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \sigma) \cosh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A - z)^{-1} (g_+^{\delta}(u) - g_+^{\delta}(0)) d\sigma dz$$

On a

$$\begin{aligned} \|I_7\| &\leq C \int_{\gamma_u}^v \int_u \frac{e^{-\sigma \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}}} u^{2\alpha} d\sigma \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} |dz| \\ &\leq C \int_u^v \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{\sigma^2}} \frac{e^{-\sigma \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}}} dz + \int_{|z| \leq \frac{1}{\sigma^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \right) \sigma^{2\alpha} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

L'intégrale entre parenthèse a été déjà traitée plusieurs fois, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{|z| \geq \frac{1}{\sigma^2}} \frac{e^{-\sigma \operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}}} dz + \int_{|z| \leq \frac{1}{\sigma^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} &= 2\sigma^{-1} \int_1^{+\infty} e^{-\xi \sin(\theta_0/2)} d\xi + 2\sigma^{-1} \int_{\varepsilon_0}^1 d\xi \\ &= 2K\sigma^{-1} \quad \text{avec } K = \max \left(\int_1^{+\infty} e^{-\xi \sin(\theta_0/2)} d\xi, \int_{\varepsilon_0}^1 d\xi \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|I_7\| &\leq C \int_u^v \sigma^{2\alpha-1} d\sigma \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

Pour I_6

$$\begin{aligned}
\|I_6\| &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(v-u)}}{|z|} |dz| (v-u)^{2\alpha} \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(v-u)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(v-u)}}{|z|} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(v-u)^2}} \frac{|dz|}{|z|} \right) (v-u)^{2\alpha} \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \left(\int_1^{+\infty} \frac{2e^{-\xi \sin(\theta_0/2)}}{\xi} d\xi + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{2d\xi}{\xi} \right) (v-u)^{2\alpha} \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C (v-u)^{2\alpha} \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

Pour I_2

$$\begin{aligned}
\|I_2\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_u^v \frac{(p+1)e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(v-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} (v-s)^{2\alpha} ds \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C([0,\delta];E)} |dz| \\
&\leq C \int_u^v \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(v-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} |dz| ds \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_u^v \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(v-s)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(v-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(v-s)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \right) (v-s)^{2\alpha} ds \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_u^v \left(\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{(v-s)} d\sigma + \int_{\varepsilon_0}^1 \frac{d\sigma}{(v-s)} \right) (v-s)^{2\alpha} ds \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_u^v (v-s)^{2\alpha-1} ds \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C (v-u)^{2\alpha} \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

I_4 (resp I_5) se traite de la même manière que I_2 (resp I_6)

Pour I_1

$$\|I_1\| \leq C \int_{\gamma} \int_0^u \int_u^v e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-\sigma)} |s-u|^{2\alpha} d\sigma ds |dz| \|\mathbf{g}_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}$$

$$\leq C \int_u^v \int_\gamma e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\sigma} \left(\int_0^u e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s} |s-u|^{2\alpha} ds \right) d\sigma |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}$$

Par l'application de l'inégalité de Hölder,

$$\int_0^u e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}s} |s-u|^{2\alpha} ds \leq K \frac{e^{u\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq C \int_u^v \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\sigma-u)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha}} |dz| d\sigma \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq 2C \int_u^v \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(\sigma-u)^2}} \frac{e^{-\xi \sin(\theta_0/2)}}{\xi^{2\alpha} (\sigma-u)^{1-2\alpha}} d\xi + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\sigma-u)^2}} \frac{d\xi}{\xi^{2\alpha} (\sigma-u)^{1-2\alpha}} \right) d\sigma \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq C \int_u^v (\sigma-u)^{2\alpha-1} d\sigma \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\ &\leq C(v-u)^{2\alpha} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \end{aligned}$$

I_3 se traite de la même manière que I_1 .

Réciproquement, en utilisant le calcul fonctionnel de Dunford, on peut réécrire $u_+^\delta(x)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= -\frac{1}{2} T^{-1} \left(I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}} \right) \int_0^x \Pi_s e^{-(x-s)\sqrt{-A}} (-A)^{-\frac{1}{2}} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} T^{-1} \Pi_x \int_x^\delta \left(I + e^{-2(\delta-s)\sqrt{-A}} \right) e^{-(x-s)\sqrt{-A}} (-A)^{-\frac{1}{2}} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - T^{-1} \left(I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}} \right) \int_{-1}^0 \left(I - e^{-2(s+1)\sqrt{-A}} \right) e^{-(x-s)\sqrt{-A}} (-A)^{-\frac{1}{2}} g_-(s) ds \\ &\quad + T^{-1} \Pi_x e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-\frac{1}{2}} f_+^\delta \\ &\quad + T^{-1} \left(I + e^{-2(\delta-x)\sqrt{-A}} \right) e^{-(x+1)\sqrt{-A}} (-A)^{-\frac{1}{2}} f_- \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$T = p \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)$$

et

$$\begin{cases} \Pi_x = p \left(I + e^{-2x\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) + \left(I - e^{-2x\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) \\ x \in [0, \delta] \end{cases}$$

L'opérateur T^{-1} est bien défini (voir [5]). Par Sinestrari [10], proposition 1.2 et le théorème 3.1, on a

$$u_+^\delta \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } \begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

De plus

$$u_+^\delta \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } \begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_-(-1) - g_-(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

Conclusion

Il n'est pas difficile de vérifier la conclusion suivante

$$(u_+^\delta)'' \in C^{2\alpha}([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } \begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha, +\infty) = D_A(\alpha, +\infty) \\ g_-(-1) - g_-(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \\ g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha, +\infty) \end{cases}$$

Le théorème 4.3 est enfin démontré. ■

Bibliographie

- [1] **Dean J. Duffy.** : Green's Functions with Applications, 2001 by Chapman & Hall/CRC, New York
- [2] **Agmon S, Douglis A. and Nirenberg L.** : Estimates near the boundary for solutions of elliptics partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II
- [3] **Leontovitch M. A** : Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of a good conductor, Part II. Moscow, Ac of Sciences, 1948
- [4] **Labbas R., Terreni B.** : Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique Part I. Boll. Univ. Ita. P 545-569. 1987
- [5] **Belhamiti O.** : Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince. Univ Le havre. Thèse de doctorat. Maths. Appli. 2008
- [6] **Balakrishnan A. V** : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, Pacific. J. Math, 1960
- [7] **Da Prato., Grisvard P.** : Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. J. Math. Pures, pp 305-385, 1975
- [8] **Haase M.** : The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods, Thesis, Universitat Ulm, Germany, 2003
- [9] **Krein S. G.** : Linear differential equations in Banach space, volume 29, American Mathematical Society, 1971
- [10] **Sinestrari E.** : On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions, J. Math. Anal. App. 1985
- [11] **Mazeghrani F. Z.** : Problème à deux points pour une équation différentielle opérationnelle du second ordre. Thèse de Magister. Univ Oran, 1992
- [12] **S. Monniaux** : Générateur analytique et régularité maximale. Projet de thèse . Univ France- Comté, 1995
- [13] **Labbas R.** : Problèmes aux limites pour une équation différentielle abstraite de type elliptique, thèse d'état, Univ. Nice, 1987
- [14] **Tanabe H.** : Equations of evolution, Monographs and Studies in Mathematics 6, Pitman, London- SanFransisco-Melbourne, 1979

-
- [15] **Lions J. L** : Théorème de trace et d'interpolation I et II Annali. S.N.S di Pisa vol 13, 1959 et vol 14, 1960
- [16] **Dore G ., Favini A., Labbas R., Lemrabet K., and S. Maingot** : A Transmission problem in a Thin layer, Part I, Sharp Estimate, to appear
- [17] **Favini A., Labbas R., Lemrabet K., and S. Maingot** : Study of The limit of Transmission Problem in a Thin Layer by The Sum Theory of Linear Operators. Rev. Mat. Complut. 18 ; Num 1
- [18] **Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H., Yagi A.** : Etude unifiée de problèmes elliptiques dans le cadre Holderien. Acad. Sci. Paris
- [19] **B. Baillon and Ph Clement.** : Examples of Unbounded Imaginary Powers of Operators. J. Funct. Anal.
- [20] **A Lunardi** : A Introduction to Interpolation Theory. Milano-Trieste
- [21] **A Lunardi** : Introduction alla teoria dei semigrupperi. Corso di teoria delle funzioni 99/2000
- [22] **A Lunardi** : Analytics semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems. Birkhauser, 1995
- [23] **Pazy A** : Semigroups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equation. Springer Verlag, NewYork
- [24] **Dunford N., Schwartz J.** Linear Operator. Part 1. Interscience
- [25] **G. Da Prato., A. Lunardi.** : Functional Analytic Methods for Evolution Equation. Springer
- [26] **E. Hill and S. PHILIPS** : Functional Analysis and Semigroup. Volum XXXI of Am. Math. Soc
- [27] **C Poupaud.** : Régularité maximale L_P du problème de Cauchy non autonome ET théorie spectrale des operateurs de Schrodinger. Thèse d. 2005
- [28] **J. L. Lions, J. Peetre** : Sur une Classe d'Espace d'Interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Math, vol 19
- [29] **J. L. Lions** : Equations Differentielles Opèrtionnelles dans les espaces de Hilbert. Cours CIME 1963
- [30] **C. Baiocchi.** : Problemi misti per l'equazione del calore. Rend. Sem. Mat. Milano XLI (1971)
- [31] **Reed M., Simon B.** : Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis. Academic Press, New York, 1975
- [32] **Bryan P. Rynne and MARTIN A. Youngson** : linear function analysis. Springer. Ed
- [33] **L. Bergh** : Interpolation Space. An Introduction. Springer-Verlag, Berlin 1970
- [34] **J BASS** : Cours de Mathématiques tome III. Masson§ Cie 1971