Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Radjaa Benouis

le 13 Juin 2018

Transformation de Mellin

Jury

Zoubir Dahmani,	Professeur	Président (Université de Mostaganem, Algérie)
Amina Ferraoun,	MAB	Examinatrice (Université de Mostaganem, Algérie)
Sabrina Taf,	MCB	Encadreuse (Université de Mostaganem, Algérie)

Année universitaire: **2017-2018**.

MASTER

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH, le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail et le courage durant ces années d'études.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreuse Mme *Taf Sabrina*, son précieux conseil et pour sa patience et son soutien qui nous a été précieux afin de mener notre travail à bon port.

A nos familles et nos ami(e)s qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à vous.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de la transformation de Mellin, ainsi on va donnée des résultats liées a cette intégrale, puis nous présentons certaines applications pour cette transformée, à l'aide de sa formule d'inversion.
La transformation de Mellin est fortement reliée à la transformation de Laplace, à la transformation de Fourier et aux fonctions spéciales (Gamma, Bêta, Zêta).

Introduction

Cependant, c'est grâce au mathématicien finlandais, Robert Hjalmar Mellin (1854-1933), qui fut le premier chercheur à donner la formulation systématique à cette transformation et son inverse. En plus il a travaillé et développé dans la théorie des fonctions spéciales et des applications à la résolution d'équations différentielles hypergéométriques.

Mellin est le fils d'un pasteur, né en Liminka, l'Ostrobothnie du Nord, en Finlande en 1854. Il a grandi et a terminé sa scolarité à Hämeenlinna et a entrepris ses études universitaires à Helsinki, où son professeur est le suédois mathématicien Gösta Mittag-Leffler. À l'automne de 1881 de Mellin a défendu sa thèse de doctorat sur les fonctions algébriques d'un seul variable complexe. Il a fait deux séjours à Berlin en 1881 et 1882 pour étudier en vertu de Kurt Weierstrass et en 1883-84, il est retourné à poursuivre ses études avec Mittag-Leffler de Stockholm [15].

La transformation de Mellin est une transformation intégrale qui peut être considérée comme la version multiplicative de la transformation de Laplace bilatérale, elle est fortement reliée à la transformation de Laplace, à la transformation de Fourier, à la théorie de la fonction gamma et aux fonctions spéciales et à la théorie des séries de Dirichlet.
La contribution de Mellin accorde une place prépondérante à la théorie des fonctions analytiques et repose essentiellement sur le théorème de Cauchy et la méthode de résidus. Cette transformation a été retrouvée pour la première fois dans un mémoire de Riemann.
Ensuite, malgré cette connexion, il existe de nombreuses applications où il est pratique de travailler directement avec la forme Mellin plutôt qu'avec la version Laplace, c'est souvent le cas dans la théorie de la fonction complexe, dans la théorie des nombres, dans les mathématiques appliquées et dans l'analyse des algorithmes.
Cette transformation a de nombreuses applications dans divers domaines, dans le traitement du signal et des images, dans la modélisation physique, dans la modélisation des lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}^+$, dans l'économie, ... etc.

On réfère le lecteur à ([1],[8],[3],[7],[17]).

Ce mémoire se comporte essentiellement de trois chapitres, et d'une conclusion.
Le premier chapitre comporte quelques notions et préliminaires, ainsi que les définitions, propositions et théorèmes.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la transformation de Mellin, dont nous donnons trois sections :
Dans la première section nous avons énoncé le définition de la transformation, quelques exemples, ainsi que certaines propriétés liées à cette intégrale.
Ensuite, la deuxième section contient la formule d'inversion de la transformation de Mellin.
Puis, la dernière section qui contient le produit de convolution de cette transformation, ainsi que les propriétés liées à ce produit.
Par la suite, le dernier chapitre basées sur les applications de la transformation de Mellin.
Finalement, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale et une bibliographie sont données à la fin de ce document.

Chapitre 1

Notions et Préliminaires

Ce Chapitre constitue une partie préliminaire, dans laquelle on rappelle des notions et quelques résultats fondamentaux, qui représentent un outil indispensable dans notre étude. Dans la première section de ce chapitre, on présente les fonctions spéciales et leurs propriétés (voir [9], [14], [12]). Dans la deuxième, la troisième et la quatrième section, on définit la bande de convergence, théorème de Fubini, théorème de Cauchy (voir [13], [10], [6]). Dans la dernière section, on introduit la transformation de Fourier et Laplace et leurs inverse (voir [4], [5]).

1 Fonctions Spéciales

1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 *[14] La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx; \;\; \Re(s) > 0. \tag{1.1}$$

Proposition 1.1 *[14] La relation du récurrence*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s); \;\; \Re(s) > 0. \tag{1.2}$$

Proposition 1.2 *[Formule de compléments][6]*

Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}\}$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}. \tag{1.3}$$

Théorème 1.1 *[6] La fonction Γ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, dont les pôles simples sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{N}\}$.*

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{R}es(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.2 *[12] La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\beta(s,r) = \int_0^1 x^{s-1}(1-t)^{r-1}dx; \ \ \Re(s) > 0, \ \ \Re(r) > 0. \tag{1.4}$$

Proposition 1.3 *[12] La fonction Gamma est liée à la fonction Bêta par la relation suivante :*

$$\beta(s,r) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}; \ \ \Re(s) > 0, \ \ \Re(r) > 0. \tag{1.5}$$

2 Bande de Convergence

Définition 2.1 *[13] Soit f une fonction absolument intégrable sur* $[0,a]$

$$i.e. \int_0^a | f(x) | dx < \infty.$$

La plus grande bande ouverte $< \alpha, \beta >$ dans laquelle l'intégrale converge s'appelle la bande fondamentale, où $< \alpha, \beta >$; est la bande ouverte des nombres complexes $s = c + i\omega$ tel que $\alpha < c < \beta$.

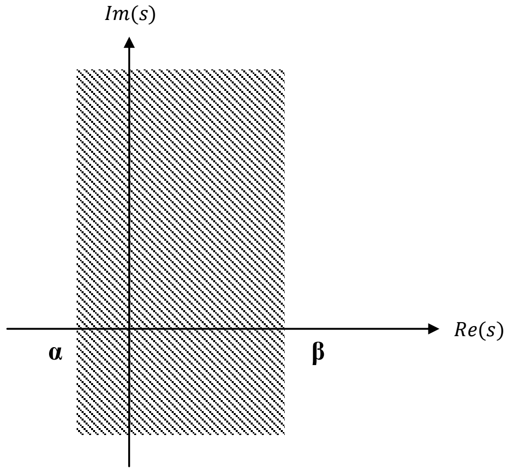

FIGURE 1.1 – *Une bande*

3 Théorème de Fubini

Théorème 3.1 *[10] Soit f une fonction continue sur un rectangle $[a;b]\times[c;d]$. Alors :*

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\\ &= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.\end{aligned}$$

4 Théorème de Cauchy

Théorème 4.1 *[6] Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $f:\mathrm{U}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction analytique dans U, γ un lacet rectifiable dans U. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

pour tout lacet contenu dans U.

5 Transformation de Laplace

Définition 5.1 *[5] Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $\mathrm{L}(f)$ définie par*

$$\mathrm{L}(f)(s) = \mathrm{F}(s) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-sx} f(x)dx. \tag{1.6}$$

Pour tout nombre complexe s, lorsque l'intégrale converge.

Définition 5.2 *[5] La transformation bilatérale de Laplace est la forme la plus générale de la transformation de Laplace, la transformation bilatérale de Laplace d'une fonction f de la variable réelle est la fonction F de la variable complexe définie par :*

$$\mathrm{F}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx. \tag{1.7}$$

Cette intégrale converge pour $\alpha < \Re(s) < \beta$, $-\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$.

Définition 5.3 *[5] La transformée inverse de Laplace de la fonction $\mathrm{F}(s)$, est donnée par*

$$f(x) = \mathrm{L}^{-1}(\mathrm{F}(s)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-it}^{\delta+it} e^{sx}\mathrm{F}(s)ds. \tag{1.8}$$

Remarque 1.1 *L'intervalle $]\delta - it; \delta + it[$ désigne une droite parallèle à l'axe imaginaire et de coordonnée réelle δ dans le plan.*

6 Transformation de Fourier

Définition 6.1 *[5] Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de la fonction f, notée $\Im[f,\beta] = f^*(\beta)$ est définie par*

$$\Im[f,\beta] = f^*(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\beta t}dt;\ \ \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Définition 6.2 *[5] La transformée inverse de Fourier est définie par*

$$f(t) = \Im^{-1}[f^*,\beta] = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\beta)e^{2i\pi\beta t}d\beta. \tag{1.10}$$

Chapitre 2

Transformation De Mellin

Ce chapitre constitue trois partie. Dans la première partie de ce chapitre, on introduit la définition de la transformée de Mellin ainsi que ses propriétés et quelques exemples (voir [2], [5], [15]). Dans la deuxième partie, on donne la définition de la formule d'inversion de Mellin (voir [2], [15]). Ainsi dans la dernière section, on donne la définition de le produit de convolution de Mellin et quelques propriétés liée à ce produit (voir [2], [16]).

1 Transformée de Mellin

1.1 Définition

Définition 1.1 *[2] La transformation de Mellin* M *fait correspondre à la fonction* $f(x)$, *définie pour* $x \in \mathbb{R}^+$. *La fonction analytique* $\mathrm{F}(s)$, *avec* $s \in \mathbb{C}$, *selon la relation suivante :*

$$\mathrm{F}(s) = \mathrm{M}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx. \tag{2.1}$$

Généralement, cette intégrale (2.1) ne converge que pour des valeurs de s *situées dans la bande* $<\alpha, \beta>$.

Proposition 1.1 *[6] On suppose*

1. f *est définie et continue pour* $x > 0$.
2. *L'intégrale (2.1) converge absolument pour* $\Re(s) = \alpha$ *et* $\Re(s) = \beta$. *Alors elle converge absolument pour* $\alpha \leq \Re(s) \leq \beta$. *De plus la fonction* $s \to \mathrm{M}[f](s)$ *est continue et bornée dans cette bande fermée et holomorphe à l'intérieur.*

1.2 Exemples :

Exemple 1.1 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = e^{-x},$$

on trouve immédiatement, pour $\Re(s) > 0$ *:*

$$\mathrm{M}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \Gamma(s).$$

Exemple 1.2 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = (1+x)^{-j}; \ \Re(j) > 0.$$

Alors, on a

$$\mathrm{M}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} (1+x)^{-j} x^{s-1} dx,$$

on pose $1 + x = \dfrac{1}{1-t}$, *par suite pour* $0 < \Re(s) < \Re(j)$ *:*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[f(x)](s) &= \int_0^1 (1-t)^j \frac{t^{s-1}}{(1-t)^{s-1}} \frac{dt}{(1-t)^2} \\ &= \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{j-s-1} dt \\ &= \beta(s, j-s) \\ &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(j-s)}{\Gamma(j)}. \end{aligned}$$

En particulier pour $j = 1$, *et pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \Re(s) < 1$. *Alors, d'après(1.3) on a*

$$\mathrm{M}[(1+x)^{-1}](s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Exemple 1.3 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \mathrm{H}(x - x_0) x^z,$$

où H *est la fonction de Heaviside,* x_0 *est un nombre positif et* z *est un complexe.*

Donc, pour $\Re(s) < -\Re(z)$ *:*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[f(x)](s) &= \int_0^{\infty} \mathrm{H}(x - x_0) x^z x^{s-1} dx && (2.2) \\ &= \int_{x_0}^{\infty} x^{z+s-1} dt && (2.3) \\ &= -\frac{x_0^{z+s}}{z+s}. && (2.4) \end{aligned}$$

Exemple 1.4 *Supposons que* $f(t) = \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, *considérons la région* D *(FIGURE 2.1).*

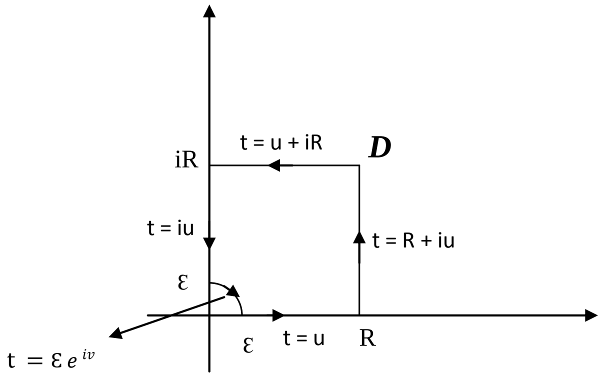

FIGURE 2.1 – *La région D*

Puisque $e^{-t}t^{s-1}$ *est analytique en* D*, nous avons par le théorème de Cauchy :*

$$\oint e^{-t}t^{s-1}dt = 0.$$

Alors,

$$\int_{\epsilon}^{R} e^{-u}u^{s-1}du + i\int_{0}^{R} e^{-(R+iu)}(R+iu)^{s-1}du + \int_{R}^{0} e^{-(u+iR)}(u+iR)^{s-1}du$$

$$+i\int_{R}^{\epsilon} e^{-iu}(iu)^{s-1}du + \int_{\pi/2}^{0} e^{-\epsilon e^{i\theta}}(\epsilon e^{i\theta})^{s-1}i\epsilon e^{i\theta}d\theta = 0, \quad (a)$$

Posons $\epsilon \longrightarrow 0$ *et* $R \longrightarrow \infty$ *, nous avons :*

$$\int_{\pi/2}^{0} e^{-\epsilon e^{i\theta}}(\epsilon e^{i\theta})^{s-1}i\epsilon e^{i\theta}d\theta \longrightarrow 0;\ \Re(s) > 0.$$

Et

$$\int_{0}^{R} e^{-(R+iu)}(R+iu)^{s-1}du \longrightarrow 0.$$

Et

$$\int_{R}^{0} e^{-(u+iR)}(u+iR)^{s-1}du \longrightarrow 0;\ \Re(s) < 0.$$

L'équation (a) devient :

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}du = i^s \int_0^\infty e^{-iu}u^{s-1}du,$$

donc,

$$\int_0^\infty e^{-iu}u^{s-1}du = i^{-s}\int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}du = e^{-s\log i}\Gamma(s) = e^{-\frac{i\pi s}{2}}\Gamma(s).$$

De même, en remplaçant i par $-i$ dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\int_0^\infty e^{iu}u^{s-1}du = e^{\frac{i\pi s}{2}}\Gamma(s).$$

En combinant les deux, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\sin t)t^{s-1}dt &= \frac{1}{2i}(e^{-\frac{i\pi s}{2}} - e^{\frac{i\pi s}{2}}) \\ &= \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s).\end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\int_0^\infty (\cos t)t^{s-1}dt = \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s).$$

1.3 Propriétés

La transformation de Mellin possède les propriétés suivantes ([2], [15]) :

P_1 : (Linéarité) Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettent des transformées de Mellin $\mathrm{M}[f](s)$ et $\mathrm{M}[g](s)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ Alors :

$$\mathrm{M}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathrm{M}[f](s) + \beta \mathrm{M}[g](s).$$

En effet, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{M}[\alpha f + \beta g](s) &= \int_0^\infty (\alpha f + \beta g)(x)x^{s-1}dx \\ &= \int_0^\infty \alpha f(x)x^{s-1}dx + \int_0^\infty \beta g(x)x^{s-1}dx \\ &= \alpha\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx + \beta\int_0^\infty g(x)x^{s-1}dx \\ &= \alpha \mathrm{M}[f](s) + \beta \mathrm{M}[g](s).\end{aligned}$$

P_2 : Pour $\alpha - a < \Re(s) < \beta - a$, et $a > 0$, on a

$$\mathrm{M}[x^a f(x)](s) = \mathrm{M}[f(x)](s+a).$$

En effet, pour tout a réel positif et $\Re(s+a)\in]\alpha,\beta[$, i.e $s\in<\alpha-a,\beta-a>$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}[x^a f(x)](s) &= \int_0^\infty x^{s-1}x^a f(x)dx \\
&= \int_0^\infty x^{s+a-1}f(x)dx \\
&= \mathrm{M}[f(x)](s+a).
\end{aligned}$$

P_3 : Pour $a>0$, et $s\in<\alpha,\beta>$, alors on a

$$\mathrm{M}[f(ax)](s) = a^{-s}\mathrm{M}[f(x)](s). \tag{2.5}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}[f(ax)](s) &= \int_0^\infty f(ax)x^{s-1}dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^{s-1} f(t)\frac{dt}{a} \\
&= a^{-s}\mathrm{M}[f(x)](s).
\end{aligned}$$

P_4 : Pour a un nombre réel positif, et $s\in<a\alpha,a\beta>$, alors

$$\mathrm{M}[f(x^a)](s) = \frac{1}{a}\mathrm{M}[f(x)]\left(\frac{s}{a}\right).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}[f(x^a)](s) &= \int_0^\infty f(x^a)x^{s-1}dx \\
&= \int_0^\infty f(t)(t^{\frac{1}{a}})^{s-1}\frac{dt}{a} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(t)(t^{\frac{1}{a}})^{s-1}dt \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{M}[f(x)]\left(\frac{s}{a}\right).
\end{aligned}$$

P_5 : Pour $s\in<1-\beta,1-\alpha>$, alors

$$\mathrm{M}\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right](s) = \mathrm{M}[f(x)](1-s).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right](s) &= \int_0^1 \left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]x^{s-1}dx \\
&= \int_0^1 f(t)(t)^{-s+2}\frac{dt}{t^2} \\
&= \mathrm{M}[f(x)](1-s).
\end{aligned}$$

P_6 : Pour $s \in <\alpha, \beta>$, alors

$$M[f(x)(\ln x)](s) = \frac{d}{ds} M[f](s).$$

D'une manière similaire, et pour n un entier, alors nous obtenons par induction :

$$M[f(x)(\ln x)^n](s) = \frac{d^n}{ds^n} M[f](s).$$

Remarque 2.1 *On pose :*

$$(I_0 f)(x) = f(x),$$
$$(I_1 f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Par récurrence, on montre que pour tout entier naturel n *tel que* $n \geq 1$ *:*

$$(I_n f)(x) = \int_0^x (I_{n-1} f)(t)\,dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} f(u)\,du.$$

Proposition 1.2 *Pour* $s \in <\alpha - 1, \beta - 1>$ *, alors on a*

$$M\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](s) = -\frac{1}{s} M[f](s+1).$$

D'une manière similaire, et pour $s \in <\alpha - n, \beta - n>$*, nous obtenons par induction :*

$$M[I_n f](s) = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} M[f](s+n).$$

Preuve. Pour $s \in <\alpha - 1, \beta - 1>$, alors on a

$$\begin{aligned} M\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)\,dt\right) x^{s-1}\,dx \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(\int_t^\infty x^{s-1}\,dx\right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(\frac{-t^s}{s}\right) dt \\ &= -\frac{1}{s} M[f](s+1). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3 *(Dérivation)*

Supposons que f *et sa dérivée* f' *admettent de transformation de Mellin, alors pour* $\alpha < \Re(s) < \beta$ *on a :*

$$\lim_{x \to 0} x^{s-1} f(x) = 0; \ \lim_{x \to \infty} x^{s-1} f(x) = 0.$$

Donc, pour $\alpha < \Re(s-1) < \beta$ *on a :*

$$\mathrm{M}[f'(x)](s) = (-1)(s-1)\mathrm{M}[f(x)](s-1). \tag{2.6}$$

D'une manière similaire, nous obtenons par induction :

$$\mathrm{M}[f^{(k)}(x)](s) = (-1)^k (s-k)_k \mathrm{M}[f(x)](s-k); \;\; \alpha < \Re(s-k) < \beta,$$

tels que

$\lim\limits_{x\to 0,+\infty} x^{s-r-1} f^{(r)}(x) = 0,\;\; r = (1, ..., n-1)$ *et*

$$\begin{aligned}(s-k)_k &= (s-k)(s-k+1)...(s-1)\\ &= \frac{(s-k)!}{(s-k-1)!}\\ &= \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-k)}.\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\mathrm{M}[f'(x)](s) = \int_0^\infty f'(x) x^{s-1} dx,$$

par suite, on fait une intégration par partie on trouve :

$$\mathrm{M}[f'(x)](s) = (-1)(s-1)\mathrm{M}[f(x)](s-1); \;\; \alpha < \Re(s-1) < \beta.$$

En appliquant la formule (2.6) deux fois, on constate que :

$$\mathrm{M}[f''(x)](s) = (s-1)(s-2)\mathrm{M}[f(x)](s-2); \;\; \alpha < \Re(s-2) < \beta.$$

On continue l'application de (2.6), de façon générale, on trouve le résultat suivant :

$$\mathrm{M}[f^{(k)}(x)](s) = (-1)^k \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-k)} \mathrm{M}[f(x)](s-k); \;\; \alpha < \Re(s-k) < \beta,$$

à condition que :

$$\lim_{x\to 0,+\infty} x^{s-r-1} f^{(r)}(x) = 0; \;\; r = (1, ..., n-1).$$

On constate de plus $\forall k \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathrm{M}[x^k f^{(k)}(x)](s) = (-1)^k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} \mathrm{M}[f(x)](s).$$

D'autre part, comme $\mathrm{M}[xf'(x)](s) = \mathrm{M}[f'(x)](s+1)$, on déduit donc d'après (2.6) que :

$$\mathrm{M}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right) f(x)\right](s) = (-s)\mathrm{M}[f(x)](s),$$

ainsi, en général on vérifie que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; \mathrm{M}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\right](s) = (-s)^k \mathrm{M}[f(x)](s).$$

■

Exemples :

Exemple 1.5 *Soit la fonction f définie par*

$$f(x) = log(x+1).$$

Alors, on a pour $-1 < \Re(s) < 0$ *:*

$$\mathrm{M}[log(x+1)](s) = -\frac{1}{s}\mathrm{M}[(1+x)^{-1}](s+1),$$

et vérifié que $\lim\limits_{x\to 0,+\infty} x^{s-1}\log(1+x) = 0$, *ainsi d'après (1.3) on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[log(x+1)](s) &= -\frac{1}{s}\frac{\pi}{\sin(\pi(s+1))} && (2.7)\\ &= \frac{\pi}{s\sin\pi s}. && (2.8) \end{aligned}$$

Exemple 1.6 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = (1-x)^{-1}.$$

Alors, on a pour $0 < \Re(s) < 1$ *:*

$$\mathrm{M}[(1-x)^{-1}](s) = \int_0^{\infty}(1-x)^{-1}x^{s-1}dx,$$

on pose $1-x = \dfrac{1}{1+t}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[(1-x)^{-1}](s) &= \int_0^1 (1+t)^{-s}t^{s-1}dt\\ &= \Gamma(s)\Gamma(1-s)\\ &= \frac{\pi}{\sin\pi s}\\ &= \frac{\pi\cot\pi s}{\cos\pi s}\\ &= \pi\cot(\pi s). \end{aligned}$$

Donc, pour $a > 0$ *:*

$$\mathrm{M}[(a-x)^{-1}](s) = a^{(s-1)}\pi\cot(\pi s),\ \ 0 < \Re(s) < 1.$$

Exemple 1.7 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = e^{-ax},$$

alors, pour $\Re(s) > 0$ *et d'après* (P_4) *on a*

$$\mathrm{M}[e^{-ax}](x) = a^{-s}\Gamma(s).$$

1.4 Relation entre la transformation de Laplace et Fourier

- **Avec la transformée de Laplace**[2]

  Par le changement de variable $x = e^{-t}$, la transformée de Mellin devient :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[f](s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t})e^{-t(s-1)}e^{-t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t})e^{-st}dt. \end{aligned}$$

  Alors

$$\mathrm{M}[f](s) = \mathrm{L}[f(e^{-t})](s). \tag{2.9}$$

- **Avec la transformée de Fourier**[2]

  Nous pouvons aussi définir la transformation de Mellin en termes de la transformation de Fourier, alors en remplaçant s par $c + i2\pi\beta$ dans l'égalité (2.9), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[f](s) &= \mathrm{L}[f(e^{-t})](c+i2\pi\beta) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t})e^{-(c+i2\pi\beta)t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t})e^{-i2\pi\beta t}e^{-ct}dt. \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\mathrm{M}[f](s) = \Im[f(e^{-t})e^{-ct}](\beta). \tag{2.10}$$

2 Formule D'inversion de Mellin

2.1 Définition et Théorème

Théorème 2.1 *[2] Soit $f : [0,+\infty] \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction continue et F sa transformée de Mellin. Alors, la formule d'inversion est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(s)x^{-s}ds. \tag{2.11}$$

Preuve. Pour $s = c + i\beta$ avec $c > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(s) &= \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x)e^{s\log x}\frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{\infty} f(x)e^{c\log x}e^{i\beta\log x}\frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

par le changement de variable $\log x = u$, on obtient

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^u)e^{cu}e^{i\beta u}du,$$

et avec le changement $u = -2\pi x$, on a

$$F(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-2\pi x})e^{-2i\beta\pi x}e^{-2\pi c x}dx,$$

de sorte que $\beta \in \mathbb{R}$ et d'après la transformée de Fourier (1.9) de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ on déduit que :

$$F(s) = 2\pi\Im[f(e^{-2\pi x})e^{-2\pi c x}, \beta].$$

On utilise la formule inverse de Fourier (1.10) , alors on a

$$e^{-2\pi c x}f(e^{-2\pi x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{2i\pi\beta x}d\beta,$$

si on pose $e^{-2\pi x} = t$, on trouve

$$f(t) = t^{-c}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\,t^{-i\beta}d\beta,$$

d'autre part

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\,t^{-(c+i\beta)}i\,d\beta,$$

finalement, la formule d'inversion est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,t^{-s}ds.$$

■

2.2 Exemples :

Exemple 2.1 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = H((x - x_0) - H(x))x^z,$$

où H est la fonction de Heaviside, x_0 est un nombre positif et z est un complexe.

Donc, pour $\Re(s) > -\Re(z)$

$$M[f(x)](s) = -\frac{x_0^{z+s}}{z+s}.$$

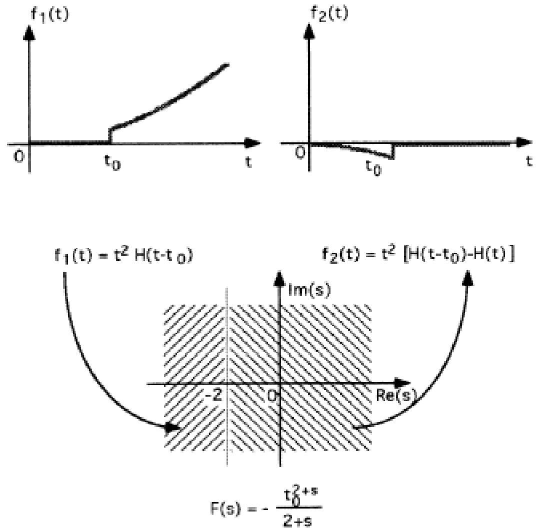

FIGURE 2.2 – *Exemples de résultats lorsque les régions d'holomorphie sont changées*

En comparent ce résultat avec (2.4) de l'exemple (1.3) dans la première section , $\mathrm{M}[f](s)$ *ayant la même expression analytique mais considérée dans deux régions distinctes de l'holomorphie, la transformée inverse de Mellin donnée respectivement par ce exemple et l'exemple 3, sont en effet différentes(voir (FIGURE 2.2)).*

Exemple 2.2 *On considère l'intégrale de Cahen-Mellin :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}ds;\ x>0,$$

On vérifie que pour tout $c>0$ *et* $\Re(s)>0$ *:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}ds=e^{-x}.$$

De plus, comme la fonction $x\mapsto\Gamma(s)x^{-s}$ *admet des pôles simples et par le théorème de résidu on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}ds &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Res}(x^{-s}\Gamma(s),s=-k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\\ &= e^{-x}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{M}^{-1}[\Gamma(s)](x)=e^{-x}. \tag{2.12}$$

Corollaire 2.1 *[15] Soient* $F(s)$, $G(s)$ *sont les transformée de Mellin des fonctions* f *et* g *avec la bande de convergence* s_f *et* s_g *respectivement et supposons qu'il existe un nombre réelle* c *tel que :* $1-c \in s_f$ *et* $c \in s_g$*. Alors la Formule de Parseval est donnée par :*

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(1-s)G(s)ds. \tag{2.13}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M[g](s)M[f](1-s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M[f](1-s)\left(\int_0^{\infty} x^{s-1}g(x)dx\right)ds \\ &= \int_0^{\infty} g(x)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}M[f](1-s)ds\right)dx. \end{aligned}$$

Et en utilisant la formule d'inversion (2.11) pour la fonction f, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x)g(x)dx &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M[f](1-s)M[g](s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(1-s)G(s)ds. \end{aligned}$$

■

3 Produit de Convolution de Mellin

3.1 Définition

Définition 3.1 *[16] Soient* f, g *deux fonction définies sur* $\mathbb{R}_*^+$*. Le produit de convolution de* f *et* g *est défini de la façon suivante :*

$$(f \widehat{*} g)(x) = \int_0^{\infty} f(y)g\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}.$$

Proposition 3.1 *Si* $F(s)$ *et* $G(s)$ *sont respectivement les transformations de Mellin des fonctions* $f(x)$ *et* $g(x)$*, alors pour* $\alpha < \Re(s) < \beta$ *et pour un réel c bien déterminé, on a [11] :*

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)x^{s-1}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s-z)G(z)dz. \tag{2.14}$$

En particulier pour $s = 1$*, on obtient*

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(1-z)G(z)dz.$$

De plus :

$$M^{-1}[F(s)G(s)](x) = \int_0^{\infty} f(y)g\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}, \tag{2.15}$$

c'est à dire :

$$\mathrm{M}[f \hat{*} g](s) = \mathrm{F}(s)\mathrm{G}(s). \tag{2.16}$$

Preuve. Pour démontrer la relation (2.14), on choisit un réel $c \in \mathrm{I}_c(s) =]\sup(\alpha_f, \Re(s) - \beta_g), \inf(\beta_f, \Re(s) - \alpha_g)[$. Alors par le théorème d'inversion, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)g(x)x^{s-1}dx &= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{G}(z)x^{-z}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{G}(z)dz \int_0^\infty f(x)x^{s-z-1}dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(s-z)\mathrm{G}(z)dz.
\end{aligned}$$

De même pour démontrer (2.15), on utilise le théorème d'inversion :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^{-1}[\mathrm{F}(s)\mathrm{G}(s)](x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(s)\mathrm{G}(s)x^{-s}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{G}(s)x^{-s}\left(\int_0^\infty f(u)u^{s-1}du\right)ds \\
&= \int_0^\infty f(u)\frac{du}{u}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{G}(s)\left(\frac{x}{u}\right)^{-s}ds \\
&= \int_0^\infty f(u)g\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u}.
\end{aligned}$$

La formule (2.16) en découle. ■

Exemple 3.1 *Soient* $r, y \in \mathbb{C}$*, tels que* $\Re(r), \Re(y) > 0$*, On a :*

$$\mathrm{M}[t^r e^{-t}](s) = \Gamma(s+r), \;\; \Re(s) > -\Re(r),$$

et

$$\mathrm{M}[t^{y-1}e^{-t}](s) = \Gamma(s+y-1), \;\; \Re(s) > -\Re(y)+1.$$

Ainsi, pour $-\Re(r) < \Re(s) < \Re(y)$ *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s+r)\Gamma(y-s)ds &= \int_0^\infty t^{r+y-1}e^{-2t}dt \\
&= \frac{\Gamma(r+y)}{2^{r+y}},
\end{aligned}$$

d'où, pour $-\Re(r) < c < \Re(y)$ *:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s+r)\Gamma(y-s)ds = 2^{-r-y}\Gamma(r+y).$$

Exemple 3.2 *Soient* $f(x) = e^{-x}$ *et* $g(x) = e^{-2x}$ *, alors pour* $\Re(s) > 0$ *on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}[f\widehat{*}g](s) &= \int_0^\infty (e^{-x}\widehat{*}e^{-2x})(x)x^{s-1}dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y}e^{-2(\frac{x}{y})}\frac{dy}{y}\right)x^{s-1}dx \\
&= \int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}\left(\int_0^\infty e^{-2u}u^{s-1}yy^{-1}du\right)dy \\
&= \left(\int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-2u}u^{s-1}du\right) \\
&= \Gamma(s)2^{-s}\Gamma(s) \qquad d'après\ \mathrm{P}_3 \\
&= \mathrm{M}[e^{-y}](s)\mathrm{M}[e^{-2u}](s).
\end{aligned}$$

3.2 Propriétés de convolution multiplicative de Mellin

Le produit de convolution de Mellin vérifier les propriétés suivantes ([11], [16]) :

1. La commutativité

$$(f\widehat{*}g) = (g\widehat{*}f).$$

En effet, on a

$$(f\widehat{*}g)(s) = \int_0^\infty f(y)g\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y},$$

on pose $u = \dfrac{x}{y}$, alors on a

$$\begin{aligned}
(f\widehat{*}g)(s) &= \int_0^\infty f(y)g\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty f\left(\frac{x}{u}\right)g(u)\frac{du}{u} \\
&= (g\widehat{*}f)(s).
\end{aligned}$$

2. L'associativité :

Soit f, g, h trois fonctions continues,alors

$$(f\widehat{*}g)\widehat{*}h = f\widehat{*}(g\widehat{*}h).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
(f\widehat{*}g)\widehat{*}h &= \int_0^\infty (f\widehat{*}g)(y)h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t)g\left(\frac{y}{t}\right)\frac{dt}{t}\right)h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t)g\left(\frac{y}{t}\right)h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}\frac{dt}{t} ....(Par Fubini) \\
&= \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty g\left(\frac{y}{t}\right)h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}\right)\frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

posons $\frac{y}{t} = v$, alors on a

$$\begin{aligned}
(f\widehat{*}g)\widehat{*}h &= \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty g(v)h\left(\frac{x}{tv}\right)\frac{dv}{v}\right)\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty g(v)h\left(\frac{(\frac{x}{t})}{v}\right)\frac{dv}{v}\right)\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty f(t)\int_0^\infty (g\widehat{*}h)\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t} \\
&= f\widehat{*}(g\widehat{*}h).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. Elément d'unité :

   Soit f fonction continue,alors

$$(f\widehat{*}\delta(x-1)) = f.$$

4. Action de l'opérateur $x\frac{d}{dx}$:

   Soit f, g deux fonctions continues, alors

$$\begin{aligned}
\left(x\frac{d}{dx}\right)^k (f\widehat{*}g) &= \left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^k f\right]\widehat{*}g \\
&= f\widehat{*}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^k g\right].
\end{aligned}$$

5. Multiplication par lnx :

   Soit f, g deux fonctions continues, alors

$$(lnx)(f\widehat{*}g) = \left[(lnx)f\right]\widehat{*}g + f\widehat{*}\left[(lnx)g\right].$$

6. Convolution avec distributions de Dirac et leurs dérivés :

   Soit f fonction continue, alors

$$\delta(x-a)\widehat{*}f = a^{-1}f(a^{-1}x).$$

$$\delta(x-p)\widehat{*}\delta(x-p') = \delta(x-pp');\ p, p' > 0.$$

$$\delta^k(x-1)\widehat{*}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^k f). \tag{2.17}$$

Preuve. D'après la définition de k-dérivation de distribution de Dirac, la convolution multiplicative de f avec $\delta^k(x-1)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\langle f\widehat{*}\delta^k(x-1), \theta(x)\rangle &= \langle f(x), \langle \delta^k(\tau-1), \theta(\tau x)\rangle\rangle \\
&= \langle f(x), \langle \delta(\tau-1), (-1)^k\left(\frac{d}{d\tau}\right)^k \theta(\tau x)\rangle\rangle;
\end{aligned}$$

or, après avoir effectué une différenciation ordinaire et appliqué la définition de δ :

$$\langle f \widehat{*} \delta^k (x-1), \theta(x)\rangle = \langle f(x), (-1)^k x^k \theta^k(x)\rangle,$$

les règles habituelles du calcul avec distributions et la commutativité de la convolution donnent :

$$\langle \delta^k (x-1) \widehat{*} f, \theta(x)\rangle = \langle \left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^k f(x))\theta(x)\rangle. \tag{2.18}$$

Enfin, l'identité (2.17) découle du fait que (2.18) vaut pour toute fonction θ appartenant à $\wp(c_1, c_2)$. ∎

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre on s'intéresse à donner des résultats liée aux transformation de Mellin.

1 Équation Intégrale

La solution de certaines équations intégrales peut être facilement réalisée au moyen de la transformation de Mellin. Diverses méthodes sont développées pour résoudre l'équation intégrale [15] :

$$g(x) = \int_0^{\infty} f(y)k(xy)dy, \ x > 0. \tag{3.1}$$

Où g et k sont deux fonctions connues et f est une fonction à détermine.

Tout d'abord, prenons l'équation intégrale suivante :

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(y)k(xy)dy, \ x > 0. \tag{3.2}$$

Lemme 1.1 *Soient k et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ de façon que la bande $\mathrm{I}_{k,g} =< \alpha_k, \beta_k > \cap < 1-\beta_g, 1-\alpha_g >$ soit non vide.*

Alors, la transformation de Mellin de la fonction f définie par (3.2) est la suivante :

$$\forall s \in \mathrm{I}_{k,g}, \quad \mathrm{M}[f](s) = \mathrm{M}[g](1-s)\mathrm{M}[k](s). \tag{3.3}$$

Preuve. Soit $s \in \mathrm{I}_{k,g}$, On effectue le changement de variable $u = xy$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}[f](s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1}dx \int_0^{\infty} g(y)k(xy)dy \\
&= \int_0^{\infty} u^{s-1}du \int_0^{\infty} g(y)k(u)y^{-s}dy,
\end{aligned}$$

et d'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}[f](s) &= \int_0^{\infty} g(y)y^{-s}\left(\int_0^{\infty} k(u)u^{s-1}du\right)dy \\
&= \int_0^{\infty} g(y)y^{-s}\mathrm{M}[k](s)dy \\
&= \mathrm{M}[g](1-s)\mathrm{M}[k](s).
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.1 *Soient g et k deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$, pour un réel c bien choisi, on pose pour $x > 0$:*

$$l(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-s}}{\mathrm{M}[k](1-s)}ds. \tag{3.4}$$

On suppose que la bande $\mathrm{I}_{l,g} =< \alpha_l, \beta_l > \cap < 1-\beta_g, 1-\alpha_g >$ est non vide, alors la solution de l'équation intégrale (3.1) est la suivante :

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(y)l(xy)dy,\ x > 0. \tag{3.5}$$

En outre, si $\mathrm{M}[k](s)$ satisfait la relation :

$$\mathrm{M}[k](s)\mathrm{M}[k](1-s) = 1,$$

alors l'équation intégrale(3.1) possède comme solution :

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(y)k(xy)dy,\ x > 0. \tag{3.6}$$

Preuve. On multipliant l'équation (3.2) par x^{-s}, après l'intégration de 0 à $+\infty$ nous obtenons :

$$\mathrm{M}[f](s)\mathrm{M}[k](1-s) = \mathrm{M}[g](1-s),$$

et en utilisant (3.4), on obtient donc :

$$\mathrm{M}[f](s) = \mathrm{M}[l](s)\mathrm{M}[g](1-s),$$

de sorte que par la formule d'inversion de Mellin, et pour $c \in \mathbb{R} \cap < \alpha_l, \beta_l > \cap < 1-\beta_g, 1-\alpha_g >$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{M}[l](s)\mathrm{M}[g](1-s)x^{-s}ds & (3.7)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{M}[l(xy)](s)\mathrm{M}[g](1-s)ds. & (3.8)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Parseval (2.13), on obtient la solution :

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(y)l(xy)dy,$$

d'après le lemme précédent, on a montré que la fonction f est la solution de (3.1).

Dans le cas où $\mathrm{M}[k](s)\mathrm{M}[k](1-s)=1$, on a :

$$\begin{aligned} l(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{M}[k](s)x^{-s}ds \\ &= k(x), \end{aligned}$$

ainsi la solution de (3.1) est (3.6). ■

2 Théorème de Titchmarsh

Théorème 2.1 *Soient k est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui admettant une transformation de Mellin dans la bande $s \in <\alpha_k, \beta_k>$, si l'équation intégrale :*

$$f(x) = \int_0^\infty k(xu)du \int_0^\infty k(yu)f(y)dy, \tag{3.9}$$

admet une solution f, alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que s et $1-s \in <\alpha_k, \beta_k>$, nous avons

$$\mathrm{M}[k](s)\mathrm{M}[k](1-s) = 1.$$

Preuve. On peut écrire l'équation intégrale (3.9) comme un couple de fonctions définies de la manière suivante :

$$g(x) = \int_0^\infty f(y)k(xy)dy, \tag{3.10}$$

$$f(x) = \int_0^\infty g(u)k(xu)du. \tag{3.11}$$

Nous multiplions (3.10) et (3.11) par x^{s-1} et on intègre, nous obtenons :

$$\mathrm{M}[g](s) = \mathrm{M}[f](1-s)\mathrm{M}[k](s),$$

$$\mathrm{M}[f](s) = \mathrm{M}[g](1-s)\mathrm{M}[k](s).$$

On remplace s par $1-s$ dans l'une de ces équations et puis on le remplace dans l'autre, on obtient finalement la relation :

$$\mathrm{M}[k](s)\mathrm{M}[k](1-s) = 1.$$

■

Exemple 2.1 *On considère l'équation :*

$$\int_0^\infty e^{-xy}f(y)dy = (1+x)^{-1};\ \ (x>0).$$

Nous avons :

$$k(x) = e^{-x},\ \mathrm{M}[k](s) = \Gamma(s);\ \ (\Re(s) > 0).$$

Et

$$\mathrm{M}[g](s) = \mathrm{M}[(1+x)^{-1}](s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s);\ \ (\Re(s) > 0).$$

D'après (3.7), nous obtenons la solution :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} x^{-s} ds,\ \ (c > 0) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds \\ &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Exemple 2.2 *On considère l'équation intégrale suivante :*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{(1+x^2t^2)^2} dt = x^{-1}(1+(m/x))e^{-m/x};\ x > 0,\ m > 0.$$

On a

$$k(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2},$$

alors

$$\mathrm{M}[k](s) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{2}s\right);\ 0 < \Re(s) < 4.$$

Pour $\Re(s) < 1$, *on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[g](s) &= \int_0^\infty x^{s-2}(1+(m/x))e^{-m/x} dx \\ &= \int_0^\infty u^{-s}(1+mu)e^{-mu} du \\ &= m^{s-1}(2-s)\Gamma(1-s). \end{aligned}$$

Donc, pour $c \in]0,1[$ *et* $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2\Gamma(s)(s+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}\right)} (mx)^{-s} ds \\ &= \frac{4/\pi}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)(mx)^{-s} ds \\ &= \frac{4}{\pi}\cos(mx). \end{aligned}$$

3 Formule de Sommation

On définit ainsi la fonction zêta de Riemann comme suit [5] :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

C'est une fonction analytique complexe définie, pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$, absolument convergents pour $s = \gamma + it$ de partie réelle $\gamma > 1$.
Dans la proposition suivante, on recueille certaines propriétés de la fonction zêta.

Proposition 3.1 *(1) ζ est holomorphe sur la bande $\Re(s) > 1$.*

(2) $\forall s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$, on a :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}. \tag{3.12}$$

Preuve.

(1) Évident.

(2) Pour $\Re(s) > 1$,

$$\begin{aligned} \zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n\geq 1} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \\ &= \sum_{n\geq 1} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^{s-1} e^{-u} \frac{du}{n} \\ (u = nt) &= \sum_{n\geq 1} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt. \end{aligned}$$

Le théorème de permutation entre une série et une intégrale donne :

$$\begin{aligned} \zeta(s)\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \mathrm{M}\left[\frac{1}{e^t - 1}\right](s).$$

■

Remarque 3.1 *La fonction ζ satisfait la relation suivante :*

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s). \tag{3.13}$$

Théorème 3.1 *Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $c \in <\alpha_f, \beta_f>$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{M}[f(x)](s)\zeta(s,a)\, ds, \tag{3.14}$$

où $\zeta(s,a)$ définie par :

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s};\ 0 \leq a \leq 1, \Re(s) > 1.$$

Preuve. Si on applique la formule d'inversion de Mellin, nous obtenons :

$$f(n+a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(s)(n+a)^{-s}ds, \tag{3.15}$$

or, si $\mathrm{F}(s)$ est tel que la somme et l'intégral peuvent être échangés, (3.15) est devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{M}[f(x)](s)\zeta(s,a)ds.$$

■

Théorème 3.2 *De même, et d'après la propriété (2.5) on a :*

$$f(nx) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(s)n^{-s}x^{-s}ds,$$

ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(s)\zeta(s)x^{-s}ds. \tag{3.16}$$

Corollaire 3.1 *Lorsque $x=1$, le résultat (3.16) se réduit à :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{F}(s)\zeta(s)ds. \tag{3.17}$$

Ceci est obtenue à partir de (3.14) quand $a=0$.

Exemple 3.1 *Calculer la somme de :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos an}{n^2}.$$

Pour cela on considère la fonction $f(x)=\cos(ax)/x^2$, dont la transformation de Mellin est : $\forall s \in <2,3>$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}[f](s) &= \int_0^{\infty} x^{s-3}\cos(ax)dx \\
&= \mathrm{M}[\cos(ax)](s-2) \\
&= \frac{1}{a^{s-2}}\mathrm{M}[\cos x](s-2) \\
&= -\frac{1}{a^{s-2}}\Gamma(s-2)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right).
\end{aligned}$$

On remplace ce résultat dans la formule (3.16) et en utilisant la relation (3.13), on trouve que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos an}{n^2} &= -\frac{a^2}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^s\frac{\zeta(1-s)\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}ds \\
&= -\frac{a^2}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^s\frac{\zeta(1-s)}{(s-1)(s-2)}ds,
\end{aligned}$$

d'autre part, comme la fonction définie par $\zeta(1-s)/(s-1)(s-2)$, *présente trois pôles simples en* $0, 1$ *et* 2, *de résidus respectivement* $-1/2$, π/a, *et* $-\pi^2/3a^2$, *on obtient d'après le théorème de résidu :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos an}{n^2}=\frac{a^2}{4}-\frac{\pi a}{2}+\frac{\pi^2}{6}.$$

Si, on fait tendre a vers 0, *on déduit que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Conclusion

La transformée de Mellin montre comment une approche fondée sur l'étude des fonctions hypergéométriques a pu déboucher sur des techniques innovantes d'analyse et de traitement dans de nombreux domaines scientifiques. Le fait de pouvoir disposer de documents numériques ouvre des portes à des études historiques permettant d'analyser l'évolution des travaux de scientifiques célèbres, mais aussi à découvrir les cloisons qui peuvent encore exister entre certains domaines.
Ce serait un défi de proposer une unification de tous ces travaux et de donner à Mellin un rôle de premier plan dans nos fondamentaux mathématiques.
Il existe des tables uniquement dédiées au cette transformée intégrale (directe et inverse), et elle est reconnue par certains logiciels de calcul formels comme Maple.

Bibliographie

[1] **Altes.R.A.** : *The Fourier-Mellin transform and mam-malian hearing*, Journal of the Acoustical Society of America, 63 :174–183, 1978. 2

[2] **Bertrand.J, Bertrand.P, Ovarpez.J :** *The Mellin Transform : The Transforms and Applications Handbook*, Second Edition-Alexander.Ed, Poularikas. D, 2000. 7, 10, 15

[3] **Brienne.J.P., Dubois.D., Povy.L. et Baussart.H** : *The Mellin transform to control system described by an implicit derivative transmittance*, Dans UKACC International Conference on control, Swansea, UK, 1998. 2

[4] **Davies. Brian** : *Integral Transforms and Their Applications*, New York, Springer-Verlag, 1984. 3

[5] **Debnath. Lokenath, and Bhatta. Dambaru** : *Integral Transforms and Their Applications, Third Edition*, Boca Raton : CRC Press LLC, 2015. 3, 5, 6, 7, 26

[6] **Driencourt. Yves.** : *Résumé du cours d'Analyse 3 (L3 Maths)*, Printemps 2010. 3, 5, 7

[7] **Epstein.B.** : *Some applications of the Mellin transform in statistics*, Annals of Mathematical Statistics, 19 :370–379, 1948. 2

[8] **Escudié.B., Grossman.A.** : *Une Représentation Bilinéaire en Temps et en Échelle*, Dans Colloque GRETSI, pages 33–35, Juan-les-pins, France, 1991. 2

[9] **Gorenflo.R, Mainardi.F.** : *Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order*, Springer Verlag, Wein (1997), 223-276. 3

[10] **Kudryavtsev,L.D.** :*Fubini theorem*, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V., Kluwer Academic Publishers, ISBN 978-1-55608-010-4, 1994. 3, 5

[11] **Kilicman.A and Ariffin.M.R.K.** :*A Note on The Convolution in The Mellin Sense with Generalized Functions*, Bull.Malaysian Math.Sc.Soc, Second Series 25, 2002, 93-100. 18, 20

[12] **Kilbas,A.A, Srivastava.H.M, Trujillo.J.J.** :*Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Van Mill, Amsterdam, 2006. 3, 4

[13] **Oosthuizen.Joubert.** : *The Mellin Transform*, October, 2011. 3, 4

[14] **Podpubny.I.** : *Fracional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999. 3

[15] **Paris.R.B, Kaminski.D. :** *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals* , Encyclopedia Of Mathematics And Its Applications, 85. 1, 7, 10, 18, 23

[16] **Srivastava,H.M, Buschaman.R.G.** :*Theory and Applications of Convolution Integral Equations*, Springer Science+Business Media B.V., 1992. 7, 18, 20

[17] **Tagliani.A.** : *Recovering a Probability Density Function From its Mellin Transform*, Applied Mathematics and Computation, 118 :151–159, 2001. 2