MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

FSEI
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et informatique

Filière : Mathématique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par :

BOUZOUADA Chaymae

THEME :

Contrôle avec Contraintes de Positivité pour les Systèmes 2D Singuliers à temps Continu

Soutenu le : Juin 2021

Devant le jury composé de :

Yassamina HAMADI	MCA	ENP Oran	Présidente
Laid DJILLALI	MCA	Université de Mostaganem	Examinateur
Djillali BOUAGADA	Professeur	Université de Mostaganem	Encadreur

Année Universitaire 2020-2021

Titre : Contrôle avec contrainte de positivité pour les système $2D$ singuliers à temps continu

Rssumé :

Ce sujet traite de la synthèse de stabilité pour une classe de systèmes $2D$ singuliers à temps continu. Des conditions de stabilité et de stabilisation des systèmes singuliers bidimensionnels positifs en temps continu seront dérivées, pour lesquelles les états prennent des valeurs non négatives lorsque les conditions initiales sont non négatives. Notons que la classe des systèmes positifs est une classe de systèmes dont les variables sont par nature positives or les modèles usuels en particulier linéaires n'intègrent en général pas cette contrainte. De plus, la synthèse des contrôleurs à états rétroactifs, le problème de synthèse avec des bornes non symétriques et de la stabilisation seront également traités. Quelques applications et exemples numériques seront inclus pour illustrer nos résultats.

Title : Control with positivity constraint for singular continuous-time $2D$ systems

Abstract :

This topic deals with the synthesis of stability for a class of singular continuous-time 2D systems. Stability and stabilization conditions of positive two-dimensional singular systems in continuous time will be derived, for which the states take on non-negative values when the initial conditions are non-negative. Note that the class of positive systems is a class of systems whose variables are by nature positive, but the usual models, in particular linear models, generally do not integrate this constraint. In addition, the synthesis of feedback state controllers, the problem of synthesis with asymmetrical bounds and stabilization will also be treated. Some digital applications and examples will be included to illustrate our results.

ملخص : التحكم مع قيود موجبة للأنظمة الفردية المستمرة ثنائية الأبعاد.

الهدف من هذا الموضوع هو دراسة استقرارية لفئة من الأنظمة الأحادية المستمرة و ثنائية الأبعاد، سيتم البحث عن شروط الاستقرار الخاصة بالأنظمة الأحادية المستمرة و ثنائية الأبعاد الموجبة، من أجل أن تأخذ الحالات فيها قيما غير سالبة عندما تكون الشروط الأولية موجبة .

من الملاحظ أن فئة الأنظمة الموجبة هي فئة من الأنظمة التي تكون متغيراتها موجبة بطبيعتها، لكن النماذج المعتادة، ولاسيما النماذج الخطية لا تدمج هذا القيد بشكل عا م.

بالإضافة إلى ذلك ، سيتم أيضًا معالجة تركيب وحدات التحكم في حالة الدارة المغلقة، سيتم أيضًا معالجة مشكلة التوليف مع الحدود الغير المتماثلة والتثبيت وتضمين بعض التطبيقات الرقمية والأمثلة لتوضيح نتائجنا.

.

Mémoire préparé à : Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem , ACSY Team-Laboratory of Pure and Applied Mathematics, P.O.Box 227/118 , 27000 Mostaganem, Algeria

Dédicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études, et surtout la confiance qu'ils ont toujours eu en moi, et qui m'ont appris comment patienter pour atteindre un tel objectif.

Mes chers frères et mes chères soeurs que j'aime beaucoup.

Toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

A mon encadreur pour m'avoir fait confiance en me proposant un sujet de recherche très intéressant.

Remerciements

Après avoir rendu grâce à Dieu le tout puissant, de m'avoir donner la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

je tiens à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique du département Mathématique et Informatique de l'université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem et les intervenants professionnels responsables de la formation de la filière mathématique.

J'adresse mes sincères remerciements également à mon encadreur Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'université de Mostaganem, pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant d'encadrer ce travail de master, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées pour diriger cette mémoire, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Aussi pour ces conseils, qui ont guidé mes réflexions et pour sa disponibilité à ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Je tiens également à remercier les membres de jury Docteur Yassamina HAMADI ,(ENPO Oran) Présidente , et Docteur Laid DJILLALI examinateur (UMAB), pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'expertiser ma contribution.

Je désire aussi remercier Kamel BENYETTOU, doctorant en mathématiques appliquées , pour son aide dans la réalisation de ce mémoire, son soutien inconditionnel et son encouragement. sans lui ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens à remercier vivement tous ceux qui, de près ou de loin ont participé à la rédaction de ce document.

Notations

$\mathbb{R}$: L'espace des nombres réels.

$\mathbb{R}^n$: L'espace des vecteurs réels de dimension n.

$\mathbb{R}^{n \times m}$: L'espace des matrices réelles de taille $n \times m$.

$\in$: Appartient .

$rang$ (.) : Le rang de la matrice.

det (.) : Le déterminant de la matrice.

I_n : La matrice identité de taille $n \times n$.

$0_{n \times m}$: La matrice nulle de taille $n \times m$.

$M_{n \times m}$: La matrice de taille $n \times m$.

M^T : Transposé de la matrice M.

M^{-1} : L'inverse de la matrice M.

$M \succ 0$: Matrice définie positive.

M^* : Transposé conjugué de la matrice M.

$\mathbb{M}_n$: Une matrice de Metzler de taille n.

$D_{t_1,t_2}^{\alpha_1,\alpha_2} x(t_1, t_2)$: La double dérivée fractionnaire de Caputo pour la fonction $x(t_1, t_2)$.

$D_{t_1}^{\alpha_1} x(t_1, t_2)$: La dérivée fractionnaire partielle de Caputo pour la fonction $x(t_1, t_2)$ par rapport à la variable t_1.

$D_{t_2}^{\alpha_2} x(t_1, t_2)$: La dérivée fractionnaire partielle de Caputo pour la fonction $x(t_1, t_2)$ par rapport à la variable t_2.

$I_{t_1,t_2}^{\alpha_1,\alpha_2} x(t_1, t_2)$: L'intégrale fractionnaire double au sens de Riemann-Liouville de la fonction $x(t_1, t_2)$.

Table des matières

Introduction

En mathématique et en ingénierie, la théorie du contrôle a comme objet l'étude du comportement de systèmes dynamiques paramétrés en fonction des trajectoires de leurs paramètres [1, 4, 29, 7, 12, 35]. Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système, ce peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique [28, 25, 6, 7, 19, 14, 10]. formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discret (comme un programme informatique), des systèmes dynamiques à temps continus (comme une réaction chimique).

Dans la modélisation, on peut avoir recours à des équations, systèmes différentiels ordinaires, aux dérivées partielles, fractionnaires et à des problèmes d'optimisation ; pour ces raisons, la théorie mathématique de contrôle est à l'intersection de nombreux domaines mathématiques.

Il existe plusieurs types de systèmes fractionnaires, on cite les systèmes linéaires unidimensionnels décrit par les équations :

$$\begin{cases} ED^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1}$$

où :

$x(t)$ désigne la trajectoire, $u(t)$ le contrôle, E, A, B, C, D sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

et les systèmes fractionnaires bidimensionnels d'écrits par le modèle de Roesser,

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h\left(t_1, t_2\right) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v\left(t_2, t_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h\left(t_1, t_2\right) \\ x^v\left(t_1, t_2\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u\left(t_1, t_2\right) \\ \begin{bmatrix} y^h(t_1, t_2) \\ y^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h\left(t_1, t_2\right) \\ x^v\left(t_1, t_2\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \end{gathered} \tag{2}$$

Ce dernier système est dit singulier si $\det(E) = 0$, régulier si $\det(E) \neq 0$, et standard si $E = I$.

Nous nous intéressons dans ce travail à cette classe de systèmes tout en étudiant la solvabilité et la stabilité pour une classe de systèmes $2D$ singuliers : fractionnaires et non fractionnaires.

Notre travail a été structuré en quatre chapitres, en plus de l'introduction, l'application et la conclusion.

Dans le premier chapitre nous avons introduit les notions mathématiques de base pour pouvoir étudier et analyser les systèmes uni et multidimensionnels par la suite. Le dexième chapitre a été consacré pour les modèles unidimensionnels singuliers dans le cas (continu, discret) et on donne leurs solutions.

Le troisième chapitre a été dédie pour les modèles bidimensionnels singuliers et leurs solutions.

le quatrième chapitre traite l'étude de la stabilité du problèmes bidimensionnel fractionnaire continue.

Nous terminons enfin notre mémoire par une application et une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions de bases-Préliminaires et position du problème

L'algèbre linéaire est la branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des espaces vectoriels et des transformations linéaires, elle sert aussi à la formalisation générale de la théorie des systèmes d'équations linéaires. Pour cette raison, nous allons énoncé quelques rèsultats classiques qui vont nous être très utile par la suite.

Définition 1.0.1. *[2] On dit que A est une matrice non-négative si $\forall i = \overline{1,n}$ $\forall j = \overline{1,m}$: $a_{ij} \geq 0$, autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives. Une telle matrice est notée $A \geq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.*

Définition 1.0.2. *[2] On dit que A est une matrice positive si A est non-négative et $\exists k = \overline{1,n}, \exists l = \overline{1,m}$: $a_{kl} > 0$, i.e., toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice $A > 0$*

Définition 1.0.3. *[2] On dit que A est une matrice de Metzler si $\forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,m}, i \neq j$: $a_{ij} \geq 0$, i.e., toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives. L'ensemble des matrices de Metzler de dimension $n \times n$ est noté $\mathbb{M}_n$.*

Exemple 1.0.1. *La matrice B suivante est une matrice de Metzler.*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 & 3 \\ 9 & -7 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Définition 1.0.4. *Une matrice par blocs ou matrice partitionnée est une matrice dévissée en sous-matricee rectangulaires à partir d'une division de sa diagonale, ces sous matrices sont appelées blocs.*

Exemple 1.0.2. *Soit la matrice P suivante,*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

peut être partitionnée en quatre blocs :

$$p_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; p_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \; p_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \; p_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

on peut alors écrire la matrice par blocs comme :

$$p_{partitionn\acute{e}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Définition 1.0.5. *[35] L'inverse généralisé*

Soit A une matrice à coefficients réels ou complexe avec n linges et p colonnes, son pseudo-inverse A^+ existe et il est unique vérifiant les conditions suivantes :

$$AA^+A = A$$

$$A^+AA^+ = A^+$$

$$(AA^+)^\top = AA^+$$

$$(A^+A)^\top = A^+A$$

.

Définition 1.0.6. *[34] La décomposition en valeurs singuliers (D.V.S)*

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, il est possible de décomposer A en forme de produit de trois matrices :

1. *La première matrice notée U, matrice orthogonale dont les colonnes sont formés par les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres de $AA^\top$.*
2. *La deuxième matrice notée V, matrice orthogonale dont les colonnes sont formés par les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres de $A^\top A$.*
3. *La troisième matrice notée Σ, formée par les valeurs singulières notées σ_i.(une valeur singulière est la racine carrée de la valeur propre de $AA^\top$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(AA^\top)}$*

en final :

$$A = U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}V_{n\times n}$$

avec : $UU^\top = I \quad , VV^\top = I$.

Définition 1.0.7. *Une fonction de la variable t est dite causale, si elle est nulle pour t* < 0.

Définition 1.0.8. *Soit* f *une fonction du temps* t *causale, sa transformée de Laplace notée* $F(s)$ *est définie par :*

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

telle que s est un nombre complexe. F existe que si cette intégrale à un sens i.e converge.

Définition 1.0.9. *[27] La fonction définit par l'intégrale suivante est définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ Re(x) \geq 0$$

est appelée la fonction gamma, elle vérifie la propriété : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Définition 1.0.10. *Les dérivées fractionnaire* $D_{t_1}^{\alpha_1}x_h\left(t_1,t_2\right)$ *et* $D_{t_2}^{\alpha_2}x_v\left(t_1,t_2\right)$ *représentent les dérivées fractionnaires de Caputo des fonctions* $x^h\left(t_1,t_2\right)$ *et* $x^v\left(t_1,t_2\right)$

$$D_{t_1}^{\alpha_1}x_h\left(t_1,t_2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_1\right)}\int_0^{t_1}\frac{\frac{dx_h}{dt_1}\left(\tau,t_2\right)}{\left(t_1-\tau\right)^{\alpha_1}}d\tau \tag{1.1}$$

$$D_{t_2}^{\alpha_2}x_v\left(t_1,t_2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha_2\right)}\int_0^{t_2}\frac{\frac{dx_v}{dt_2}\left(t_1,\tau\right)}{\left(t_2-\tau\right)^{\alpha_2}}d\tau \tag{1.2}$$

avec,

$$0 < \alpha_1 \leq 1 \ et\ 0 < \alpha_2 \leq 1 \tag{1.3}$$

Définition 1.0.11. *[7] L'intégrale fractionnaire d'ordre* $0 < \alpha \leq 1$ *de Riemann-Liouville pour la fonction* $f(t)$ *est de la forme,*

$$I_{t_1}^{\alpha}f\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}f\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau \tag{1.4}$$

Définition 1.0.12. *[7] La double intégrale fractionnaire d'ordre* (α,β), $0 < \alpha \leq 1$ *et*

$0 < \beta \leq 1$ *pour la fonction* $2D$ $f(t_1, t_2)$ *de Riemann-Liouville est de la forme,*

$$I_{t_1,t_2}^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (t_1 - \tau_1)^{\alpha-1} (t_2 - \tau_2)^{\beta-1} f(\tau_1, \tau_2) \, \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2 \tag{1.5}$$

Le terme IML (Inégalité Matricielle Linéaire), (LMI : Linear Matrix Inequality en anglais) est maintenant couramment employé dans la littérature liée à l'analyse ou à la commande des systèmes, voir [3, 2, 19], . Nous rappelons néanmoins quelques notions.

Définition 1.0.13. *[19] Une inégalité matricielle linéaire (IML) est une expression de la forme*

$$F(x) = F_0 + \sum_{1}^{m} x_i F_i \succ 0 \tag{1.6}$$

où $x = (x_i), i = \overline{1, m}$ *est un vecteur de nombres réels (variables de décisions) et* $(F_i), i = 0, m$*, sont des matrices réelles symétriques i.e* $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = \overline{0, m}$.

Remarque 1.0.1. *L'inégalité " $\succ$ " dans* (1.6) *signifie "'définie positive"' c'est à dire* $u^T F(x) u \succ 0$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$*, ce qui est équivalent à ce que la plus petite valeur propre de* $F(x)$ *est positive.*

Remarque 1.0.2. *[19]*

1. *Le terme inégalité matricielle linéaire est utilisée dans la littérature sur les systèmes et contrôle, mais la terminologie n'est pas consistante avec l'expression* $F(x) \succ 0$ *que* F *n'est pas une fonction linéaire. Le terme inégalité matricielle affine peut mieux correspondre à la formulation.*
2. *Une IML non stricte est une IML telle que l'inégalité dans (5.9) est non stricte* $\succ$ *et (5.9) est remplacée par* $F(x) \succeq 0$*. Les inégalités matricielles* $F(x) \prec 0$ *et* $F(x) \prec G(x)$ *où* F, G *étant des fonctions affines, sont des cas particuliers de (5.3) puisqu'elles peuvent être reformulées sous la forme IML :*

$$-F(x) \succ 0$$
$$G(x) - F(x) \succ 0.$$

On écrit toujours une IML sous la forme $F(x) \prec 0$ *avec* $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{S}^n$ *une fonction affine. L'objectif est de trouver* $x \in \mathbb{R}^m$ *satisfaisant l'inégalité. Ce choix de* x *est appelé problème de faisabilité.*

Chapitre 2

Modèles unidimensionnels (1D) singuliers

Les systèmes singuliers se trouvent en ingénierie tels que dans les circuits électriques, systèmes électriques, génie aérospatial et traitement chimique,les science sociale, systèmes économiques, systèmes biologiques, analyse de réseaux, analyse de séries chronologiques [1, 3, 27, 23, 24].

Leur forme les rend également utiles dans la modélisation de système. Dans de nombreux articles les systèmes singuliers sont appelés systèmes implicites, les systèmes différentiels / algébriques, les systèmes d'espace d'état généralisés, etc. Les systèmes singuliers sont gouvernés par les équations différentielles dites singulières, qui dotent les systèmes de nombreux caractéristiques spéciales qui ne se trouvent pas dans les systèmes classiques.

2.1 Cas continue :

Définition 2.1.1. *Système unidimensionnel continu*

le système :

$$\begin{cases} x^{'}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

est dit un système à une dimension linéaire à temps continu, où,

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice dynamique ou d'évolution.*

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice de contrôle ou de commande.*

$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice d'observation.*

$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice de transmission.*

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ *: la trajectoire.*
$y(t) \in \mathbb{R}^n$ *: la sortie.*
$u(t) \in \mathbb{R}^n$ *: le contrôle.*

Définition 2.1.2. *Système unidimentionnel singuliers continus Le système :*

$$\begin{cases} Ex^{'}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

est dit un système singulier linéaire à temps continue si le $\det(E) = 0$.

2.1.1 Solution d'un système singulier unidimensionnel L.T.I continue :

Dans cette partie, on va utiliser la décomposition en valeurs singulières et l'inverse généralisé pour obtenir la solution du système de type

$$Ex^{'}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.3}$$

Consédiront le système (2.3), on peut décomposer la matrice E en utilisant la décomposition en valeurs singulières, ie

$$E = U\Sigma V^T$$

.

En utilisant la relation entre la décomposition en valeurs singulière et l'inverse généralisé, nous aurons la formule suivante,

$$E^+ = V\Sigma^{-1}U^T$$

.

Par multiplication de l'équation (2.3) par E^+ qui est l'inverse généralisé de la matrice E, il vient :

$$E^+Ex^{'}(t) = E^+Ax(t) + E^+Bu(t) \tag{2.4}$$

$\Longrightarrow$

$$x^{'}(t) = E^+Ax(t) + E^+Bu(t)$$

Si on pose : $E^+A = \tilde{A}$ et $E^+B = \tilde{B}$.

L'équation (2.4) devient :

$$x^{'}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \tag{2.5}$$

le système (2.5) est similaire à un système linéaire continue standard, et donc la solution de sous la forme :

$$x(t) = e^{\tilde{A}t}x_0 + \int_0^t e^{A^{"}(t\neg\tau)}\tilde{B}u(\tau)d\tau \tag{2.6}$$

où encore d'une autre manière :

$$x(t) = e^{E^+At}x_0 + \int_0^t e^{E^+A(t\neg\tau)}E^+Bu(\tau)d\tau \tag{2.7}$$

2.2 Cas discret :

Définition 2.2.1. *Système unidimensionnel standard discret*

le système :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \tag{2.8}$$

est dit un système en une dimension linéaire à temps discret, avec :

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice dynamique ou d'évolution.*

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice de contrôle ou de commande.*

$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice d'observation.*

$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice de transmission.*

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ *: la trajectoire.*

$y(t) \in \mathbb{R}^n$ *: la sortie.*

$u(t) \in \mathbb{R}^n$ *: le contrôle.*

Définition 2.2.2. *Système unidimentionnel singuliers discret*

le système :

$$\begin{cases} Ex_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \tag{2.9}$$

est dit un système en une dimension singulier linéaire à temps discret si le $\det(E) = 0$, *avec :*

$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice singuliers* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice dynamique ou d'évolution.*

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice de contrôle ou de commande.*

$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice d'observation.*

$D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *: matrice de transmission.*

$x(t) \in \mathbb{R}^{n}$ *: la trajectoire.*

$y(t) \in \mathbb{R}^{n}$ *: la sortie.*

$u(t) \in \mathbb{R}^{n}$ *: le contrôle.*

2.2.1 Solvabilité des systèmes singuliers unidimensionnel à temps discrets :

Consédirons le système (2.9), on peut décomposer la matrice E en utilisant la décomposition en valeurs singulières, ie

$$E = U\Sigma V^T$$

. On peut écrire :

$$(U\Sigma V^T)x_{k+1} = Ax_k + Bu_K \tag{2.10}$$

Par multiplication de l'équation (2.10) par $V\Sigma^{-1}U^T$, où Σ^{-1} est l'inverse de Σ, il s'ensuit alors,

$$V\Sigma^{-1}U^T(U\Sigma V^T)x_{k+1} = \ (V\Sigma^{-1}U^T)Ax_k + \ (V\Sigma^{-1}U^T)Bu_k \,(2.15) \tag{2.11}$$

et comme $UU^T = I$, $VV^{TT} = I$, le système (2.11) peut alors s'écrire comme,

$$x_{k+1} = (V\Sigma^{-1}U^T)Ax_k + \ (V\Sigma^{-1}U^T)Bu_k \tag{2.12}$$

Posons :

$$(V\Sigma^{-1}U^T)A = \tilde{A}$$

et

$$(V\Sigma^{-1}U^T)B = \tilde{B}$$

.

Le système (2.12) devient :

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k \tag{2.13}$$

Le système décrit par l'équation (2.13) est similaire à un système standard linéaire discret, et comme la solution d'un système linéaire discret est de la forme :

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-(i+1)} B u_i \tag{2.14}$$

Donc, la solution du système (2.13) est :

$$x_n = \tilde{A}^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{A}^{n-(i+1)} \tilde{B} u_i \tag{2.15}$$

Finalement, la solution général du système discret d'écrit par l'équation (2.9) est donnée par la formule suivante

$$x_n = (V\Sigma^{-1}U^T A)^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (V\Sigma^{-1}U^T A)^{n-(i+1)} ((V\Sigma^{-1}U^T A)) B u_i \tag{2.16}$$

et sa sortie par,

$$y_n = C\left((V\Sigma^{-1}U^T A)^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (V\Sigma^{-1}U^T A)^{n-(i+1)} ((V\Sigma^{-1}U^T A)) B u_i \right) + D u_n \tag{2.17}$$

Chapitre 3

Modèles bidimensionnels (2D) singuliers

3.1 Description des modèles 2D à temps discret

Nous allons maintenant, introduire la définition du modèle proposé pour l'étude et quelques résultats caractérisant cette classe de systèmes. Pour ce faire, nous nous basons sur les quelques récentes références [27, 12, 3, 2, 8]

Nous considérons le système

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{i,j} \tag{3.1}$$

$$\begin{bmatrix} y^h_{i,j} \\ y^v_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} x_{i,j} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} u_{i,j} \tag{3.2}$$

où $x^h(i,j) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$ et $x^v(i,j) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ représentent les matrices d'état horizontal et vertical au point (i,j) avec $n = n_1 + n_2$. La matrice $u(i,j) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice d'entrée et $y(i,j) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ étant la matrice de sortie au point $(i,j).E \in \mathbb{R}^{n \times n}, E_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_l}, A_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_l}$ pour $k,l = 1,2$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n} B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Le système 3.1 est appelé système $2D$ général à temps discret d'écrit par le modèle de Roesser. Ce système est dit singulier si $\det E = 0$ et standard si $\det E \neq 0$.

Pour des raisons de calcul, on utilise par la suite les notations suivante :

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Dans notre travail , la classe de modèle de type Roesser singulier est considérée pour ce chapitre on considère le système de type Roesser singulier.

3.2 Solvabilité d'un système singulier bidimensionnel à temps discret

Considérons le système singulier (3.1), comme la matrice E est singulière, on peut multiplier ce système par E^+ qui est l'inverse généralisé de la matrice E, on obtient cependant,

$$E^+E\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = E^+A\begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + E^+Bu_{i,j} \tag{3.3}$$

et en se basant sur les propriétés de l'inverse généralisé issu de [36, 35, 33, 32], l'équation (3.3) devient :

$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = E^+\left(A\begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + Bu_{i,j}\right) \tag{3.4}$$

Le système (3.4) est par suite,

$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = E^+A\begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + E^+Bu_{i,j} \tag{3.5}$$

Posons,

$$E^+A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

et

$$E^+B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

L'utilisation des équations (3.4), (3.5), (3.6) et(3.7) nous donne la forme :

$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{bmatrix} u_{i,j} \tag{3.8}$$

le système (3.8) est similaire à un système linéaire bidimensionnel discret standard.

Nous nous bason sur [11] pour déduire le résulta suivant,

Théorème 1. *La trajectoire d'état du système* (3.1) *avec les conditions initiales* x^h_{0j} *pour* $j \in \mathbb{Z}_+$ *et* x^h_{i0} *pour* $i \in \mathbb{Z}_+$ *est donnée par,*

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{i} T_{i-k,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{k0}^v \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{j} T_{i,j-l} \begin{bmatrix} x_{0l}^{\mathrm{h}} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{(k,l)\in D_{ij}} M_{i-k,j-l} u_{kl} \tag{3.9}$$

où T_{ij} sont les matrices de transition définies par,

$$T_{ij} = \begin{cases} I_n \text{ (la matrice identité) pour } i = j = 0\,(n = n_1 + n_2) \\ T_{10}T_{i-1,j} + T_{01}T_{i,j-1} \text{ pour } i, j \in Z_+(i + j > 0) \\ 0 \quad \text{pour } i < 0 \text{ ou/et } j < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

et

$$T_{10} := \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{01} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$D_{ij} := \{(k, l) \in Z_+ \times Z_+; 0 \le k \le i; 0 \le l \le j, k + l \ne i + j\} \tag{3.12}$$

$$M_{i-k,j-l} = T_{i-k-1,j-l}B^{10} + T_{i-k,j-l-1}B^{01}, \quad B^{10} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B^{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

3.3 Solvabilité d'un système fractionnaire singulier bidimensionnel à temps continu

Nous allons maintenant, introduire la définition d'un modèle fractionnaire singulier à temps continu proposé pour l'étude, suivis de quelques résultats concernant la stabilité de ces types de systèmes.

Nous considérons le système fractionnaire décrit par les équations suivantes,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2, t_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \\ \begin{bmatrix} y^h(t_1, t_2) \\ y^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

$x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$ et $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ représentant les matrices d'état horizontal et vertical au point (t_1, t_2), $\mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1, t_2) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1} x^h(t_1, t_2)$, $\mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_2} x^v(t_1, t_2) = \frac{\partial^\beta}{\partial t_2} x^h(t_1, t_2)$, avec

$n = n_1 + n_2$. La matrice $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ étant la matrice d'entrée et $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ étant la matrice de sortie au point (t_1, t_2).$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k\times n_l}$, $A_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k\times n_l}$ pour $k, l = 1, 2$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n} B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, avec $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$.

Le système (3.14) est appelé système $2D$ général à temps continu décrit par le modèle de Roesser suivant. ce système est dit singulier si $\det E = 0$ et standard si $\det E \neq 0$.

Pour nos besoins par la suite, on utilise les notations suivante :

$$D_{t_1,t_2}^{\alpha_1,\alpha_2} x(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h\,(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v\,(t_2, t_2) \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Par utilisation de la décomposition en valeurs singulières de la matrice E, nous aurons :

$$E = U\Sigma V^T \tag{3.17}$$

On définit l'inverse généralisé au sens de Moore-Penrose et utilisons la décomposition en valeurs singulières de la matrice E,

$$E^+ = V\Sigma^{-1}U^T \tag{3.18}$$

Considérant le système (3.14), et les équations (3.17), (3.15) et (3.16) on obtient
on peut écrire :

$$U\Sigma V^T D_{t_1,t_2}^{\alpha_1;\alpha_2} x(t_1, t_2) = Ax(t_1, t_2) + Bu(t_1, t_2) \tag{3.19}$$

et si on multiplie la formule (3.19) par $V\Sigma^{-1}U^T$:

$$V\Sigma^{-1}U^T U\Sigma V^T D_{t_1,t_2}^{\alpha_1,\alpha_2} x(t_1, t_2) = V\Sigma^{-1}U^T Ax(t_1, t_2) + V\Sigma^{-1}U^T Bu(t_1, t_2) \tag{3.20}$$

avec : $UU^\top = I \quad , VV^\top = I$
Donc on en déduit alors,

$$D_{t_1,t_2}^{\alpha_1;\alpha_2} x(t_1, t_2) = V\Sigma^{-1}U^T Ax(t_1, t_2) + V\Sigma^{-1}U^T Bu(t_1, t_2) \tag{3.21}$$

on pose :

$$V\Sigma^{-1}U^{T}A = A' \tag{3.22}$$

et

$$V\Sigma^{-1}U^{T}B = B' \tag{3.23}$$

le système décrit par l'équation (3.21) devient,

$$D_{t_1,t_2}^{\alpha_1,\alpha_2}x(t_1,t_2) = A'x(t_1,t_2) + B'u(t_1,t_2) \tag{3.24}$$

on peut écrire l'équation (3.24) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^{\alpha_1}x^v(t_1,t_2)}{\partial^{\alpha_1}t_2} \\ \frac{\partial^{\alpha_2}x^v(t_1,t_2)}{\partial^{\alpha_2}t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} u(t_1,t_2) \tag{3.25}$$

Le système (3.25) est similaire à un système linéaire bidimensionnel fractionnaire standard, et comme la solution de ce type est étudié en [18] par Rogowski , on déduit la trajectoire et la réponse du système singulier décrit par le modèle (3.14).

Théorème 2. *La trajectoire d'état du système* (3.14) *avec les conditions initiales* $x^h(0,t_2)$ *pour* $t_2 \in \mathbb{Z}_+$ *et* $x(t_1,0)^v$ *pour* $t_1 \in \mathbb{Z}_+$ *est donnée par,*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} T_{ij}\left\{\sum_{k=1}^{N_1}\frac{t_1^{k+i\alpha_1-1}}{\Gamma(k+i\alpha_1)} I_{t_2}^{j\alpha_2}\begin{bmatrix} x_{t_1}^{h(k-1)}(0,t_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_1 \\ 0 \end{bmatrix} I_{t_1,t_2}^{(i+1)\alpha_1,j\alpha_2}u(t_1,t_2)\right\} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} T_{i0}\left\{\sum_{k=1}^{N_1}\frac{t_1^{k+i\alpha_1-1}}{\Gamma(k+i\alpha_1)}\begin{bmatrix} x_{t_1}^{h(k-1)}(0,t_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_1 \\ 0 \end{bmatrix} I_{t_1}^{(i+1)\alpha_1}u(t_1,t_2)\right\} \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} T_{ij}\left\{\sum_{l=1}^{N_2}\frac{t_2^{l+j\alpha_2-1}}{\Gamma(l+j\alpha_2)} I_{t_1}^{i\alpha_1}\begin{bmatrix} 0 \\ x_{t_2}^{v(l-1)}(t_1,0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B'_2 \end{bmatrix} I_{t_1,t_2}^{i\alpha_1,(j+1)\alpha_2}u(t_1,t_2)\right\} \\
&+ \sum_{j=0}^{\infty} T_{0j}\left\{\sum_{l=1}^{N_2}\frac{t_2^{l+j\alpha_2-1}}{\Gamma(l+j\alpha_2)}\left[x_{t_2}^{v(l-1)}(t_1,0)\right] + \begin{bmatrix} 0 \\ B'_2 \end{bmatrix} I_{t_2}^{(j+1)\alpha_2}u(t_1,t_2)\right\}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

avec :

$$T_{ij} = \begin{cases} I_n \text{ pour } i = 0, j = 0 \\ T_{10}T_{i-1,j} + T_{01}T_{i,j-1} \text{ pour } i + j \gtrdot 0 \ (i,j \in Z_+) \\ 0 \text{ pour } i \lessdot 0 \text{ et/ou } \ j \lessdot 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

et,

$$T_{10} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Conclusion : Dans ce chapitre,nous avons étudié différente classe de système singulières tout en s'intéressant à la détermination de la trajectoire d'état (solution) en utilisant l'inverse généralisée, la SVD et autres décomposition.

Chapitre 4

Chapitre 4 : Tests de stabilité

4.1 Motivation avec introduction

En mathématiques et en automatique, la notion de stabilité de Lyapunov (ou, plus correctement, de stabilité au sens de Lyapunov) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc... [23, 12, 31, 3].

4.1.1 Définitions :

Définition 4.1.1. *[3] Un système est stable au sense BIBO si et seulment si :* $\forall x_0 = x(0), \forall u$ *bornée donnée, la sortie* y *est aussi bornée.*

Définition 4.1.2. *[19] Un système se trouve dans un état d'équilibre si cet état n'est pas modifier l'orsque le système est abondonné à lui même.*

on détermine cet équilibre, en posant à la faire $u = 0$ *et* $x' = 0$*, ce qui revient à résoudre* $Ax = 0$*.*

Définition 4.1.3. *[19] Un état d'équilibre est asymptotiquement stable si lorsque le système écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient en un temps infini ; dans le cas contraire, il est dit instable.*

Un état d'équilibre est dit simplement stable si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Définition 4.1.4. *[19] Le système singulier est dit stable s'il existe des scalaires* α,β *tel que quand* $u(t) = 0$ *pour* $t \geqslant 0$ *son état* $x(t)$ *satisfait :* $\|x(t)\|_2 \leq \alpha e^{-\beta t}\|x(0)\|_2$, $t \geqslant 0$.

4.2 Étude du cas continu à dérivée entière

4.2.1 Approche de Lyapounov direct de stabilité

Dans cette partie du travail on s'intéresse à la classe des système de Roesser singuliers à dérivées entières pour le cas continue sans force associée à (3.14) avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ qui est décrit par le modèle suivant,

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Pour que le système (4.1) soit stable il faut que

$$\lim_{t_1,t_2 \longrightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{pmatrix} \right\| = 0 \tag{4.2}$$

avec les conditions initiales : $\sup_{t_2 \in \mathbb{R}^+} \left\| x^h(0,t_2) \right\| < +\infty$ et $\sup_{t_1 \in \mathbb{R}^+} \left\| x^v(t_1,0) \right\| < +\infty$.

Pour que cette dernière limite tend vers 0 il fallait trouvé une fonction V décroissante, donc sa dérivée doit être négative.

Pour des raisons de notation, nous notons dans ce qui suit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{pmatrix} = x^{'}(t_1,t_2) \tag{4.3}$$

Comme une fonction candidate, on peut prendre

$$V = x^\top(t_1,t_2)(E^\top P)x(t_1,t_2) \tag{4.4}$$

avec

$$E^\top P = PE$$

,

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0$$

et $E^\top P$ une matrice positive.

On savait que pour, $\forall t_1, t_2\ \forall x^h(0,t_2) \geq 0\ \forall x^v(t_1,0)$ on aura

$$V' = x'^\top(t_1,t_2)(E^\top P)x(t_1,t_2) + x^\top(t_1,t_2)(E^\top P)x'(t_1,t_2) \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} V' = & \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ce qui implique que,

$$\begin{aligned} V' = & \left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} \right)^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{11} \\ 2P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.7}$$

En utilisant les équations (4.1) et (4.7), nous déduisons la relation suivante

$$\begin{aligned} V' = & \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \right)^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \\ V' = & \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$\Rightarrow$

$$V' = \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}^\top \underbrace{\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right)}_{Q} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Ce qui implique que si $V^{'} \prec 0$ alors la matrice $Q \prec 0$. par suite on déduit le théorème suivant.

Théorème 3. *Le système de Roesser décrit par l'équation d'état* (4.1) *est dite stable si* *et seulement s'il existe une matrice définie positive*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0$$

tel que la matrice suivante est définie négative,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.10}$$

et

$$E^\top P = PE$$

4.2.2 Test par l'utilisation de l'inverse généralisé

Considérons le système (4.1), comme la matrice $E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$ est singulière, on peut multiplier par $E^+ = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^+$ qui est l'inverse généralisé de la matrice E, on aura donc le système suivant,

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Par utilisation des propriétés de l'inverse généralisé [33, 35, 36], l'équation (4.11) devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1,t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Maintenant si on utilise le même principe que dans ce qui précède avec l'existence d'une fonction V décroissante, donc sa dérivée doit être négative ; dans ce cas la fonction candidate V est sous la forme

$$V = \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

et pour le même principe de dérivation et d'après les étapes prises dans les équations de (4.5), (4.6), (4.7) et (4.9), nous obtiendrons le résultats suivant.

Théorème 4. *Le système de Roesser décrit par l'équation d'état* (4.1) *est dit stable si et seulement s'il existe une matrice définie positive*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0$$

tel que la matrice suivante est définie négative

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^{+^T} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.14}$$

4.3 Étude de la classe des systèmes fractionnaires positives

4.3.1 Test par l'utilisation de l'inverse généralisé

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2,t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$x^h(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$ et $x^v(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ représentent les matrices d'état horizontal et vertical aux points (t_1,t_2), $\mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1} x^h(t_1,t_2)$, $\mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_2} x^v(t_1,t_2) = \frac{\partial^\beta}{\partial t_2} x^h(t_1,t_2)$, où $n = n_1 + n_2$. $E \in \mathbb{R}^{n \times n}, E_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_l}, A_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_l}$ pour $k,l = 1,2$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, avec $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$.

Définition 4.3.1. *Le système* (4.15) *est dit positif si pour toute condition initiale* $x^h(0,t_2)$ *et* $x^v(t_1,0)$, *la solution* $\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}$ *est positive.*

Si on utilise le principe de l'inverse généralisé dans le système (4.15) comme dans l'équation (4.11), il s'écrit alors,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2,t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

avec,

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Théorème 5. *Le système* (4.15) *est dit stable si et seulement si il existe deux vecteurs positifs,*

$$\lambda = \left[\lambda_1^T \cdots \lambda_{n_h}^T\right] \in \mathbb{R}^{n_h}, \quad \gamma = \left[\gamma_1^T \cdots \gamma_{n_v}^T\right] \in \mathbb{R}^{n_v}$$

tel que :

$$\begin{bmatrix} \lambda^T & \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.18}$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons travaillé avec le système équivalent (4.17), nous utilisons la fonction de Lyapunov pour les systèmes classiques fractionnaires, pour étudier la stabilité des systèmes autonomes d'ordre fractionnaires $2D$ comme suit :

$$\begin{aligned} V_h(t_1, t_2) &= \lambda^T x^h(t_1, t_2) \\ V_v(t_1, t_2) &= \gamma^T x^v(t_1, t_2). \end{aligned} \tag{4.19}$$

La fonction candidate de Lyapunov satisfait cependant :

$$V(t_1, t_2) = V_h(t_1, t_2) + V_v(t_1, t_2) \tag{4.20}$$

Calculons maintenant la dérivée fractionnaire globale de $V(t_1, t_2)$ et considérons qu'elle est définie négative, alors :

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1,\alpha_2} V(t_1, t_2) &= D^{\alpha_1} V_h(t_1, t_2) + D^{\alpha_2} V_v(t_1, t_2) \\ &= \lambda^T D^{\alpha_1}(x_h(t_1, t_2)) + \gamma^T D^{\alpha_2}(x_v(t_1, t_2)) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^T & \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{t_d}^{\alpha_1}(x_h(t_1, t_2)) \\ D_{t_2}^{\alpha_2}(x_v(t_1, t_2)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^T & \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(t_1, t_2) \\ x_v(t_1, t_2) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

On sait déjà que $x^h(t1, t2) \geq 0$ et $x^v(t1, t2) \geq 0$ puisque le système fractionnaire $2D$ est positif donc la condition de stabilité est réduite à la condition dans l'équation (4.21), et donc la condition (4.18) est évidente.

□

4.4 La stabilisation

Le problème de stabilisation des systèmes dynamiques se pose actuellement dans des différents modèles et applications, ce problème consiste à trouver un contrôle qui rend notre système stable lorsqu'il n'est pas stable. Le problème de stabilisation a été traité dans plusieurs ouvrages et articles citation à titre d'exemple ([37, 38, 39, 40]) .

Considérant le système $2d$ fractionnaire définit par l'équation (3.14),

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2,t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1,t_2) \\ \begin{bmatrix} y^h(t_1,t_2) \\ y^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{4.22}$$

Définition 4.4.1. *Le système* (4.22) *est dit stabilisable s'il existe un nouveau contrôle par retour d'état, tel que le système en boucle fermée soit stable.*

4.4.1 Stabilisation de l'entrée

Si le système (4.22) est non stable, alors on peut trouver un nouveau contrôle de la boucle fermée

$$u(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

où :K_1 représente la matrice de gain pour l'axe horizontale et K_2 pour l'axe verticale.

Remplaçons le nouveau contrôle définit par (4.23) dans le système (4.22),

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2,t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Donc,

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2,t_2) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Par un simple calcul du produit matriciel,

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2,t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_1K_1 & A_{12}+B_1K_2 \\ A_{21}+B_2K_1 & A_{22}+B_2K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Maintenant, si on utilise le théorème 5 et la définition de la stabilité, on aura le résultat suivant.

Théorème 6. *Le système* (4.22) *est dite stabilisable si et seulement si il existe deux vecteur positive :*

$$\lambda = \left[\lambda_1^T \cdots \lambda_{n_h}^T\right] \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \gamma = \left[\gamma_1^T \cdots \gamma_{n_v}^T\right] \in \mathbb{R}^{n_2}$$

et un contrôle

$$u(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

tel que,

$$\begin{bmatrix} \lambda^T & \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} A_{11}+B_1K_1 & A_{12}+B_1K_2 \\ A_{21}+B_2K_1 & A_{22}+B_2K_2 \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.28}$$

4.4.2 Stabilisation de la sortie

Si le système (4.22) est non stable, alors on peut trouver un nouveau contrôle de la boucle fermée,

$$u(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^h(t_1,t_2) \\ y^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

et en remplaçant l'équation (4.29) dans (4.22)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_2,t_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Calculons ensuite le produit matriciel suivant,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1\,C_{11}\,F_1 + B_1\,C_{21}\,F_2 & B_1\,C_{12}\,F_1 + B_1\,C_{22}\,F_2 \\ B_2\,C_{11}\,F_1 + B_2\,C_{21}\,F_2 & B_2\,C_{12}\,F_1 + B_2\,C_{22}\,F_2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Par substitution du résultat obtenu en (4.31) dans l'équation (4.30), on obtient

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h\,(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v\,(t_2, t_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h\,(t_1, t_2) \\ x^v\,(t_1, t_2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_1\,C_{11}\,F_1 + B_1\,C_{21}\,F_2 & B_1\,C_{12}\,F_1 + B_1\,C_{22}\,F_2 \\ B_2\,C_{11}\,F_1 + B_2\,C_{21}\,F_2 & B_2\,C_{12}\,F_1 + B_2\,C_{22}\,F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h\,(t_1, t_2) \\ x^v\,(t_1, t_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h\,(t_1, t_2) \\ D_{t_2}^{\alpha_2} x^v\,(t_2, t_2) \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} A_{11} + B_1\,C_{11}\,F_1 + B_1\,C_{21}\,F_2 & A_{12} + B_1\,C_{12}\,F_1 + B_1\,C_{22}\,F_2 \\ A_{12} + B_2\,C_{11}\,F_1 + B_2\,C_{21}\,F_2 & A_{22} + B_2\,C_{12}\,F_1 + B_2\,C_{22}\,F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h\,(t_1, t_2) \\ x^v\,(t_1, t_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.33}$$

Par conséquent, si on utilise le théorème 5 et la définition de la stabilité, il s'ensuit le résultat suivant,

Théorème 7. *Le système* (4.25) *est dite stabilisable si et seulement si il existe deux vecteurs positifs,*

$$\lambda = \left[\lambda_1^T \cdots \lambda_{n_h}^T\right] \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \gamma = \left[\gamma_1^T \cdots \gamma_{n_v}^T\right] \in \mathbb{R}^{n_2}$$

et un contrôle

$$u(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^h(t_1, t_2) \\ y^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

tel que,

$$\begin{bmatrix} \lambda^T & \gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} A_{11} + B_1\,C_{11}\,F_1 + B_1\,C_{21}\,F_2 & A_{12} + B_1\,C_{12}\,F_1 + B_1\,C_{22}\,F_2 \\ A_{12} + B_2\,C_{11}\,F_1 + B_2\,C_{21}\,F_2 & A_{22} + B_2\,C_{12}\,F_1 + B_2\,C_{22}\,F_2 \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.35}$$

4.5 Exemples et simulations

Exemple 4.5.1. *Considérant le système* (4.1) *avec les matrices,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3.57 & 1.14 \\ 1 & -0.4 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Le théorème 3 est utilisé pour tester la stabilité ; on trouve que l'inégalité matricielle donnée par (4.10) *est faisable et le système considéré est stable, la solution proposée est donnée par,*

$$P = \begin{pmatrix} 0.5014 & 1.0675 \\ 1.0675 & 3.0362 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

Exemple 4.5.2. *Considérant le système* (4.1) *où sont données les matrices,*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1.2422 & 0.9842 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Par le théorème 3 on teste la stabilité, on trouve par suite que l'inégalité matricielle donnée par (4.10) *est faisable et le système considéré est stable, la solution proposé est cependant donnée par,*

$$P = \begin{pmatrix} 1.7741 & 1.8400 \\ 1.8400 & 2.1011 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

Exemple 4.5.3. *Kaczorek et Rogowski dans [39] Considèrent la ligne de transmission (longue)* 2*D avec le modèle d'éléments distribués illustrés par la figure 1.*

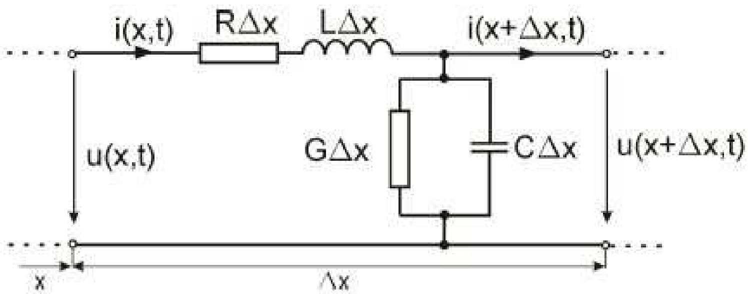

FIGURE 4.1

Pour modéliser ce système, nous considérons qu'il est formé de sections infinies de longueur infiniment petite Δx *en cascade. Les quatre paramètres linéaires sont les suivants :*

1. *Résistance R : Qui est la résistance des conducteurs, en général elle est très faible* (Ω/m).

2. *Inductance linéaire L : Chaque section de ligne est soumise à un champ variable créé par le courant circulant dans les sections voisines. C'est donc le siège des phénomènes d'induction caractérisé par une inductance par unité de longueur* (H/m).

3. *Conductance G : C'est l'opposé de la résistance entre les deux conducteurs constituant la ligne.*

Pour un bon diélectrique, la résistance aux fuites est très élevée et prend souvent G très faible $\frac{-1}{m}$.

1. *Capacité C : C'est la capacité qui existe entre deux conducteurs* $\frac{F}{m}$. *Les équations qui décrivent le courant et la tension dans cette ligne de transmission en fonction du temps t et la variable spatiale x peut être représenté par :*

$$\begin{aligned} -D_x^{\alpha}u(x,t) &= Ri(x,t) + L\tfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \\ -D_x^{\beta}i(x,t) &= Gi(x,t) + C\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

L'équation (4.40) *peut être d'écrit par la représentation d'espace d'états suivante,*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{t_1}^{\alpha}x^h(t_1,t_2) \\ D_{t_2}^{\beta}x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(x,t) \\ x^v(x,t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1,t_2) \end{aligned} \tag{4.41}$$

avec :

$$x^h(x,t) = x^v(x,t) = \begin{bmatrix} u(x,t) \\ i(x,t) \end{bmatrix}$$

Pour les valeurs $C = 0.00007F/m, R = 0.009\Omega/m, G = 0.08\Omega^{-1}/m, L = 0.02H/m$ *et* $\alpha = \beta = 1$. *la stabilité du système n'est pas vérifiée car ses valeurs propres* $\lambda_1 = \lambda_2 = -1.0000$, $\lambda_3 = 0.0268$ *et* $\lambda_4 = -0.0268$ *; on remarque bien que* λ_3 *est positive, donc ce système n'est pas stable.*

Puisque notre système n'est pas stable, on utilise un contrôleur stabilisable de la forme

$$\begin{aligned} u(t_1,t_2) &= \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 44.2614 & -24.6661 & 16.8733 & 0.0189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1,t_2) \\ x^v(t_1,t_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.42}$$

Par utilisation maintenant du nos résultats basé sur les théorèmes 6 et 4, le système (4.41) *est stabilisable de plus, la solution du problème de faisabilité est,*

$$P = \begin{bmatrix} 0.0021 & 0.0184 & 0.0082 & -0.0103 \\ 0.0184 & 8.4215 & 4.3223 & 0.1287 \\ 0.0082 & 4.3223 & 3.1601 & -0.4101 \\ -0.0103 & 0.1287 & -0.4101 & 0.5132 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

Conclusion générale

Ce mémoire de fin d'études a pour fin utile deux objectifs, Le premier est le problème de solvabilité des systèmes uni et bidimensionnels pour les deux cas continu et discret, puis en deuxième partie les tests de stabilité pour les systèmes singuliers bidimensionnels fractionnaires continu sont introduites. Les conditions que nous avons développé sont des extensions des résultats issu de [7, 35, 1, 3, 8, 17].

Le principal objectif dans ce mémoire est de faire une analyse sur la solvabilité des systèmes dynamiques singuliers en utilisant l'inverse généralisé de Moore-Penrose et la décomposition en valeurs singulières pour appliquer les résultats classique pour les systèmes non singuliers.

En perspectives, les résultats peuvent être généralisés aux cas des systèmes unidimensionnels et bidimensionnels fractionnaires ou non, ou les systèmes de Fornasini Marchesini, aussi les systèmes hybride. D'autres études pour le cas multidimensionnels feront l'objet de nos investigations futures.

Bibliographie

[1] D. Bouagada, P. Van Dooren, State Space Solution of Implicit Fractional Continuous Time Systems, *Fractional calculus and applied analysis*, **15(3)** (2012), 356-?361.

[2] M. A. Ghezzar, Analyse et Synthése de Certaines Classes de Systémes Bidimensionnels Fractionnaires et/ou Singuliers Continuous Time Systems, *Thése de doctorat en science, Université de Mostaganem*, **2017**.

[3] O. E. Aissa, D. Bouagada, P. Van Dooren, K. Benyettou, LMI Stability Test for Multidimensional Linear State-Space Models, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **390** (2021), 113363.

[4] Tadeusz Kaczorek, Analysis of positive linear continuous-time systems using the conformable derivative, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2018, Vol. 28, No. 2, 335–340.

[5] Ewa Piotrowska , Krzysztof Rogowski, Analysis of Fractional Electrical Circuit Using Caputo and Conformable Derivative Definitions, Non-Integer Order Calculus and its Applications, (2019), DOI : `10.1007/978-3-319-78458-8_16`.

[6] Djordjevic, V.D. & Jaric, Fabry,J. B. & Fredberg, J.J. and Stamenovi, D. (2003) Fractional derivatives embody essential features of cell rheological behavior, *Ann. Biomed. Eng.,* **31**, 692–699.

[7] Filippo ,N. Lorenzo , F. Roberto ,S. & Alfredo, G. (2017) Positive Systems, Theory and Applications (POSTA 2016) Rome Italy , 1st edition. *Springer International Publishing Switzerland.*

[8] Galkowski, K. (2001) State-Space Realizations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD case, 1*st Edition, Springer-Verlag London.*

[9] Hetal, C (2018) The fractional Laplace transform solution for fractional differential equation of the oscillator in the presence of an external forces, *International Journal of Advanced Science and Technology.,* **5(2)**, 6-?11.

[10] Kaczorek, T. (2011) Selected Problems of Fractional Systems Theory, *1 st edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*

[11] Kaczorek, T. (2002) Positive 1 D and 2D Systems, 1*s Edition, Springer-Verlag London* .

[12] Kaczorek, T (1985), Two-Dimensional Linear Systems, *Berlin, Germany : Springer-Verlag.*

[13] Kurek, J.E. (1985) The general state-space model for a two-dimensional linear digital system, *IEEE Trans. Autom. Control* **30(2)**, 600–602.

[14] Monje, C.A. & Chen,Y. & Vinagre B.M. Xue, D. and V. Feliu-Batlle (2010) Fractional-oder systems and controls., *Fundamentals and applications, Springer, London.*

[15] Nápoles, J. E. & Guzman, P. M. and Lugo, L. M. (to appear) On the stability of solutions of fractional non conformable differential equations, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.

[16] Parra, G.G. Arenas, A.J., & B.M. Chen, C (2014) A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A(H1N1)., *Math. Method. Appl. Sci.*, **37**, 2218–2226.

[17] Rogowski, K. (2017) Solution to the Fractional-Order 2D Continuous Systems Described by the Second Fornasini-Marchesini Model., *IFAC Papers OnLine*, **50(1)**, 9748–9752 .

[18] Rogowski .K (2011) General Response Formula for Fractional 2D Continuous-Time Linear Systems Described by the Roesser Model., *Acta mechanica et automatica*, **5(2)**, 112–116.

[19] D.Bouagada, Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, Thèse de Doctorat d'état, (2007).

[20] D.Bouagada, Paul Van Dooren, State Space Solution of Implicit Fractional Continuous Time Systems, Fractional Calculus and Applied Analysis,Volume 15, Number 3 (2012).

[21] F. R. Gantmacher, The Theory OF Matrices Volume 1, 1959, 1960, 1977 by Chelsea Publishing Company, Printed in the United States of America.

[22] F. R. Gantmacher, The Theory OF Matrices Volume 2, 1959, 1987, 1989 by Chelsea Publishing Company, Printed in the United States of America.

[23] L.Dai, Singular Control Systems (Lecture notes in control and information sciences ; 118) Springer-Verlag Bedin, Heidelberg 1989.

[24] M.Saliha- D.Bouagada, New approach to compute solution of singular continuous-time fractional linear systems, Conference proceeding, http://www.algtop.net/2013_Poster_Marir.

[25] T.Kaczorek, Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2011, Vol. 21, No. 2, 379–384.

[26] Y.Feng, M.Yagoubi, Robust Control of Linear Descriptor Systems, Studies in Systems, Decision and Control 102 Springer Singapore (2017).

[27] T. Kaczorek, K. Rogowski, Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, Studies in Systems, Decision and Control , Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[28] Kaczorek,T. : Vectors and Matrices in Automation and Electronics. WNT, Warsaw (1998). (in Polish)

[29] F. S. Silva, D. M. Moreira and M. A. Moret, Conformable Laplace transform of fractional differential equations, Axioms 7(3) (2018), 55.

[30] S. Jain and P. Agarwal, On new applications of fractional calculus, Bol. Soc. Parana. Mat. (3) 37(3) (2019), 113 ?118.

[31] T. Kaczorek, Asymptotic Stability of Positive 2D Linear Systems Proc. 13th S cientific Conf. on Computer Applications in Electrical Engineering, Poznan, Poland, 2008.

[32] Tarek Salhi. "Inverse Généralisée et Pseudo- Inverse". https://www.researchgate.net/publication/241279979_Inverse_generalisee_et_pseudo-inverse, September (2011).

[33] Ross Mac Ausland. "The Moore-Penrose Inverse and Least Squares". *424. Advanced Topics in Linear Algebra. University of Puget Sound*, April 16, (2014).

[34] Robert E. Hartwing. "singular value decomposition and the moore-penrose inverse of bordered matrices", *SIAM J. APPL. MATH.*, (1976) , Vol 31 (1), DOI :10.1137/0131003.

[35] Alexander Graham. "Kronecker Product and Matrix Calculus with Applications". *Ellis Howood Limited. P019. 1EB.* E(1981).

[36] B.German-Bonne. "Calcul de pseudo Inverse". *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, Série rouge.* Tome 3, nR2 (1969), pp .3–13.

[37] A. Benzaouia, F. Mesquine,M.Benhayoun, Stabilization of continuous-time fractional positive systems with delays, in 5th international conference on systems and control (ICSC), (2016)

[38] A. Hmamed, F. Mesquine, M. Benhayoun, A. Benzaouia, F. Tadeo, Stabilization of 2-D saturated systems by state feedback control. Multidimens. Syst. Signal Process 21, 277 ?292 (2010)

[39] T. Kaczorek, Positivity and stabilization of fractional 2D linear systems described by the Roesser model. IFAC Proc. Vol. 42, 256 ?261 (2009).

[40] M. Ghamgui, D. Mehdi, O. Bachelier, M. Chaabane, On the Robust state 168 feedback stabilization of nD hybrid Roesser models with implicit LFR un- 169 certainty, International Journal of Control, 91(12) (2018), 1-20 .