

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPEREUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عبد الحميد ابن باديس مستغانم

Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

N° d'ordre : M...../GE/2025



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

DE MASTER ACADEMIQUE

**Filière : Génie Electrique**

**Spécialité :** Automatique et informatique industriel

**Intitulé du sujet**

**Conception et optimisation des filtres numériques**

**Présenté par :**

- KELLOUCHE SIDI MOHAMMED EL AMINE
- BENYOUB ABDENOUR ABDALLAH

Soutenu le 29 / 06 / 2025 devant jury composé de :

Président :	Mme. A. ABBAD	Professeur	Université de Mostaganem
Examineur :	Mr. M. ABED	MCA	Université de Mostaganem
Encadreur :	Mr. M. Daoud	MCA	Université de Mostaganem
Co-encadreur :	Mr. B. Yagoubi	Professeur	Université de Mostaganem

Année Universitaire 2024/2025

## *Dédicaces*

À chaque étape importante de notre vie, nous faisons une pause pour regarder en arrière et nous souvenir de toutes ces personnes qui ont partagé avec nous les bons moments, mais surtout les moments difficiles.

Ces personnes qui nous ont aidés sans qu'on ait besoin de le demander, soutenus sans réserve, aimés sans compter. Ces personnes pour qui notre bonheur est un bonheur, et pour qui nos peines deviennent les leurs.

À mes chers parents, ce travail est le fruit de leur soutien constant tout au long de mon parcours. Aucun remerciement ne pourra égaler leur amour, leurs encouragements et leurs sacrifices.

À mes frères et sœurs, pour leur présence et leur tendresse.

À mes amis, pour leurs encouragements, leurs conseils et leur soutien moral.

À ma famille, proche ou lointaine, pour leur affection et leurs prières.

À mon binôme, pour l'esprit d'équipe et le partage tout au long de ce chemin.

À toutes ces âmes, je dédie humblement ce travail, en signe de gratitude et de respect.

## ***Remerciements***

Avant toute chose, nous rendons grâce à Dieu Tout-Puissant, qui nous a donné la santé, la force et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à Madame ABBAD, présidente du jury, pour l'honneur qu'elle nous fait en acceptant d'évaluer ce travail, pour sa disponibilité et pour l'intérêt qu'elle porte à ce projet.

Nous exprimons également notre profonde gratitude à Monsieur DAOUD Mohamed, notre encadrant, pour sa disponibilité, ses conseils précieux et son accompagnement tout au long de ce projet, ainsi qu'à Monsieur YAGOUBI, notre co-encadrant, pour ses orientations et ses encouragements tout au long de cette recherche.

Nous remercions chaleureusement l'ensemble de l'équipe pédagogique du département de Génie Électrique de l'Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, ainsi que toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont apporté leur soutien à la réalisation de ce travail. Nous tenons également à remercier tout particulièrement les membres du laboratoire de recherche Signaux et Systèmes (LSS), sous la direction de Monsieur ABED Mansour, pour leur encadrement et leurs précieux conseils.

Enfin, nous exprimons notre profonde reconnaissance à toutes celles et ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

# *Résumé*

Ce mémoire traite de la conception et de l'optimisation des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF), qui jouent un rôle essentiel dans le traitement numérique du signal. L'objectif principal est d'analyser différentes méthodes de conception, de les implémenter, puis de comparer leurs performances dans un cadre expérimental.

Après une contextualisation du besoin en filtrage numérique, le mémoire présente plusieurs approches classiques et avancées permettant de concevoir des filtres RIF répondant à des spécifications données en fréquence. Les méthodes évaluées incluent notamment des approches basées sur le fenêtrage, l'échantillonnage fréquentiel, la programmation linéaire, l'optimisation par essaim particulaire (PSO), ainsi que la méthode des moindres carrés. Une méthode alternative, dite méthode Yagoubi, est également testée.

L'implémentation et la simulation de ces méthodes permettent une analyse comparative approfondie. L'évaluation se base principalement sur les erreurs maximales dans les bandes passante et atténuée. Les résultats obtenus montrent que la méthode des moindres carrés offre une très bonne précision globale, tandis que la méthode PSO se distingue dans les cas complexes. La méthode de la fenêtre de Yagoubi offre une bonne sélectivité avec une faible ondulation.

En conclusion, ce travail met en évidence les avantages et limites de chaque approche, tout en ouvrant des perspectives d'amélioration, comme l'utilisation d'approches hybrides ou l'exploration de techniques d'optimisation plus récentes pour des applications plus exigeantes

# Abstract

This thesis addresses the design and optimization of Finite Impulse Response (FIR) digital filters, which play a crucial role in digital signal processing. The main objective is to analyze different design methods, implement them, and compare their performance in an experimental framework.

After a contextualization of the need for digital filtering, the thesis presents several classical and advanced approaches for designing FIR filters that meet specific frequency domain requirements. The evaluated methods include windowing techniques, frequency sampling, linear programming, Particle Swarm Optimization (PSO), and the least squares method. An alternative method known as the Yagoubi window is also tested.

Implementation and simulation of these methods allow for a detailed comparative analysis. The evaluation is based mainly on maximum errors in the passband and stopband. The results show that the least squares method provides the best overall accuracy, while the PSO method performs well in complex cases. The Yagoubi window method demonstrates good selectivity with low ripple.

In conclusion, this work highlights the strengths and limitations of each approach, while suggesting potential improvements such as hybrid methods or the exploration of newer optimization techniques for more demanding applications.

## ملخص

تعالج هذه المذكرة موضوع تصميم وتحسين المرشحات الرقمية ذات الاستجابة النبضية المحدودة، والتي تلعب دوراً أساسياً في مجال المعالجة الرقمية للإشارة. يتمثل الهدف الرئيسي من هذا العمل في تحليل طرق التصميم المختلفة، وتنفيذها، ثم مقارنة أدائها ضمن إطار عملي وتطبيقي.

بعد عرض الحاجة إلى الترشيح الرقمي وتحديد سياقه، تقدم المذكرة عدة مقاربات كلاسيكية ومتقدمة تتيح تصميم مرشحات RIF قادرة على تحقيق مواصفات ترددية محددة. تشمل الطرق المدروسة أساليب تعتمد على النوافذ، وأخذ العينات في المجال الترددي، والبرمجة الخطية، وخوارزمية سرب الجسيمات (PSO)، إضافة إلى طريقة التربيقات الصغرى. كما تم اختبار طريقة بديلة تُعرف بطريقة يعقوبي.

يُتيح تنفيذ هذه الطرق ومحاكاتها إجراء تحليل مقارن معمق، حيث يعتمد التقييم بشكل أساسي على قياس القيم القصوى للأخطاء في نطاق التمرير والإخماد. أظهرت النتائج أن طريقة المربعات الصغرى توفر دقة عالية بشكل عام، في حين تُظهر طريقة PSO كفاءة جيدة في الحالات المعقدة، بينما تتميز طريقة نافذة يعقوبي بانتقائية جيدة مع تموج منخفض. في الختام، يبرز هذا العمل مزايا وحدود كل مقاربة، ويفتح آفاقاً للتحسين من خلال اعتماد طرق هجينة أو استكشاف تقنيات تحسين جديدة تلبي متطلبات التطبيقات المتقدمة في هذا المجال.

# Tables des matières

Tables des matières

Remerciements

Résumé

Abstract

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des abréviations

Introduction Générale..... 1

Chapitre 1 : Éléments de base pour le filtrage

1.1 Introduction..... 4

1.2 Propriétés des outils mathématiques..... 4

1.2.1 Linéarité et invariance temporelle d'un système..... 4

1.2.2 Causalité et stabilité..... 5

1.2.3 Convolution..... 5

1.2.4 Transformée de Fourier..... 6

1.2.4.1 Définition..... 6

1.2.4.2 Propriétés..... 7

1.2.4.3 Convolution temporelle..... 7

1.2.4.4 Convolution fréquentielle..... 7

1.2.5 Transformée en  $z$ ..... 7

1.2.5.1 Définition..... 7

1.2.5.2 Fonction de transfert..... 7

1.3 Signal..... 8

1.3.1 Définition..... 8

1.3.2 Bruit.....	8
1.3.3 Classification des signaux.....	8
1.3.3.1 Classification morphologique.....	8
1.3.3.2 Classification énergétique.....	9
1.3.3.3 Classification dimensionnelle.....	9
1.3.3.4 Classification phénoménologique.....	10
1.4 Filtrage analogique.....	10
1.4.1 Caractéristiques des filtres analogiques.....	10
1.5 Filtrage numérique.....	11
1.6 Types de filtres.....	11
1.6.1 Filtre passe-bas.....	12
1.6.2 Filtre passe-haut.....	12
1.6.3 Filtre passe-bande.....	13
1.6.4 Filtre coupe-bande.....	13
1.7 Conclusion.....	14
Chapitre 2 : Description des filtres numériques	
2.1. Introduction.....	16
2.2. Rappel sur les filtres numériques.....	16
2.3. Caractérisation des filtres numériques.....	17
2.4. Filtre numérique a réponse impulsionnelle finie RIF.....	17
2.4.1 Description.....	17
2.4.2 Propriétés.....	18
2.4.3 Filtres FIR à phase linéaire.....	19
2.5 Filtre numérique à réponse impulsionnelle infinie RII.....	20
2.5.1 Présentation des filtres numériques RII.....	20
2.5.2 Transformation bilinéaire.....	21
2.6 La réponse fréquentielle d'un filtre numérique.....	21
2.7 Représentations des filtres : impulsionnelle, fréquentielle, équation de récurrence	21
2.8 Classification des filtres : RIF vs RII.....	22
2.8.1 Classification selon la réponse fréquentielle	22
2.8.2 Classification selon la réponse impulsionnelle.....	23
2.9 Comparaison entre les filtres RIF et RII.....	23

2.10 Conclusion.....	24
Chapitre 3 : Méthodes de conception des filtres numérique RIF	
3.1 Introduction.....	26
3.2 Méthode de la fenêtre.....	26
3.2.1 Principe de la méthode .....	26
3.2.2 Choix de la réponse impulsionnelle idéale.....	27
3.2.3 Fenêtres classiques utilisées.....	27
3.2.3.1 Fenêtre Rectangulaire.....	28
3.2.3.2 Fenêtre de Hamming.....	28
3.2.3.3 Fenêtre de Hanning.....	28
3.2.3.4 Fenêtre de Blackman.....	29
3.2.4 Limites de la méthode.....	29
3.3 Méthodes d'échantillonnage fréquentiel.....	29
3.2.1 Principe de la méthode .....	30
3.2.2 Dérivation de la réponse impulsionnelle à partir de $H(f)$ .....	30
3.2.3 Calcul par transformée de Fourier inverse.....	30
3.2.4 Troncature de la réponse et effets sur la transition.....	31
3.4 Méthodes d'optimisation.....	31
3.4.1 Programmation linéaire (simplexe) .....	31
3.4.1.1 Formulation du problème d'optimisation.....	31
3.4.1.2 Définition des contraintes fréquentielles.....	32
3.4.1.3 Algorithme du simplexe appliqué aux filtres.....	32
3.4.1.4 Avantages et limitations.....	32
3.4.2 essaim particulaire (PSO) .....	32
3.4.2.1 Principe général de de la méthode .....	32
3.4.2.2 Modélisation des coefficients du filtre comme particules.....	33
3.4.2.3 Fonction objectif et évaluation des performances.....	33
3.4.2.4 Avantages par rapport aux méthodes classiques.....	33
3.4.3 Méthode des moindres carrés.....	33
3.4.3.1 Formulation mathématique du critère d'erreur quadratique.....	33
3.4.3.2 Application à la réponse fréquentielle souhaitée.....	34

3.4.3.3 Résolution matricielle et détermination des coefficients.....	34
3.3.3.4Avantages .....	34
3.5 Conclusion.....	34
Chapitre 4 : Implémentation et simulation	
4.1 Introduction.....	36
4.2 formulations de problème .....	36
4.2.1 Méthodologie de programmation.....	36
4.2.2 les erreurs dans les bandes passante et atténuée.....	38
4.3 Conception des filtres RIF par la méthode yagoubi.....	38
4.4 Optimisation des filtres RIF passe bas.....	44
4.4.1 Avec la méthode de programmation linéaire.....	44
4.4.2 Avec la méthode de moindres carré.....	45
4.4.3 Avec la méthode de PSO.....	47
4.4.4 Avec la méthode d'échantillonnage .....	49
4.5 Comparaison entre les méthodes étudiées .....	51
4.6. Conclusion.....	63
Conclusion Générale .....	64
Bibliographie	

## Liste des tableaux

Tableau 2.1 : comparaison entre RIF et RII.....	24
Tableau 3.1 : avantages et limitations de Linprog.....	32
Tableau 4.1 : paramètres de conception du filtre RIF.....	39
Tableau 4.2 : paramètres de conception du filtre RIF.....	41
Tableau 4.3: Paramètres et erreurs de filtre RIF.....	45
Tableau 4.4: Paramètres et erreurs de filtre RIF.....	47
Tableau 4.5: Paramètres et erreurs de filtre RIF.....	49
Tableau 4.6: Paramètres et erreurs de filtre RIF.....	50
Tableau 4.7: Comparaison des erreurs maximales selon les méthodes d'optimisation du filtre RIF.....	52
Tableau 4.8: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF.....	54
Tableau 4.9: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF.....	56
Tableau 4.10: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF.....	58
Tableau 4.11: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF.....	60
Tableau 4.12: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF.....	62

## Liste des figures

Figure 1.1 : Classification morphologique.....	9
Figure 1.2 : Gain en dB d'un filtre passe-bas.....	12
Figure 1.3 : Gain en dB d'un filtre passe-haut.....	13
Figure 1.4 : Gain en dB d'un filtre passe-bande.....	13
Figure 1.5 : Gain en dB d'un filtre coupe-bande.....	14
Figure 1.6 : Représentation de base des filtres numérique.....	14
Figure 2.1 : Schéma fonctionnel d'un filtre numérique appliqué à un signal discret.....	16
Figure 2.2 : Représentation sous forme de fonction de transfert en z.....	18
Figure 2.3 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bas.....	22
Figure 2.4 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-haut.....	22
Figure 2.5 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bande.....	22
Figure 2.6 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bas.....	23
Figure 4.1 – Réponses impulsionnelles $h[n]$ du filtre (Hamming,Hann,Yagoubi).....	39
Figure 4.2 – Réponses fréquentielles du filtre passe-bande (Hamming,Hann et Yagoubi).....	39
Figure 4.3 : Version zoomé des réponses fréquentielles du filtre passe-bande (Hamming, Hann et Yagoubi) .....	39
Figure 4.4 – Signal filtré $y[n]$ du sortie .....	40
Figure 4.5 – Spectre de sortie du signal filtré.....	41
Figure 4.6 – Réponses impulsionnelles $h[n]$ du filtre (Hamming,Hann,Yagoubi).....	41
Figure 4.7 – Réponses fréquentielles du filtre passe-bas (Hamming, Hann et yagoubi).....	42
Figure 4.8 – Version zoomé de les réponses fréquentielles du filtre passe-bas (Hamming, Hann et yagoubi).....	42
Figure 4.9 – Signal filtré $y[n]$ du sortie .....	43
Figure 4.10 – Spectre de sortie du signal filtré.....	43
Figure 4.11 : Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée.....	44

Figure 4.12 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas.....	45
Figure 4.13: Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée.....	46
Figure 4.14 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas.....	46
Figure 4.15 : Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée.....	48
Figure 4.16 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas.....	48
Figure 4.17 : Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée.....	49
Figure 4.18 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas.....	50
Figure 4.19 : Réponse fréquentielle de comparaison.....	51
Figure 4.20 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison.....	51
Figure 4.21 : Réponse fréquentielle de comparaison.....	53
Figure 4.22 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison.....	53
Figure 4.23 : Réponse fréquentielle de comparaison.....	55
Figure 4.24 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison.....	55
Figure 4.25 : Réponse fréquentielle de comparaison.....	57
Figure 4.26 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison.....	57
Figure 4.27 : Réponse fréquentielle de comparaison.....	59
Figure 4.28 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison.....	59
Figure 4.29 : Réponse fréquentielle de comparaison.....	61
Figure 4.30 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison.....	61

## Liste des abréviations

SYMBOLE	SIGNIFICATION
$H(f)$	Réponse fréquentielle
$H_d(f)$	Réponse fréquentielle désirée
$H_{ideal}(f)$	Réponse fréquentielle idéale du filtre
$e(f)$	Erreur entre la réponse fréquentielle et la réponse fréquentielle désirée
$W(f)$	Fonction poids d'erreur
$ H_d(f) $	Caractéristique d'amplitude désiré
$f_p$	La fréquence de coupure
$f_s$	La fréquence d'atténuation
$f_{max}$	Fréquence de Nyquist (en fréquence normalisée)
$f_{ce}$	Fréquence centrale du filtre
$N$	Ordre du filtre
$N_e$	Nombre de points d'échantillonnage
$N_p$	Nombre de points d'échantillonnage dans la bande passante
$N_s$	Nombre de points d'échantillonnage dans la bande atténuée
$N_t$	Nombre de points d'échantillonnage dans la bande atténuée
$\epsilon_p$	Erreur dans la bande passante
$\epsilon_s$	Erreur dans la bande atténuée
$\tau$	Retard de groupe
$\tau_d$	Le retard de groupe désiré
$k_1$	Fonction poids d'erreur dans la bande passante
$k_2$	Fonction poids d'erreur dans la bande atténuée
$p$	Longueur (ou ordre) du filtre FIR
$B$	Largeur de bande du filtre
$Lx$	Longueur du signal d'entrée $x[n]$
<b>Ech</b>	La méthode d'échantillonnage
<b>LSE</b>	Least Squares Error (la méthode Moindres Carrés)
<b>PSO</b>	Particle Swarm Optimization (la méthode Optimisation par essaim particulaire)
<b>Linprog</b>	La méthode Programmation linéaire
<b>cos</b>	Cosinus

<b><i>Sin</i></b>	Sinus
<b><i>RIF</i></b>	Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie
<b><i>RII</i></b>	Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie
<b><i>Bp</i></b>	La bande passante
<b><i>BT</i></b>	La bande de transition
<b><i>BA</i></b>	La bande d'atténuation

# ***Introduction générale***

Introduction générale Le traitement numérique du signal a connu ces dernières décennies un développement considérable. Il est aujourd'hui au cœur de nombreuses applications telles que les télécommunications, l'audio, la biomédecine, l'imagerie, le radar, etc. Dans ce contexte, le filtrage numérique joue un rôle fondamental, notamment pour extraire, supprimer ou modifier certaines composantes fréquentielles d'un signal. Cette opération repose sur des fondements mathématiques rigoureux et nécessite des méthodes de conception de plus en plus élaborées.

La conception de ces filtres exige une précision et une optimisation poussées pour garantir des performances adéquates tout en respectant des contraintes spécifiques, comme la minimisation des ondulations dans la bande passante ou la maximisation de l'atténuation dans la bande d'arrêt.

Traditionnellement, la conception de filtres FIR repose sur des méthodes telles que les techniques de fenêtre, la méthode de Remez présentent certaines limitations en termes de contrôle précis, de flexibilité pour des spécifications complexes, et parfois de stabilité numérique.

Le présent mémoire s'inscrit dans cette perspective et vise à explorer en profondeur les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF), aussi appelés filtres FIR. Nous nous intéressons aussi bien aux aspects théoriques que pratiques, en mettant l'accent sur les différentes méthodes de conception, leurs performances, et leur mise en œuvre.

Ce mémoire est subdivisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux notions de base indispensables pour aborder le filtrage. Il traite des propriétés des systèmes (linéarité, invariance temporelle, causalité, stabilité), des outils mathématiques comme la transformée de Fourier et la transformée en  $Z$ , ainsi que de la nature des signaux (définitions, bruit, classifications). Une présentation comparative entre filtrage analogique et numérique y est également fournie.

Le deuxième chapitre approfondit la description des filtres numériques. Il introduit les filtres RIF et RII (à réponse impulsionnelle finie et infinie), leurs propriétés, représentations et méthodes de réalisation. Une comparaison entre ces deux classes de filtres est également proposée, mettant en lumière leurs avantages respectifs selon les contextes d'utilisation.

Le troisième chapitre présente les différentes méthodes de conception des filtres RIF. Il s'ouvre sur la méthode classique de la fenêtre, qui consiste à tronquer une réponse impulsionnelle idéale à l'aide de fonctions fenêtres telles que celles de Hamming, Hanning ou Blackman. Ensuite, la méthode d'échantillonnage fréquentiel est abordée, permettant de concevoir des filtres à partir de spécifications fréquentielles. Enfin, le chapitre se concentre sur des méthodes d'optimisation avancées telles que la programmation linéaire (simplexe), l'optimisation par essaim particulaire (PSO), et la méthode des moindres carrés, chacune offrant un compromis entre précision, complexité et flexibilité.

Le quatrième chapitre est dédié à l'implémentation et la simulation des filtres conçus selon les différentes approches étudiées. Il propose une méthodologie pratique de mise en œuvre, l'analyse des erreurs des bandes passante et atténuée et l'utilisation de méthodes de conception issues de la littérature, notamment la méthode de Yagoubi. Ce chapitre se conclut par une comparaison des performances entre les méthodes, incluant la méthode de référence

---

# *Chapitre 1.*

## **Eléments de base pour le filtrage**

---

## 1-1-Introduction

Dans un grand nombre de systèmes modernes qu'ils soient analogiques ou numériques, physiques ou informatiques, le signal représente le moyen principal de transmission, de traitement et d'analyse de l'information. Toutefois, ces signaux sont souvent perturbés ou altérés par des phénomènes indésirables, tels que le bruit, les distorsions ou les interférences. C'est dans ce contexte que le filtrage intervient comme une opération fondamentale du traitement du signal, permettant d'extraire les informations pertinentes tout en rejetant les composantes inutiles ou nuisibles.[1]

Le filtrage peut être mis en œuvre de deux manières principales :

- Analogiquement, par des circuits physiques composés de résistances, condensateurs, bobines ou amplificateurs,
- Numériquement, par des algorithmes appliqués à des signaux échantillonnés et numérisés.

La connaissance des outils mathématiques de base tels que la convolution, les transformées de Fourier et de Z, ainsi que la compréhension des propriétés des systèmes linéaires comme la linéarité, l'invariance temporelle, la causalité et la stabilité, est indispensable pour concevoir ou analyser un filtre.[2]

## 1-2-Propriétés des outils mathématiques

### 1.2.1. Linéarité et invariance temporelle d'un système [3] :

Soit un espace de signaux S, nous appellerons "Système linéaire et invariant dans le temps", un opérateur L réalisant une application de S dans S, tel que :

- Linéarité

$$\forall x_1(t), x_2(t) \in S \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$L[\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)] = \alpha \cdot L[x_1(t)] + \beta \cdot L[x_2(t)] \quad (1.1)$$

La relation (1.1) montre qu'un système linéaire traite une somme d'excitations comme si elles étaient traitées séparément puis additionnées.

- Invariance temporelle :

$$\forall x(t), y(t) \in S \text{ et } \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$$\text{on a: } L[x(t - \tau)] = y(t - \tau) \quad (1.2)$$

Cela veut dire qu'une excitation spécifique produira toujours la même réponse indépendamment du temps d'application.

On dira alors d'un système qu'il est invariant dans le temps, si les paramètres internes ne changent pas avec le temps.

### 1.2.2. Causalité et stabilité [4] :

Un système physiquement réalisable doit être causal et stable.

- Causalité :

Un système est dit causal si pour tout signal d'entrée  $x(t)$ , vérifiant  $x(t) = 0$  pour  $t < 0$ , la sortie doit vérifier  $y(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

Pour un tel système, la réponse à un instant donné ne peut précéder l'excitation.

L'opérateur  $L$  est contraint de ne pas dépendre des valeurs futures de celle-ci.

- Stabilité :

À toute entrée bornée, un système stable associe une sortie bornée, soit :

$$\text{Si } |x(t)| < M \quad \forall t \quad \text{alors } |y(t)| < N \quad \forall t \quad (1.3)$$

Dans ce cas, le système est dit stable au sens BIBO (Banded Input - Banded Output).

### 1.2.3. Convolution [5,6] :

La propriété d'invariance vue précédemment (1.2) permet une formulation particulièrement simple de la réponse impulsionnelle d'un système linéaire. On peut donc représenter un système linéaire invariant dans le temps par la relation suivante :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (1.4)$$

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  caractérise entièrement ce système.

$y(t)$  étant la réponse à l'excitation  $x(t)$ .

La notation usuelle représentant un produit de convolution est la suivante :

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (1.5)$$

Par symétrie, on a ainsi :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (1.6)$$

#### 1.2.4. Transformée de Fourier :

L'analyse de Fourier occupe une place privilégiée dans la théorie et le traitement des signaux. La transformée de Fourier est un outil efficace et d'utilisation facile pour la résolution de très nombreux problèmes en traitement des signaux.[3]

##### 1.2.4.1. Définition :

Soit  $f(t)$  une fonction de la variable  $t$ ; ainsi, on démontre que sous certaines conditions [1]

On a:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.7)$$

Avec :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.8)$$

La fonction  $F(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $f(t)$

On peut l'écrire aussi :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)} \quad (1.9)$$

On appelle :

- $A(\omega)$ : Le spectre d'amplitude.
- $A^2(\omega)$ : Le spectre d'énergie.
- $\Phi(\omega)$  : Le spectre de phase.

La transformée de Fourier de  $f(t)$  existe si  $f(t)$  est absolument intégrable ; c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1.10)$$

### 1.2.4.2. Propriété :

La propriété fondamentale de la transformée de Fourier est qu'elle transforme un produit de convolution dans un domaine (temporel ou fréquentiel), en un simple produit dans l'autre domaine (fréquentiel ou temporel)

### 1.2.4.3. Convolution temporelle :

Soient  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  deux signaux à énergie finie, on a :

$$f_1(t) * f_2(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (1.11)$$

### 1.2.4.4. Convolution fréquentielle :

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \quad (1.12)$$

### 1.2.5. La transformée en Z :

La transformée en Z joue dans le domaine numérique le même rôle que celui de la transformée de Laplace dans le domaine analogique [5],[6].

#### 1.2.5.1. Définition :

L'analyse des systèmes discrets peut s'effectuer grâce à la transformée en Z. Soit  $x(k)$  un signal discret défini pour  $0 \leq k < \infty$ , sa transformée en Z est définie par :

$$Z[x(k)] = X(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) Z^{-k} \quad (1.13)$$

Cette transformée est appelée aussi la T.Z unilatérale, avec Z une variable complexe

#### 1.2.5.2. Fonction de transfert :

On sait que le signal de sortie d'un système linéaire invariant est donné par le produit de convolution :

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot h(k - n) \quad (1.14)$$

Où  $x(k)$  est le signal d'entrée et  $h(k)$  est la réponse impulsionnelle du système.

La T.Z de cette expression est :

$$Y(Z) = H(Z) \cdot X(Z) \quad (1.15)$$

La fonction  $H(Z)$  est appelée "fonction de transfert".

Si le système est de plus causal, on a :

$$H(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \cdot Z^{-k} \quad (1.16)$$

### 1.3. Signal

#### 1.3.1. Définition :

Un signal est un support de l'information transmise de sa source à sa destination. En fonction de la nature du support, on parle par exemple de :

- signal électrique (téléphonie),
- onde électromagnétique (télécommunication),
- onde acoustique (sonar),
- onde lumineuse (fibre optique),
- signal binaire (ordinateur).

On parle également de signal de mesure, de commande, de signaux vidéo, audio.[8]

#### 1.3.2. Bruit :

Toute perturbation superposée à un signal et gênant la perception de ce signal.[9]

#### 1.3.3. Classification des Signaux

##### 1.3.3.1. Classification morphologique :

On distingue les signaux à variable continue, des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.[10]

- a) Les signaux analogiques : amplitude et temps continus
- b) Les signaux quantifiés : amplitude discrète, temps continu
- c) Les signaux échantillonnés : amplitude continue, temps discret

- d) Les signaux numériques : amplitude et temps discrets

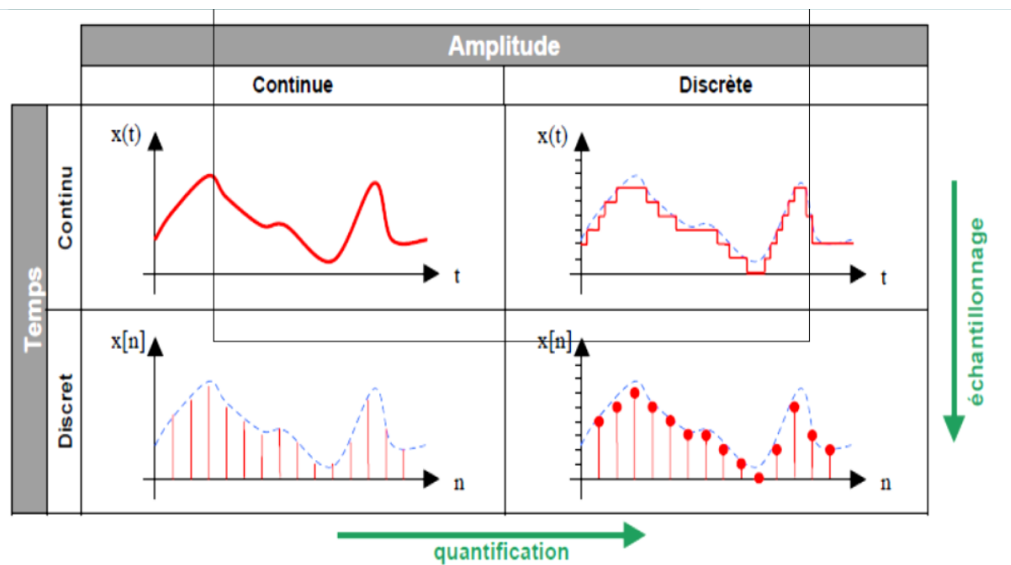


Figure 1.1 : Classification morphologique. [10]

### 1.3.3.2. Classification énergétique :

On distingue :

a) Les signaux à énergie finie : ils possèdent une puissance moyenne nulle et une énergie finie.

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty \quad (1.17)$$

b) Les signaux à puissance moyenne finie : ils possèdent une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisables.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \right| < +\infty \quad (1.18)$$

### 1.3.3.3. Classification dimensionnelle :

- Signal monodimensionnel (1D)
- Signal bidimensionnel (2D)
- Signal tridimensionnel (3D)

### 1.3.3.4. Classification phénoménologique :

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

a) Les signaux déterministes :

Leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, etc.

b) Les signaux aléatoires :

Leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

## 1.4. Filtrage analogique

Dans le contexte des signaux analogiques, un filtre a pour objectif de transmettre fidèlement les composantes pertinentes d'un signal (comme les courants ou tensions) tout en atténuant ou supprimant les composantes non désirées, c'est-à-dire celles situées hors de la bande passante.

Malgré l'évolution des technologies numériques, le filtrage analogique reste incontournable. Il sert souvent de référence dans la conception de filtres numériques et joue un rôle de base dans certaines applications pratiques.

### 1.4.1. Caractérisation des filtres analogiques

Un filtre analogique est défini principalement par sa fonction de transfert, qui exprime la relation entre la sortie  $Y(j\omega)$  et l'entrée  $X(j\omega)$  en fonction de la fréquence :

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (1.19)$$

Cette fonction peut également s'exprimer en termes de module (amplitude) et de phase :

$$H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)} \quad (1.20)$$

où :

- $A(\omega)$  Représente le gain (ou atténuation) selon la fréquence,
- $\Phi(\omega)$  Désigne le déphasage introduit par le filtre.

### 1.5. Filtrage numérique

Le filtrage numérique est une technique fréquemment utilisée pour transformer un signal. Son principe est de modifier la distribution fréquentielle des différentes composantes du signal en appliquant un traitement via un système numérique.

Comparé au filtrage analogique, que le filtrage numérique remplace dans de nombreux domaines, ce dernier présente plusieurs avantages significatifs, que l'on peut résumer ainsi :

- Flexibilité de conception :  
La réponse en fréquence peut être ajustée en modifiant simplement les coefficients du filtre, permettant une adaptation facile aux besoins spécifiques.
- Stabilité temporelle :  
Les filtres numériques ne subissent pas de vieillissement comme les composants physiques, et leur performance ne dépend pas des variations de température.
- Miniaturisation :  
Les filtres numériques peuvent être miniaturisés même pour des fréquences très basses, contrairement aux filtres analogiques qui nécessitent souvent des composants encombrants.

### 1.6. Types des filtres

On définit ici 4 types de filtres les plus classiques

- Les filtres passe-bas qui laissent intact les basses fréquences d'un signal et en atténuent les hautes fréquences.
- Les filtres passe-haut qui laissent intact les hautes fréquences d'un signal et en atténuent les basses fréquences.
- Les filtres passe-bande qui sélectionnent une partie du spectre d'un signal autour d'une fréquence spécifiée, avec une largeur plus ou moins grande.
- Les filtres coupe-bande, qui atténuent fortement une partie du spectre d'un signal autour d'une fréquence spécifiée, avec une largeur plus ou moins grande.

### 1.6.1. Filtre passe-bas

Ce sont des filtres de première classe qui transmettent des signaux électriques à des fréquences de zéro Hz à une fréquence spécifique connue appelée fréquence de coupure (FC). D'autre part, ils atténuent les signaux électriques à des fréquences beaucoup plus élevées [3]

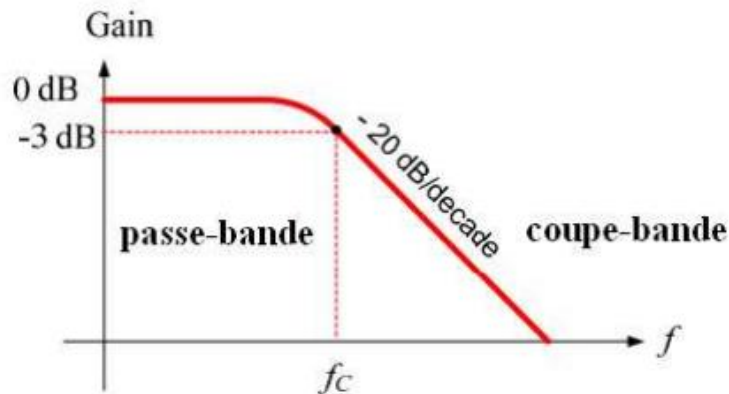


Figure 1.2 : Gain en dB d'un filtre passe-bas [3]

### 1.6.2. Filtre passe-haut

Ce sont des filtres de première classe qui effectuent le processus inverse d'un filtre passe-bas, qui consiste à faire passer des signaux électriques à des fréquences allant de la fréquence de coupure à une fréquence spécifique, tout en bloquant les signaux en dessous de la fréquence de coupure. Fréquence désactivée à zéro Hz [3]

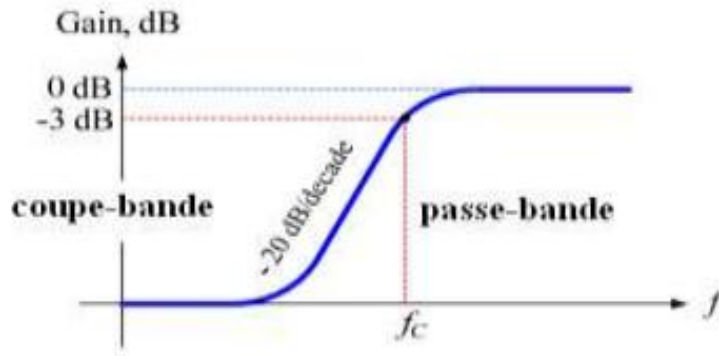


Figure 1.3 : Gain en dB d'un filtre passe-haut [3]

### 1.6.3. Filtre passe-bande

Sont des filtres de second ordre, ils laissent passer les signaux électriques dans une certaine bande de fréquences [ $F_{C1}$ ,  $F_{C2}$ ], tout en atténuant les deux signaux aux fréquences supérieures et inférieures à cette bande, c'est-à-dire ce genre de filtre contient des champs de suppression supérieurs et inférieurs [3].

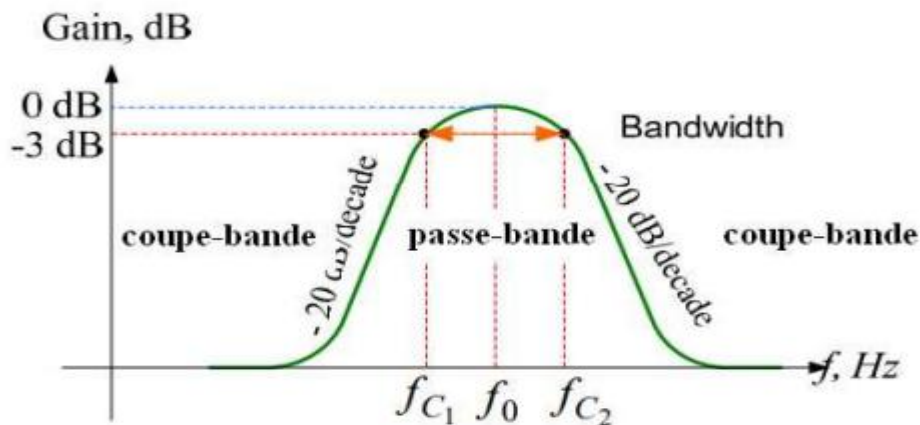


Figure 1.4 : Gain en dB d'un filtre passe-bande [3]

### 1.6.4. Filtre coupe-bande

Ce sont des filtres de second ordre qui effectuent le processus inverse du filtre passe-bande, permettant aux fréquences supérieures et inférieures de passer en dehors de la plage prédéterminée [ $F_{C1}$ ,  $F_{C2}$ ], tout en les empêchant de passer dans cette plage [3].

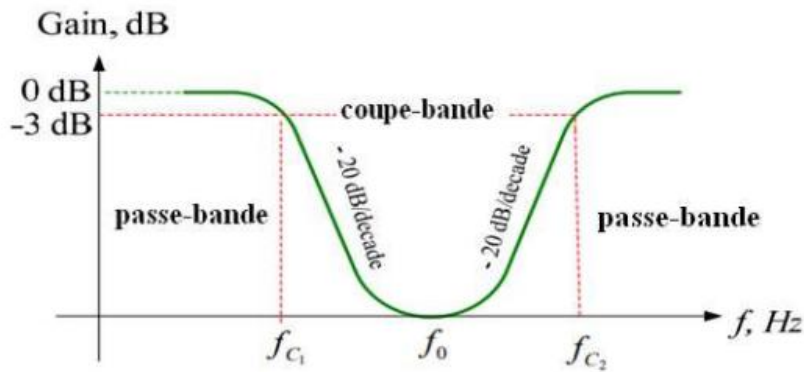


Figure 1.5 : Gain en dB d'un filtre coupe-bande [3]

La figure 1.6 ci-dessous donne une idée générale du fonctionnement de chacun de ces quatre filtres :

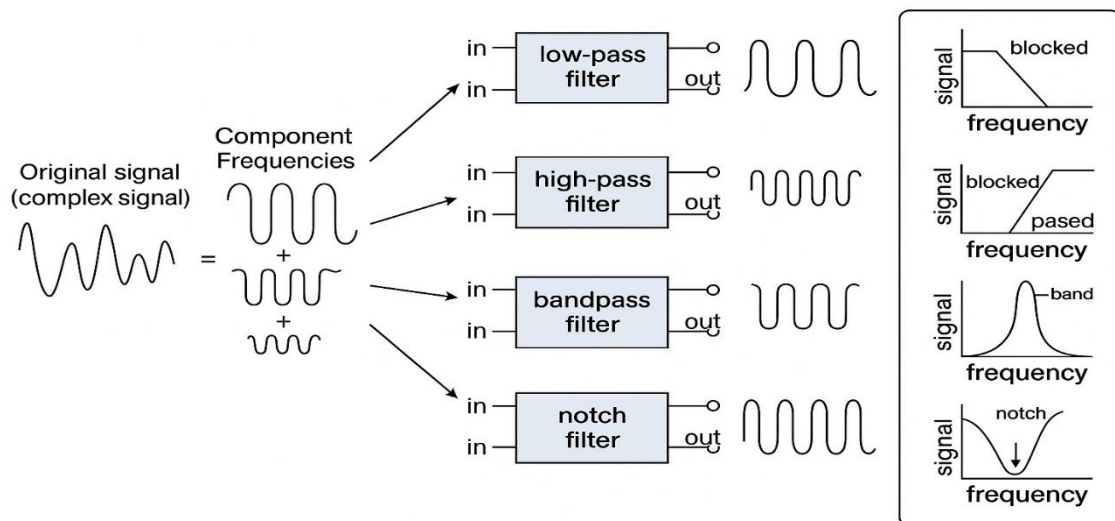


Figure 1.6 : Représentation de base des filtres numérique [3]

## 1.7. Conclusion

Ce chapitre a présenté les notions fondamentales liées au filtrage des signaux. Il a introduit les propriétés des systèmes linéaires, les outils mathématiques comme les transformées de Fourier et en  $z$ , ainsi que les différentes classifications de signaux. Une distinction claire a été faite entre le filtrage analogique et numérique, et les principaux types de filtres ont été définis. Ces éléments serviront de référence pour mieux comprendre les méthodes de conception étudiées par la suite.

---

# *Chapitre 2.*

## **Description des filtres numériques**

---

## 2-1-Introduction

Les filtres numériques sont des outils fondamentaux en traitement du signal, permettant de modifier les caractéristiques fréquentielles des signaux discrets. Ce chapitre vise à présenter les différents types de filtres numériques, leurs propriétés essentielles et leurs représentations.

Il distingue principalement deux grandes familles :

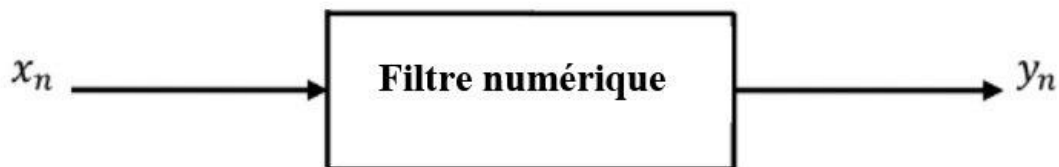
- Les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF), simples, stables et capables d'assurer une phase linéaire,
- Et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII), plus compacts mais parfois instables.

Les concepts de réponse fréquentielle, de représentation temporelle et fréquentielle, ainsi que les équations de récurrence sont abordés pour mieux comprendre le comportement des filtres. Une classification et une comparaison entre RIF et RII permettent enfin de guider le choix selon les besoins d'une application donnée.

## 2-2-Rappel sur les filtres numériques

Un filtre numérique réalise un calcul sur une séquence de nombres introduite à son entrée et fournit, à sa sortie, une séquence numérique modifiée de sorte à répondre à des contraintes données (réponse en amplitudes, en phase ...).

L'outil d'étude des filtres numériques est la transformée en z. Elle permet de modéliser les filtres numériques sous la forme de fonctions de transfert polynômiale, facilitant leur étude. [16,17]



**Figure 2.1 : Schéma fonctionnel d'un filtre numérique appliqué à un signal discret [17]**

Le filtrage numérique se pratique sur un système numérique tel qu'un ordinateur (utilisation de logiciels, programmation C/C++.), un Processeur de Traitement de Signal (DSP) ou autre composant numérique (microcontrôleur, FPGA, etc).[17]

### 2-3- Caractérisation des filtres numériques [16]

Les filtres numériques sont caractérisés par :

- Equation aux différences : relation entrée-sortie dans le domaine temporel.
- Fonction de transfert en  $Z$  :  $H(z)$
- Réponse impulsionnelle notée  $h(n)$  : la réponse à une entrée impulsion.

Les filtres numériques peuvent être entièrement décrits par plusieurs représentations fondamentales.

Ils sont tout d'abord modélisés dans le domaine temporel par une équation aux différences, qui établit une relation directe entre les échantillons d'entrée et de sortie du système.

Dans le domaine fréquentiel, ils sont caractérisés par leur fonction de transfert  $H(z)$  obtenue par transformation en  $Z$  de l'équation aux différences.

Enfin, la réponse impulsionnelle  $h(n)$  représente la sortie du système lorsqu'il est excité par une impulsion unitaire.

Ces trois représentations – temporelle, fréquentielle et impulsionnelle sont équivalentes et permettent d'analyser ou de concevoir les filtres numériques selon le contexte.[18]

### 2-4-Filtre numérique à réponse impulsionnelle finie RIF

Les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (FIR), aussi appelés filtres non récurrents, sont appréciés pour leur stabilité et leur capacité à offrir une phase linéaire. Cette dernière garantit un retard constant pour toutes les fréquences, évitant ainsi toute distorsion de phase. Utilisant un nombre fini d'échantillons, les filtres FIR sont simples à implémenter et permettent de respecter des spécifications précises, notamment pour la réalisation de filtres à phase linéaire causale. Leur stabilité intrinsèque les rend également bien adaptés aux implémentations matérielles.[19]

#### 2-4-1 Description

L'équation aux différences concerne les systèmes numériques tandis que les équations différentielles permettent de caractériser les systèmes analogiques. De façon générale le filtre à réponse impulsionnelle finie est décrit par la combinaison linéaire suivante :

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n - 1] + \dots + b_N \cdot x[n - N] \quad (2.1)$$

En utilisant le symbole de sommation, l'équation peut être réécrite de la façon suivante :

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x[n - k] \quad (2.2)$$

$N + 1 =$  Nombre de coefficients (Ordre du filtre).

$b_k =$  Coefficients de la fonction de transfert du filtre.

L'équation (2.2) montre que les filtres RIF ne présentent pas le mode récursif dans leur implémentation.

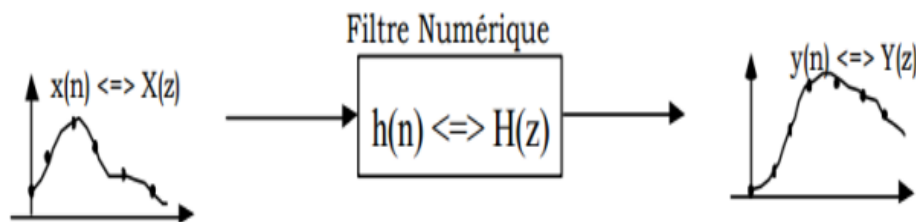
De la transformée en  $Z$  de l'équation (II. 8), on déduit facilement la fonction de transfert du système, c'est-à-dire la relation entre la transformée  $z$  de la sortie  $y(n)$  et celle de l'entrée  $x(n)$

$$H(z) = \sum_{n=0}^N b_n Z^{-n} = b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_N Z^{-N} \quad (2.3)$$

Pour mettre  $Z = \exp\left(j2\pi \frac{F}{F_c}\right)$  on peut caractériser la fréquence du comportement de système de la manière suivante :

$$H(f) = \sum_{n=0}^N b_n \exp\left(-j2\pi n \frac{F}{F_c}\right) \quad (2.4)$$

A une séquence d'échantillons d'un signal d'entrée à temps discret  $x(n)$ , un filtre numérique, défini par sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  ou par sa fonction de transfert en  $z$   $H(z)$ , répond par une séquence d'échantillons d'un signal de sortie  $y(n)$  [20].



**Figure 2.2 : Représentation sous forme de fonction de transfert en  $z$ . [20]**

### 2-4-2 Propriétés

Les remarques générales suivantes peuvent être portées sur les filtres RIF :

Les filtres RIF sont forcément stables, peu importe les coefficients utilisés ;

La complexité d'un filtre RIF est moindre que celle d'un filtre RII du même ordre. Cette propriété peut être utile sur les plateformes limitées en puissance de calcul ;

Généralement, les filtres RIF sont moins sensibles aux erreurs de quantification que les filtres RII. L'absence de récursivité empêche les erreurs cumulatives.

Un filtre RIF est moins sélectif qu'un filtre RII du même ordre. C'est-à-dire que la transition entre la bande passante et la bande rejetée est moins rapide que dans le cas du filtre RII.

Contrairement à un RII, un filtre RIF peut avoir une réponse impulsionnelle symétrique et introduire un retard sur le signal mais aucun déphasage.[21]

### 2-4-3Filtres FIR à phase linéaire

Les filtres RIF aident à réaliser des systèmes à phase linéaire. Cette propriété est souvent très utile dans certaines applications, notamment celles des télécommunications. La fonction de transfert  $H(f)$  est une grandeur complexe qui peut être écrite en utilisant le module et la phase associée :

$$H(f) = |H(f)|e^{(j\theta(f))} \quad (2.5)$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, si la réponse impulsionnelle  $H(n)$  est réelle, le module de la fonction de transfert  $|H(f)|$  est alors une fonction paire de la fréquence  $f$ .

La contrainte de phase linéaire nous conduit à:

$$\theta(f) = \beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c} \quad \text{avec} \quad -\frac{f}{f_c} < f < \frac{f}{f_c} \quad (2.6)$$

Ce retard de groupe est représentatif du temps nécessaire à une composante fréquentielle du signal pour traverser le système. On voit que lorsque  $\theta(f)$  est linéaire, La linéarité de la phase du filtre nécessite alors un simple retard. Cette propriété est remarquable, notamment dans les signaux modulés par les porteuses.

Si nous remplaçons  $\theta(f)$  dans l'équation (2.4) par son expression dans (2.5), nous obtenons alors :

$$H(f) = \sum_{n=0}^N h_n \exp \left( -j2\pi n \frac{F}{F_c} \right) = |H(f)| \exp \left( j \left( \beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c} \right) \right) \quad (2.7)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans l'équation (2.13) et (2.14), nous obtenons les relations suivantes :

La partie réelle est :

$$\sum_{n=0}^N H(n) \cos \left( 2\pi n \frac{F}{F_c} \right) = |H(f)| \cos \left( \left( \beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c} \right) \right) \quad (2.8)$$

La partie imaginaire est :

$$-\sum_{n=0}^N H(n) \sin\left(2\pi n \frac{F}{F_c}\right) = |H(f)| \sin\left(\left(\beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c}\right)\right) \quad (2.9)$$

En combinant les équations (13) et (14), la condition de phase linéaire est exprimée comme :

$$\tan\left(\beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c}\right) = \frac{\sin\left(\left(\beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c}\right)\right)}{\cos\left(\left(\beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c}\right)\right)} = \frac{-\sum_{n=0}^N H(n) \sin\left(2\pi n \frac{F}{F_c}\right)}{\sum_{n=0}^N H(n) \cos\left(2\pi n \frac{F}{F_c}\right)} \quad (2.10)$$

Ce qui nous amène à écrire, en obtenant le produit croisé de l'équation (2.10), la condition suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^N H(n) \cos\left(2\pi n \frac{F}{F_c}\right) \sin\left(\left(\beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c}\right)\right) + \\ &\sum_{n=0}^N H(n) \sin\left(2\pi n \frac{F}{F_c}\right) \cos\left(\left(\beta + 2\pi\theta \frac{f}{f_c}\right)\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Qui peut être réécrit comme suit :

$$\sum_{n=0}^N H(n) \sin\left(2\pi\left(n - \theta \frac{F}{F_c}\right) + \beta\right) = 0 \quad (2.12)$$

## 2-5-Filtre numérique a réponse impulsionnelle infinie RII

### 2-5-1 Présentation des filtres numériques RII :

Soit la sortie  $y(k)$  d'un filtre numérique [22], causal, linéaire et invariant dans le temps :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(k-m)u(m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)u(k-m) \quad (2.13)$$

$h(m)$  la réponse impulsionnelle du filtre numérique

Ce filtre est un filtre RIF si  $h(m)$  égale à zéro à l'extérieur de l'intervalle  $m_2 < m < m_1$  ; si ce n'est pas le cas, donc ce filtre est un filtre RII et sa fonction de transfert d'écrit

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2.14)$$

Pour système causal,  $k > m$

Dans le domaine temporel, on peut présenter la sortie de ce filtre par une équation de récurrence

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N b_k y(k-m) + \sum_{k=0}^M a_k u(k-m) \quad (2.15)$$

### 2-5-2 Transformation bilinéaire

La transformation bilinéaire est une méthode qui permet de passer du domaine continu au domaine discret [22], cette transformation est définie par

$$S = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad (2.16)$$

Elle établit une bijection entre la partie du plan complexe "s" telle que  $\text{Re}(s)$  et la partie du plan complexe telle que  $|z|$

### 2-6-La réponse fréquentielle d'un filtre numérique

la réponse fréquentielle d'un filtre numérique décrit comment le filtre modifie les différentes composantes fréquentielles d'un signal en entrée. Elle est obtenue en évaluant la fonction de transfert  $H(z)$  sur le cercle unité, c'est-à-dire pour  $z=e^{j\omega}$  On obtient ainsi :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad (2.17)$$

Où  $h[n]$  est la réponse impulsionnelle du filtre.[23]

Cette fonction permet de visualiser deux aspects essentiels :

- **Le module**  $|H(e^{j\omega})|$  indique l'amplification ou l'atténuation des fréquences.
- **La phase**  $\arg(H(e^{j\omega}))$  montre le décalage temporel introduit par le filtre.

La réponse fréquentielle est un outil central pour caractériser le comportement spectral du filtre et évaluer ses performances.

### 2.7 Représentations des filtres : impulsionnelle, fréquentielle, équation de récurrence [24]

Un filtre numérique peut être représenté sous plusieurs formes complémentaires :

- Réponse impulsionnelle  $h[n]$  : elle correspond à la sortie du filtre lorsque l'entrée est une impulsion unitaire  $\delta[n]$  Elle permet une représentation dans le domaine temporel.
- Réponse fréquentielle  $H(e^{j\omega})$  : obtenue via la transformée de Fourier de  $h[n]$  elle offre une vision du comportement spectral du filtre.
- Équation de récurrence : elle exprime la sortie  $y[n]$  en fonction des entrées passées  $x[n-k]$  et des sorties passées  $y[n-k]$  Elle prend généralement la forme :

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (2.18)$$

Cette équation est particulièrement utile pour l'implémentation pratique dans les systèmes numériques.

Ces trois représentations sont interconnectées et permettent d'analyser, concevoir et simuler efficacement les filtres numériques.

## 2-8-Classification des filtres : RIF vs RII

### 2-8-1 Classification selon la réponse fréquentielle

Selon la réponse fréquentielle des filtres, on distingue les types des filtres suivants :

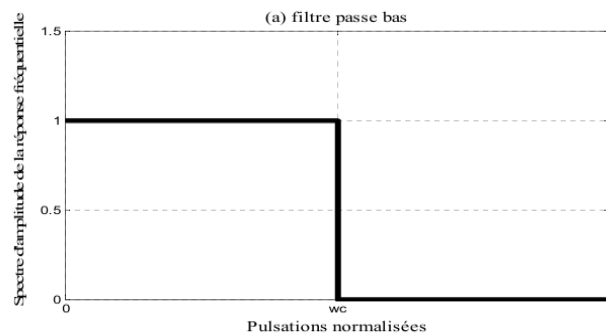


Figure 2.3 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bas

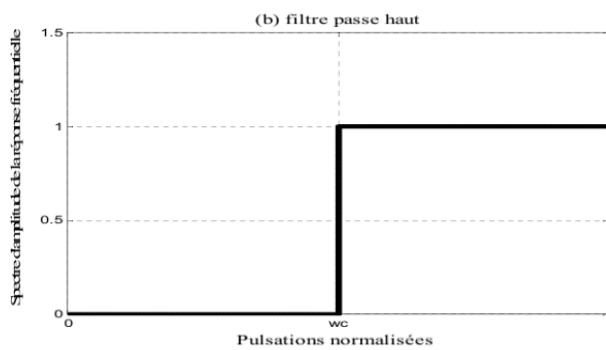


Figure 2.4 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-haut

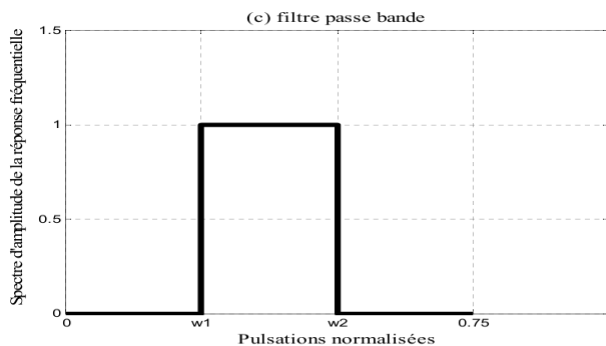
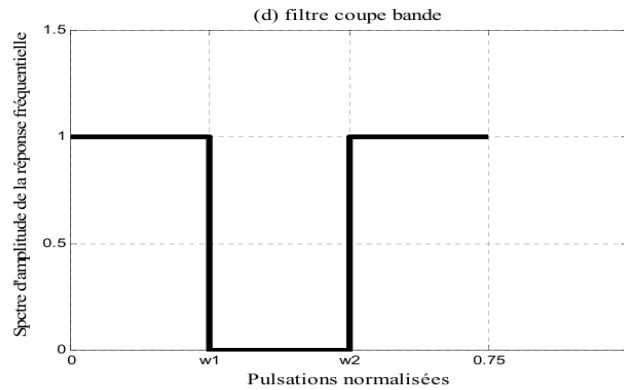


Figure 2.5 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bande



**Figure 2.6 : Réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bas**

### 2-8-2-Classification selon la réponse impulsionnelle

Selon que la durée de la réponse impulsionnelle soit finie ou bien infinie, le filtre est dit à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou bien à réponse impulsionnelle infinie (RII).

### 2-9-Comparaison entre les filtres RIF et RII [25]

Les filtres R.I.I donnent une réponse fréquentielle satisfaisante pour un nombre de coefficients relativement réduit, ce qui n'est pas le cas pour les filtres R.I.F qui eux, au contraire, nécessitent un nombre assez élevé de coefficients pour arriver à une telle réponse.

Les filtres R.I.I peuvent être calculés par des méthodes classiques, semblables à celles utilisées pour les filtres analogiques.

Néanmoins, les filtres R.I.F présentent des avantages tout aussi méritants ou même plus, vue leur formulation mathématique simple et la facilité avec laquelle ils peuvent être implémentés. Ils sont toujours stables et peuvent être synthétisés facilement avec une phase exactement linéaire.

Les filtres R.I.F sont beaucoup moins sensibles aux erreurs de calcul, qui ne sont pas cumulatives comme dans le cas des filtres R.I.I, vu leur structure non récursive.

<b>Critère</b>	<b>Filtre RIF</b>	<b>Filtre RII</b>
<b>Stabilité</b>	Toujours stable	Peut être instable si les pôles sont hors du cercle unité
<b>Phase</b>	Peut avoir une phase linéaire (Types I et II)	Phase généralement non linéaire
<b>Complexité de calcul</b>	Nécessite un grand nombre de coefficients pour une bonne précision	Réponse efficace avec peu de coefficients
<b>Propagation d'erreurs</b>	Erreurs limitées à N échantillons (structure non réursive)	Erreurs peuvent se propager longtemps (structure réursive)
<b>Sensibilité aux erreurs</b>	Moins sensible aux erreurs de calcul	Plus sensible aux erreurs numériques cumulatives
<b>Référence analogique</b>	Moins directement lié aux filtres analogiques	Inspiré des filtres analogiques classiques (Butterworth, Chebyshev...)
<b>Implémentation</b>	Facile à implémenter : convolution directe	Implémentation plus complexe : rétroactions (feedback)

**Tableau 2.1 : comparaison entre RIF et RII**

## 2-10-conclusion

Au terme de ce chapitre, il a été possible de définir les deux grandes catégories de filtres numériques que sont les RIF et les RII. Chacune a ses propres atouts ou défauts en matière d'instabilité, de complexité ou de phase

Les RIF sont souvent choisis en raison de leur phase linéaire garantie, et surtout de leur stabilité. Ils sont particulièrement prisés dans les applications requérant un contrôle précis de la réponse fréquentielle. Les RII permettent d'atteindre des performances supérieures pour un ordre faible, mais généralement au prix d'une phase non linéarisée et d'une instabilité potentielle.

Pour mieux comprendre le fonctionnement d'un filtre (représentations impulsionnelle, fréquentielle, équation de récurrence) et sa conception (transformation bilinéaire), les diverses possibilités d'élaboration d'un filtre ont été explorées.

La conclusion de la confrontation des RIF et RII révèle qu'aucun filtre n'est universellement meilleur que l'autre, mais qu'il convient de choisir en fonction de l'application.

---

# *Chapitre 3.*

## **Méthodes de conception des filtres numérique RIF**

---

### 3.1 Introduction

La conception de filtres numériques RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) joue un rôle fondamental dans le traitement du signal. Ce chapitre présente trois grandes familles de méthodes permettant de concevoir de tels filtres selon des critères de performance bien définis.

- La méthode de la fenêtre consiste à tronquer une réponse impulsionnelle idéale à l'aide de fenêtres classiques (rectangulaire, Hamming, Hanning, Blackman). Elle est simple à mettre en œuvre, mais offre un contrôle limité sur la transition fréquentielle.
- La méthode d'échantillonnage fréquentiel repose sur la spécification de la réponse en fréquence et sur le calcul de la réponse impulsionnelle via une transformée de Fourier inverse. Elle permet une meilleure précision dans la bande passante et atténuée.
- Les méthodes d'optimisation (programmation linéaire, moindres carrés, essaim particulière PSO) visent à minimiser l'erreur entre la réponse réelle et la réponse idéale, tout en respectant les contraintes imposées sur les bandes fréquentielles. Ces méthodes sont puissantes et flexibles, particulièrement adaptées à des spécifications strictes.

Ce chapitre compare les performances, les avantages et les limites de ces différentes approches, en vue d'identifier la méthode la plus appropriée selon les besoins de l'application.

### 3.2 Méthodes de la fenêtre

La méthode de la fenêtre est une technique fondamentale dans la conception des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF). Elle permet de rendre réalisable un filtre théorique, souvent défini par une réponse impulsionnelle infinie, en la limitant dans le temps à l'aide d'une fonction appelée *fenêtre*. Cette approche constitue l'une des premières méthodes proposées pour synthétiser des filtres numériques simples, et reste largement utilisée en raison de sa simplicité et de sa robustesse dans de nombreux contextes d'ingénierie [17].

#### 3.2.1 Principe de la méthode de la fenêtre

En théorie, un filtre numérique idéal (par exemple un filtre passe-bas parfait) possède une réponse impulsionnelle de durée infinie. Cependant, une telle réponse n'est pas réalisable en pratique, car elle nécessiterait un calcul infini et une connaissance du signal sur un horizon illimité. Pour surmonter cette difficulté, la méthode de la fenêtre consiste à multiplier la réponse

impulsionnelle idéale par une fonction de fenêtre de longueur finie, ce qui la tronque et la rend utilisable dans un système numérique.

Soit  $h_d(n)$  la réponse impulsionnelle idéale, et  $w(n)$  une fenêtre discrète de longueur finie  $N$ , la réponse impulsionnelle finale  $h(n)$  du filtre devient :

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \quad (3.1)$$

Cette opération dans le domaine temporel correspond à une convolution dans le domaine fréquentiel entre la réponse idéale du filtre et la transformée de Fourier de la fenêtre. Ainsi, bien que la troncature introduise une perte de précision – notamment des effets de *fuite spectrale* et de *lobes secondaires* – elle permet de concevoir un filtre réalisable, avec une bonne maîtrise du compromis entre transition fréquentielle et atténuation [27, 28].

### 3.2.2 Choix de la réponse impulsionnelle idéale

Le choix de la réponse impulsionnelle idéale  $h_d(n)$  dépend directement du type de filtre que l'on souhaite concevoir : passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande. Ces filtres sont généralement définis en fréquence par une fonction  $H_d(f)$  ayant une forme rectangulaire, correspondant à une coupure franche à une certaine fréquence  $f_c$ .

Par exemple, la réponse impulsionnelle idéale d'un filtre passe-bas est donnée par :

$$H_d(n) = \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \quad (3.2)$$

Il s'agit d'une fonction *sinc* centrée en  $n = \frac{N-1}{2}$ . Cette fonction est infinie et non causale, ce qui en fait une réponse non réalisable sans intervention. La multiplication par une fenêtre rend cette réponse finie, tout en contrôlant la qualité de la transition entre les bandes passante et atténuée. En pratique, le positionnement du centre de la fenêtre est crucial pour assurer la symétrie de la réponse impulsionnelle, condition nécessaire à une réponse fréquentielle réelle (sans phase complexe) dans le cas des filtres à phase linéaire [29][30].

### 3.2.3 Fenêtres classiques utilisées

Le rôle de la fenêtre dans la méthode de troncature est déterminant pour la qualité du filtre obtenu. Différentes fenêtres temporelles ont été proposées pour équilibrer deux effets principaux : la largeur du lobe principal (qui détermine la netteté de la transition bande

passante/bande atténuée) et l'atténuation des lobes secondaires (qui contrôle les oscillations en dehors de la bande utile).

Chaque fenêtre possède donc des caractéristiques spécifiques en termes de fuite spectrale, de bande de transition et de distorsion. Les plus couramment utilisées sont : Rectangulaire, Hamming, Hann et Blackman [31][17].

### 3.2.3.1 Fenêtre Rectangulaire

La fenêtre rectangulaire est la plus simple : elle conserve l'intégralité de la réponse impulsionnelle sur  $N$  points, avec une valeur constante de 1 dans l'intervalle.

$$w(n) = 1, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (3.3)$$

Elle assure la meilleure résolution fréquentielle (lobe principal très étroit), mais provoque de fortes oscillations de Gibbs, en raison d'une atténuation très faible des lobes secondaires ( $\sim 13$  dB). Ce phénomène rend cette fenêtre peu adaptée aux applications sensibles aux interférences hors bande [28].

### 3.2.3.2 Fenêtre de Hamming

Proposée comme amélioration de la fenêtre de Hann, la fenêtre de Hamming permet une meilleure suppression des lobes secondaires, au détriment d'un élargissement modéré du lobe principal. Elle est définie par :

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (3.4)$$

Elle offre une atténuation typique des lobes secondaires de l'ordre de 43 dB, ce qui en fait un bon compromis entre résolution et filtrage hors bande. Elle est souvent utilisée dans le traitement du signal audio et les applications temps réel [27].

### 3.2.3.3 Fenêtre de Hann

La fenêtre de Hann (ou Hanning) est définie comme :

$$w(n) = 0.5 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right) \quad (3.5)$$

Elle génère un lobe principal un peu plus large que celui de Hamming, mais avec une atténuation légèrement inférieure ( $\sim 31$  dB). Sa décroissance douce permet de réduire

efficacement les discontinuités spectrales, ce qui la rend utile en analyse spectrale et en filtrage large bande [17]

### 3.2.3.4 Fenêtre de Blackman

La fenêtre de Blackman est conçue pour offrir une très forte atténuation des lobes secondaires, au prix d'un lobe principal relativement large. Elle est définie par :

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad (3.6)$$

Elle permet une atténuation hors bande d'environ **-58 dB**, ce qui la rend particulièrement adaptée aux environnements bruités ou aux applications de mesure de haute précision. Elle est également utilisée dans le domaine de la télédétection et de la bio-ingénierie [32].

### 3.2.4 Limites de la méthode

Malgré ses avantages, la méthode de la fenêtre présente plusieurs limites techniques qui peuvent être critiques dans certaines applications :

1. Manque de contrôle sur la bande de transition : la largeur du lobe principal dépend uniquement de la fenêtre choisie et de la longueur  $N$ , rendant difficile une spécification précise.
2. Absence d'optimisation explicite : contrairement à d'autres méthodes (par exemple la méthode de Parks-McClellan ou les techniques d'optimisation par moindres carrés), la méthode de la fenêtre ne permet pas de minimiser directement une fonction erreur.
3. Compromis rigide entre largeur de transition et atténuation des lobes secondaires : une meilleure atténuation se paie par une bande de transition plus large, et vice versa.
4. Allongement de la réponse temporelle : pour atteindre des performances satisfaisantes (bonne atténuation, transition rapide), la longueur du filtre  $N$  doit être élevée, ce qui augmente les coûts de calcul, notamment dans les systèmes embarqués ou temps réel [28,33].

## 3.3 Méthodes d'échantillonnage fréquentiel

La méthode d'échantillonnage fréquentiel est une approche de conception des filtres numériques RIF qui s'appuie directement sur la spécification fréquentielle désirée.

Contrairement à la méthode de la fenêtre qui modifie une réponse impulsionnelle théorique, ici, on part de la réponse fréquentielle  $H_d(f)$ , que l'on échantillonne uniformément, puis on utilise une transformée de Fourier inverse discrète pour obtenir la réponse impulsionnelle du filtre [17].

### 3.3.1 Principe de la méthode

Le principe repose sur une idée simple : la réponse fréquentielle  $H_d(f)$ , généralement idéale (rectangulaire pour un passe-bas, etc.), est discrétisée en un ensemble fini de points régulièrement espacés. Ces échantillons permettent de reconstruire une réponse impulsionnelle de longueur finie par transformée de Fourier inverse.

Cette méthode suppose que la réponse fréquentielle est périodique **et** discrète, et que le nombre de points choisis (souvent un nombre impair) détermine la résolution du filtre obtenu [34].

### 3.3.2 Dérivation de la réponse impulsionnelle à partir de $H_d(f)$

Pour concevoir un filtre numérique, on commence par définir une fonction  $H_d(f)$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , qui représente le comportement spectral souhaité (par exemple : 1 en bande passante, 0 en bande atténuée).

On prélève ensuite  $N$  échantillons de cette fonction, à intervalles réguliers :

$$H[k] = H_d\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

Ces coefficients  $H[k]$  constituent la **représentation fréquentielle discrète** du filtre à concevoir.

### 3.3.3 Calcul par transformée de Fourier inverse

Pour obtenir la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du filtre, on applique la transformée de Fourier inverse discrète (TFID) aux échantillons  $H[k]$ :

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \cdot e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

La réponse obtenue est généralement complexe si  $H[k]$  n'est pas conjuguée symétrique, et non causale. Il est donc nécessaire d'effectuer un recentrage ou un décalage pour l'adapter à un système réel [27].

### 3.3.4 Troncature de la réponse et effets sur la transition

Dans la pratique,  $H_d(f)$ , est souvent une fonction discontinue (comme un rectangle). Cette discontinuité induit une réponse impulsionnelle infinie. L'échantillonnage en fréquence agit alors comme une troncature implicite de la réponse temporelle idéale.

Conséquence : la réponse impulsionnelle obtenue présente souvent un effet de Gibbs, c'est-à-dire des oscillations autour de la transition bande passante / bande atténuée. Ces oscillations peuvent être réduites :

- En augmentant le nombre d'échantillons  $N$ ,
- En appliquant une fenêtre en fréquence avant l'inversion [35].

## 3.4 Méthodes d'optimisation

Les méthodes précédentes (fenêtrage et échantillonnage fréquentiel) offrent des approches simples mais manquent de souplesse. Les méthodes d'optimisation, en revanche, permettent de concevoir des filtres numériques en formulant le problème comme une minimisation d'un critère d'erreur, sous contraintes. Elles offrent un contrôle précis sur la forme de la réponse fréquentielle, avec une meilleure performance [36].

### 3.4.1 Programmation linéaire (simplexe)

#### 3.4.1.1 Formulation du problème d'optimisation

La conception de filtres RIF peut être exprimée comme un problème d'optimisation linéaire, dans lequel on cherche à minimiser une fonction objective (souvent l'erreur en bande atténuée), sous contraintes linéaires sur la réponse fréquentielle.

Par exemple, on peut chercher à le :

$$\min \sum_{\omega \in \text{bande}} |H(\omega)| \quad (3.9)$$

Sous les contraintes :

$$|H(\omega) - 1| \leq \delta_p \text{ (en bande passante)}$$

$$|H(\omega)| \leq \delta_s \text{ (en bande atténuée)}$$

Où  $H(\omega)$  est la transformée de Fourier des coefficients du filtre  $h(n)$  [37].

### 3.4.1.2 Définition des contraintes fréquentielles

Les contraintes sont appliquées à une grille de fréquences discrètes et traduites en contraintes sur les coefficients  $h(n)$ . On forme alors un système matriciel :

$$Ah \leq b \tag{3.10}$$

Où  $h$  est le vecteur des coefficients,  $A$  représente la matrice de transformation fréquentielle (souvent dérivée de la DFT), et  $b$  les bornes d'erreur autorisées.

### 3.4.1.3 Algorithme du simplexe appliqué aux filtres

Le **simplexe** est un algorithme classique pour résoudre des problèmes linéaires. Il explore les sommets du polytope de contraintes jusqu'à trouver le point optimal. En filtrage, cela permet d'obtenir un filtre avec :

- Une erreur contrôlée sur chaque bande,
- Une transition étroite,
- Une conception automatique des coefficients [28].

### 3.3.1.4 Avantages et limitations :

Avantages	Limitations
Permet un contrôle fin des bandes fréquentielles	Complexité de mise en œuvre
Fournit des résultats optimaux au sens linéaire	Pas adapté aux contraintes non linéaires
Convient aux applications sensibles (communications)	Moins intuitif que les méthodes classiques

Tableau 3.1 : avantages et limitations de Linprog

## 3.4.2 Optimisation par essaim particulaire (PSO)

### 3.4.2.1 Principe générale de la méthode

Le PSO (Particle Swarm Optimization) est un algorithme inspiré du comportement collectif des animaux (vols d'oiseaux, bancs de poissons). Chaque particule représente une solution possible (vecteur  $h(n)$ ) et se déplace dans l'espace de recherche en fonction :

- De sa propre expérience,
- De celle des autres particules [38].

### 3.4.2.2 Modélisation des coefficients du filtre comme particules

Chaque particule est un vecteur :

$$x_i = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}] \quad (3.11)$$

Son mouvement est défini par :

$$\begin{aligned} v_i(t+1) &= wv_i(t) + c_1r_1(p_i - x_i(t)) + c_2r_2(g - x_i(t)) \\ x_i(t+1) &= x_i(t) + v_i(t+1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Où :

- $p_i$  = meilleure position atteinte par la particule,
- $g$  = meilleure position globale,
- $w$  = inertie.

### 3.4.2.3 Fonction objectif et évaluation des performances

Le critère à minimiser est souvent une erreur quadratique sur la bande passante/atténuée :

$$\text{MSE} = \sum_{\omega} |H_d(\omega) - H(\omega)|^2 \quad (3.13)$$

Où  $H_d$  est la réponse souhaitée et  $H$  la réponse réelle du filtre.

### 3.4.2.4 Avantages par rapport aux méthodes classiques

- PSO est adapté aux problèmes non linéaires et non convexes.
- Ne nécessite pas de dérivées.
- Peut donner des résultats plus performants que le simplexe ou la méthode des fenêtres, notamment pour des critères personnalisés.

## 3.4.3 Méthode des moindres carrés

### 3.4.3.1 Formulation mathématique du critère d'erreur quadratique

On cherche ici à minimiser l'écart quadratique moyen entre la réponse fréquentielle désirée  $H_d(\omega)$  et celle du filtre  $H(\omega)$ . Le problème devient :

$$\min_{h^{(n)}} \int |H_d(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega \quad (3.14)$$

### 3.4.3.2 Application à la réponse fréquentielle souhaitée

On exprime  $H(\omega)$  comme combinaison linéaire des  $h(n)$ , puis on échantillonne la bande fréquentielle et transforme le problème en système d'équations :

$$Ah = b \quad (3.15)$$

### 3.4.3.3 Résolution matricielle et détermination des coefficients

On résout le problème au sens des moindres carrés :

$$h = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (3.16)$$

Ce système donne la solution optimale qui minimise l'erreur quadratique globale.

### 3.4.3.4 Avantages

- Très simple à implémenter (utilisation directe de l'algèbre linéaire).
- Adaptée aux filtres à faible ondulation globale.

Permet de trouver des filtres robustes même dans des configurations complexes.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré plusieurs méthodes de conception des filtres numériques RIF. La méthode de fenêtrage, simple mais limitée, permet une réalisation rapide avec un choix de fenêtres influençant les performances. La méthode d'échantillonnage fréquentiel permet de construire un filtre à partir d'une spécification en fréquence, mais reste sensible aux effets de troncature.

Les méthodes d'optimisation, quant à elles, offrent un contrôle plus précis des performances. La programmation linéaire, la méthode des moindres carrés et l'optimisation par essaim particulaire (PSO) permettent d'obtenir des filtres répondant à des critères bien définis.

Chaque approche présente des avantages et des limites. Le choix dépendra du compromis entre simplicité, précision et exigence de conception.

---

# *Chapitre 4.*

## **Implémentation et simulation**

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'implémentation pratique et à la simulation des filtres RIF conçus à l'aide de différentes approches. Après avoir présenté les principes théoriques dans les chapitres précédents, il s'agit ici de mettre en œuvre concrètement ces méthodes à travers la simulation, d'analyser leurs performances et de comparer les résultats obtenus.

Nous commencerons par la conception des filtres à l'aide de techniques classiques, notamment la méthode de fenêtrage, qui constitue une approche simple, intuitive et largement utilisée pour la synthèse de filtres RIF. Ensuite, nous aborderons plusieurs techniques d'optimisation, parmi lesquelles :

- **La programmation linéaire**, fondée sur la minimisation de l'erreur fréquentielle sous contraintes linéaires sur les gains.
- **La méthode des moindres carrés**, qui vise à minimiser l'erreur quadratique entre la réponse fréquentielle désirée et celle du filtre conçu.
- **L'optimisation par essaim particulaire (PSO)**, une méthode stochastique inspirée du comportement collectif des populations animales pour explorer efficacement l'espace des solutions.
- **La méthode d'échantillonnage**, qui repose sur la discrétisation du gabarit fréquentiel en un ensemble de fréquences caractéristiques.

La section suivante sera dédiée à une comparaison entre les résultats obtenus par ces différentes méthodes et ceux d'une méthode de référence, afin de mettre en évidence les avantages et les limites de chaque technique.

## 4.2 Formulation du problème :

### 4.2.1 Méthodologie de programmation

Le problème d'approximation linéaire au sens de Tchebychev d'une fonction complexe est équivalent à un problème d'approximation linéaire dans le domaine réel.

Soit  $e(f)$  l'erreur entre la réponse fréquentielle et la réponse désiré :

$$e(f) = H_d(f) - H(f) = |e(f)| e^{j\varphi(f)} \quad (4.1)$$

On obtient :

$$R_e(e(f)) \leq |e(f)| \quad (4.2)$$

$$R_e(e(f)) = |e(f)| \cos(\varphi f) \quad (4.3)$$

$$\max \{R_e(e(f))\} = |e(f)| \quad (4.4)$$

Une fois la caractéristique fréquentielle désirée  $H_d(f)$  donnée, le problème d'approximation consiste à déterminer la réponse fréquentielle

$$H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi n f} \quad (4.5)$$

Pour mieux contrôler l'erreur dans les différentes bandes, nous avons utilisé une fonction poids d'erreur  $W(f)$  définie par :

$$W(f) = \begin{cases} k_1 & \text{si } f \in [0, f_p] \\ k_2 & \text{si } f \in [f_s, 0.5] \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) R_e\{e^{-j2\pi n f}\} \geq R_e\{H_d(f) + \frac{\delta}{W(f)}\} \quad (4.7)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) R_e\{\cos(-2\pi n f) + j \sin(2\pi n f)\} \geq R_e\{H_d(f) - \frac{\gamma}{W(f)}\} \quad (4.8)$$

Ou d'une autre manière :

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \omega(f) \cos(2\pi n f) + \delta \geq \omega(f) R(f) \quad (4.9)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \omega(f_1) \{\cos(2\pi n f_1)\} \geq \omega(f_1) \cos(2\pi n f_1 \tau d) \quad (4.10)$$

On trouve aussi une notation de la fonction désirée  $H_d(f)$ , qui est définie comme suit :

$$H_d(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi \tau d(f)} & BP \\ 0 & BA \end{cases} \quad (4.11)$$

Dans la bande passante :

$$H_d(f) = R(f) + j I(f) = e^{j p d(f)} \quad (4.12)$$

Avec :

$$R(f) = \cos 2\pi \tau d(f) \quad (4.13)$$

$$I(f) = -\sin 2\pi \tau d(f) \quad (4.14)$$

### 4.2.2 Les erreurs de la bande passante et la bande atténuée :

Les erreurs dans la bande passante et la bande atténuée sont des écarts entre la réponse fréquentielle obtenue et la réponse désirée. On peut les formuler sous forme d'erreurs fréquentielles locales avec l'erreur absolue.

Voici les équations d'erreur pour un filtre RIF  $h[n]$  de longueur  $N$  :

#### a) Dans la bande passante $[0, f_p]$ :

L'objectif est d'avoir une réponse  $H_d(f)$  ( $H(f) = 1$ ).

L'erreur est définie par :

$$\varepsilon_p(f) = |H(f) - 1| \quad (4.15)$$

Pour  $f \in [0, f_p]$

#### b) Dans la bande atténuée $[f_s, f_{max}]$ :

L'objectif est d'avoir une réponse  $H_d(f)$  ( $H(f) = 0$ ).

L'erreur est définie par :

$$\varepsilon_s(f) = |H(f)| \quad (4.16)$$

Pour  $f \in [f_s, f_{max}]$

## 4.3 Conception des filtres par la méthode de la fenêtre

### 4.3.1 Passe bande :

En se concentrant sur les réponses fréquentielles et spectres de sortie pour les différentes fenêtres utilisées (Hamming, Hann, Yagoubi) et deux configurations différentes de fréquence de coupure ( $f_{ce} = 0.3$  et  $f_{ce} = 0$  (passe bande et passe bas)).

$P$	$f_{ce}$	$B$	$L_x$
121	0.3	0.2	512

Tableau 4.1: paramètres de conception du filtre RIF

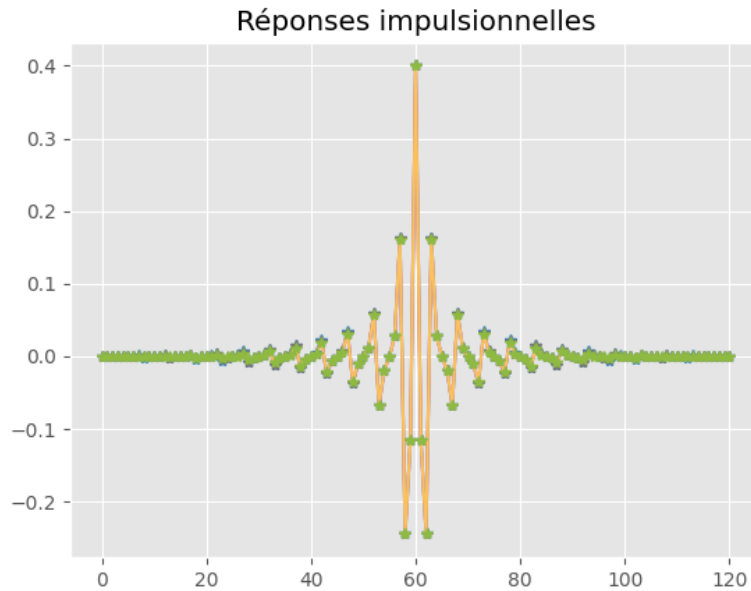


Figure 4.1: Réponses impulsionnelles  $h[n]$  du filtre (Hamming,Hann,Yagoubi)

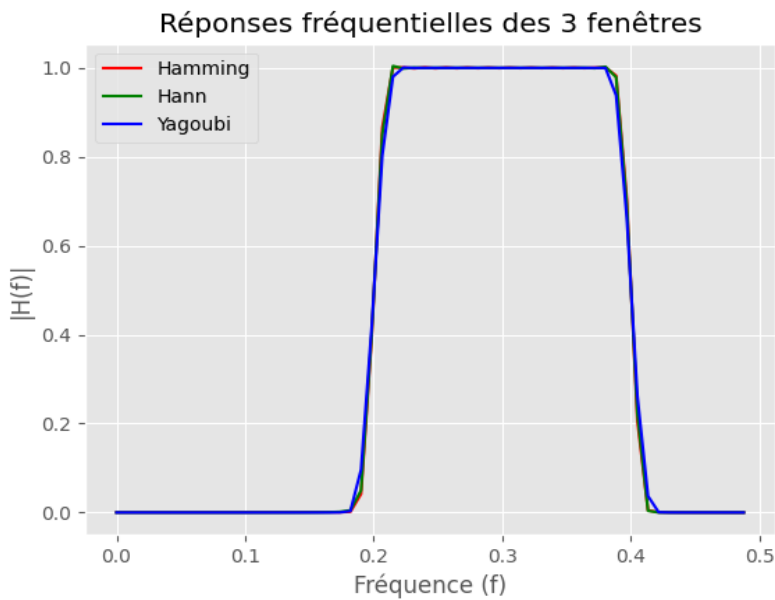


Figure 4.2 : Réponses fréquentielles du filtre

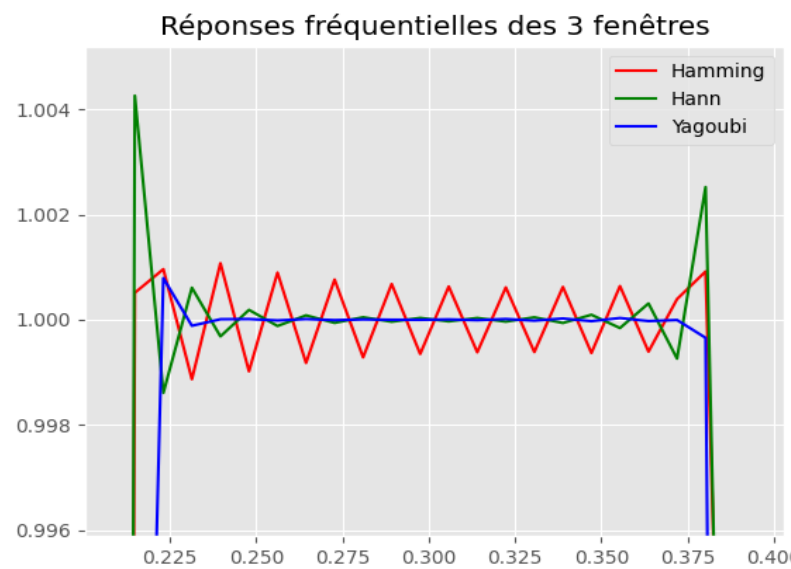


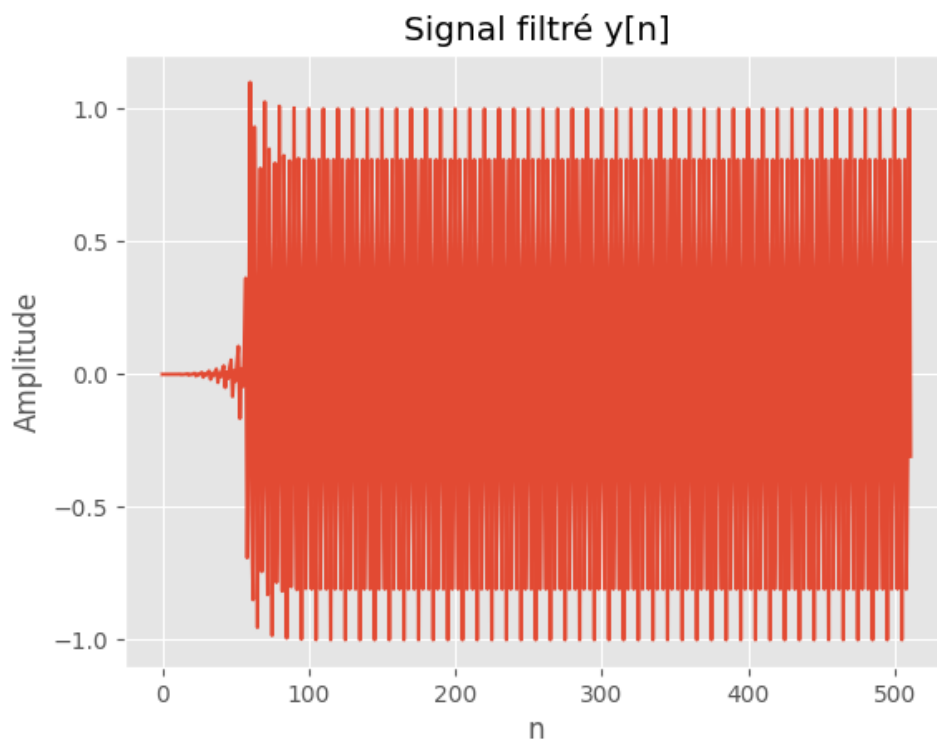
Figure 4.3 : Version zoomé des réponses fréquentielles du filtre passe-bande (Hamming, Hann et Yagoubi)

Ces deux figures présentent la comparaison des performances fréquentielles des fenêtres Hamming, Hann et Yagoubi appliquées à un filtre passe-bande :

- **Figure 4.2** offre une vue globale de la réponse fréquentielle des trois fenêtres. On y observe que la fenêtre de Yagoubi se distingue par une transition plus nette entre la bande passante et la bande atténuée, traduisant une meilleure sélectivité.
- **Figure 4.3**, en version zoomée, permet d'analyser en détail les ondulations dans la bande passante ainsi que le niveau d'atténuation dans la bande rejetée. La fenêtre Yagoubi montre des ondulations plus faibles dans la bande passante et une atténuation plus profonde, confirmant sa précision supérieure.

Finalement :

La fenêtre de Yagoubi fournit les meilleures performances en termes de netteté de transition, faible ondulation et meilleure atténuation, ce qui en fait un excellent choix pour la conception de filtres passe-bande.



**Figure 4.4 : Signal filtré y[n] de la sortie**

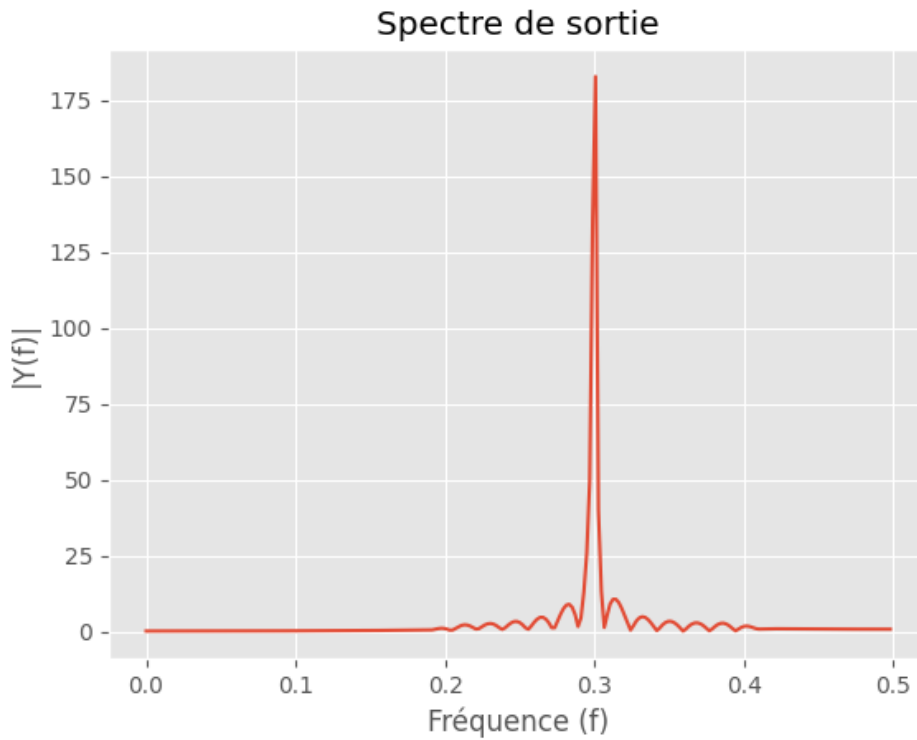


Figure 4.5 : Spectre de sortie du signal filtré

4.3.2. Passe bas :

En se concentrant sur les réponses fréquentielles et spectres de sortie pour les différentes fenêtres utilisées (Hamming, Hann, Yagoubi)

$P$	$f_{ce}$	$B$	$L_x$
121	0	0.2	512

Tableau 4.2 : paramètres de conception du filtre RIF

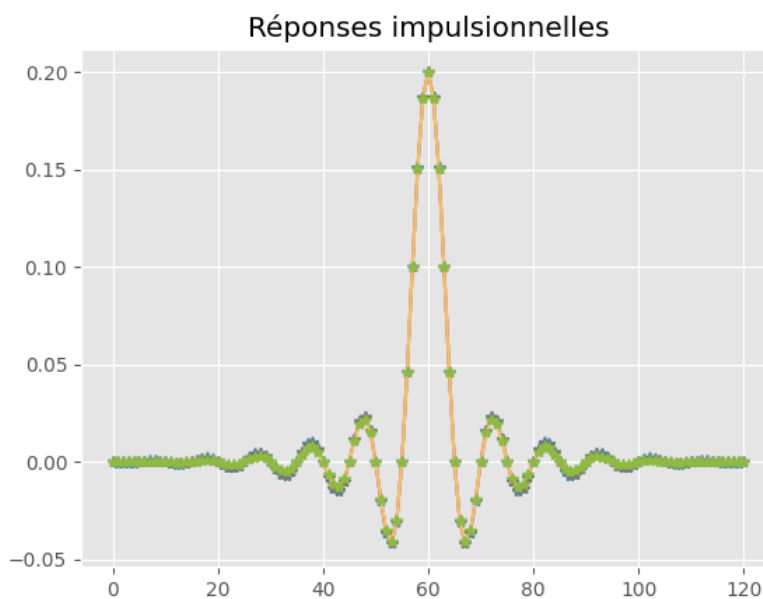


Figure 4.6 : Réponses impulsionnelles h[n] du filtre (Hamming, Hann, Yagoubi)

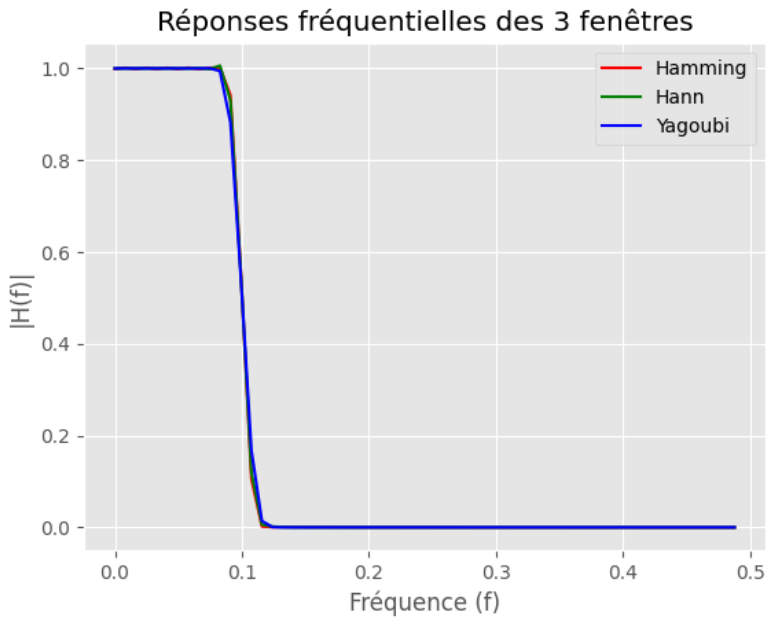


Figure 4.7 : Réponses fréquentielles du filtre

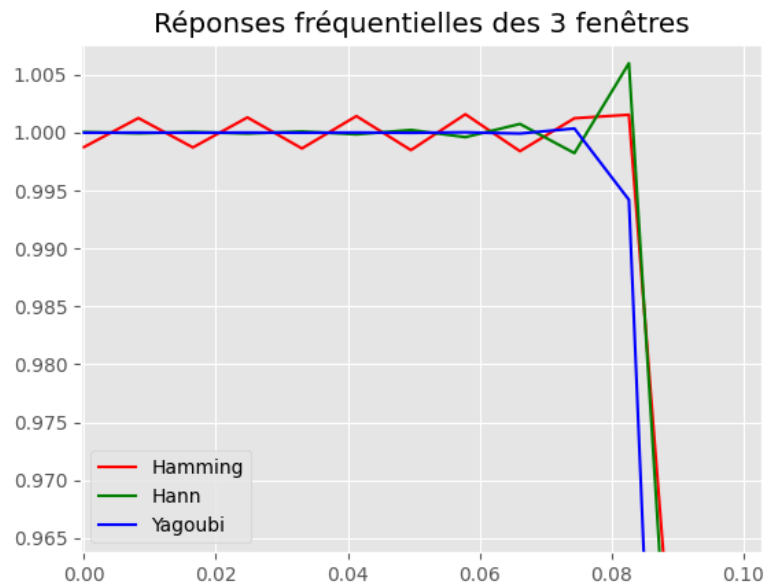


Figure 4.8: Version zoomée de les réponses fréquentielles du filtre passe-bas (Hamming, Hann

Ces figures comparent les mêmes trois fenêtres, mais cette fois pour un filtre passe-bas :

- **Figure 4.7** montre que les trois fenêtres ont un comportement similaire, mais la fenêtre Yagoubi se démarque par une pente de coupure plus abrupte, ce qui améliore la séparation des bandes fréquentielles.
- **Figure 4.8**, en version zoomée, révèle que les ondulations dans la bande passante sont moins prononcées avec Yagoubi, et que l'atténuation en bande interdite est également plus efficace.

Finalement :

La fenêtre Yagoubi offre à nouveau la meilleure précision fréquentielle, avec une bande passante stable, une transition rapide, et une atténuation supérieure, ce qui confirme sa robustesse même en mode passe-bas.

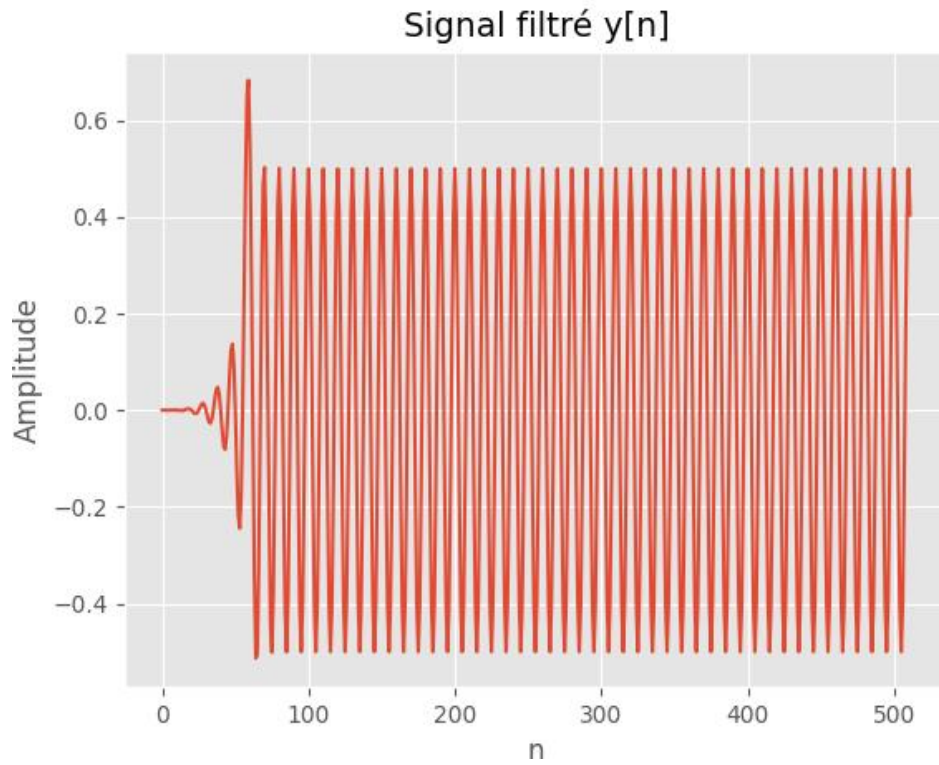


Figure 4.9 : Signal filtré y[n] du sortie

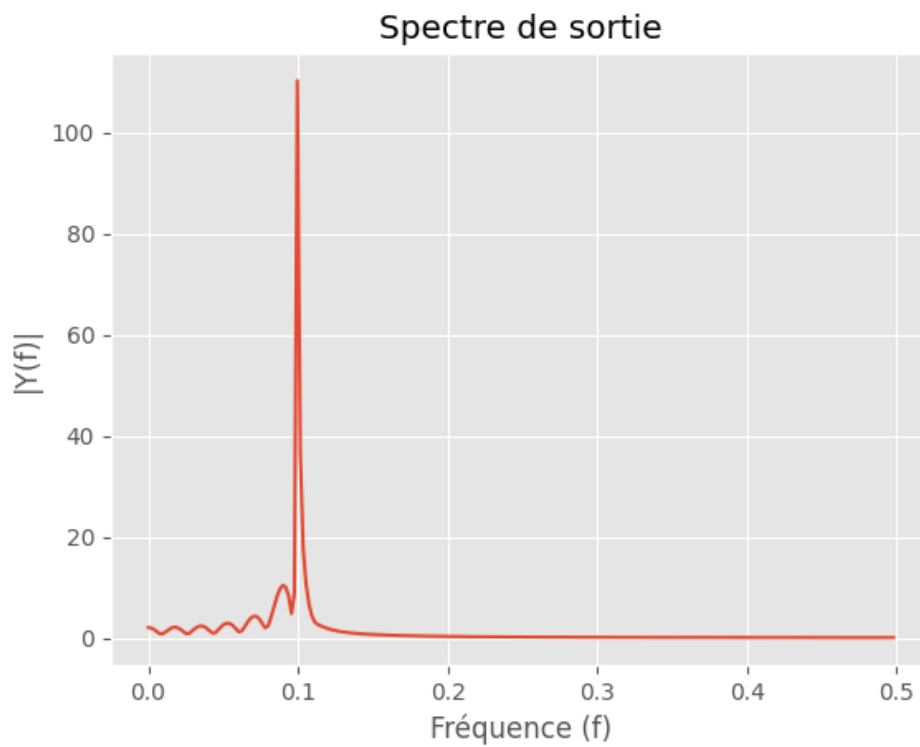


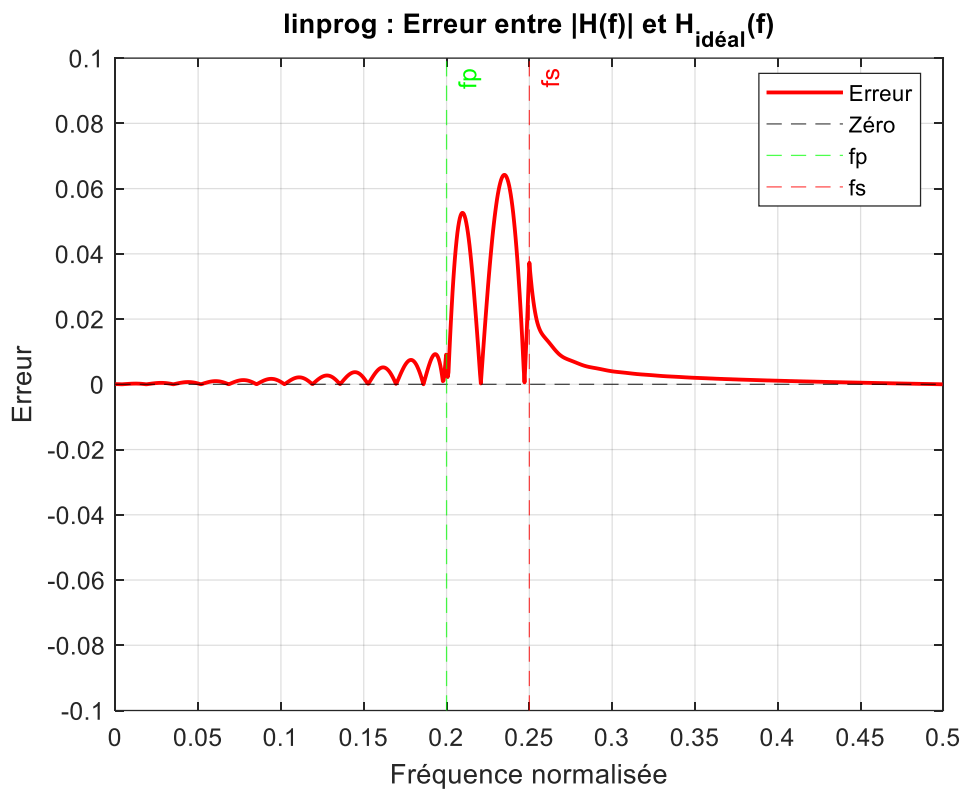
Figure 4.10 : Spectre de sortie du signal filtré

## 4.4 Optimisation des filtres RIF :

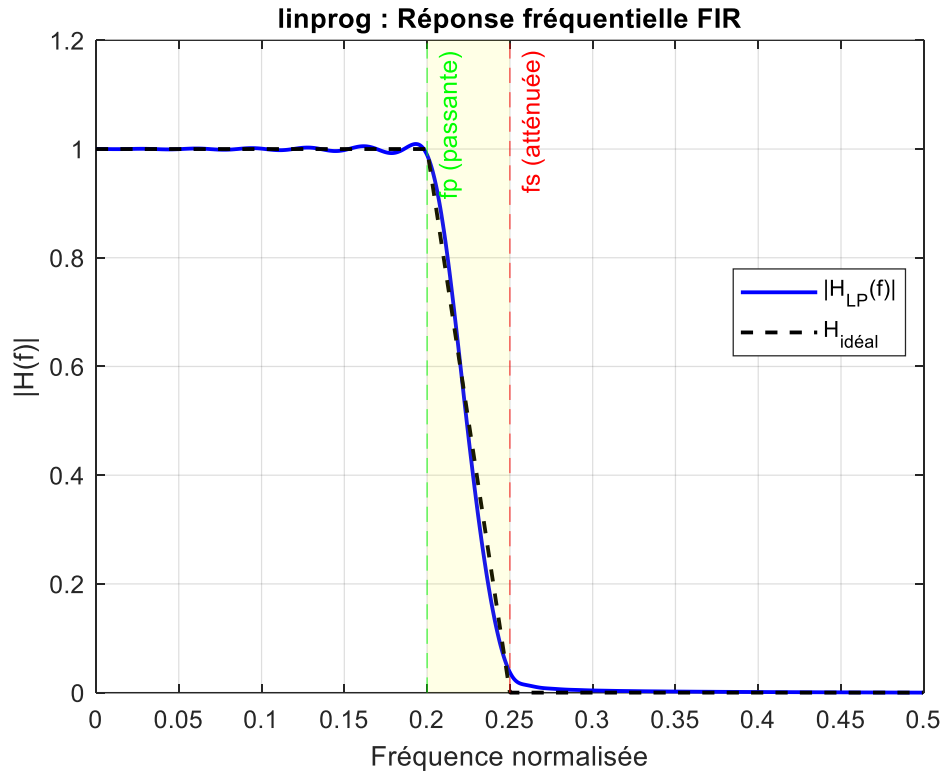
On a optimisé les filtres étudiés par rapport au gabarit du filtre passe bas caractérisé par ses paramètres tels que  $f_p$  la limite supérieure de la bande passante,  $f_s$  la limite inférieure de la bande atténuée,  $N_p$ ,  $N_s$  et  $N_t$  qui sont respectivement les nombre de fréquences dans la bande passante, atténuée et de transition et  $N$  l'ordre du filtre.

### 4.4.1 La méthode de programmation linéaire :

Les graphes **4.11** et **12** ci-dessous ont été générés à l'aide de la méthode de programmation linéaire pour les paramètres mentionnés dans le tableau **4.3**



**Figure 4.11 : Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée**



**Figure 4.12 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas**

$f_p$	$f_s$	$N$	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\varepsilon_p \text{ max}$	$\varepsilon_s \text{ max}$
0.2	0.25	60	120	60	90	0.0138	0.0277

**Tableau 4.3: Paramètres et erreurs de filtre RIF**

D'après une étude expérimentale on a abouti aux relations suivantes :

$$N_p = 2 \times N \tag{4.17}$$

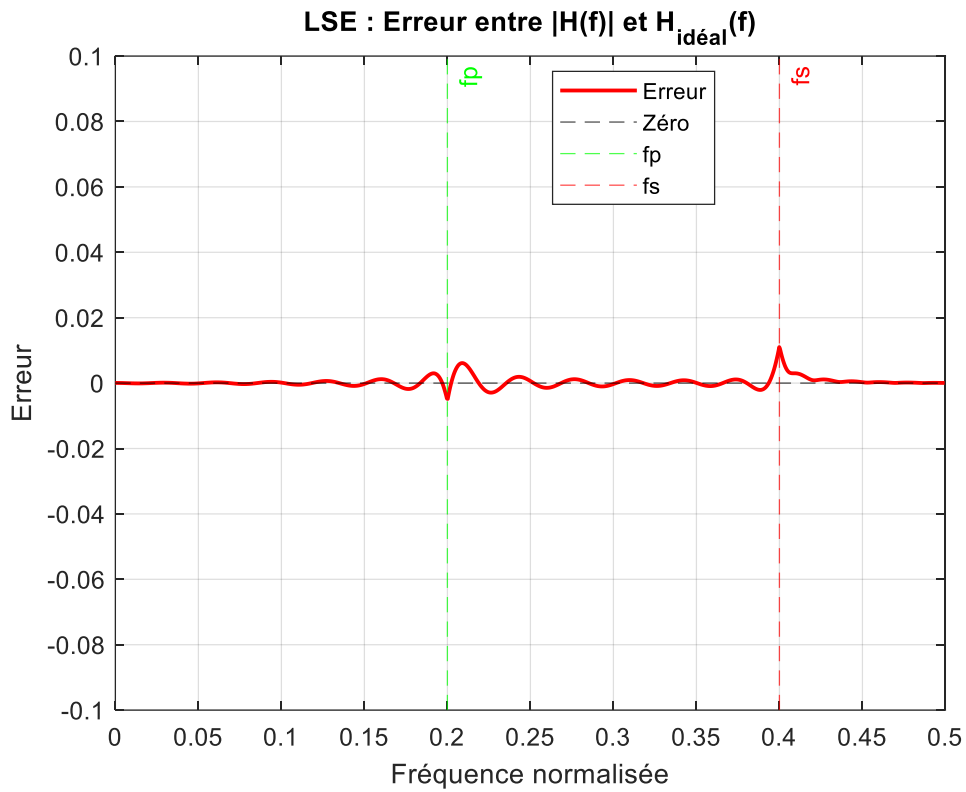
$$N_t = 0.5 \times N \tag{4.18}$$

$$N_s = 1.5 \times N \tag{4.19}$$

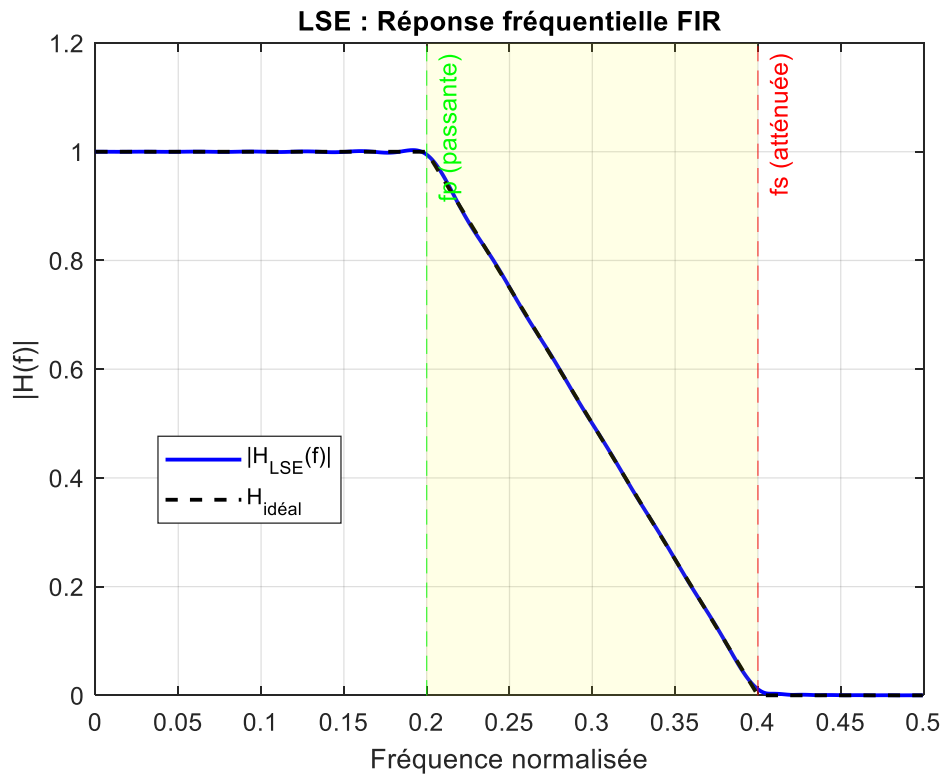
Ces paramètres  $N_p$ ,  $N_t$ ,  $N_s$  en fonction de  $N$  nous permettent d'avoir un filtre plus performant.

#### 4.4.2 La méthode de moindres carrés :

Les graphes **4.13 et 14** ci-dessous ont été générés à l'aide de la méthode de moindres carrés pour les paramètres mentionnés dans le tableau **4.4**



**Figure 4.13: Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée**



**Figure 4.14 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas**

$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\varepsilon_p$ max	$\varepsilon_s$ max
0.2	0.4	60	50	30	50	0.0047	0.0104

Tableau 4.4: Paramètres et erreurs de filtre RIF

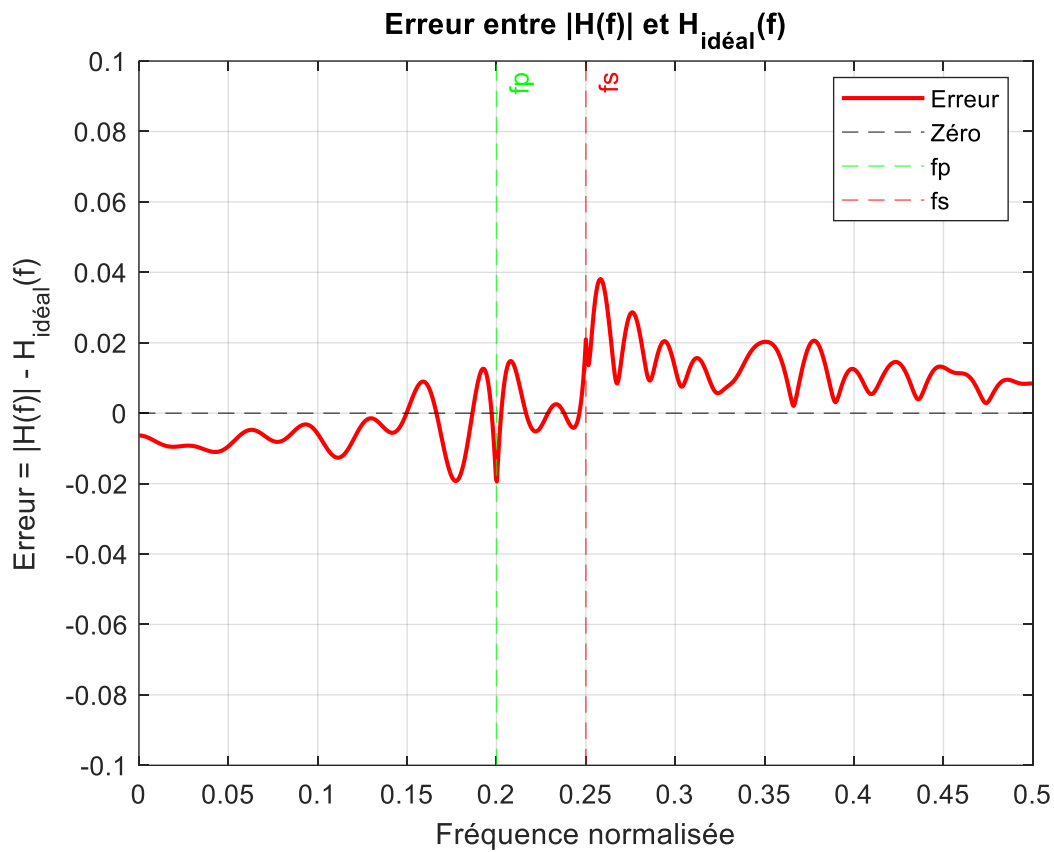
Ces deux figures présentent les résultats obtenus avec la méthode des moindres carrés (LSE) appliquée à un filtre passe-bas :

- **Figure 4.13** montre l'erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée. L'erreur y est très faible et bien répartie, aussi bien dans la bande passante que dans la bande atténuée, avec un maximum très bas, ce qui indique une excellente approximation de la réponse idéale.
- **Figure 4.14** illustre la réponse fréquentielle du filtre, qui présente une transition très nette, une bande passante avec ondulations minimales, et une atténuation efficace dans la bande rejetée.

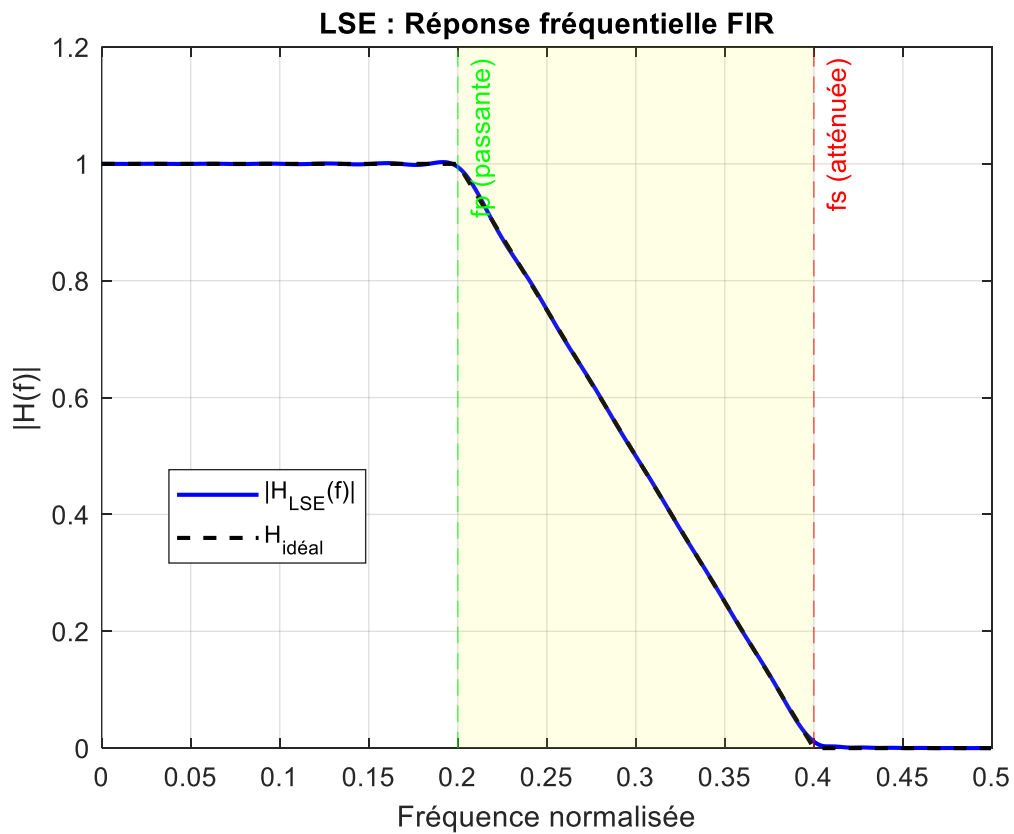
Par conséquent, la méthode des moindres carrés (LSE) se distingue par sa précision élevée et sa répartition harmonieuse de l'erreur, offrant ainsi une réponse fréquentielle très proche de l'idéale. Elle constitue l'une des méthodes les plus performantes pour la conception de filtres RIF passe-bas.

#### 4.4.3 La méthode d'optimisation par essaim particulaire (PSO) :

Les graphes **4.15 et 16** ci-dessous ont été générés à l'aide de la méthode d'optimisation par essaim particulaire pour les paramètres mentionnés dans le tableau **4.5**



**Figure 4.15 : Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée**



**Figure 4.16 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas**

$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$N_e$	$\varepsilon_p$ max	$\varepsilon_s$ max
0.2	0.25	60	30	20	30	80	0.0179	0.0400
0.2	0.25	45	25	10	25	60	0.0317	0.0467
0.2	0.25	30	15	10	15	40	0.0404	0.0662
0.2	0.25	15	8	4	8	20	0.0958	0.2548
0.2	0.25	10	5	3	5	13	0.1625	0.5131
0.2	0.25	7	4	2	4	10	0.0991	0.6080

**Tableau 4.5: Paramètres et erreurs de filtre RIF**

On observe que d’après une étude expérimentale, la méthode d’optimisation par essaim particulière (PSO) est efficace pour la condition :

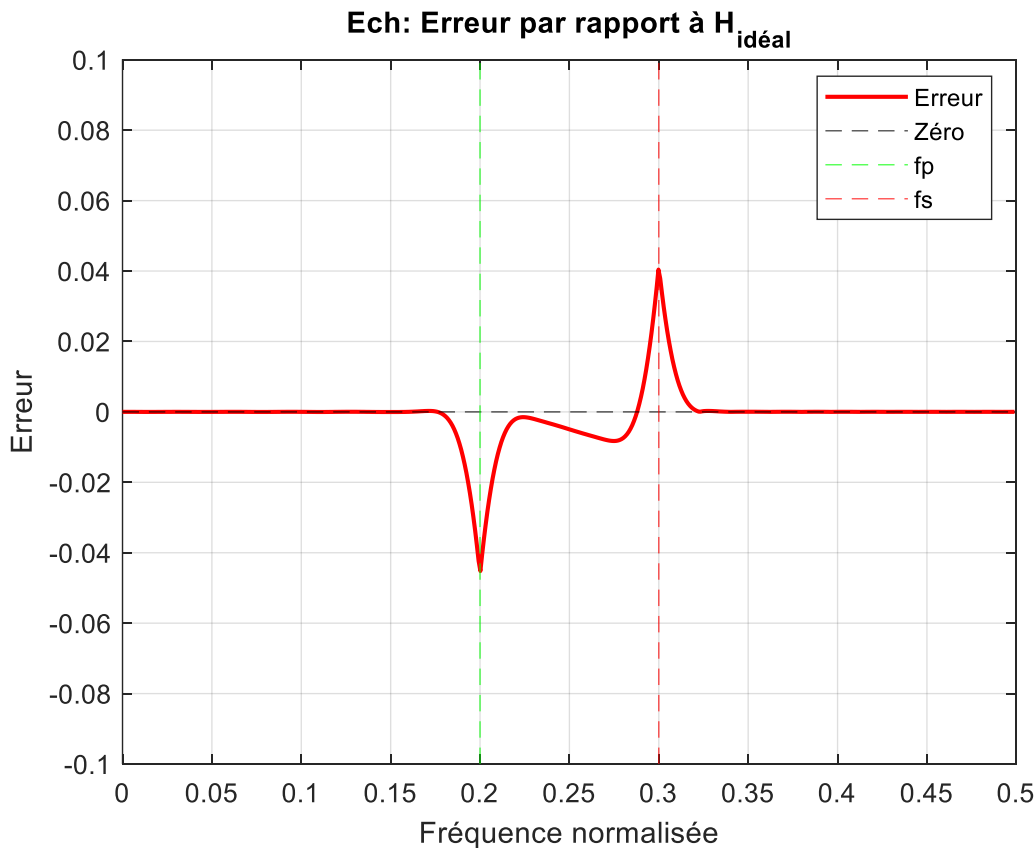
$$N_e \geq \frac{4}{3} N \quad (4.20)$$

Avec :  $N_e = N_p + N_s + N_t$  (4.21)

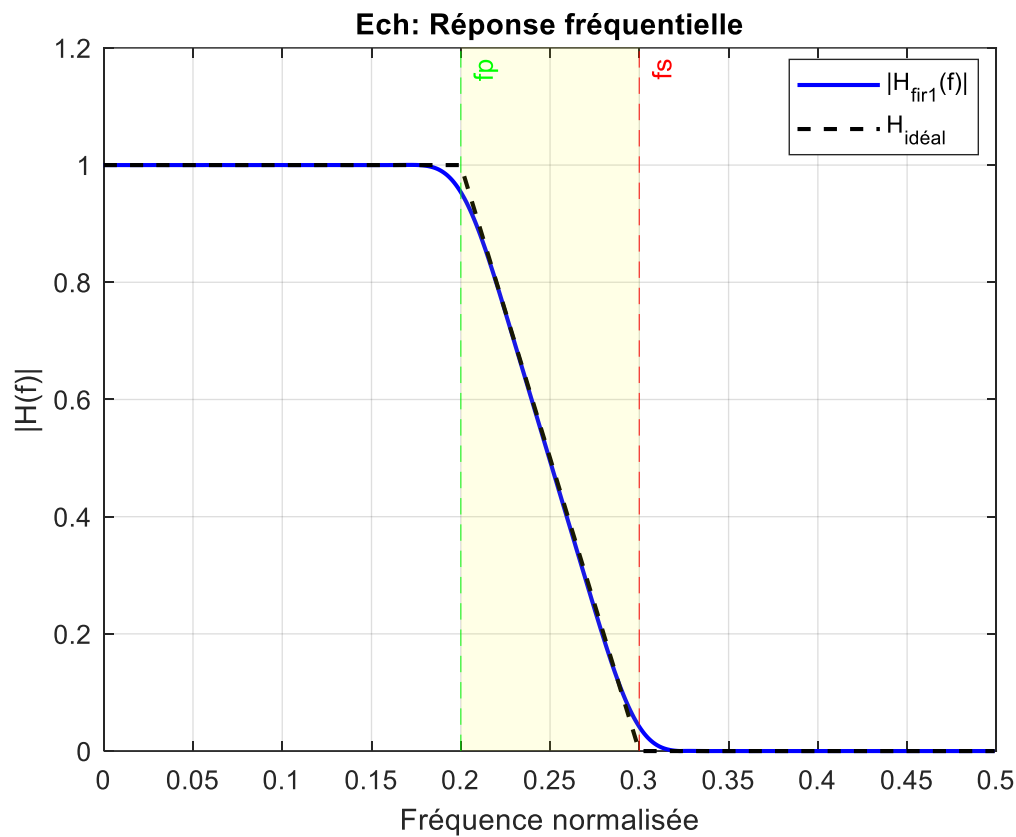
D’après le tableau 4.5, les résultats montrent que lorsque N augmente, les erreurs diminuent, par conséquent le filtre devient plus performant.

**4.4.4 La méthode d’échantillonnage :**

Les graphes 4.17 et 18 ci-dessous ont été générés à l’aide de la méthode d’échantillonnage pour les paramètres mentionnés dans le tableau 4.6



**Figure 4.17 : Erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence normalisée**



**Figure 4.18 : Réponse fréquentielle en module du filtre passe-bas**

$f_p$	$f_s$	$N$	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\epsilon_p \text{ max}$	$\epsilon_s \text{ max}$
0.2	0.4	60	50	30	50	0.0424	0.0379

**Tableau 4.6: Paramètres et erreurs de filtre RIF**

Ces deux figures illustrent les performances obtenues avec la **méthode d'échantillonnage** :

- **Figure 4.17** montre l'évolution de l'erreur de réponse fréquentielle en fonction de la fréquence. On y observe une erreur irrégulière, avec des variations marquées notamment dans la bande de transition et dans le début de la bande atténuée, traduisant un manque de stabilité dans l'ajustement fréquentiel.
- **Figure 4.18** présente la réponse fréquentielle du filtre obtenu par cette méthode. La transition entre les bandes passante et atténuée y est progressive, avec une atténuation modérée et des ondulations visibles dans la zone de coupure.

La méthode d'échantillonnage produit une réponse caractérisée par une transition douce, une atténuation limitée et des ondulations sensibles. Elle offre une mise en œuvre simple, mais la réponse obtenue reste relativement irrégulière, notamment dans les zones sensibles du spectre.

4.4.5 Comparaison entre les méthodes étudiées :

Cas 1 :

Les graphes 4.19 et 20 ci-dessous ont été générés à l'aide des 4 méthodes pour un filtre RIF passe bas avec les paramètres mentionnés dans le tableau 4.7

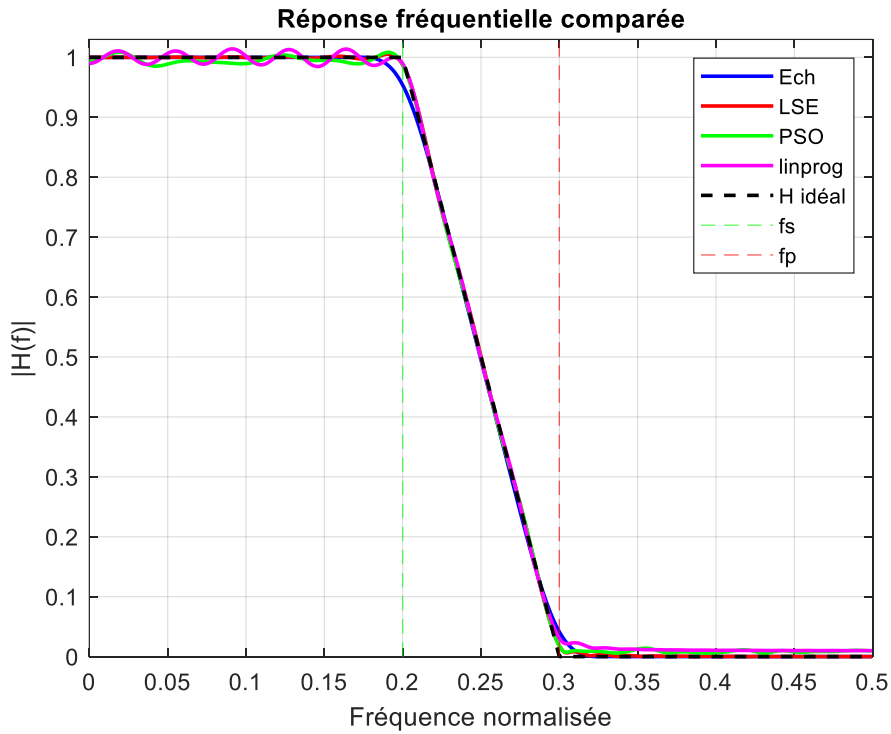


Figure 4.19 : Réponse fréquentielle de comparaison

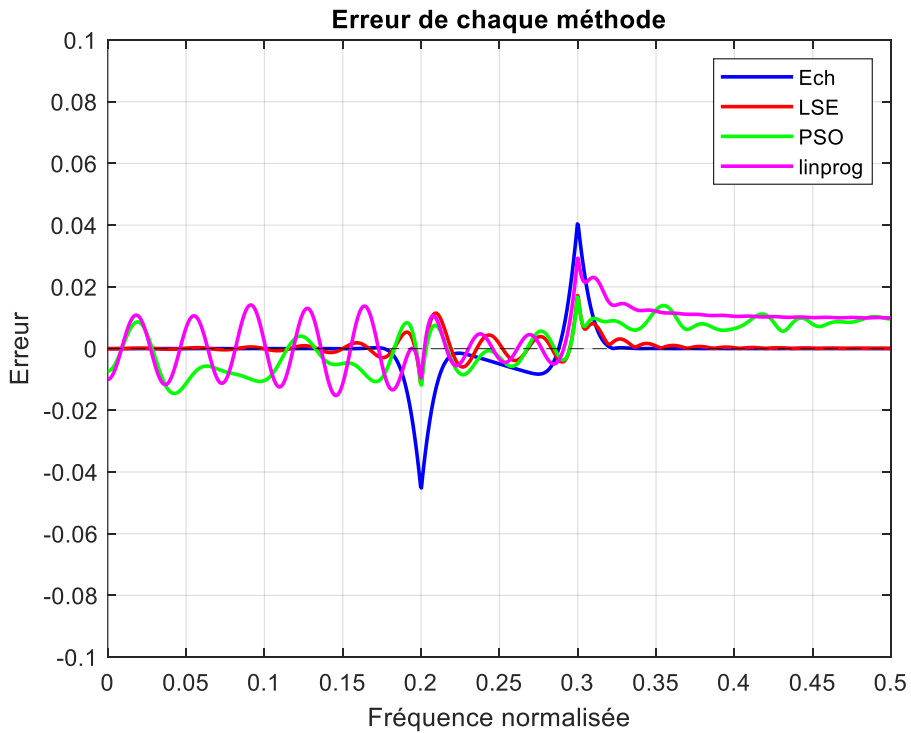


Figure 4.20 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison

Méthode	$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\epsilon_p$ max	$\epsilon_s$ max
LSE	0.2	0.3	60	50	30	50	0.0113	0.0168
PSO	0.2	0.3	60	50	30	50	0.0146	0.0164
Linprog	0.2	0.3	60	50	30	50	0.0152	0.0292
Echantillonnage	0.2	0.3	60	50	30	50	0.0447	0.0401

Tableau 4.7: Comparaison des erreurs maximales selon les méthodes d'optimisation du filtre RIF

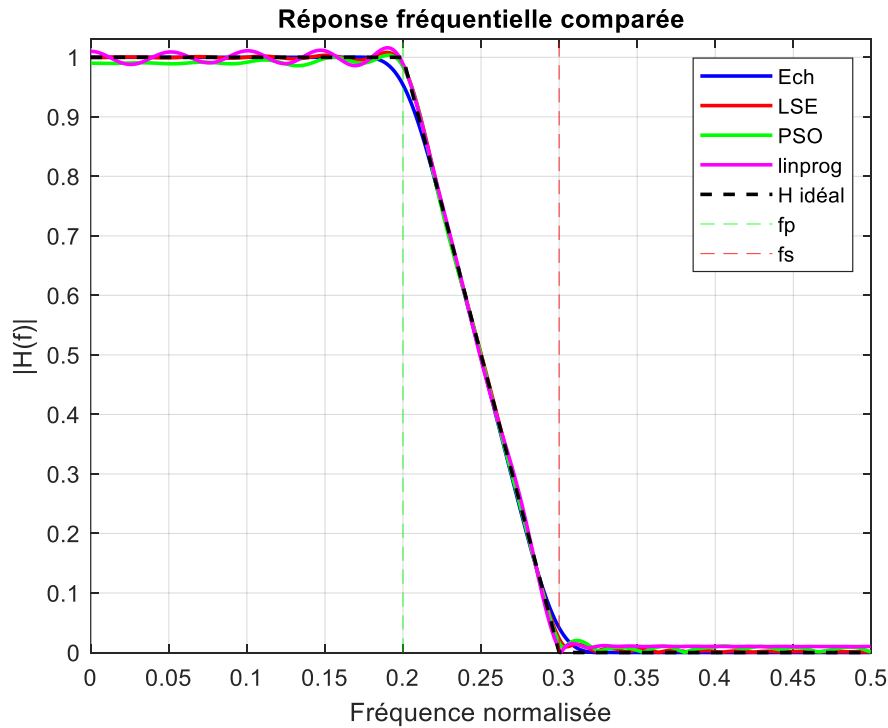
$N = 60$ ,  $f_p = 0.2$ ,  $f_s = 0.3$

- **LSE** donne les meilleures performances globales, avec les erreurs les plus faibles dans les deux bandes ( $\epsilon_p = 0.0113$ ,  $\epsilon_s = 0.0168$ ).
- **PSO** suit de près avec des performances similaires.
- **linprog** montre une erreur légèrement plus élevée en bande atténuée.
- **Échantillonnage** affiche les erreurs les plus importantes, ce qui dégrade la qualité du filtre.

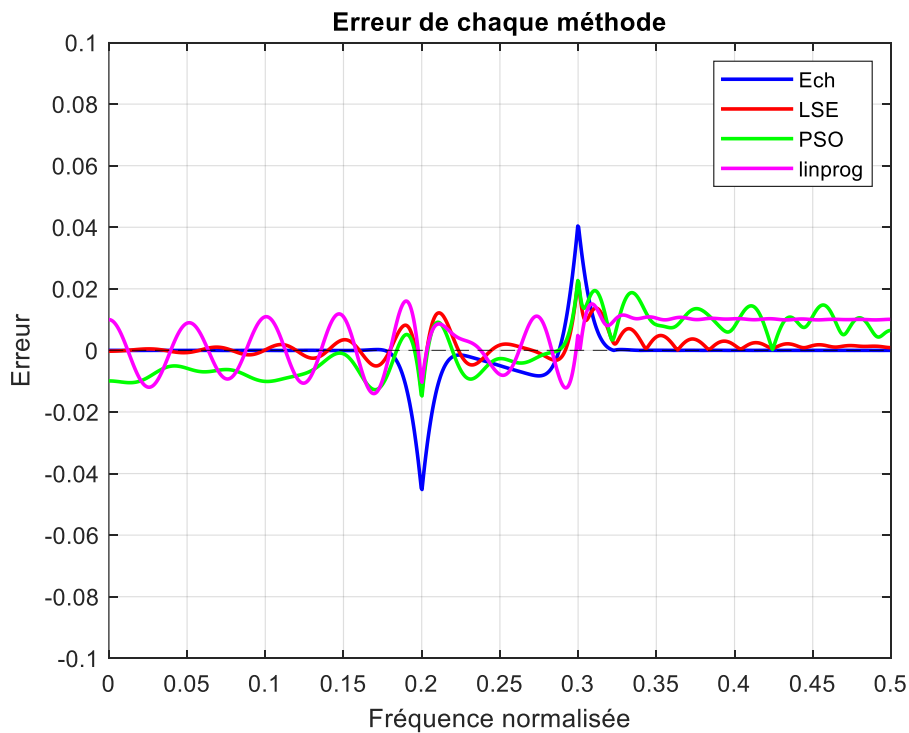
On observe que LSE est la méthode la plus fiable ici, avec **PSO** en alternative acceptable.

**Cas 2 :**

Les graphes 4.21 et 22 ci-dessous ont été générés à l'aide des 4 méthodes pour un filtre RIF passe bas avec les paramètres mentionnés dans le tableau 4.8



**Figure 4.21 : Réponse fréquentielle de comparaison**



**Figure 4.22: Erreur de réponse fréquentielle de comparaison**

Méthode	$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\varepsilon_p$ max	$\varepsilon_s$ max
LSE	0.2	0.3	50	40	20	40	0.0129	0.0219
PSO	0.2	0.3	50	40	20	40	0.0144	0.0222
Linprog	0.2	0.3	50	40	20	40	0.0160	0.0151
Echantillonnage	0.2	0.3	50	40	20	40	0.0447	0.0401

Tableau 4.8: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF

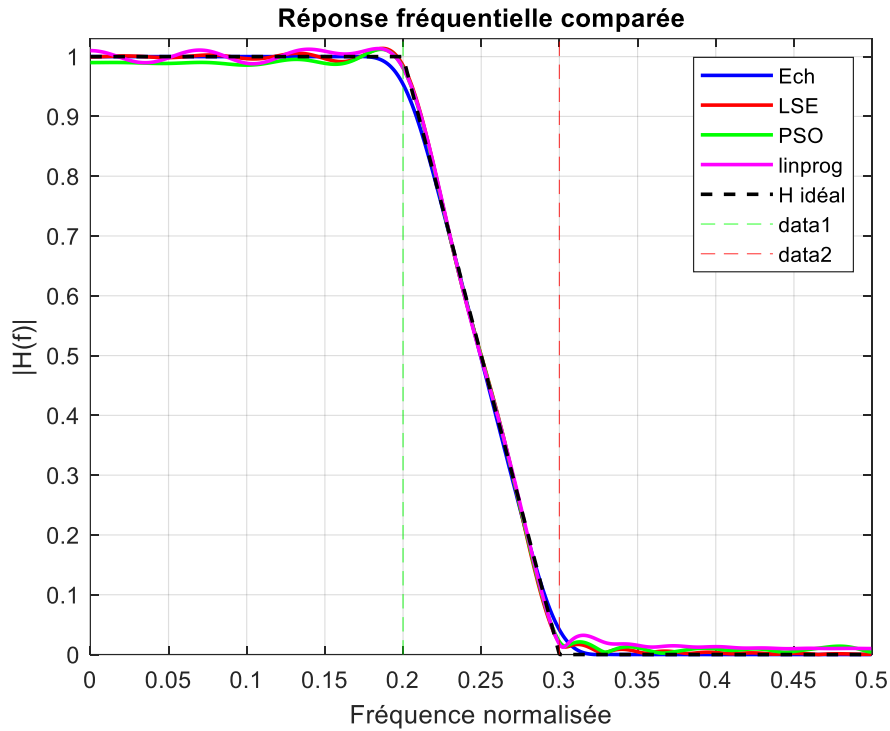
$N = 50$ ,  $f_p = 0.2$ ,  $f_s = 0.3$

- LSE conserve la tête avec une **bonne précision** ( $\varepsilon_p = 0.0129$ ).
- linprog montre une **meilleure erreur dans la bande atténuée** ( $\varepsilon_s = 0.0151$ ), mais reste moins stable globalement.
- PSO donne des résultats intermédiaires.
- Échantillonnage reste le **moins performant**, avec des erreurs toujours élevées.

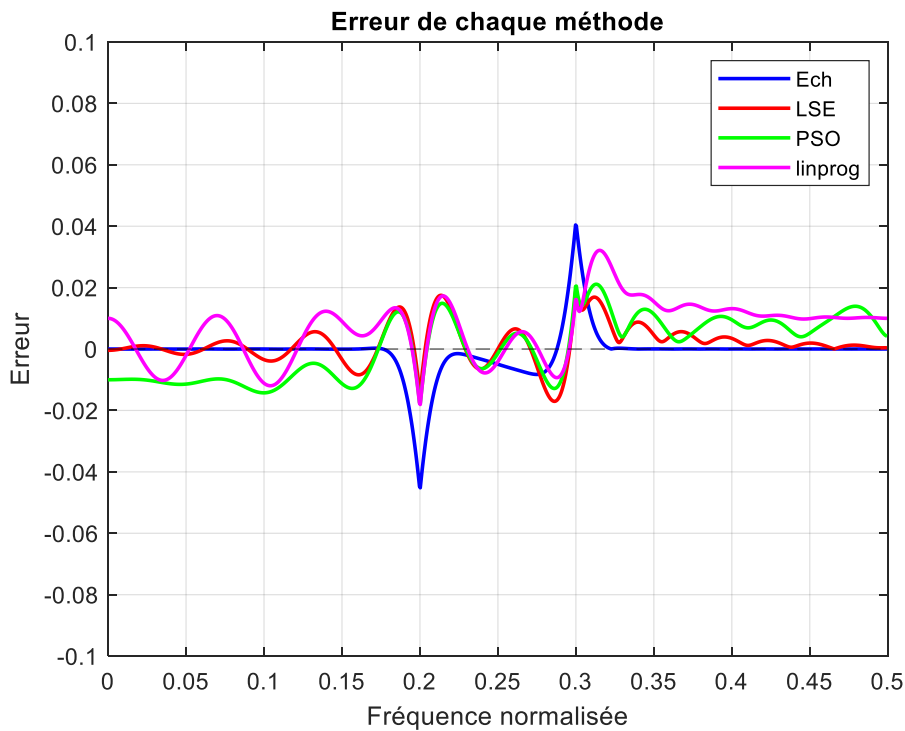
On observe que LSE reste le meilleur compromis entre bande passante et atténuée.

**Cas 3 :**

Les graphes 4.23 et 24 ci-dessous ont été générés à l'aide des 4 méthodes pour un filtre RIF passe bas avec les paramètres mentionnés dans le tableau 4.9



**Figure 4.23 : Réponse fréquentielle de comparaison**



**Figure 4.24 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison**

Méthode	$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\varepsilon_p$ max	$\varepsilon_s$ max
LSE	0.2	0.3	35	20	10	20	0.0137	0.0189
PSO	0.2	0.3	35	20	10	20	0.0165	0.0240
linprog	0.2	0.3	35	20	10	20	0.0177	0.0321
Echantillonnage	0.2	0.3	35	20	10	20	0.0447	0.0401

Tableau 4.9: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF

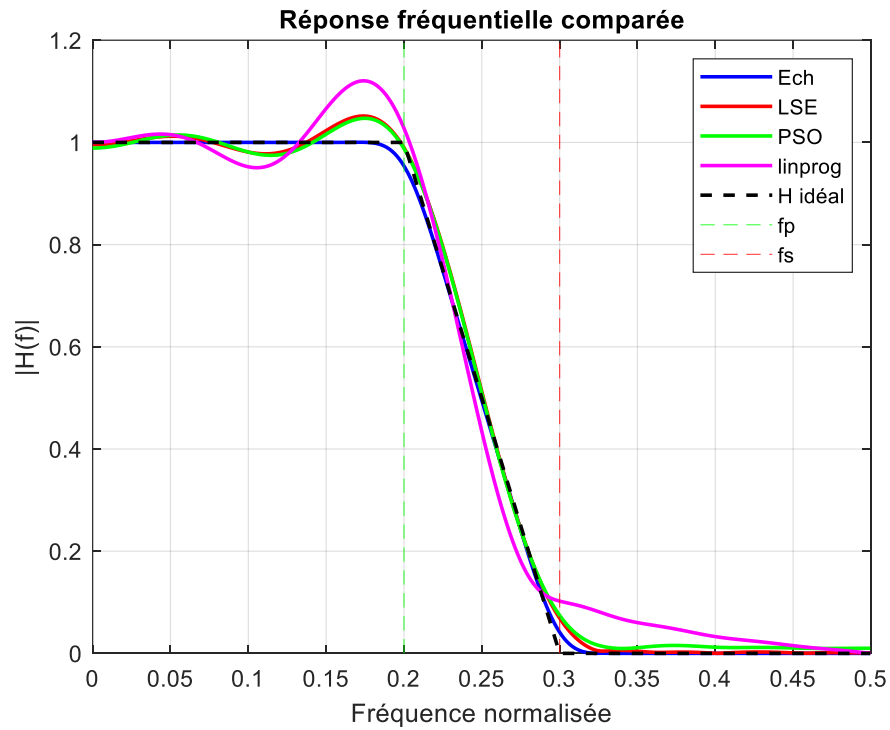
$N = 35$ ,  $f_p = 0.2$ ,  $f_s = 0.3$

- Les erreurs augmentent globalement à cause de la réduction de l'ordre N.
- LSE reste la plus stable, avec une erreur contrôlée.
- PSO et linprog voient leurs erreurs croître mais restent utilisables.
- Échantillonnage continue à produire des erreurs trop élevées.

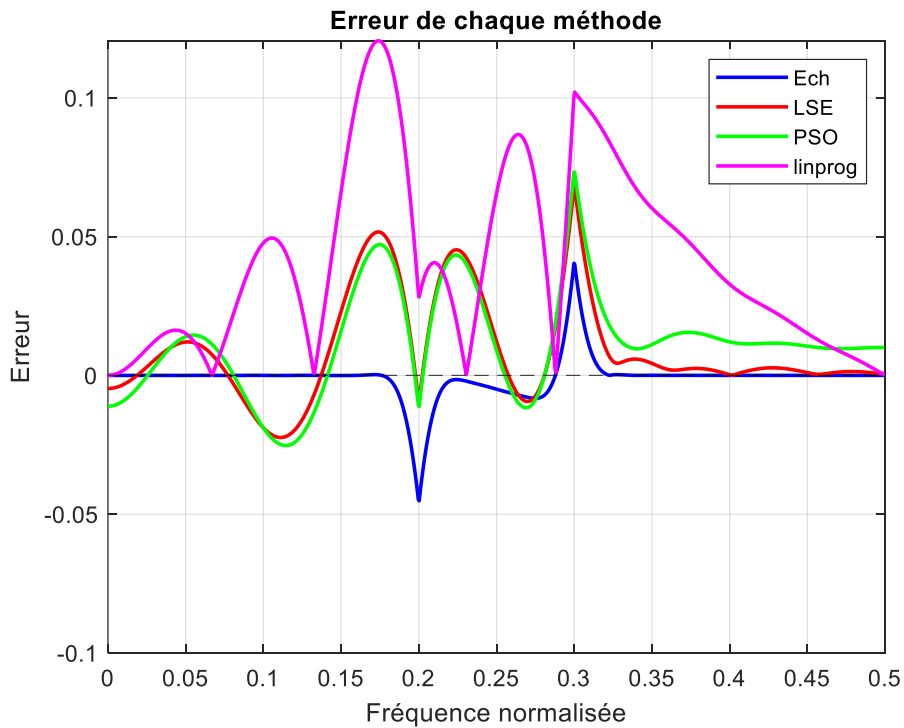
Aussi la même remarque que les commentaires précèdent même si avec un N réduit, LSE fournit les résultats les plus robustes.

**Cas 4 :**

Les graphes 4.25 et 26 ci-dessous ont été générés à l'aide des 4 méthodes pour un filtre RIF passe bas avec les paramètres mentionnés dans le tableau 4.10



**Figure 4.25 : Réponse fréquentielle de comparaison**



**Figure 4.26 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison**

Méthode	$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\varepsilon_p$ max	$\varepsilon_s$ max
LSE	0.2	0.3	16	10	5	10	0.0517	0.0676
PSO	0.2	0.3	16	10	5	10	0.0328	0.0428
linprog	0.2	0.3	16	10	5	10	0.1205	0.1021
Echantillonnage	0.2	0.3	16	10	5	10	0.0447	0.0401

Tableau 4.10: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF

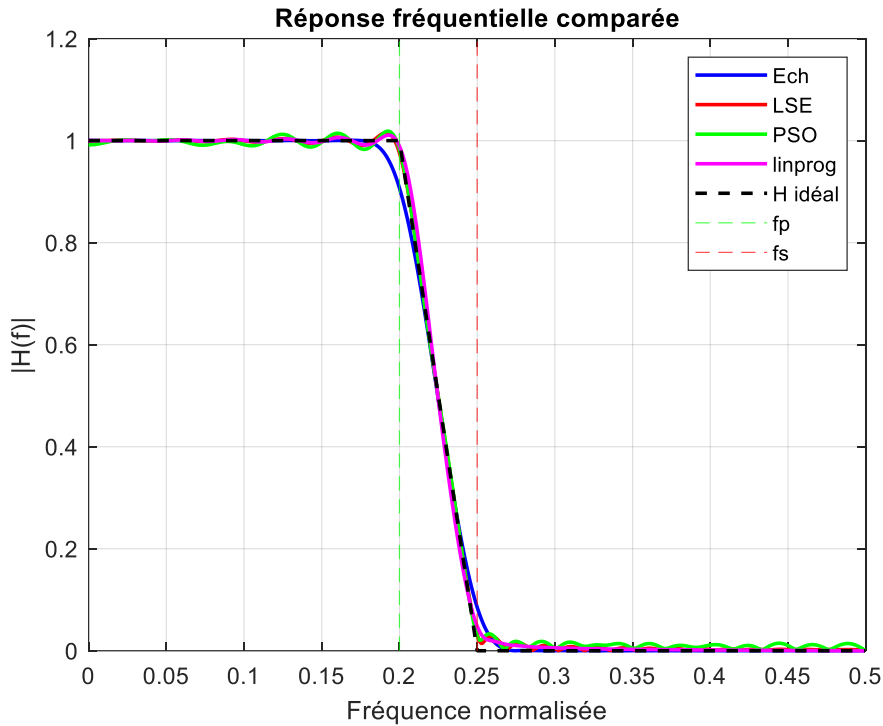
$N = 16$ ,  $f_p = 0.2$ ,  $f_s = 0.3$

- **PSO** devient meilleur que **LSE**, car il s'adapte mieux aux faibles ordres de filtre ( $\varepsilon_p = 0.0328$  contre 0.0517 pour LSE).
- **LSE** perd en efficacité avec cet ordre très faible.
- **linprog** montre des erreurs très élevées ( $\varepsilon_p = 0.1205$ ), le rendant peu fiable ici.
- **Échantillonnage** reste moyen mais meilleur que linprog dans ce cas.

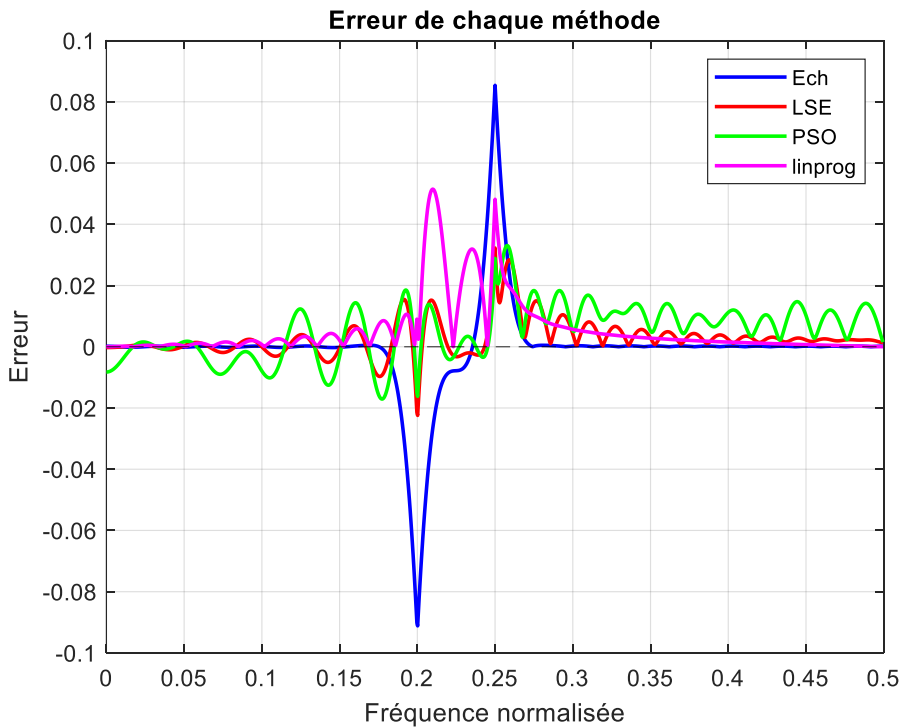
Finalement **PSO** est ici la méthode la plus efficace, surtout en cas de filtre très court.

**Cas 5 :**

Les graphes **4.27** et **28** ci-dessous ont été générés à l'aide des 4 méthodes pour un filtre RIF passe bas avec les paramètres mentionnés dans le tableau **4.11**



**Figure 4.27 : Réponse fréquentielle de comparaison**



**Figure 4.28 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison**

Méthode	$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\epsilon_p$ max	$\epsilon_s$ max
LSE	0.2	0.25	60	50	30	50	0.0214	0.0322
PSO	0.2	0.25	60	50	30	50	0.0178	0.0332
linprog	0.2	0.25	60	50	30	50	0.0106	0.0482
Echantillonnage	0.2	0.25	60	50	30	50	0.0901	0.0854

Tableau 4.11: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF

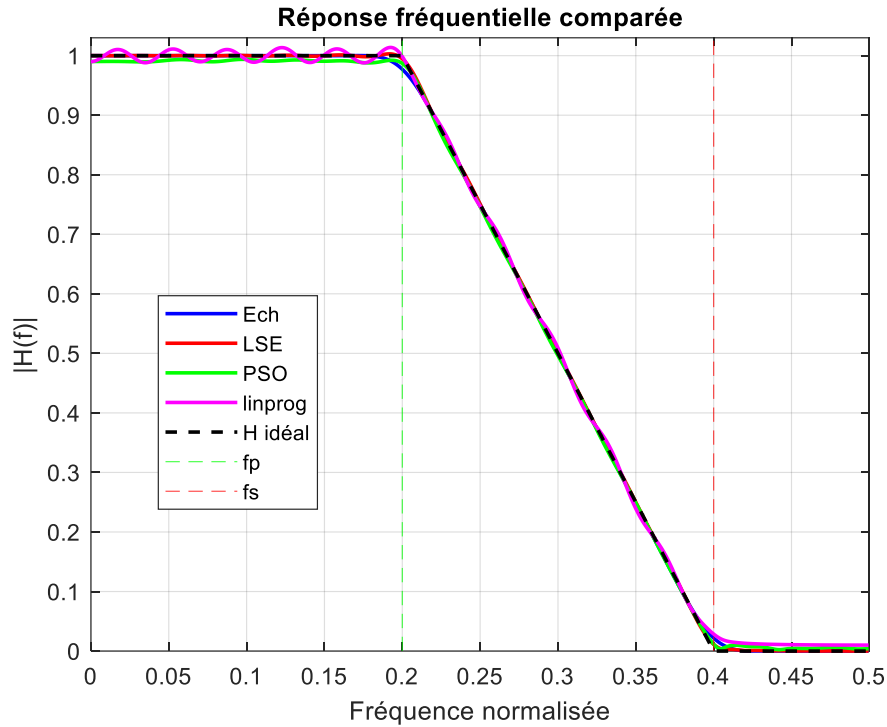
$N = 60$ ,  $f_p = 0.2$ ,  $f_s = 0.25$

- **linprog** donne la meilleure précision en bande passante ( $\epsilon_p = 0.0106$ ), mais une erreur atténuée plus élevée ( $\epsilon_s = 0.0482$ ).
- **PSO** reste équilibrée avec une erreur modérée dans les deux bandes.
- **LSE** a une bonne précision mais moins bonne qu'en Cas 1 ou 2.
- **Échantillonnage** reste très imprécis.

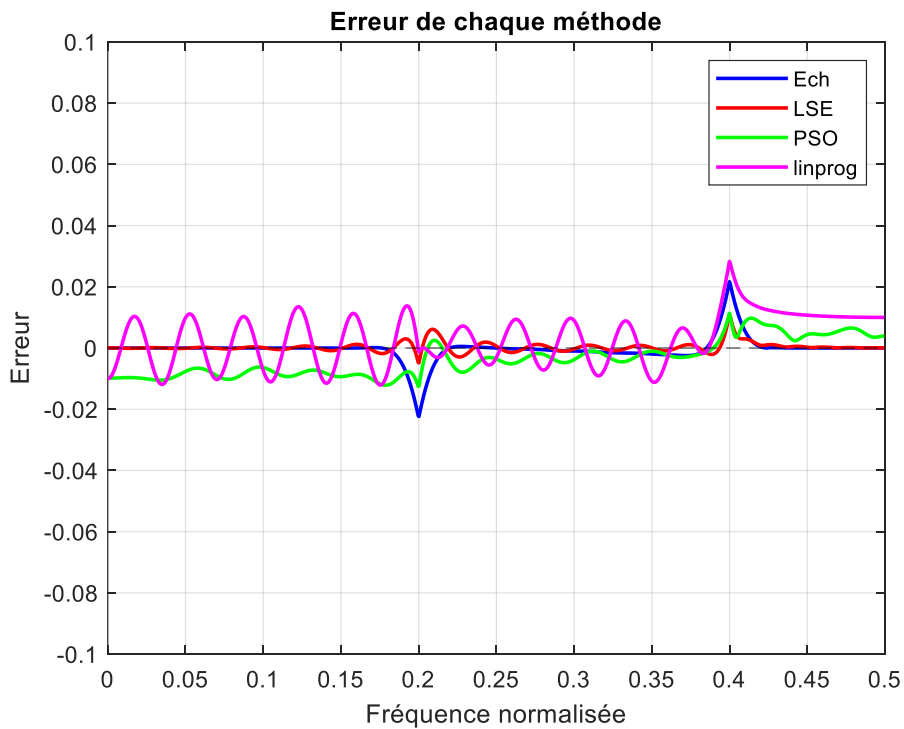
Dans ce cas **linprog** est intéressant ici si la bande passante est prioritaire, mais **PSO** offre le meilleur équilibre.

**Cas 6 :**

Les graphes 4.29 et 30 ci-dessous ont été générés à l'aide des 4 méthodes pour un filtre RIF passe bas avec les paramètres mentionnés dans le tableau 4.12



**Figure 4.29 : Réponse fréquentielle de comparaison**



**Figure 4.30 : Erreur de réponse fréquentielle de comparaison**

Méthode	$f_p$	$f_s$	N	$N_p$	$N_t$	$N_s$	$\epsilon_p$ max	$\epsilon_s$ max
LSE	0.2	0.4	60	50	30	50	0.0047	0.0104
PSO	0.2	0.4	60	50	30	50	0.0125	0.0104
linprog	0.2	0.4	60	50	30	50	0.0138	0.0277
Echantillonnage	0.2	0.4	60	50	30	50	0.0221	0.0210

Tableau 4.12: Comparaison des erreurs maximales selon la méthode d'optimisation du filtre RIF

$N = 60$ ,  $f_p = 0.2$ ,  $f_s = 0.4$

- LSE obtient ici les plus faibles erreurs absolues ( $\epsilon_p = 0.0047$ ,  $\epsilon_s = 0.0104$ ).
- PSO est très proche ( $\epsilon_s = 0.0104$  aussi).
- linprog présente une bonne erreur en passante, mais une atténuée plus haute.
- Échantillonnage est à nouveau le moins performant.

Le dernier cas on observe que LSE est de loin la méthode la plus précise, confirmant son efficacité pour des bandes plus larges.

### Conclusion de la comparaison :

L'analyse des six cas montre que :

- La méthode des moindres carrés (LSE) est la plus précise et stable pour les filtres de taille moyenne ou grande (Cas 1, 2, 3, 6).
- La méthode PSO est très efficace, surtout pour les filtres de faible ordre (Cas 4), où LSE devient moins performante.
- La programmation linéaire (linprog) peut offrir une bonne précision en bande passante, mais reste moins fiable en bande atténuée.
- La méthode d'échantillonnage est la moins précise dans tous les cas, avec des erreurs plus élevées.

LSE est la méthode de référence pour une haute précision, tandis que PSO constitue une excellente alternative, notamment en cas de contraintes sur la taille du filtre.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'implémentation et la simulation de filtres RIF à l'aide de différentes méthodes : fenêtres classiques (Hamming, Hann, Yagoubi), programmation linéaire, moindres carrés (LSE), PSO et échantillonnage.

L'analyse comparative a montré que la méthode des moindres carrés (LSE) offre les meilleures performances globales, malgré une légère distorsion en bande de transition. La méthode PSO s'est révélée efficace, notamment pour les filtres de faible ordre ou les cas complexes.

Par ailleurs, la fenêtre de Yagoubi s'est distinguée par sa forte sélectivité et ses ondulations réduites, en faisant un excellent choix pour la conception fréquentielle.

Ainsi, la combinaison LSE + fenêtre Yagoubi constitue une solution optimale pour concevoir des filtres RIF performants et précis.

## ***Conclusion générale***

Cette étude nous a permis d'élaborer et de mettre en œuvre des filtres numériques, en nous concentrant particulièrement sur les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF), en détaillant leurs types, leurs méthodes de conception et leurs principes de fonctionnement.

Nous avons tout d'abord rappelé les fondements essentiels du filtrage numérique, en abordant la convolution, les différentes transformations (Fourier,  $z$ ), ainsi que la classification des signaux. Cette base théorique a permis de mieux appréhender le comportement des systèmes linéaires et invariants dans le temps, condition indispensable à la compréhension des filtres numériques.

Ensuite, l'analyse s'est portée sur les principales caractéristiques des filtres numériques, en distinguant les filtres RIF des filtres RII, et en mettant en avant l'intérêt particulier des filtres RIF à phase linéaire pour certaines applications sensibles. Les filtres ont été définis aussi bien par leur réponse impulsionnelle que par leur réponse fréquentielle ou encore leurs équations aux différences, permettant ainsi leur conception selon des spécifications précises.

Nous avons poursuivi par l'étude des différentes techniques de conception des filtres RIF, allant des méthodes classiques basées sur le fenêtrage jusqu'aux approches plus récentes d'échantillonnage fréquentiel ou d'optimisation, comme la programmation linéaire, les moindres carrés ou les algorithmes inspirés de l'essaim particulaire. Chaque méthode a été examinée en termes de précision, de complexité et de flexibilité, mettant en évidence leurs avantages et leurs limites respectives.

Enfin, des simulations ont été réalisées pour évaluer concrètement les performances des méthodes étudiées, en analysant notamment les erreurs maximales dans les bandes passantes et les bandes d'arrêt. Les résultats ont montré l'efficacité de la méthode de Yagoubi pour le fenêtrage, ainsi que la puissance des techniques d'optimisation modernes pour la conception de filtres aux normes rigoureuses.

En perspective, il serait pertinent d'explorer des approches hybrides combinant les atouts des méthodes classiques avec ceux des techniques d'optimisation avancées. Une telle démarche pourrait notamment être appliquée à des problématiques concrètes, comme le filtrage de signaux physiologiques tels que l'ECG.

## Références bibliographiques

- [1] Duhamel, P., & Kieffer, M. (2013). *Traitement du signal – Signaux et systèmes*. Dunod.
- [2] Haykin, S., & Van Veen, B. (2007). *Signals and Systems*. Wiley.
- [3] A. Antoniou, *Digital filters: Analysis and design*, Mc Graw-hill, New York, 1979.
- [4] F. DE COULON, *Signal theory and processing*, Artech house, Washington, 1986 (dedham)
- [5] M. Labarrere, J.P. Krief & B. Gimonet, *Le filtrage numérique et ses applications*, Cepadus-édition, Toulouse, 1981.
- [6] M. Kunt, *Traitement numérique des signaux*, DUNOD Paris, 1981.
- [7] M. Bellanger, *Traitement numérique du signal*, Masson, Paris, 1987.
- [8] M. Kunt, *Traitement numérique des signaux*, Éditions DUNOD, Paris, 1981.
- [9] A. V. Oppenheim et A. S. Willsky, *Signals and Systems*, Prentice Hall, 2<sup>e</sup> édition, 1997.
- [10] Oppenheim, A. V., & Willsky, A. S. (1997). *Signals and Systems*. Prentice Hall.
- [11] Haykin, S., & Van Veen, B. (2003). *Signals and Systems*, 2nd Edition, Wiley.
- [12] Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing*, 4th Edition, Pearson.
- [13] Papoulis, A., & Pillai, S. U. (2002). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4th Edition, McGraw-Hill.
- [14] m.s.hadji, n. bouhafs, "étude et conception de filtre passe bande ultra large bande pour les systèmes de communication sans fil", université kasdi merbah ouargla, p17, mai 2017.
- [15] Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007).  
*Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 4th Edition, Pearson Education.
- [16] S. Haykin et B. Van Veen, *Signals and Systems*, 2<sup>e</sup> édition, John Wiley & Sons, 2007.
- [17] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2009.
- [18] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [19] Najim, Mohamed, ed. *Digital filters design for signal and image processing*. John Wiley & Sons, 2013.
- [20] Salman, Walid P., and Marc S. Solotareff. *Le filtrage numérique*. Paris : Eyrolles, 1982.
- [21] P. Duhamel et M. Vetterli, *Traitement numérique du signal*, Dunod, 2<sup>e</sup> édition, 1992.

- [22] Douglas F. Elliott., Handbook of digital signal processing engineering application. Academic press, INC. Sandiego. California 92101. 1987.
- [23] Emmanuel Duflos., Les filtres Numériques . ISEN-N4. Novembre 2002
- [24] A. Antoniou, *Digital Filters: Analysis, Design, and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [25] M. Bellanger, *Traitement numérique du signal*, Masson, Paris, 1987.
- [26] Oppenheim, A. V., & Schafer, R. W. (2010). *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd Edition, Pearson Education.
- [27] Rabiner, L. R., & Gold, B. (1975). *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice-Hall.
- [28] Ifeachor, E. C., & Jervis, B. W. (2002). *Digital Signal Processing: A Practical Approach*. Pearson.
- [29] H. Garnier, *Cours de traitement du signal*, Université de Lorraine. Disponible sur : <https://w3.cran.univ-lorraine.fr>
- [30] Université de Guelma, *Polycopié de travaux pratiques de traitement du signal*, Dspace Guelma. Disponible sur : <https://dspace.univ-guelma.dz>
- [31] Harris, F. J. (1978). *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proceedings of the IEEE.
- [32] D. Petoind, *Cours sur le traitement des signaux numériques*, Université Lyon 1. Disponible sur : [www.petoindominique.fr](http://www.petoindominique.fr)
- [33] Mémoire de Master – Université de M'Sila. *Conception de filtres non récurrents en utilisant les méthodes d'optimisation*. Accessible sur theses-algerie.com.
- [34] Antoniou, A. (2006). *Digital Signal Processing: Signals, Systems, and Filters*.
- [35] Garnier, H. (2020). *Cours de Traitement du Signal*, Université de Lorraine. Disponible sur: [w3.cran.univ-lorraine.fr](http://w3.cran.univ-lorraine.fr)
- [36] Antoniou, A. (2006). *Digital Signal Processing: Signals, Systems, and Filters*, McGraw-Hill.
- [37] Parks, T. W., & McClellan, J. H. (1972). *Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters*, IEEE Trans.
- [38] Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). *Particle Swarm Optimization*, IEEE International Conference on Neural Networks.

