RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
L'UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

Thèse présentée par :

Kaid Mohammed

Pour l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques.

Problèmes de type Robin à coefficient opérateur H pour une équation différentielle abstraite d'ordre deux de type elliptique régie par un opérateur A : Cadre non commutatif entre $-\sqrt{-A}$ et H dans divers espaces

Soutenue : le 23/06/2019

Devant le jury :

M. Dahmani Zoubir	**Pr**	**Université de Mostaganem**	**Président**
M. Medeghri Ahmed	**Pr**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
Mme. Limam Khira	**MCA**	**Université de Mostaganem**	**Examinatrice**
M. Benharrat Mohamed	**MCA**	**ENP Maurice Audin, d'Oran**	**Examinateur**
M. Cheggag Mustapha	**Pr**	**ENP Maurice Audin, d'Oran**	**Encadreur**
M. Labbas Rabah	**Pr**	**Université du Havre, France**	**Co-Encadreur**

Table des matières

Remerciements

Avant tout, louange à *ALLAH* le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce modeste travail. Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées à l'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis.

Je remercie infiniment mon encadreur Monsieur **Mustapha Cheggag,** Professeur à l'ENP d'Oran-Maurice Audin pour avoir accepté de m'encadrer et diriger cette thèse. Les nombreuses séances enrichissantes de travail, sa présence permanente ainsi que ses conseils m'ont été d'un grand apport pour l'aboutissement de cette thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude de me faire découvrir le monde de la recherche.

J'exprime également toute ma gratitude à mon co-encadreur de thèse, Monsieur **Rabah Labbas**, Professeur à l'université du Havre, France, son expérience, ses grandes compétences, sa finesse, ses nombreux conseils et ses remarques pertinentes ont permis l'accomplissement de ce travail. J'ai eu un grand plaisir à apprendre et à travailler à ses côtés. Je tiens aussi à remercier Monsieur **Stéphane Maingot**, Professeur à l'université du Havre, France, Pour sa précieuse collaboration et sa contribution enrichissante dans cette thèse.

J'ai le plaisir de remercier infiniment Monsieur **Zoubir Dahmani,** Professeur à l'université de Mostaganem de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je remercie vivement Monsieur **Ahmed Medeghri,** Professeur à l'université de Mostaganem, Monsieur **Mohammed Benharrat,** Maître de conférences à l'université Maurice Audin d'Oran, et Madame **Khira Limam,** Maître de conférences à l'université de Mostaganem, pour avoir accepté d'être examinateurs. En acceptant de faire partie de ce jury, ils me font un grand honneur.

Je voudrai aussi exprimer ma grande affection à toute ma famille, en particulier, mes parents, ma femme, mes enfants, mes frères et mes soeurs pour leur présence continue et leur soutien indéfectible.

Enfin, je remercie infiniment toutes les personnes qui m'ont soutenu et qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail et particulièrement, tous mes collègues de l'université de Mostaganem dont les membres du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA).

Introduction

0.1 Objectif principal de la thèse

On considère, dans un espace de Banach complexe X, les équations différentielles opérationnelles ou abstraites (en abrégé EDA) d'ordre deux de type elliptique avec des conditions aux limites de type Robin, dans un cadre non commutatif entre A et H. On entend ici par EDA, des équations différentielles à coefficients opérateurs linéaires (en général non bornés) sur l'espace X.

Les problèmes aux limites que l'on se propose d'étudier ici, consistent en l'équation différentielle

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

dans deux situations très différentes dont chacune comporte des difficultés :

1. Première situation : Les conditions aux limites sont de type Robin généralisé (c-à-d il y a un opérateur non borné H rendant délicat l'étude de l'équation) :

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

2. Deuxième situation : Les conditions aux limites sont non locales à coefficient opérateur :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{3}$$

Ici, A et H sont deux opérateurs linéaires fermés dans X, de domaines respectifs $D(A)$ et $D(H)$, u_0, u_1, $u_{1,0}$ et d_0 sont des éléments donnés dans X et ω est un paramètre spectral positif. Notre étude se fera dans deux espaces de Banach de géométrie différente, lorsque le second membre f appartient à l'une des deux classes suivantes :

$$L^p(0,1;X) \text{ avec } 1 < p < \infty,$$

et

$$C^\theta([0,1];X) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

On s'intéressera à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique pour les Problèmes (1)-(2) et (1)-(3) sous des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité des données u_0, u_1, $u_{0,1}$, d_0 et f. Pour des raisons de commodité, on va traiter l'équation (1) avec la notation

$$A_\omega = A - \omega I, \quad \omega \geqslant 0.$$

La principale difficulté et originalité de ce travail réside dans le fait que :

1. les opérateurs A et H ne commutent pas,
2. les conditions aux limites contiennent des opérateurs non bornés.

0.2 Aperçu historique

0.2.1 Cadre commutatif

Dans une série d'articles à partir de 2004, les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi (voir [17], [18] et [19]) se sont intéressés à l'équation différentielle opérationnelle

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \qquad x \in (0,1)\,, \tag{4}$$

sous des conditions aux limites de type Dirichlet

$$u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \tag{5}$$

où A et B sont des opérateurs linéaires fermés, dans un espace de Banach complexe X, vérifiant l'ellipticité de Krein (voir [30]) pour l'opérateur $A - B^2$ et certaines hypothèses de commutativité. Deux cadres ont été développés :

$$f \in L^p\left(0,1;X\right), \quad 1 < p < \infty,$$

et

$$f \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right), \quad \theta \in]0,1[.$$

Par la suite, à partir de 2008, les auteurs M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et A. Medeghri (voir [4], [5], [6] et [7]), ont étudié l'équation (4) mais cette fois-ci avec des conditions aux limites de type Robin généralisé

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{6}$$

où H est un opérateur linéaire fermé sur X. Ici aussi, l'étude a été réalisée dans les espaces $L^p\left(0,1;X\right)$, $1 < p < \infty$ et $C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$ avec $\theta \in]0,1[$. Les auteurs ont considéré les cas où B génère un groupe fortement continu sur X et celui où $L := B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ et $M := -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$ génèrent des semi-groupes analytiques sur X, commutent entre eux.

De même en 2013 et 2015, les auteurs H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot et A. Medeghri (voir [25] et [26]) ont traité le Problème (1)-(3) dans les deux espaces cités auparavant. Ils considèrent dans leur étude, en plus d'autres hypothèses, la condition de commutativité suivante :

$$\forall \zeta \in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta.$$

0.2.2 Cadre non commutatif

Dans les deux articles [15] et [16] apparus en 2012 et 2013, les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et M. Meisner ont étudié les deux problèmes

$$u''(x) + 2Bu'(x) + A_\omega u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + A_\omega u(x) = f(x), \; x \in (0,1)\,, \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1. \end{cases}$$

Pour cela, ils les ont réécrit sous forme

$$u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \frac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + (L_\omega - M_\omega)\, u'(x) + \dfrac{1}{4}\left((L_\omega - M_\omega)^2 - (L_\omega + M_\omega)^2\right) u(x) = f(x), \ x \in (0,1)\,, \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} L_\omega - M_\omega \subset 2B, \\ -\dfrac{1}{2}\,(M_\omega L_\omega + L_\omega M_\omega) \subset A_\omega, \end{cases}$$

et $L_\omega M_\omega \neq M_\omega L_\omega$.

En particulier, et sous l'hypothèse qui permet de définir $(B^2 - A_\omega)^{\frac{1}{2}}$, les opérateurs L_ω et M_ω sont définis comme suit

$$L_\omega = B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{\frac{1}{2}},\ M_\omega = -B - \left(B^2 - A + \omega I\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En 2017, les auteurs M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et K. Ould Melha (voir [9]), ont étudié le Problème (4)-(6) dans un cadre non commutatif, c'est-à-dire lorsque les opérateurs A et B ne commutent pas au sens des résolvantes.

0.3 Description des chapitres et résultats principaux

Cette thèse comporte quatre chapitres.

Le premier chapitre est dédié aux rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans cette thèse tels que des notions d'analyse fonctionnelle, certains résultats classiques sur la théorie des semi-groupes, les espaces d'interpolation, les puissances fractionnaires d'opérateurs et les intégrales de Dunford.

Le deuxième chapitre traite le Problème (1)-(2) lorsque $f \in L^p\,(0,1;X)\,,\ 1 < p < \infty$. Après avoir construit une formule de représentation de la solution grâce à un raisonnement heuristique, on donne les conditions nécessaires et suffisantes d'existence, d'unicité et de régularité optimale d'une solution classique du Problème (1)-(2), c'est-à-direc'est-à-dire une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} i)\ u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ ii)\ u(0) \in D(H), \\ iii)\ u \text{ satisfait (1)-(2)}. \end{cases}$$

Plus précisément, on suppose que

$$X \text{ est un espace de type } UMD. \tag{7}$$

et qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que les opérateurs linéaires fermés A_{ω_0} et H vérifient

$$\begin{cases} \exists C_0 > 0 : [0,+\infty[\, \subset \rho\,(A_{\omega_0})\,, \\ \text{et} \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\|\lambda\,(A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_0, \end{cases} \tag{8}$$

cette hypothèse implique que l'opérateur

$$Q_{\omega_0} = -\left(-A_{\omega_0}\right)^{1/2},$$

existe et génère un semi-groupe analytique $\left(e^{xQ_{\omega_0}}\right)_{x\geqslant 0}$ (voir A. V. Balakrishnan [1]).

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\theta_A \in]0,\pi[, \exists C \geqslant 1 : \forall s \in \mathbb{R}, \\ \left(-A_{\omega_0}\right)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \left\|\left(-A_{\omega_0}\right)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Ce^{\theta_A|s|}, \end{array}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\nu \in]0,\frac{1}{2}[, \exists C > 0 : \forall\mu > 0, D(A_{\omega_0}) \subset D(H) \\ \text{et } \left\|H\left(A_{\omega_0} - \mu I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{\left|\omega_0 + \mu\right|^{1/2+\nu}}, \end{array}\right. \tag{10}$$

et aussi, pour $1 < p < \infty$, l'hypothèse suivante :

$$Q_{\omega_0}\left(Q_{\omega_0} - H\right)^{-1}\left[\left(D\left(Q_{\omega_0}\right), X\right)_{1/p,p}\right] \subset \left(D\left(Q_{\omega_0}\right), X\right)_{1/p,p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},\infty}. \tag{11}$$

Pour avoir une représentation de la solution, on utilise celle du cas commutatif (voir Cheggag *et* al. [7], p. 63). On suppose qu'il existe une solution u au Problème (1)-(2) et on remplace u_1, d_0 et f dans la solution du cas commutatif par u_1^*, d_0^* et f^* et pour obtenir la représentation finale de la solution u, il faudra calculer ces inconnus.

Le résultat principal obtenu dans ce chapitre est le suivant :

Théorème 0.1 *On suppose que (7)∼(11) soient vérifiées. Soit* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. *Alors, il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le Problème (1)-(2) admet une unique solution classique* u *c'est-à-dire*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \ 1 < p < \infty,$$

$u(0) \in D(H)$ *et* u *vérifiant le Problème (1)-(2).*

2.

$$\Pi_\omega^{-1} d_0, u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, 1 < p < \infty,$$

avec

$$\Pi_\omega = \left(Q_\omega - H\right) + \left(Q_\omega + H\right)e^{2Q_\omega}.$$

Le Problème (1)-(2) est aussi traité pour le cas $\omega = 0$.

Le troisième chapitre concerne l'étude du Problème (1)-(2) mais cette fois-ci dans un cadre höldérien, c'est-à-dire

$$f \in C^\theta([0,1];X), \quad 0 < \theta < 1.$$

On s'intéressera à l'existence et l'unicité d'une solution classique du Problème (1)-(2) , c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)),$$

$u(0) \in D(H)$ et u satisfaisant le Problème (1)-(2) ainsi qu'à la régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire

$$u'',\ Au \in C^{\theta}([0,1]\,; X)\,,\ 0 < \theta < 1.$$

Les hypothèses considérées dans cette partie sont les suivantes :

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, les opérateurs linéaires fermés A_ω et H vérifient :

$$\begin{cases}]0,+\infty[\subset \rho(A_\omega)\,, \ker(A_\omega) = \{0\}\,,\ \overline{\mathrm{Im}(A_\omega)} = X, \\ \text{et } \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{12}$$

cette hypothèse implique que, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, $Q_\omega = -(-A_\omega)^{1/2}$ existe et génère un semi-groupe analytique généralisé $\left(e^{xQ_\omega}\right)_{x \geqslant 0}$ (voir A. V. Balakrishnan [1]).

On suppose également

$$D(A) \subset D(H)\,, \tag{13}$$

$$\begin{cases} \exists \nu \in]0, \tfrac{1}{2}[, \forall \omega \geqslant \omega_0,\ \exists C > 0 : \forall \mu > 0, \\ \text{et } \left\| H (A_\omega - \mu I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\omega + \mu|^{1/2+\nu}}, \end{cases} \tag{14}$$

les hypothèses (12)$\sim$(14) nous assurent l'existence de ω^* tel que, pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les opérateurs Λ_ω et Π_ω sont inversibles avec

$$\begin{cases} \Lambda_\omega = (Q_\omega - H) + e^{2Q_\omega}(Q_\omega + H) \\ \Pi_\omega = (Q_\omega - H) + (Q_\omega + H)\, e^{2Q_\omega}, \end{cases}$$

on suppose aussi que

$$\forall \xi \in D(Q_\omega);\quad Q_\omega \Lambda_\omega^{-1} \xi \in D(Q_\omega),\quad Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1} \xi \in (D(A), X)_{1-(\theta/2),\infty}\,. \tag{15}$$

Dans le cadre commutatif, les opérateurs Λ_ω et Π_ω sont égaux sur le domaine $D(Q_\omega)$. Les résultats principaux de ce chapitre sont :

Théorème 0.2 *On suppose (12)$\sim$(15). Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (1)-(2) admet une unique solution classique.*
2. u_1, $\Pi_\omega^{-1} d_0 \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} A_\omega u_1 - f(1) \in \overline{D(Q_\omega)} = \overline{D(A)}, \\ A_\omega \Pi_\omega^{-1} d_0 - f(0) \in \overline{D(Q_\omega)} = \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Théorème 0.3 *On suppose (12)$\sim$(15). Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (1)-(2) admet une solution classique et unique u qui satisfait la propriété de la régularité maximale*

$$u'',\ A_\omega u \in C^{\theta}([0,1]\,; X),\quad \theta \in]0,1[\,.$$

2. u_1, $\Pi_\omega^{-1} d_0 \in D(A)$ et

$$\begin{cases} A_\omega u_1 - f(1) \in (D(A), X)_{1-(\theta/2),\infty}, & \theta \in]0,1[, \\ A_\omega \Pi_\omega^{-1} d_0 - f(0) \in (D(A), X)_{1-(\theta/2),\infty}, & \theta \in]0,1[. \end{cases}$$

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse, cette fois-ci, pour $\omega \geqslant \omega_0$, au problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{16}$$

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de deux types de solutions du Problème (16) :

– Une solution classique du Problème (16), c'est-à-dire une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} i)\ u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ ii)\ u'(0) \in D(H), \\ iii)\ u \text{ satisfait } (16). \end{cases}$$

– Une solution semi-classique du Problème (16), c'est-à-dire une fonction u vérifiant, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$

$$\begin{cases} i)\ u \in W^{2,p}(0,1-\varepsilon;X) \cap L^p(0,1-\varepsilon;D(A)) \cap W^{1,p}(0,1;X) \\ ii)\ u'(0) \in D(H) \\ iii)\ u \text{ satisfait } (16). \end{cases}$$

Les hypothèses sur les opérateurs A et H sont :

$$X \text{ est un espace de type } UMD, \tag{17}$$

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \quad [0,+\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}), \\ \text{et } \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : (-A_{\omega_0})^{is} \in L(X) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_{A_{\omega_0}} \in]0,\pi[\\ \left\| (-A_{\omega_0})^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant C e^{\theta_{A_{\omega_0}} |s|}, \end{cases} \tag{19}$$

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \tag{20}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) \subset D(H), \tag{21}$$

et

$$\left((D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}\right) \subset \Lambda_\omega (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}; \tag{22}$$

où

$$\Lambda_\omega := I - e^{2Q_\omega} - 2HQ_\omega e^{Q_\omega}.$$

Lorsque Λ_ω est un opérateur inversible, l'hypothèse précédente est équivalente à

$$\Lambda_\omega^{-1} \left((D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}\right) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

On donne alors une représentation formelle de la solution dont l'analyse nous permet d'obtenir le principal résultat de cette section

Théorème 0.4 *On suppose (17)∼(22). Soient* $u_0, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$ *avec* $1 < p < \infty$*. Alors, il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega \geqslant \omega^*$*, le Problème (16) admet une unique :*

1. *solution semi-classique* u *si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ Q_\omega u_0 - \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\,ds \in D(H) \;\; et \\ \Lambda_\omega^{-1}\left[u_{1,0} - H\left(Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\,ds\right)\right] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

2. *solution classique* u *si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\,ds \in D(H) \;\; et \\ \Lambda_\omega^{-1}\left[u_{1,0} - H\left(Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\,ds\right)\right] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

où

$$\Lambda_\omega = I - e^{2Q_\omega} - 2HQ_\omega e^{Q_\omega}.$$

Le Problème (16) est aussi traité pour le cas $\omega = 0$.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs :

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Soient X, Y et Z des espaces de Banach.

Définition 1.1 *On dit qu'un opérateur A, défini de X dans Y est borné si*

$$D(A) = X \quad \textit{et} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < +\infty.$$

Définition 1.2 *On note $\mathcal{L}(X, Y)$ la collection de tous les opérateurs linéaires bornés de l'espace vectoriel normé X dans l'espace vectoriel normé Y. $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y, \qquad \forall A \in \mathcal{L}(X, Y).$$

On note $\mathcal{L}(X, X) := \mathcal{L}(X)$.

Proposition 1.1 *$\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach si et seulement si Y est un espace de Banach.*

Proposition 1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ alors $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Définition 1.3 *Soient $(A, D(A)), (B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y. On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B), \\ \forall x \in D(A), \; Ax = Bx. \end{cases}$$

Définition 1.4 *Soient $A : D(A) \subset X \to Y$ et $B : D(B) \subset Y \to Z$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur BA par*

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A) : \; Ax \in D(B)\}, \\ (BA)x = B(Ax), \qquad x \in D(BA). \end{cases}$$

Définition 1.5 *On définit le commutateur de deux opérateurs A et B sur X par*

$$\begin{cases} D([A,B]) = \{\varphi \in D(A) \cap D(B) : A\varphi \in D(B) \text{ et } B\varphi \in D(A)\}, \\ [A,B]\varphi = AB\varphi - BA\varphi, \ \varphi \in D([A,B]). \end{cases}$$

Définition 1.6 *On appelle* ensemble résolvant de A, *l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible à inverse borné dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.7 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est dit fermé si et seulement si, pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x, & \text{dans } X \\ Ax_n \underset{n\to+\infty}{\to} y, & \text{dans } Y, \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. Alors l'application $R_\lambda : \lambda \in \rho(A) \to R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est analytique sur $\rho(A)$.*

Proposition 1.4 *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire.*

1. Si A est un opérateur fermé, alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ l'opérateur $A + B : D(A) \subset X \to Y$ est fermé.

2. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.

3. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X.

4. Si A est un opérateur continu sur $D(A) \subset X$, alors A est fermé si et seulement si, son domaine est fermé.

5. Si $\rho(A) \neq \varnothing$, alors A est fermé.

Proposition 1.5 *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B : D(B) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tels que* $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$. *Alors $BA \in \mathcal{L}(X)$.*

Preuve. Il est clair que BA est définit sur X. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que

$$\begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x, & \text{dans } X \\ (BA)\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y & \text{dans } X. \end{cases}$$

Alors, comme $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in \mathcal{L}(X)$, on a :

$$\begin{cases} Ax_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Ax, & \text{dans } X, \\ B(Ax_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y, & \text{dans } X, \end{cases}$$

B étant fermé on a donc

$$Ax \in D(B) \quad \text{et} \quad B(Ax) = y,$$

d'où

$$x \in D(BA) \quad \text{et} \quad (BA)\, x = y,$$

de la définition 1.7, on déduit que BA est un opérateur fermé et défini sur X, par conséquent, selon le point 3. de la proposition 1.4, $BA \in \mathcal{L}(X)$.

1.1.3 Opérateurs sectoriels

Définition 1.8 *Soit* $0 < \omega \leq \pi$. *On définit le secteur suivant*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg z| < \pi - \omega\}.$$

Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si

$$\rho(A) \supset S_\omega,$$

et

$$\sup_{\lambda\in S_\omega} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty,$$

(voir Pazy [37]).

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.9 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ *une famille d'opérateurs linéaires dans* X. *On dit que cette famille forme un semi-groupe dans* X *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I_X$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t+s) = G(t)\, G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_t$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout s, t de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.10 *On dit qu'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \to G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continue, c'est-à-dire pour tout $x \in X$*

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Définition 1.11 *Un semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est appelé semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés si*

$$\lim_{t\to 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Proposition 1.6 *Si $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.12 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$, l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in X : \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \text{ existe}\right\}, \\ A\varphi = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h}, \qquad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$*) et est bien un sous espace vectoriel de X. A est linéaire de $D(A)$ dans X.*

Proposition 1.7 *Si $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$, alors*

1. *A est linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*
2. *$]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et $\forall \lambda \in]\omega, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,*

$$\left\|(A - \lambda I)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

où $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}.$$

Définition 1.13 *Soit* $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$. *Une famille* $\{G(z)\}_{z\in\Sigma_\alpha}$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(X)$ *forme un semi-groupe analytique de type* α *dans* X, *un espace de Banach complexe, si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. $G(0) = I$,

2. $\forall\ z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, tel que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$,

3. $\forall x \in X,\ \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_\alpha}} G(z)\, x = x$,

4. l'application $z \to G(z)$ est holomorphe sur Σ_α.

Le théorème suivant est un résultat de Balakrishnan [1]. Il donne une propriété très importante utilisée dans cette thèse.

Théorème 1.1 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé à domaine dense* $D(A)$ *dans* X *tel que*

$$]0,+\infty[\ \subset \rho(A) \ \text{ et } \ \exists M > 0 :\ \forall\lambda > 0, \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\lambda}.$$

Alors, il existe un secteur Σ_δ, $0 < \delta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, *tel que*

$$\Sigma_\delta \subset \rho(A) \ \text{ et } \forall\lambda \in \Sigma_\delta, \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}.$$

De plus, l'opérateur $(-A)^{\frac{1}{2}}$ *est bien défini et il existe un secteur* $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ *avec* $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, *tel que*

$$\Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right),$$

et $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ *génère un semi-groupe analytique.*

1.3 Les espaces d'interpolation

On donne ici certaines caractérisations des espaces d'interpolation dont on rappelle ci-dessous les principales (voir [11], [10] et [32]).

Définition 1.14 *Soit* X *un espace de Banach. On désigne par* $L^p_*(\mathbb{R}_+; X)$ *avec* $p \in [1,+\infty]$, *l'espace de Banach des fonctions* f *fortement mesurables définies pour presque tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X)} < +\infty,$$

avec la modification habituelle pour $p = +\infty$.

Définition 1.15 *Soient* $(X_0, \|.\|_0)$ *et* $(X_1, \|.\|_1)$ *deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé* X.

Pour $p \in [1,+\infty]$ *et* $\theta \in]0,1[$, *on dit que* $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\forall t > 0, \exists x_0(t) \in X_0,\ \exists x_1(t) \in X_1 \text{ tel que } x = x_0(t) + x_1(t), \\ ii)t^{-\theta}x_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X_0),\ t^{1-\theta}x_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.8 $\left(X_0 \cap X_1, \|.\|_{X_0 \cap X_1}\right)$, $\left(X_0 + X_1, \|.\|_{X_0+X_1}\right)$ *et* $\left((X_0, X_1)_{\theta,p}, \|.\|_{\theta,p}\right)$ *sont des espaces de Banach pour les normes respectives*

$$\begin{cases} \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} & si\ x \in X_0 \cap X_1, \\ \|x\|_{X_0+X_1} = \inf\limits_{x_i \in X_i, x_0+x_1=x} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right) & si\ x \in X_0 + X_1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \|x\|_{\theta,p} = \inf\limits_{\substack{u_i:\mathbb{R}_+ \to X_i, i=0,1 \\ \forall t>0, x=x_0(t)+x_1(t)}} \left(\left\|t^{-\theta} x_0\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X_0)} + \left\|t^{1-\theta} x_1\right\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X_1)}\right), \\ si\ x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}, \end{cases}$$

et de plus

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Notons que $(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}$.

1.3.1 Quelques espaces d'interpolation particuliers

Définition 1.16 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$, muni de sa norme du graphe :*

$$\forall\ x \in D(A),\ \ \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X .$$

En suivant les notations de P. Grisvard [11], pour $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$, on pose alors

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta,p} .$$

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta, p)$ comme suit :

Proposition 1.9 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $0 < \theta < 1$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.*

1. *Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

   $$\forall t > 0,\ \ \left\|(A - tI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{t},$$

   alors

   $$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X :\ t^\theta A (A - tI)^{-1} x \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X)\right\},$$

   (voir G. Da Prato et P. Grisvard [11]).
2. *Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X*

   $$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X :\ t^{-\theta}\left(e^{tA} - I\right) x \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X)\right\},$$

   (voir Lions [33]).
3. *Si maintenant A génère un semi-groupe analytique borné dans X, alors*

   $$D_A(\theta, p) = \left\{x \in X :\ t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L^p_*(\mathbb{R}_+; X)\right\}.$$

Notons que, d'après G. Da Prato et P. Grisvard (voir [11], page 383), on a

$$D_{A^m}(\theta,p) = D_A(m\theta,p),$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1,+\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Remarque 1.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner, pour $m \geqslant 1$, des caractérisations explicites de $(D(A^m), X)_{1/mp,p}$. On a*

$$(D(A^m), X)_{1/mp,p} = D_{A^m}(1-1/mp,p),$$

(voir P. Grisvard [20]) et grâce à la propriété de réitération (voir Lions-Peetre [32]), il s'ensuit pour $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} D_{A^m}(1-1/mp,p) &= D_A(m-1/p,p) \\ &= D_A(m-1+(1-1/p),p) \\ &= \left\{\varphi \in D\left(A^{m-1}\right) : A^{m-1}\varphi \in (D(A),X)_{1/p,p}\right\} \\ &= (D(A),X)_{(m-1)+1/p,p}. \end{aligned}$$

En particulier, on pose alors $m = 2$, en suivant les notations de P. Grisvard [20]

$$\begin{aligned} \left(D\left(A^2\right), X\right)_{1/2p,p} &= D_{A^2}(1-1/2p,p) \\ &= (D(A),X)_{1+1/p,p} \\ &= \left\{\varphi \in D(A) : A\varphi \in (D(A),X)_{1/p,p}\right\} \subset D(A). \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.3.2 Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplets d'espaces d'interpolation (X_0, X_1, X) et (Y_0, Y_1, Y) et un opérateur linéaire T de X dans Y. Alors on a le Théorème suivant :

Théorème 1.2 *On suppose que les restrictions de T aux espaces X_i à valeurs dans Y_i sont linéaires continues. Alors, pour tout $0 < \theta < 1$ et $p \in [1,+\infty]$, l'opérateur T est linéaire continu de $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ dans $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}\left((X_0,X_1)_{\theta,p},(Y_0,Y_1)_{\theta,p}\right)} \leqslant C\,\|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_0,Y_0)}\,\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(X_1,Y_1)}.$$

1.4 Les espaces UMD

On considère un espace de Banach X.

Définition 1.17 *Pour $\varepsilon \in]0,1[$ et $p \in]1,+\infty[$, on définit l'opérateur*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X)),$$

par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R};X), \quad (\mathcal{H}_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s}ds, \;\; p.p.\ x \in \mathbb{R},$$

Définition 1.18 *X est appelé espace UMD (Unconditional Martingale Differences), s'il existe $p \in]1, +\infty[$ tel que*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}; X), \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}; X). \tag{1.2}$$

Dans ce cas, l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}: & L^p(\mathbb{R}; X) & \to & L^p(\mathbb{R}; X) \\ & f & \to & \mathcal{H}\ f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon f \end{array}$$

est un élément de $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X))$, appelé la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R}; X)$.

Notons que si X est un espace UMD alors (1.2) est vraie pour tout $p \in]1, +\infty[$.

Corollary 1.1 *Un espace de Banach X est un espace UMD si est seulement si pour tout p $(1 < p < \infty)$, la transformation de Hilbert est continue de $L^p(\mathbb{R}; X)$ dans lui-même.*

Exemple 1.1 *Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD :*

1. *Tout espace de Hilbert est UMD.*
2. *Tout espace isomorphe à un espace UMD est UMD.*
3. *Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est UMD.*
4. *Si les espaces X et Y sont UMD alors les espaces interpolés (cas réel $(X, Y)_{\theta,p}$ ou complexe $[X, Y]_{\theta,p}$) sont des espaces de type UMD avec $1 < p < \infty$.*
5. *Tous les espaces construits sur $L^p(\mathbb{R}; X)$, $1 < p < \infty$, tel que X est un espace de type UMD sont de type UMD.*

1.5 Les espaces de Hölder

Définition 1.19 *Soient X un espace de Banach complexe et $C([0, 1]; X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans X muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_X.$$

L'ensemble des fonctions θ-höldériennes de $[0, 1]$ dans X est défini par

$$C^\theta([0, 1]; X) = \left\{ f \in C([0, 1]; X) / \sup_{t-s \neq 0; t,s \in [0,1]} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\theta} < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.10 *Soit $\theta \in]0, 1[$. Alors*

$$C^1([0, 1]; X) \subset C^\theta([0, 1]; X) \subset C([0, 1]; X).$$

Proposition 1.11 *$C^\theta([0, 1]; X)$ avec $\theta \in]0, 1[$ est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_{C^\theta([0,1];X)}$ définie par*

$$\|f\|_{C^\theta([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{t-s \neq 0; t,s \in [0,1]} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\theta}.$$

1.6 Quelques résultats importants

On a regroupé ici les résultats techniques utiles pour traiter les EDA.

Proposition 1.12 *Soit Q un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur X, $\left(e^{\xi Q}\right)_{\xi>0}$ non nécessairement continu en 0.*

1. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $\varphi \in X$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot Q}\varphi \in C^{\theta}\left([0,1];X\right).$
   (b) $\varphi \in (X, D(Q))_{\theta,\infty} = (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}.$
2. *Soit $\xi \in X$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (i) $e^{\cdot Q}\xi \in C\left([0,1];X\right).$
   (ii) $\xi \in \overline{D(Q)}.$
3. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$. On pose*
$$w_1(x,g) = \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds,\ x \in [0,1].$$
   Alors $w_1(.,g) \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$ et il existe $K>0$ tel que
$$\|w_1(.,g)\|_{C^{\theta}([0,1];X)} \leqslant K\|g\|_{C^{\theta}([0,1];X)}.$$
4. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$. On pose*
$$w_2(x,g) = \int_0^x e^{(x-s)Q}\left(g(s)-g(0)\right)ds,\ x \in [0,1],$$
   alors $w_2(.,g) \in C^{1+\theta}\left([0,1];X\right) \cap C^{\theta}\left([0,1];D(Q)\right).$
5. *Soient $\theta \in]0,1[$, $g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$ et $\varphi \in X$. On pose*
$$w(x,\varphi,g) = e^{xQ}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)Q} g(s)ds,\ x \in [0,1],$$
   alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $w(.,\varphi,g) \in C^{1+\theta}\left([0,1];X\right) \cap C^{\theta}\left([0,1];D(Q)\right).$
   (b) $\varphi \in D(Q)$ *et* $g(0)+Q\varphi \in (X,D(Q))_{\theta,\infty}.$
   En particulier, si $\varphi = 0_X$ et $g(0) \in (X,D(Q))_{\theta,\infty}$, $0<\theta<1$. Alors il existe $K>0$ tel que
$$\|Qw(.,\varphi,g)\|_{C^{\theta}([0,1];X)} \leqslant K\|g\|_{C^{\theta}([0,1];X)}.$$
6. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$. Alors*
$$I := Q\int_0^1 e^{sQ}\left(g(s)-g(0)\right)ds \in (X,D(Q))_{\theta,\infty}.$$
   En posant $\widetilde{g} = g(1-\cdot)$, alors
$$J := Q\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(\widetilde{g}(s)-\widetilde{g}(1)\right)ds \in (X,D(Q))_{\theta,\infty}.$$

7. *Soient* $\varphi \in X$ *et* $x \in [0,1]$, *alors*

$$\int_0^x e^{(x-s)Q}\varphi ds, \ \int_x^1 e^{(s-x)Q}\varphi ds \in D(Q).$$

L'assertion 3 est obtenue en appliquant la théorie des sommes de Da Prato-Grisvard [11].

L'assertion 4. qui améliore l'assertion 3. est due à E. Sinestrari [39], voir aussi Da Prato [10]. On trouve dans Guidetti [22], une preuve simple de ces résultats, voir Proposition 2.5 page 132, Corollaire 2.1 et Théorème 2.4, page 136.

Pour l'assertion 6, voir E. Sinestrari [39], Proposition 1.2, page 20.

Lemme 1.1 *Supposons que l'hypothèse (8) est réalisée et soit* Q *un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique* $(e^{tQ})_{t\geqslant 0}$, $\varphi \in X$, $p \in]1,+\infty[$, *on a*

1. $e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$,
2. $Q^n e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$ *si et seulement si* $\varphi \in (D(Q^n),X)_{\frac{1}{np},p}$.

Preuve. Pour la première, il suffit d'écrire pour tout $\varphi \in X$

$$\int_0^1 \left\|e^{tQ}\varphi\right\|^p dt \leq C\left\|\varphi\right\|^p < \infty,$$

où C est une constante.

Pour la deuxième, pour $\varphi \in (D(Q^n),X)_{\frac{1}{np},p}$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\|Q^n e^{tQ}\varphi\right\|^p dt &= \int_0^1 t^{n.\frac{1}{np}p}\left\|Q^n e^{xQ}\varphi\right\|^p \frac{dt}{t} \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \left\|t^{n.\left(1-\left(1-\frac{1}{np}\right)\right)}Q^n e^{tQ}\varphi\right\|^p \frac{dt}{t} \\
&\leqslant K\left\|\varphi\right\|_{(D(Q^n),X)_{\frac{1}{np},p}}, \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

et on rappelle que pour $0<\theta<1$, nous avons

$$(D(Q),X)_{\theta,p} = \left\{\xi \in X : \int_0^{+\infty} \left\|t^{\theta}Qe^{tQ}\xi\right\|^p \frac{dt}{t} < \infty\right\},$$

donc $Q^n e^{tQ}\varphi$ appartient à $L^p(0,1,X)$.

Réciproquement, si $Q^n e^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,1,X)$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left\|t^{n.\frac{1}{np}}Q^n e^{tQ}\varphi\right\|^p \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \left\|t^{n.\frac{1}{np}}Q^n e^{tQ}\varphi\right\|^p \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \left\|Q^n e^{tQ}\varphi\right\|^p dt \\
&= \left\|Q^n e^{tQ}\varphi\right\|^p_{L^p(0,1,X)} + \int_1^{+\infty} \left\|Q^n e^{tQ}\varphi\right\|^p dt,
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\int_{1}^{+\infty} \left\| Q^{n} e^{tQ} \varphi \right\|^{p} dt \leqslant C'^{p} \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{np}} \left\| \varphi \right\|^{p} dt,$$

où C' est une constante et alors

$$\begin{aligned} \int_{1}^{+\infty} \left\| Q^{n} e^{tQ} \varphi \right\|^{p} dt &\leqslant C'^{p} \left\| \varphi \right\|^{p} \left[\frac{t^{1-np}}{1-np} \right]_{1}^{+\infty} \\ &\leqslant \frac{C'^{p}}{np-1} \left\| \varphi \right\|^{p} < \infty, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

Lemme 1.2 *Soient $f \in L^{p}(0,1,X)$, $1 < p < +\infty$ et X un espace de type UMD. Si Q est un opérateur linéaire fermé vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

$$[0,+\infty[\subset \rho(Q) \ \ et \sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (Q - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \theta \in]0,\pi[, \exists C \geqslant 1 : \forall s \in \mathbb{R}, \\ (-Q)^{is} \in \mathcal{L}(X) \ \ et \ \left\| (-Q)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta |s|}, \end{array} \right.$$

on dit dans ce cas que $Q \in BIP(X,\theta)$ (Bounded Imaginary Power), alors

1.

$$x \to L(x,f) = Q \int_{0}^{x} e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \in L^{p}(0,1,X).$$

2.

$$x \to L(1-x, f(1-.)) = Q \int_{x}^{1} e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \in L^{p}(0,1,X).$$

3.

$$x \to \mathcal{L}(x,f) = Q \int_{0}^{1} e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \in L^{p}(0,1,X).$$

4.

$$\int_{0}^{1} e^{sQ} f(s) ds, \int_{0}^{1} e^{(1-s)Q} f(s) ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}.$$

5.

$$Q^{-1} \int_{0}^{1} e^{sQ} f(s) ds, Q^{-1} \int_{0}^{1} e^{(1-s)Q} f(s) ds \in (D(Q^{2}), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. 1) Pour la première assertion on va appliquer le théorème de Dore et Venni (voir [12]), à l'étude du problème

$$\begin{cases} v'(x) - Qv(x) = f(x), \text{ p.p. } x \in (0,1), \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Puisque X est un espace UMD et Q est un opérateur linéaire fermé dans X, vérifiant les hypothèses du théorème de Dore et Venni [12], alors pour tout $f \in L^p(0,1,X)$, le Problème (1.3) admet une solution unique classique v telle que

$$v \in W^{1,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1,D(Q)),$$

avec

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds, \text{ p.p. } x \in (0,1),$$

et donc

$$x \to Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,1,X).$$

2) Pour la deuxième application, on effectue le changement de variable

$$t = 1 - s \text{ et } y = 1 - x,$$

on obtient

$$\begin{aligned} L(1-x, f(1-.)) &= Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_x^1 e^{(1-x-(1-s))Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_0^y e^{(y-t)Q} f(1-t)\, dt \\ &= L(y, f(1-.)) \in L^p(0,1,X). \end{aligned}$$

3) Pour la troixième, on écrit pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,f) &= Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_0^x e^{(x+s)Q} f(s)\, ds + Q \int_x^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds \\ &= Q \int_0^x e^{(x-s)Q} e^{2sQ} f(s)\, ds + e^{2xQ} Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \\ &= L\left(x, \widetilde{f}\right) + e^{2xQ} L(1-x, f(1-.)) \in L^p(0,1,X), \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{f} = e^{2\cdot Q} f.$$

4) Pour la quatrième, on a

$$e^{\cdot Q} Q \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds = Q e^{\cdot Q} \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in L^p(0,1,X),$$

encore, on trouve

$$\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}.$$

5) Pour la cinquième, on a

$$\mathcal{L}(x,f) = Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s)\, ds = Q^2 e^{xQ} Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds,$$

alors

$$Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in \left(D\left(Q^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Similairement, puisque $f(1-\cdot) \in L^p(0,1;X)$ on trouve

$$Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(1-s)\, ds \in \left(D\left(Q^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

■

1.7 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs, en particulier la racine carrée d'un opérateur.

Soit A un opérateur linéaire fermé dans X, tel que $\rho(A)$ contient $]0,+\infty[$. S'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$,

$$\left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C < +\infty,$$

alors, on définit pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ et $x \in D(A)$, l'opérateur J^α par

$$J^\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (A - \lambda I)^{-1} (-A)\, x d\lambda$$

et pour $0 < \operatorname{Re}\alpha < 2$ et $x \in D(A^2)$ par

$$\begin{aligned} J^\alpha x &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \left((A-\lambda I)^{-1} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) (-A)\, x d\lambda \\ &\quad + (-A)\, x \sin\left(\pi \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

(voir Balakrishnan [1]).

Lemme 1.3 *Les opérateurs J^α admettent des extensions fermées et $(-A)^\alpha$ est la plus petite extension fermée de J^α (voir [1], p. 423)).*

Lemme 1.4 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que*

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \ \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \ \text{ et pour } \lambda \geqslant 0, \\ \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{1.4}$$

alors pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $-(-A)^\alpha$ défini précédemment génère un semi-groupe analytique $S_\alpha(t)$ défini par

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty (A - \lambda I)^{-1} g(\lambda, t; \alpha) d\lambda \quad \text{si } 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

où $g(\lambda, t; \alpha) = \dfrac{1}{\pi} \sin(t\lambda^\alpha \sin \pi\alpha) \exp(-t\lambda^\alpha \cos \pi\alpha)$ est analytique pour tout $t > 0$ (voir [1], p. 432).

Remarque 1.2 *Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ on obtient $S_{\frac{1}{2}}(t) = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (A - \lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda$.*

1.8 Calcul fonctionnel

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Définition 1.20 *(**formule de Cauchy intégrale**). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in H(U)$ et $z_0 \in K$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Définition 1.21 *(**Intégrale de Dunford**). Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$, γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A) et $f \in H(U)$. Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) (zI - A)^{-1} dz.$$

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ.

Définition 1.22 *Soient A un opérateur linéaire fermé et $\mathcal{H}(A)$ est l'espace des fonctions à variable complexe qui sont holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\lambda) (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où γ est une courbe sectorielle de Jordan entourant le spectre de l'opérateur A et $f \in \mathcal{H}(A)$.

Chapitre 2

Problème de Robin abstrait dans les espaces L^p : cadre non commutatif

Notre but dans ce chapitre est d'étudier l'équation différentielle opérationnelle elliptique du second ordre :

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{2.1}$$

munie des conditions aux limites de type Robin généralisé

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

où A et H sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X ne commutent pas, $f \in L^P(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$; d_0, u_1 sont des éléments donnés dans X. On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique du Problème (2.1)-(2.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ u(0) \in D(H), \end{array} \right.$$

et u satisfait le Problème (2.1)-(2.2).

2.1 Les hypothèses

On suppose que

$$X \text{ est un espace de type } UMD, \tag{2.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ [0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{array} \right. \tag{2.4}$$

cette hypothèse implique que

$$Q = -(-A)^{1/2},$$

existe et génère un semi-groupe analytique $\left(e^{xQ}\right)_{x \geqslant 0}$ (voir A. V. Balakrishnan [1]).

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \theta_A \in]0,\pi[, \exists C \geqslant 1 : \forall s \in \mathbb{R}, (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \\ \text{ et } \left\| (-A)^{is} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C e^{\theta_A |s|}, \end{array} \right. \tag{2.5}$$

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \tag{2.6}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) \subset D(H), \tag{2.7}$$

$$Q - H \text{ est inversible,} \tag{2.8}$$

on suppose également

$$0 \in \rho(\Lambda) \text{ et } 0 \in \rho(\Pi), \tag{2.9}$$

où

$$\begin{cases} \Lambda = (Q-H) + e^{2Q}(Q+H) \\ \Pi = (Q-H) + (Q+H)e^{2Q}. \end{cases}$$

Notons que, dans le cas commutatif, les opérateurs Λ et Π coïncident sur le domaine $D(Q) \cap D(H)$.

2.1.1 Conséquences des hypothèses

1. Si l'hypothèse (2.4) est satisfaite, alors $I - e^{2Q}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ (voir Lunardi [34]).
2. Les hypothèses (2.4) et (2.5) impliquent $-A \in BIP(X, \theta_A)$ (Bounded Imaginary Power) avec $0 \in \rho(A)$ (voir J. Pruss-H. Sohr [38] et grâce à M. Haase [24], Proposition 3.2.1, e) p. 71), on a
$$(-A)^{\frac{1}{2}} \in BIP(X, \theta_A/2),$$
et donc $-Q = (-A)^{\frac{1}{2}} \in BIP(X, \theta_A/2)$ (voir [4], Remarque 1, (6), p. 984).
3. Sous l'hypothèse (2.4), puisque Q est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur X on a, pour tout $\xi \in X, x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$
$$e^{xQ}\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q^k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) et Q^n e^{xQ} \in \mathcal{L}(X).$$
4. Les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [17], ont résolu le problème
$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2.10}$$
sous les mêmes hypothèses (2.3), (2.4) et (2.5). Ils ont obtenu le résultat suivant :
Le Problème (2.10) admet une unique solution classique u si et seulement si
$$u_0, \ u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} = (X, D(A))_{1-\frac{1}{2p},p}, \ 1 < p < \infty, \tag{2.11}$$
et u vérifiant le Problème (2.10).
5. Sous les hypothèses (2.4), (2.8) et (2.9), on a
$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} &= (Q-H)^{-1}(I+T)^{-1}(I+S)^{-1} \\ &= (Q-H)^{-1}\left(I - T(I+T)^{-1}\right)\left(I - S(I+S)^{-1}\right) \\ &= (Q-H)^{-1}(I+W), \end{aligned} \tag{2.12}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} T = 2e^{2Q}\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} Q\left(Q - H\right)^{-1} \in \mathcal{L}\left(X\right), \\ S = -e^{2Q} \in \mathcal{L}\left(X\right) \text{ et} \\ T\left(X\right), S\left(X\right), W\left(X\right) \subset \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} D(Q^k). \end{array}\right.$$

(voir Cheggag *et* al [6], Lemme 2.1, p. 4).

2.2 Lemmes techniques

Lemme 2.1 *Soient les hypothèses (2.4) et (2.7). Alors, l'opérateur* $(Q-H)^{-1}$ *est linéaire borné de l'espace* $(D(Q),X)_{\theta,q}$ *dans lui-même pour tout* $\theta \in [0,1]$ *et* $q \in [1,\infty]$.

Preuve. En utilisant la Proposition 1.5, alors $Q\left(Q-H\right)^{-1}$ est un opérateur linéaire continu de X dans X. On obtient donc

$$\left(Q-H\right)^{-1} \in \mathcal{L}\left(D(Q), D(Q)\right),$$

(ici $D(Q)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe). Alors, en utilisant le Théorème 1.2, il vient

$$\left(Q-H\right)^{-1} \in \mathcal{L}\left(\left(D(Q), X\right)_{\theta,q}\right),$$

pour tout $\theta \in [0,1]$ et $q \in [1,\infty]$ (voir [34], p.19).

■

En plus des hypothèses (2.4)∼(2.8), afin d'avoir la régularité optimale de la solution, on aura besoin de la condition supplémentaire suivante :

$$Q\left(Q-H\right)^{-1}\left[\left(D\left(Q\right),X\right)_{1/p,p}\right] \subset \left(D\left(Q\right),X\right)_{1/p,p}, 1<p<\infty. \tag{2.13}$$

2.3 Représentation de la solution

Dans ce travail, il s'agit en particulier de prolonger et d'améliorer le travail de M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et A. Medeghri (voir [4]), la formule de représentation trouvée, quand Q et H commutent, est écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= \left(e^{xQ} - e^{(2-x)Q}\right)\Lambda^{-1} d_0 + e^{(1-x)Q} u_1 \\ &\quad + \left(e^{xQ} - e^{(2-x)Q}\right) Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{xQ} Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 \left(e^{sQ} - e^{(2-s)Q}\right) f\left(s\right) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{(2-x)Q} Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 \left(e^{sQ} - e^{(2-s)Q}\right) f\left(s\right) ds \\ &\quad - e^{(1-x)Q}\frac{1}{2} Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q} f\left(s\right) ds + \frac{1}{2} Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} f\left(s\right) ds + \frac{1}{2} Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q} f\left(s\right) ds. \end{aligned}$$

La formule de représentation précédente pourra s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= T(x)\Lambda^{-1}d_0 + e^{(1-x)Q}u_1 \\ &+T(x)Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &+\frac{1}{2}T(x)Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\left(s\right)ds \\ &-e^{(1-x)Q}I\left(1\right)+I\left(x\right)+J\left(x\right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

où

$$\begin{cases} T(x) = e^{xQ} - e^{(2-x)Q}, \\ I\left(x\right) = \dfrac{1}{2}Q^{-1}\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)Q}f\left(s\right)ds, \\ J(x) = \dfrac{1}{2}Q^{-1}\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)Q}f\left(s\right)ds. \end{cases}$$

En remplaçant la fonction f et les données u_1, d_0 dans (2.14) par f^*, u_1^* et d_0^*, on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= T(x)\Lambda^{-1}d_0^* + e^{(1-x)Q}u_1^* \\ &+T(x)Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1^* \\ &+\frac{1}{2}T(x)Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*\left(s\right)ds \\ &-e^{(1-x)Q}I\left(1\right)+I\left(x\right)+J(x). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Le but est de déterminer les inconnues u_1^*, d_0^* et f^*en utilisant les conditions aux limites (2.2).

2.3.1 Le calcul de u_1^* :

Notons que $T(1) = J(1) = 0$, alors pour $x = 1$, on obtient

$$u\left(1\right) = u_1^* - I\left(1\right) + I\left(1\right),$$

il s'ensuit que

$$u_1^* = u(1) = u_1.$$

2.3.2 Le calcul de d_0^* :

Par un calcul analogue, pour $x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} u\left(0\right) &= T(0)\Lambda^{-1}d_0^* + e^{Q}u_1 \\ &+T(0)Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &+\frac{1}{2}T(0)Q^{-1}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*\left(s\right)ds \\ &-e^{Q}I\left(1\right)+J(0). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Le fait que $T(0) = I - e^{2Q}$ et

$$\begin{aligned} J(0) - e^{Q} I(1) &= \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds - \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^1 e^{(2-s)Q} f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^1 T(s)\, e^{sQ} f(s)\, ds \end{aligned}$$

la formule (2.16) peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u(0) &= T(0)\Lambda^{-1} d_0^* \\ &\quad + Q^{-1} \left[\Lambda + \left(I - e^{2Q}\right)(Q+H)\right] \Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} Q^{-1} \left[\Lambda + \left(I - e^{2Q}\right)(Q+H)\right] \Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f^*(s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.17}$$

On a

$$\begin{aligned} & \Lambda + \left(I - e^{2Q}\right)(Q+H) \\ = {} & (Q-H) + e^{2Q}(Q+H) + (Q+H) - e^{2Q}(Q+H) \\ = {} & 2Q, \end{aligned} \tag{2.18}$$

en introduisant (2.18) dans la formule de (2.17), on trouve

$$u(0) = T(0)\Lambda^{-1} d_0^* + 2\Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 + \Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f^*(s)\, ds.$$

On remarque que ce dernier terme appartient à $D(H)$, en appliquant l'opérateur H à $u(0)$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} Hu(0) &= HT(0)\Lambda^{-1} d_0^* + 2H\Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 \\ &\quad + H\Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f^*(s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.19}$$

En dérivant la fonction u, on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u'(x) &= Q\left(e^{xQ} + e^{(2-x)Q}\right)\Lambda^{-1} d_0^* - Q e^{(1-x)Q} u_1 \\ &\quad + \left(e^{xQ} + e^{(2-x)Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(e^{xQ} + e^{(2-x)Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f^*(s)\, ds \\ &\quad + Q e^{(1-x)Q} I(1) + Q I(x) - Q J(x). \end{aligned}$$

Pour $x=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
u'(0) &= Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* - Qe^{Q}u_1 \\
&\quad+\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\
&\quad+\frac{1}{2}\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds \\
&\quad+Qe^{Q}I(1)-QJ(0).
\end{aligned}$$

La formule précédente peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
& u'(0) \\
=\ & Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* + \left[\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)-\Lambda\right]\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\
& +\frac{1}{2}\left[\left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)-\Lambda\right]\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds,
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \left(I+e^{2Q}\right)(Q+H)-\Lambda \\
=\ & (Q+H)+e^{2Q}(Q+H)-(Q-H)-e^{2Q}(Q+H) \\
=\ & 2H,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
u'(0) &= Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\
&\quad+H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

En exploitant les conditions aux limites (2.2), on trouve

$$\begin{aligned}
& u'(0)-Hu(0) \\
=\ & Q\left(I+e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 + H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds \\
& -H\left(I-e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* - 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 - H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f^*(s)\,ds,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
u'(0)-Hu(0) &= \left[Q\left(I+e^{2Q}\right)-H\left(I-e^{2Q}\right)\right]\Lambda^{-1}d_0^* \\
&= \left(Q-H+(Q+H)e^{2Q}\right)\Lambda^{-1}d_0^* \\
&= \Pi\Lambda^{-1}d_0^* \\
&= d_0,
\end{aligned}$$

où

$$\Pi = Q - H + (Q + H)\, e^{2Q},$$

on déduit alors

$$d_0^* = \Lambda\Pi^{-1} d_0.$$

2.3.3 Le calcul de f^* :

En dérivant deux fois la fonction u donnée par la formule (2.15), on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
u''(x) &= Q^2 T(x)\Pi^{-1} d_0 + Q^2 e^{(1-x)Q} u_1 \\
&\quad + Q^2 T(x) Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} Q^2 T(x) Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f^*(s)\, ds \\
&\quad - Q^2 e^{(1-x)Q} I(1) + Q^2 I(x) + Q^2 J(x) + f^*(x) \\
&= Q^2 u(x) + f^*(x),
\end{aligned}$$

et le fait que

$$A = -Q^2,$$

et

$$u''(x) + Au(x) = f(x),$$

on obtient alors, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$f^*(x) = f(x).$$

Finalement, en remplaçant u_1^*, d_0^* et f^* par leur expression dans la formule (2.15), on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
u(x) &= T(x)\,\Pi^{-1} d_0 + e^{(1-x)Q} u_1 \\
&\quad + T(x)\, Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} T(x)\, Q^{-1} (Q+H)\, \Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f(s)\, ds \qquad (2.21) \\
&\quad - e^{(1-x)Q} I(1) + I(x) + J(x).
\end{aligned}$$

Remarque 2.1 *On peut aussi trouver la formule de représentation de la solution (2.21) en utilisant la méthode de la réduction d'ordre de Krein [30], (voir le chapitre 4).*

2.4 Régularité de la solution

Pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité de la solution du Problème (2.1)-(2.2), on étudira la régularité de la formule de représentation de la solution (2.21).

Rappelons que

$$T(x) = e^{xQ} - e^{(2-x)Q},$$

donc, la formule (2.21) peut être écrite comme suit

$$u\,(.) = S(., d_0, u_1, f) + R(., d_0, u_1, f), \tag{2.22}$$

où $S(., d_0, u_1, f)$ est la partie singulière donnée par

$$S(., d_0, u_1, f) = S_1(., d_0, u_1) + S_2(., f),$$

avec, pour presque tout $x \in (0, 1)$

$$S_1(x, d_0, u_1) = e^{xQ}\Pi^{-1}d_0 + e^{(1-x)Q}u_1, \tag{2.23}$$

et

$$\begin{aligned} S_2(x, f) &= \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\,(Q + H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\,(s)\,ds \\ &\quad + e^{xQ}Q^{-1}\,(Q + H)\,\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}I(1) + I(x) + J(x), \end{aligned} \tag{2.24}$$

et $R(., d_0, u_1, f)$ est la partie régulière donnée, pour presque tout $x \in (0, 1)$, par

$$\begin{aligned} R(x, d_0, u_1, f) &= -e^{(2-x)Q}Q^{-1}\,(Q + H)\,\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad - e^{(2-x)Q}\Pi^{-1}d_0 - \frac{1}{2}e^{(2-x)Q}Q^{-1}\,(Q + H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\,(s)\,ds, \end{aligned} \tag{2.25}$$

Lemme 2.2 *On suppose (2.4) et (2.7). Soient $d_0, u_1 \in X$ et*

$$f \in L^p(0, 1; X), 1 < p < \infty.$$

Alors, on a

$$AR(\cdot, d_0, u_1, f) \in L^p(0, 1; X).$$

Preuve. En utilisant (2.25), on a

$$\begin{aligned} AR(., d_0, u_1, f) &= -Ae^{(2-\cdot)Q}Q^{-1}\,(Q + H)\,\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad - Ae^{(2-\cdot)Q}\Pi^{-1}d_0 - \frac{1}{2}Ae^{(2-\cdot)Q}Q^{-1}\,(Q + H)\,\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)e^{sQ}f\,(s)\,ds. \end{aligned}$$

Il est clair que
$$e^{(2-.)Q}=e^{Q}e^{(1-.)Q},$$
en plus
$$\forall\phi\in X,\quad e^{Q}\phi\in\bigcap_{k=1}^{\infty}D\left(Q^{k}\right),$$
on peut alors, vérifier facilement que l'opérateur $AR(.,d_0,u_1,f)$ peut être écrit sous forme d'une somme des termes
$$e^{(1-\cdot)Q}Ae^{Q}P_j\xi_j,\quad j=1,...,3,$$
où $(P_j)_{j=1,3}$ sont des opérateurs bornées et les autres termes $\left(\xi_j\right)_{j=1,3}$ sont des éléments de X. ■

2.4.1 Régularité de $S_2(.,f)$

Pour étudier la régularité de la fonction $S_2(\cdot,f)$, on a besoin du résultat suivant :

Lemme 2.3 *On suppose (2.4),(2.8), (2.7) et (2.13). Soit* $\varphi\in(D(Q),X)_{\frac{1}{p},p}$, $p\in\,]0,\infty[$. *Alors, on a*
$$(Q\pm H)\Lambda^{-1}\varphi\in(D(Q),X)_{\frac{1}{p},p}.$$

Preuve. On a
$$\begin{aligned}(Q+H)\Lambda^{-1}&=\left[Q+H+Q-H+e^{2Q}(Q+H)-\Lambda\right]\Lambda^{-1}\\&=2Q\Lambda^{-1}+e^{2Q}(Q+H)\Lambda^{-1}-I,\end{aligned}$$
en utilisant la formule 2.12, il vient
$$(Q+H)\Lambda^{-1}=2Q(Q-H)^{-1}(I+W)+e^{2Q}(Q+H)\Lambda^{-1}-I,$$
avec
$$W(X)\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}D(Q^{k}),$$
et d'après l'hypothèse (2.13), on obtient
$$\forall\varphi\in(D(Q),X)_{\frac{1}{p},p},\quad(Q+H)\Lambda^{-1}\varphi\in(D(Q),X)_{\frac{1}{p},p}.\tag{2.26}$$
D'autre part, nous avons
$$(Q-H)\Lambda^{-1}=I-e^{2Q}(Q+H)\Lambda^{-1},$$
il en découle de (2.26) qu'on a aussi
$$\forall\varphi\in(D(Q),X)_{\frac{1}{p},p},\quad(Q-H)\Lambda^{-1}\varphi\in(D(Q),X)_{\frac{1}{p},p}.$$

■

Lemme 2.4 *On suppose (2.3)∼(2.9) et (2.13). Soit* $u_1 \in X$ *et*

$$f \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty.$$

Alors, on a

$$AS_2(.,f) \in L^p\left(0,1;X\right), 1 < p < \infty.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} AS_2(x,f) &= -\frac{1}{2}Qe^{xQ}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\left(s\right)ds \\ &\quad -Qe^{xQ}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}Q^2e^{(1-x)Q}I(1) - Q^2I(x) - Q^2J(x), \end{aligned}$$

d'où, d'après le Lemme 1.2, on écrit la formule précédente sous forme

$$\begin{aligned} & AS_2(x,f) \\ = \; & -\frac{1}{2}Qe^{xQ}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\left(s\right)ds \\ & -Qe^{xQ}\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ & +\frac{1}{2}Q^2e^{(1-x)Q}I(1) - \frac{1}{2}L\left(x,f\right) - \frac{1}{2}L\left(1-x,f(1-.)\right). \end{aligned}$$

avec

$$\int_0^1 T(s)f\left(s\right)ds \in \left(D\left(Q\right),X\right)_{\frac{1}{p},p}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$I\left(1\right) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f\left(s\right)ds \in \left(D\left(Q^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p} = \left(D\left(A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p},$$

et

$$L\left(\cdot,f\right) - L\left(1-\cdot,f(1-.)\right) \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty.$$

En utilisant le Lemme 2.3, on obtient

$$\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f\left(s\right)ds \in \left(D\left(Q\right),X\right)_{\frac{1}{p},p},$$

et, d'autre part, on a

$$e^{Q}Qu_1 \in \left(D\left(Q\right),X\right)_{\frac{1}{p},p}, \quad 1 < p < \infty,$$

on en déduit alors

$$\left(Q+H\right)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \in \left(D\left(Q\right),X\right)_{\frac{1}{p},p}, \quad 1 < p < \infty,$$

en vertu de l'assertion 2. du Lemme 1.1, on conclut que $AS_2(.,f) \in L^p\left(0,1;X\right), 1 < p < \infty.$
■

2.5 Résultat principal

Le résultat principal obtenu dans ce chapitre est le suivant :

Théorème 2.1 *On suppose (2.3)∼(2.9) et (2.13). Soit* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. *Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le Problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution classique* u, *c'est-à-dire*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)),\ 1 < p < \infty,$$

$u(0) \in D(H)$ *et* u *vérifiant le Problème (2.1)-(2.2) avec* u *donnée par (2.21)*

2. $$\Pi^{-1}d_0, u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p},\ 1 < p < \infty,$$

où

$$\Pi = (Q - H) + (Q + H)e^{2Q}.$$

Preuve.

1) D'après les Lemmes 2.2 et 2.4 , on a

$$AR(\cdot, d_0, u_1, f),\ AS_2(., f) \quad \in L^p(0,1;X),\ 1 < p < \infty,$$

et

$$S_1(., d_0, u_1) = u(.) - R(., d_0, u_1, f) - S_2(., f),$$

où

$$S_1(., d_0, u_1),\quad S_2(., f) \text{ et } R(., d_0, u_1, f),$$

sont données par (2.23), (2.24) et (2.25) respectivement. Il suffit donc de montrer que

$$AS_1(., d_0, u_1) \in L^p(0,1;X),\ 1 < p < \infty.$$

Grâce à (2.23), nous avons

$$AS_1(x, d_0, u_1) = -Q^2 e^{xQ}\Pi^{-1}d_0 - Q^2 e^{(1-x)Q}u_1.$$

En vertu de (2.11), on a

$$u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p},\ 1 < p < \infty,$$

alors, en utilisant le Lemme 1.1, assertion 2, on trouve

$$Q^2 e^{(1-.)Q}u_1 \in L^p(0,1;X),\ 1 < p < \infty,$$

donc, la fonction $AS_1(., d_0, u_1)$ appartient à $L^p(0,1;X)$ si et seulement si

$$Q^2 e^{\cdot Q}\Pi^{-1}d_0 \in L^p(0,1;X),$$

qui est équivalente à

$$\Pi^{-1}d_0 \in (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p},p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

2) Maintenant, si u est une solution classique de (2.1)-(2.2) et $\widetilde{u}$ désigne une autre solution, alors pour presque tout $x \in (0,1)$, on a $v = u - \widetilde{u}$ est une solution de l'équation

$$v''(x) + Av(x) = 0,$$

avec des conditions aux limites

$$v'(0) - Hv(0) = 0,\ v(1) = 0.$$

Grâce à la méthode de S. G. Krein [30], on rappelle que le Problème (2.1)-(2.2) admet une solution $v \in C^1([0,1]\,;X)$ déterminée, pour presque tout $x \in [0,1]$, par

$$v(x) = e^{xQ} y_0 + e^{(1-x)Q} z_1,$$

avec $y_0, z_1 \in D(Q)$ (voir [4]), nous avons

$$v(0) = y_0 + e^{Q} z_1 \in D(Q) \cap D(H).$$

Maintenant, en dérivant la fonction v, on trouve pour presque tout $x \in (0,1)$

$$v'(x) = Qe^{xQ} y_0 - Qe^{(1-x)Q} z_1.$$

En utilisant les conditions aux limites, on trouve

$$v'(0) - Hv(0) = \left(Qy_0 - Qe^{Q} z_1\right) - H\left(y_0 + e^{Q} z_1\right) = 0,$$

ainsi que

$$v(1) = e^{Q} y_0 + z_1 = 0,$$

par la suite on obtient

$$z_1 = -e^{Q} y_0,$$

il vient donc

$$\begin{aligned} 0 &= \left(Qy_0 + Qe^{Q}\left(e^{Q} y_0\right)\right) - H\left(y_0 - e^{Q}\left(e^{Q} y_0\right)\right) \\ &= \left(Qy_0 + Qe^{2Q} y_0\right) - H\left(y_0 - e^{2Q} y_0\right) \\ &= \left[Q\left(I + e^{2Q}\right) - H\left(I - e^{2Q}\right)\right] y_0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(I + e^{2Q}\right)\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} Q - H\right]\left(I - e^{2Q}\right) y_0 \\ &= \left(I - e^{2Q}\right)^{-1}\left[\left(I + e^{2Q}\right) Q - \left(I - e^{2Q}\right) H\right]\left(I - e^{2Q}\right) y_0 \\ &= \left(I - e^{2Q}\right)^{-1} \Lambda \left(I - e^{2Q}\right) y_0, \end{aligned}$$

ce qui donne $y_0 = 0, z_1 = 0$ et donc $v = 0$, ainsi $u = \widetilde{u}$.

3) On montre maintenant que l'application u donnée par l'équation (2.21) est bien solution du Problème (2.1)-(2.2). On obtient pour p.p. $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u''(x) &= Q^2 T(x) \Pi^{-1} d_0 + Q^2 e^{(1-x)Q} u_1 \\ &\quad + Q^2 T(x) Q^{-1} (Q + H) \Lambda^{-1} Q e^{Q} u_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} Q^2 T(x) Q^{-1} (Q + H) \Lambda^{-1} \int_0^1 T(s) f(s)\, ds \\ &\quad - Q^2 e^{(1-x)Q} I(1) + Q^2 I(x) + Q^2 J(x) + f(x), \end{aligned}$$

ce qui donne, vu que $Q^2 = -A$

$$u''(x) = -Au(x) + f(x).$$

4) Il reste dans cette partie à montrer que l'application u donnée par (2.21) vérifie les conditions aux limites (2.2).

Pour $x = 1$ on a $T(1) = J(1) = 0$ et donc

$$\begin{aligned} u(1) &= T(1)\Pi^{-1}d_0 + u_1 \\ &\quad + T(1)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}T(1)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds \\ &\quad - I(1) + I(1) + J(1) \\ &= u_1. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $x = 0$, on a

$$u(0) = T(0)\Pi^{-1}d_0 + 2\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 + \Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds,$$

et

$$\begin{aligned} & Hu(0) \\ = \; & HT(0)\Pi^{-1}d_0 + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 + H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds, \end{aligned}$$

avec $T(0) = I - e^{2Q}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} u'(0) &= Q\left(I + e^{2Q}\right)\Pi^{-1}d_0 + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad + H\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds - H\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{(2-s)Q}f(s)\,ds, \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} u'(0) - Hu(0) &= Q\left(I + e^{2Q}\right)\Pi^{-1}d_0 + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad + H\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds - H\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{(2-s)Q}f(s)\,ds \\ &\quad - HT(0)\Pi^{-1}d_0 - 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 - H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
u'(0) - Hu(0) &= Q\left(I + e^{2Q}\right)\Pi^{-1}d_0 - HT(0)\Pi^{-1}d_0 \\
&\quad + H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds - H\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds \\
&\quad + 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 - 2H\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
u'(0) - Hu(0) &= \left[Q\left(I + e^{2Q}\right) - H\left(I - e^{2Q}\right)\right]\Pi^{-1}d_0 \\
&= d_0.
\end{aligned}$$

■

2.6 Problème avec un paramètre spectral

On s'intéresse cette fois-ci, au problème de Robin généralisé suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2.27}$$

où A, H sont des opérateurs linéaires fermés et ne commutent pas, $f \in L^P(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$, $d_{1,0}$, u_0 sont des éléments donnés dans un espace de Banach complexe X et ω est un réel positif assez grand.

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique du Problème (2.27), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ u'(0) \in D(H), \end{cases}$$

et u satisfait le Problème (2.27).

Pour des raisons de commodité, on va traiter le Problème (2.27) avec la notation

$$A_\omega = A - \omega I, \quad \omega > 0.$$

2.6.1 Les hypothèses

On suppose que

$$X \text{ est un espace de type } UMD, \tag{2.28}$$

et qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que :

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé } X, \ [0,+\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda \left(A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{2.29}$$

cette hypothèse implique que

$$Q_{\omega_0} = -\left(-A_{\omega_0}\right)^{1/2},$$

existe et génère un semi-groupe analytique $\left(e^{xQ_{\omega_0}}\right)_{x\geqslant 0}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\exists\theta_{A_{\omega_0}}\in]0,\pi[,\exists C\geqslant 1,\forall s\in\mathbb{R},(-A_{\omega_0})^{is}\in\mathcal{L}(X)\\ \text{et }\left\|(-A_{\omega_0})^{is}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant Ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|},\end{array}\right. \tag{2.30}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\exists\nu\in]0,\frac{1}{2}[,\forall\omega\geqslant\omega_0,\ \exists C>0:\forall\mu>0,D(A_\omega)\subset D\left(H\right)\\ \text{et }\left\|H\left(A_\omega-\mu I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant\dfrac{C}{|\omega+\mu|^{1/2+\nu}},\end{array}\right. \tag{2.31}$$

cette hypothèse peut être remplacée par :

$$\exists\nu\in]0,\frac{1}{2}[,\ \forall\omega\geqslant\omega_0,\ D(-A_\omega)^{1/2+\nu}\subset D\left(H\right),$$

on suppose également

$$Q_{\omega_0}\left(Q_{\omega_0}-H\right)^{-1}\left[\left(D\left(Q_{\omega_0}\right),X\right)_{1/p,p}\right]\subset\left(D\left(Q_{\omega_0}\right),X\right)_{1/p,p},1<p<\infty. \tag{2.32}$$

2.6.2 Conséquences des hypothèses

Remarque 2.2 *Supposons (2.29) et soit $\omega\geqslant\omega_0$, alors*

1.

$$\left\{\begin{array}{l}A_\omega \textit{ est un opérateur linéaire fermé sur } X,\\ [0,+\infty[\subset[\omega_0-\omega,+\infty[\subset\rho\left(A_\omega\right)\\ \textit{et }\sup\limits_{\lambda\geqslant 0}\left\|\lambda\left(A_\omega-\lambda I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}<+\infty,\end{array}\right.$$

car

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\geqslant 0}\left\|\lambda\left(A_\omega-\lambda I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\lambda\geqslant 0}\left\|\lambda\left(A_{\omega_0}-\left(\lambda+\omega-\omega_0\right)I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant \sup_{\lambda\geqslant\omega_0-\omega}\left\|\lambda\left(A_{\omega_0}-\left(\lambda+\omega-\omega_0\right)I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant \sup_{\xi\geqslant 0}\left\|\left(\xi+\omega_0-\omega\right)\left(A_{\omega_0}-\xi I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant \sup_{\xi\geqslant 0}\left\|\xi\left(A_{\omega_0}-\xi I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}+C<+\infty.\end{aligned}$$

2. $Q_\omega=-\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ *génère un semi-groupe analytique dans* X.

3. $D\left(Q_\omega\right)=D(Q_{\omega_0})$ *et*

$$\left(D\left(A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}=\left(D\left(A_\omega\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}\subset D\left(\left(-A_\omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)=D(Q_\omega).$$

4. Sous (2.29), (2.30) et grâce à J. Prüss et H. Sohr [38], Théorème 3. p. 437, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}\forall s\in\mathbb{R}:\left(-A_\omega\right)^{is}\in L\left(X\right)\ \textit{ et }\exists C\geqslant 1,\theta_A\in\left]0,\pi\right[\\ \left\|\left(-A_\omega\right)^{is}\right\|_{L(X)}\leqslant Ce^{\theta_A|s|},\end{array}\right.$$

où θ_A *et* C *ne dépendent pas de* ω *ce qui implique* $A_\omega\in BIP\left(X,\theta_A\right)$.

5. *Puisque l'égalité*
$$((-A_\omega)^{1/2})^\beta = (-A_\omega)^{\beta/2},$$
est vraie pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on déduit alors
$$-Q_\omega = (-A_\omega)^{\frac{1}{2}} \in BIP\,(X, \theta_A/2)\,.$$

6. *De l'hypothèse (2.29). Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, l'opérateur Q_ω est inversible et on a*
$$Q_\omega^{-1} = \left(-\sqrt{-\left(A-\omega I\right)}\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\left(A-\omega I-\mu I\right)^{-1}}{\mu^{1/2}} d\mu.$$

2.6.3 Lemmes techniques

Lemme 2.5 *On suppose (2.29) et (2.31). Alors, il existe deux constantes $C > 0$ et $\omega_1 > \omega_0$, tels que pour tout $\omega \geqslant \omega_1$, l'opérateur $Q_\omega \pm H$ admet un inverse borné et*
$$\left\|(Q_\omega \pm H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\omega}}.$$

Preuve. Soit $\omega > \omega_0$. On a
$$\left\|Q_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\left\|\left(A-\omega I-\mu I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}}{\mu^{1/2}} d\mu,$$
ce qui implique
$$\left\|Q_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^{1/2}}.$$
Il s'ensuit de l'hypothèse (2.31) que
$$\begin{aligned} & \left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{H\left(A-\omega I-\mu I\right)^{-1}}{\mu^{1/2}} d\mu\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \leqslant & \; C\int_0^{+\infty} \frac{d\mu}{\mu^{1/2}\left|\omega+\mu\right|^{1/2+\nu}} \\ \leqslant & \; \frac{C}{\omega^{\nu}}, \end{aligned}$$
donc
$$D(Q_\omega) \subset D(H),$$
et
$$\left\|HQ_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C_\omega.$$
Ainsi, il existe $\omega_1 > \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_1$, on a
$$\left\|HQ_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{2}.$$
D'autre part, nous avons
$$Q_\omega \pm H = \left(I \pm HQ_\omega^{-1}\right) Q_\omega,$$

par conséquent, $Q_\omega \pm H$ est inversible et pour tout $\omega \geqslant \omega_1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left\|(Q_\omega \pm H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|Q_\omega^{-1}\left(I \pm HQ_\omega^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant \left\|Q_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \frac{1}{1-\|HQ_\omega^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \\
&\leqslant \frac{C}{\omega^{1/2}}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{C}{\omega^{1/2}}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.6 *On suppose (2.29) et (2.31). Alors, il existe $\omega_2 \geqslant \omega_1$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_2$, l'opérateur*

$$\Lambda_\omega = (Q_\omega - H) + e^{2Q_\omega}(Q_\omega + H),$$

de domaine

$$D(\Lambda_\omega) = D(Q_\omega) \cap D(H) = D(Q_\omega),$$

est inversible et a un inverse borné tel que

$$\Lambda_\omega^{-1} = (Q_\omega - H)^{-1}(I + W), \tag{2.33}$$

où

$$W \in \mathcal{L}(X) \ \text{ et } W(X) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} D(Q_\omega^k).$$

Preuve. Pour tout $\omega \geqslant \omega_1$, on a

$$\begin{aligned}
\Lambda_\omega &= \left(I - e^{2Q_\omega}\right)(Q_\omega - H) + 2Q_\omega e^{2Q_\omega} \\
&= \left(I - e^{2Q_\omega}\right)\left[I + 2\left(I - e^{2Q_\omega}\right)^{-1} Q_\omega e^{2Q_\omega}(Q_\omega - H)^{-1}\right](Q_\omega - H) \\
&= \left(I - e^{2Q_\omega}\right)(I + T_\omega)(Q_\omega - H),
\end{aligned}$$

où

$$T_\omega = 2\left(I - e^{2Q_\omega}\right)^{-1} Q_\omega e^{2Q_\omega}(Q_\omega - H)^{-1}.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|\, 2\left(I - e^{2Q_\omega}\right)^{-1} Q_\omega e^{2Q_\omega}(Q_\omega - H)^{-1}\,\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant 2\,\|\left(I - e^{2Q_\omega}\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|\, Q_\omega e^{2Q_\omega}\,\|_{\mathcal{L}(X)}\|\,(Q_\omega - H)^{-1}\,\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant \frac{2}{1-\|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)}}\|\, Q_\omega e^{2Q_\omega}\,\|_{\mathcal{L}(X)}\|\,(Q_\omega - H)^{-1}\,\|_{\mathcal{L}(X)},
\end{aligned}$$

Il existe des constantes K_0, K_1 et c_0 positives (qui ne dépendent pas de ω) telles que

$$\|\, Q_\omega e^{2Q_\omega}\,\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}} \ \text{ et } \ \|\, e^{2Q_\omega}\,\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant K_1 e^{-2c_0\sqrt{\omega}},$$

(voir [14], p. 103), on obtient

$$\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2CK_1}{\omega^{1/2}\left(1-K_0e^{-2c_0\sqrt{\omega}}\right)}e^{-2c_0\sqrt{\omega}}.$$

Alors, il existe $\omega_2 \geqslant \omega_1$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_2$, on obtient

$$\frac{2CK_1}{\omega^{1/2}\left(1-K_0e^{-2c_0\sqrt{\omega}}\right)}e^{-2c_0\sqrt{\omega}} < 1,$$

ce qui implique que $I+T_\omega$ est un opérateur inversible. Donc

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_\omega^{-1} & = & (Q_\omega-H)^{-1}(I+T_\omega)^{-1}(I+S_\omega)^{-1} \\ & = & (Q_\omega-H)^{-1}\left(I-T_\omega(I+T_\omega)^{-1}\right)\left(I-S_\omega(I+S_\omega)^{-1}\right),\end{array}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l}T_\omega = 2e^{2Q_\omega}\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}Q_\omega(Q_\omega-H)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \\ S_\omega = -e^{2Q_\omega} \in \mathcal{L}(X) \text{ et} \\ T_\omega(X), S_\omega(X) \subset \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} D(Q_\omega^k).\end{array}\right.$$

■

Remarque 2.3 *Soient les hypothèses (2.29) et (2.31). Pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, on peut alors définir l'opéateur Π_ω comme suit :*

$$\left\{\begin{array}{l}\Pi_\omega = (Q_\omega-H)+(Q_\omega+H)e^{2Q_\omega}, \\ D(\Pi_\omega) = D(Q_\omega)\cap D(H) = D(Q_\omega).\end{array}\right.$$

On a

$$\begin{array}{rcl}\Pi_\omega & = & (Q_\omega-H)\left(I-e^{2Q_\omega}\right)+2Q_\omega e^{2Q_\omega} \\ & = & (Q_\omega-H)\left[I+2(Q_\omega-H)^{-1}Q_\omega e^{2Q_\omega}\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}\right]\left(I-e^{2Q_\omega}\right).\end{array}$$

En faisant le même raisonnement qu celui utilisé pour Λ_ω, on montre que pour tout $\omega \geqslant \omega_2$

$$\left\|2(Q_\omega-H)^{-1}Q_\omega e^{2Q_\omega}\left(I-e^{2Q_\omega}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Remarque 2.4 *On peut utiliser l'inverse de $(Q_\omega-H)$ et $(Q_\omega+H)$ pour inverser les opérateurs Λ_ω et Π_ω. On a*

$$\begin{array}{rl} & \Lambda_\omega \\ = & (Q_\omega-H)+e^{2Q_\omega}(Q_\omega+H) \\ = & (Q_\omega-H)(Q_\omega+H)^{-1}\left[I+(Q_\omega+H)(Q_\omega-H)^{-1}e^{2Q_\omega}\right](Q_\omega+H).\end{array}$$

Pour tout $\omega \geqslant \omega_1$, on trouve

$$\begin{array}{rcl}\left\|2HQ_\omega^{-1}\left(I-HQ_\omega^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} & \leqslant & 2\left\|HQ_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|\left(I-HQ_\omega^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ & \leqslant & 2\left\|HQ_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\dfrac{1}{1-\left\|HQ_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}} \\ & \leqslant & \dfrac{2C}{\omega^\nu}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ & \leqslant & \dfrac{4C}{\omega^\nu},\end{array}$$

et pour tout $\omega \geqslant \omega_2$
$$\frac{4C}{\omega^{\nu}} < 1,$$
alors nous déduisons que Λ_ω *est inversible. Similairement, pour tout* $\omega \geqslant \omega_1$ *on obtient*

$$\begin{aligned}\Pi_\omega &= (Q-H)+(Q_\omega+H)\,e^{2Q_\omega}\\ &= \left[I+(Q_\omega+H)\,e^{2Q_\omega}\,(Q_\omega-H)^{-1}\right](Q_\omega-H)\,,\end{aligned}$$

et pour tout $\omega \geqslant \omega_2$*, il vient*

$$\begin{aligned}&\left\|(Q_\omega+H)\,e^{2Q_\omega}\,(Q_\omega-H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ =\ &\left\|\left(I+HQ_\omega^{-1}\right)e^{2Q_\omega}\left(I-HQ_\omega^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned}\Pi_\omega &= Q_\omega-H+(Q_\omega+H)\,e^{2Q_\omega}\\ &= \Lambda_\omega-e^{2Q_\omega}(Q_\omega+H)+(Q_\omega+H)\,e^{2Q_\omega}\\ &= \Lambda_\omega-e^{2Q_\omega}H+He^{2Q_\omega}\\ &= \Lambda_\omega+\left[H;e^{2Q_\omega}\right],\end{aligned}\tag{2.34}$$

où, pour tout $\xi \in D(H)$*, on a*

$$\left[H;e^{2Q_\omega}\right]\xi = He^{2Q_\omega}\xi-e^{2Q_\omega}H\xi,$$

d'où
$$\Pi_\omega = \left(I+\left[H;e^{2Q_\omega}\right]\Lambda_\omega^{-1}\right)\Lambda_\omega.$$
D'autre part, on a pour tout $\omega \geqslant \omega_2$

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \left\|(Q_\omega-H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|(I+T_\omega)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|(I+S_\omega)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant \left\|(Q_\omega-H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\frac{1}{1-\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)}}\frac{1}{1-\|S_\omega\|_{\mathcal{L}(X)}}.\\ &\leqslant \left\|(Q_\omega-H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\frac{1}{1-\frac{2CK_1}{\omega^{1/2}\left(1-K_0e^{-2c_0\sqrt{\omega}}\right)}e^{-2c_0\sqrt{\omega}}}\frac{1}{1-K_0e^{-2c_0\sqrt{\omega}}}\\ &\leqslant \left\|(Q_\omega-H)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^{1/2}},\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\left\|He^{2Q_\omega}\Lambda_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \left\|HQ_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|Q_\omega e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|\Lambda_\omega^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant C\frac{1}{\omega^{\nu}}K_1e^{-2c_0\sqrt{\omega}}\frac{1}{\omega^{1/2}}\\ &\leqslant \frac{C}{\omega^{\nu+1/2}}.\end{aligned}$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
& \left\| e^{2Q_\omega} H \Lambda_\omega^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
\leqslant\ & \left\| e^{2Q_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| H \left(Q_\omega - H\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \left(I + T_\omega\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \left(I + S_\omega\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
\leqslant\ & K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}} \left\| H \left(Q_\omega - H\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
\leqslant\ & K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}} \left\| H Q_\omega^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \left(I - H Q_\omega^{-1}\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
\leqslant\ & C K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}} \frac{1}{\omega^\nu} \frac{1}{1 - \left\| H Q_\omega^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)}} \\
\leqslant\ & C K_0 e^{-2c_0\sqrt{\omega}} \frac{1}{\omega^\nu} \\
\leqslant\ & \frac{C}{\omega^\nu},
\end{aligned}
$$

on en déduit

$$
\left\| \left[H; e^{2Q_\omega}\right] \Lambda_\omega^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\omega^\nu},
$$

ce qui implique l'existence de $\omega_3 \geqslant \omega_2$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega_3$, on trouve

$$
\frac{C}{\omega^\nu} \leqslant 1,
$$

par la suite, Π_ω est inversible et

$$
\Pi_\omega^{-1} = \Lambda_\omega^{-1} \left(I + \left[H; e^{2Q_\omega}\right] \Lambda_\omega^{-1}\right)^{-1}, \tag{2.35}
$$

vu la formule (2.34), on aboutit à

$$
\Lambda_\omega^{-1} = \Pi_\omega^{-1} \left(I - \left[H; e^{2Q_\omega}\right] \Pi_\omega^{-1}\right)^{-1}. \tag{2.36}
$$

2.7 Résultat principal

Le résultat principal obtenu dans cette partie est le suivant :

Théorème 2.2 *On suppose (2.28)∼(2.32). Soit $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le Problème (2.27) admet une unique solution classique u, c'est-à-dire*

$$
u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)),\ 1 < p < \infty,
$$

   $u(0) \in D(H)$ et u vérifiant le Problème (2.27) avec u donnée par (2.21)

2. $$
\Pi_\omega^{-1} d_0, u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p},\ 1 < p < \infty,
$$

   où

$$
\Pi_\omega = (Q_\omega - H) + (Q_\omega + H) e^{2Q_\omega}.
$$

2.8 Exemple d'application

Soit $X = L^p(\Omega)$ avec $\Omega =]0,1[$ est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}$, qui est un espace de type UMD. On définit les opérateurs Q_ω et H par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(Q_\omega) = D(H) = \{\varphi \in W^{2,p}(]0,1[) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}, \\ (Q_\omega \varphi)(y) = \varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \sqrt{\omega}\varphi(y), \ y \in (0,1), \\ (H\varphi)(y) = -\varphi''(y), \ y \in (0,1), \end{array} \right. \tag{2.37}$$

où ω un réel positif assez grand et

$$a \in C^2([0,1]) \quad \text{avec } a(0) = a(1) = 0.$$

On a

$$\begin{array}{rl} & D(Q_\omega^2) \\ = & \{\varphi \in D(Q_\omega) : \ Q_\omega\varphi \in D(Q_\omega)\} \\ = & \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \ Q_\omega\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \text{ et } Q_\omega\varphi(0) = Q_\omega\varphi(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\} \\ = & \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \ Q_\omega\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \text{ et } \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) - \sqrt{\omega}\varphi(\xi) = \varphi(\xi) = 0, \quad \xi \in \{0,1\}\right\} \\ = & \left\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \ \varphi'' + a\varphi' \in W^{2,p}(\Omega) \text{ et } \varphi''(\xi) + a(\xi)\varphi'(\xi) = \varphi(\xi) = 0, \quad \xi \in \{0,1\}\right\} \\ = & \left\{\varphi \in W^{3,p}(\Omega) : \ \varphi'' + a\varphi' \in W^{2,p}(\Omega), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\} \\ = & \left\{\varphi \in W^{3,p}(\Omega) : \ \varphi'' \in W^{2,p}(\Omega), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\} \\ = & \left\{\varphi \in W^{4,p}(\Omega) : \ \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\}, \end{array}$$

et vu que $A_\omega = -Q_\omega^2$, alors

$$D(A_\omega) = \left\{\varphi \in W^{4,p}(]0,1[) : \ \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\}.$$

En plus, pour $y \in (0,1)$

$$\begin{array}{rcl} A_\omega\varphi(y) & = & -Q_\omega[Q_\omega(y)] \\ & = & -Q_\omega\left[\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \sqrt{\omega}\varphi(y)\right] \\ & = & -\left(\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \sqrt{\omega}\varphi(y)\right)'' - a(y)\left(\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \sqrt{\omega}\varphi(y)\right)' \\ & & +\sqrt{\omega}\left(\varphi''(y) + a(y)\varphi'(y) - \sqrt{\omega}\varphi(y)\right) \\ & = & -\varphi^{(4)}(y) - 2a(y)\varphi^{(3)}(y) - \left(a^2(y) + 2a'(y) - 2\sqrt{\omega}\right)\varphi''(y) \\ & & -a(y)\left(a'(y) - 2\sqrt{\omega}\right)\varphi'(y) - \omega\varphi(y). \end{array}$$

Les opérateurs A_ω et H définis par (2.37) sont linéaires fermés et inversibles dans $L^p(]0,1[)$. De plus, en utilisant A. Lunardi [34], Théorème 3.1.3, page 73, on trouve que l'opérateur $-(-A_\omega)^{1/2}$ génère un semi-groupe analytique borné.

Maintenant, on montre que Q_ω et H satisfont l'hypothèse de non commutativité. On résout l'équation spectrale

$$H\varphi = \psi \in X,$$

qui est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varphi''(y) = \psi(y), \ y \in (0,1), \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi(1) = 0, \end{array} \right.$$

où $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ et ψ est une fonction donnée dans X, on obtient à l'aide du noyaux que pour presque tout $y \in (0,1)$

$$\left(H^{-1}\psi\right)(y) = (1-y)\int_0^y s\psi(s)ds + y\int_y^1 (1-s)\psi(s)ds. \tag{2.38}$$

Du fait que $D(Q_\omega) = D(H)$, on peut calculer $Q_\omega H^{-1}$, alors de la deuxième équation du système (2.37), on obtient, pour presque tout $y \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\left(Q_\omega H^{-1}\psi\right)(y) &= Q_\omega\left(H^{-1}\psi\right)(y)\\ &= \left(H^{-1}\psi\right)''(y) + a(y)\left(H^{-1}\psi\right)'(y) - \sqrt{\omega}\left(H^{-1}\psi\right)(y),\end{aligned}$$

puis, on insère (2.38) dans cette dernière formule et en vertu de la troixième équation du système (2.37), on trouve

$$\begin{aligned}\left(Q_\omega H^{-1}\psi\right)(y) &= -\psi(y) + a(y)\left(\int_0^y (1-y)\,s\psi(s)ds + \int_y^1 y(1-s)\psi(s)ds\right)'(y)\\ &\quad -\sqrt{\omega}\left(\int_0^y (1-y)\,s\psi(s)ds + \int_y^1 y(1-s)\psi(s)ds\right)(y),\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que

$$\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^y (1-y)\,s\psi(s)ds\right)' = \psi(y) - \left(\displaystyle\int_0^y s\psi(s)ds\right),\\ \left(\displaystyle\int_y^1 y(1-s)\psi(s)ds\right)' = -\psi(y) + \left(\displaystyle\int_0^y (1-s)\,\psi(s)ds\right),\end{cases}$$

donc, la dernière équation entraine

$$\begin{aligned}&\left(Q_\omega H^{-1}\psi\right)(y)\\ =\ & -\psi(y) + a(y)\left(-\int_0^y s\psi(s)ds + \int_y^1 (1-s)\psi(s)ds\right)\\ & -\sqrt{\omega}\left(\int_0^y (1-y)\,s\psi(s)ds + \int_y^1 y(1-s)\psi(s)ds\right).\end{aligned} \tag{2.39}$$

On va maintenant calculer $H^{-1}Q_\omega$, en reprenant l'expression (2.38), on obtient

$$\begin{aligned}\left(H^{-1}Q_\omega\psi\right)(y) &= H^{-1}\left(Q_\omega\psi\right)(y)\\ &= \int_0^y (1-y)\,s\left(Q_\omega\psi\right)(s)ds + \int_y^1 y(1-s)\left(Q_\omega\psi\right)(s)ds,\end{aligned}$$

en utilisant les mêmes techniques utilisées ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\left(H^{-1}Q_\omega\psi\right)(y) &= \int_0^y (1-y)\,s\left(\psi''(s) + a(s)\,\psi'(s) - \sqrt{\omega}\psi(s)\right)ds\\ &\quad + \int_y^1 y(1-s)\left(\psi''(s) + a(s)\,\psi'(s) - \sqrt{\omega}\psi(s)\right)ds\\ &= \int_0^y (1-y)\,s\psi''(s)\,ds + \int_0^y a(s)\,\psi'(s)\,ds - \sqrt{\omega}\int_0^y \psi(s)\,ds\\ &\quad + \int_y^1 y(1-s)\psi''(s)\,ds + \int_y^1 a(s)\,\psi'(s)\,ds - \sqrt{\omega}\int_y^1 \psi(s)\,ds.\end{aligned}$$

Pour le premier terme, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^y (1-y)\, s\psi''(s)\, ds &= (1-y)\, y\psi'(y) - \int_0^y (1-y)\,\psi'(s)\, ds \\ &= (1-y)\, y\psi'(y) - (1-y)\,\psi(y)\, ds,\end{aligned}$$

et en traitant de la même façon les autres termes, on obtient

$$\begin{aligned}\int_y^1 y(1-s)\psi''(s)\, ds &= y(1-y)\psi'(y) + \int_y^1 y\psi'(s)\, ds \\ &= y(1-y)\psi'(y) - y\psi(y),\end{aligned}$$

pour cela on écrit

$$\begin{aligned}\left(H^{-1}Q_\omega\psi\right)(y) &= (1-y)\, y\psi'(y) - (1-y)\,\psi(y) + \int_0^y (1-y)\, sa(s)\,\psi'(s)\, ds \\ &\quad -\sqrt{\omega}\int_0^y (1-y)\, s\psi(s)\, ds + y(y-1)\psi'(y) \\ &\quad -y\psi(y) + \int_y^1 y(1-s)a(s)\,\psi'(s)\, ds - \sqrt{\omega}\int_y^1 y(1-s)\psi(s)\, ds,\end{aligned}$$

par la suite on obtient

$$\begin{aligned}&\left(H^{-1}Q_\omega\psi\right)(y) \\ &= -\psi(y) + \int_0^y (1-y)\, sa(s)\,\psi'(s)\, ds + \int_y^1 y(1-s)a(s)\,\psi'(s)\, ds \\ &\quad -\sqrt{\omega}\left(\int_0^y (1-y)\, s\psi(s)\, ds + \int_y^1 y(1-s)\psi(s)\, ds\right).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Il s'ensuit de (2.39) et (2.40) immédiatement que $Q_\omega H^{-1}$ et $H^{-1}Q_\omega$ sont différents, c'est-à-dire Q_ω et H non commutent pas au sens des résolvantes. Pour l'ensemble résolvant de l'opérateur A, il existe C_0 positif tel que, pour tout $\lambda \in S_\delta$ où

$$S_\delta = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/\left\{0\right\} : |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \quad \text{et} \quad \left\|(A_\omega - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{|\sqrt{\omega} + \lambda|},$$

voir ([15] et [16]).

Toutes les hypothèses sont vérifiées, donc tous les résultats obtenus pour ω positif assez grand, s'appliquent au problème concret

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) - 2a(y)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y) - \left(a^2(y) + 2a'(y) - 2\sqrt{\omega}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \\ -a(y)\left(a'(y) - 2\sqrt{\omega}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)^2, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad x \in (0,1), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = 0, \quad x \in (0,1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y) = d_0(y), \quad y \in (0,1), \\ u(1,y) = u_1(y), \quad y \in (0,1), \end{cases} \tag{2.41}$$

La proposition suivante donne l'existence et l'unicité de la solution de ce problème

Proposition 2.1 *Soit $f \in L^p(0,1;L^p(]0,1[))$ avec $1 < p < +\infty$. Alors, pour $\omega > 0$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (2.41) admet une unique solution classique u.*
2. *u_1, $\Pi_\omega^{-1}d_0 \in (D(A), L^p(]0,1[))_{\frac{1}{2p},p}$, $1 < p < \infty$.*

On peut généralisé l'exemple précédent en supposant cette fois-ci les opérateurs Q_ω et H définis comme suit :

$$\begin{cases} D(Q_\omega) = D(H) = \{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \\ Q_\omega\varphi(y) = \Delta_y\varphi(y) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(y) \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_i}(y) - \sqrt{\omega}\varphi(y), \quad y \in \Omega, \\ H\varphi(y) = -\Delta_y\varphi(y), \quad y \in \Omega, \\ a_i \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{et} \quad a_i = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

avec Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ et $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Chapitre 3

Problème de Robin abstrait dans les espaces de Hölder : cadre non commutatif

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on reprend l'étude du Problème (2.1)-(2.2) mais cette fois-ci dans les espaces de Hölder $C^\theta([0,1]\,;X)$ avec $0<\theta<1$ qui ont une géométrie différente de celle des espaces $L^p\,(0,1;X)$ avec $1<p<\infty$. Plus précisément, on s'intéresse aux équations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique, posées sur l'intervalle borné $[0,1]$

$$u''(x)+Au(x)=f(x), \quad x\in[0,1]\,, \tag{3.1}$$

et munies des conditions aux limites de type Robin généralisé

$$u'(0)-Hu(0)=d_0,\ u(1)=u_1, \tag{3.2}$$

où A et H sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexe X, $f\in C^\theta([0,1]\,;X)$ avec $0<\theta<1$, d_0,u_1 sont des éléments donnés dans X.

On s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution classique du Problème (3.1)-(3.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u\in C^2([0,1]\,;X)\cap C([0,1]\,;D(A)),$$

$u(0)\in D\,(H)$ et u satisfaisant le Problème (3.1)-(3.2) ainsi qu'à la régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire

$$u'',\ Au\in C^\theta\,([0,1]\,;X)\,,\ 0<\theta<1.$$

3.2 Hypothèses

On suppose que

$$\left\{\begin{array}{l}]0,+\infty[\,\subset\rho\,(A)\,,\ker(A)=\{0\}\,,\ \overline{\operatorname{Im}(A)}=X, \\ \text{et}\ \sup\limits_{\lambda\geqslant 0}\left\|\lambda\,(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}<+\infty, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

cette hypothèse implique que $Q = -(-A)^{1/2}$ existe et génère un semi-groupe analytique généralisé (non fortement continu en zéro) $\left(e^{xQ}\right)_{x\geqslant 0}$.

On suppose également

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \tag{3.4}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) \subset D(H), \tag{3.5}$$

$$\Lambda = (Q-H) + e^{2Q}(Q+H) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{3.6}$$

$$\Pi = (Q-H) + (Q+H)e^{2Q} \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X), \tag{3.7}$$

et

$$\forall \xi \in D(Q); \quad Q\Lambda^{-1}\xi \in D(Q), \quad Q^2\Lambda^{-1}\xi \in (D(A),X)_{1-(\theta/2),\infty}. \tag{3.8}$$

Notons que, les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi (voir [18]), ont résolu le problème

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \ u(1) = u_1, \end{array}\right. \tag{3.9}$$

sous les mêmes hypothèses sur l'opérateur A et $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$. Ils ont obtenu les résultats suivants :

1. Le Problème (3.9) admet une unique solution classique u si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} u_0, u_1 \in D(A) \\ f(i) - Au_i \in \overline{D(A)}, \quad i = 0, \ 1. \end{array}\right.$$

2. Le Problème (3.9) admet une unique solution classique u ayant la propriété de régularité maximale

$$u'', \ Au \in C^\theta([0,1];X), \ 0 < \theta < 1,$$

si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} u_0, u_1 \in D(A), \\ f(i) - Au_i \in (D(A),X)_{1-\theta/2,\infty}, \ i = 0, \ 1. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

3.3 Représentation de la solution

On utilise la représentation de la solution trouvée dans le chapitre 2, cadre L^p (voir le chapitre précédent) qui est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x) &= T(x)\Pi^{-1}d_0 + e^{(1-x)Q}u_1 \\ &\quad + T(x)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}T(x)Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds \\ &\quad - e^{(1-x)Q}I(1) + I(x) + J(x), \end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$\begin{cases} T(x) = e^{xQ} - e^{(2-x)Q}, \\ I(x) = \dfrac{1}{2} Q^{-1} \displaystyle\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds, \\ J(x) = \dfrac{1}{2} Q^{-1} \displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} (Q+H)\Lambda^{-1} &= \left[(Q+H) + Q - H + e^{2Q}(Q+H) - \Lambda\right]\Lambda^{-1} \\ &= 2Q\Lambda^{-1} + e^{2Q}(Q+H)\Lambda^{-1} - I, \end{aligned}$$

on déduit alors

$$\begin{aligned} u(x) &= T(x)\Pi^{-1}d_0 + e^{(1-x)Q}u_1 + 2T(x)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad + T(x)Q^{-1}e^{2Q}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad - T(x)e^{Q}u_1 + T(x)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{2}T(x)e^{2Q}Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{2}T(x)Q^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\, ds - e^{(1-x)Q}I(1) + I(x) + J(x). \end{aligned}$$

En remplaçant dans certains termes $T(\cdot)$ par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(e^{xQ} - e^{(2-x)Q}\right)\Pi^{-1}d_0 + e^{(1-x)Q}u_1 \\ &\quad + 2\left(e^{xQ} - e^{(2-x)Q}\right)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\ &\quad + T(x)Q^{-1}e^{2Q}(Q+H)\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 - T(x)e^{Q}u_1 \\ &\quad + \left(e^{xQ} - e^{(2-x)Q}\right)\Lambda^{-1}\int_0^1 \left(e^{sQ} - e^{(2-s)Q}\right)f(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{2}T(x)e^{2Q}Q^{-1}(Q+H)\Lambda^{-1}\int_0^1 \left(e^{sQ} - e^{(2-s)Q}\right)f(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(e^{xQ} - e^{(2-x)Q}\right)Q^{-1}\int_0^1 \left(e^{sQ} - e^{(2-s)Q}\right)f(s)\, ds \\ &\quad - e^{(1-x)Q}I(1) + I(x) + J(x). \end{aligned}$$

En écrivant la formule précédente comme suit

$$
\begin{aligned}
&u(x) \\
=\ & e^{xQ}\Pi^{-1}d_0 + e^{(1-x)Q}u_1 + 2e^{xQ}\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\
&+e^{xQ}\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds + e^{xQ}\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(0)\,ds \\
&-e^{xQ}\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{(2-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds + e^{xQ}\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{(2-s)Q}f(1)\,ds \\
&+\frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds + e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(0)\,ds \\
&-\frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{(2-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds + e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{(2-s)Q}f(1)\,ds \\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds + \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(1)\,ds \\
&+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}\left(f(s)-f(0)\right)ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(0)ds \\
&+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(1)ds \\
&+R(x,d_0,u_1,f),
\end{aligned}
$$

où, pour tout $x \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
R(x,d_0,u_1,f) =\ & -e^{(2-x)Q}\Pi^{-1}d_0 - \left[2e^{(2-x)Q}\Lambda^{-1}Qe^{Q} + e^{Q}T(x)\right]u_1 \\
&+e^{2Q}T(x)\,Q^{-1}(Q+H)\,\Lambda^{-1}Qe^{Q}u_1 \\
&+\left[\frac{1}{2}e^{2Q}T(x)\,Q^{-1}(Q+H) - e^{(2-x)Q}\right]\Lambda^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds \\
&-\frac{1}{2}e^{(2-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 T(s)f(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Après calculs, on trouve, pour tout $x \in [0,1]$

$$u(x) = S_1(x,d_0,u_1) + S_2(x,f) + \overline{R}(x,d_0,u_1,f), \tag{3.12}$$

où

$$
\begin{aligned}
&S_1(x,d_0,u_1) \\
=\ & e^{xQ}\left(\Pi^{-1}d_0 + Q^{-2}f(0)\right) + e^{(1-x)Q}\left(u_1 + Q^{-2}f(1)\right),
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
& S_2(x,f) \\
= \;& e^{xQ}\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds+\frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds \\
& -e^{xQ}\Lambda^{-1}e^{Q}\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds \qquad (3.14) \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}\left(f(s)-f(0)\right)ds,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& \overline{R}(x,d_0,u_1,f) \\
= \;& R(x,d_0,u_1,f)-\frac{1}{2}Q^{-2}\left[e^{(2-x)Q}f(1)-e^{(1+x)Q}f(0)\right] \qquad (3.15) \\
& -\frac{1}{2}Q^{-2}\left(f(1)+f(0)\right).
\end{aligned}
$$

3.4 Lemmes techniques

Lemme 3.1 *On suppose (3.3)∼(3.7). Soit* $f\in C^{\theta}\left([0,1];X\right)$, $0<\theta<1$. *Alors , on a*

$$A\overline{R}(\cdot,d_0,u_1,f)\in C^{\infty}([0,1];X).$$

Preuve. On a

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\;\; e^{Q}\in\mathcal{L}\left(X,D\left(Q^m\right)\right),$$

et pour tout $\varphi\in X$, il vient

$$e^{\cdot Q}e^{Q}\varphi\in C^{\infty}([0,1];X),$$

en appliquant A, on obtient

$$Ae^{\cdot Q}e^{Q}\varphi=-e^{\cdot Q}Q^2e^{Q}\varphi\in C^{\infty}([0,1];X).$$

En utilisant (3.15), on trouve pour tout $x\in[0,1]$,

$$
\begin{aligned}
& A\overline{R}(x,d_0,u_1,f) \\
= \;& -Q^2R(x,d_0,u_1,f)+\frac{1}{2}e^{Q}\left[e^{(1-x)Q}f(1)-e^{xQ}f(0)\right] \\
& +\frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right),
\end{aligned}
$$

il est clair que

$$Q^2R(.,d_0,u_1,f)\;\in C^{\infty}([0,1];X),$$

et donc

$$A\overline{R}(.,d_0,u_1,f)\in C^{\infty}([0,1];X).$$

■

Lemme 3.2 *On suppose (3.3)∼(3.8). Soit* $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0<\theta<1$. *Alors, on a*

$$AS_2(.,f) \in C^{\theta}([0,1];X), \quad 0<\theta<1.$$

Preuve. *En utilisant la formule (3.14), on a*

$$\begin{aligned}
& AS_2(x,f) \\
= \; & -Q^2e^{xQ}\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds - \frac{1}{2}Qe^{xQ}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds \\
& +Q^2e^{xQ}\Lambda^{-1}e^{Q}\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds + \frac{1}{2}Qe^{(1-x)Q}\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds \\
& -\frac{1}{2}Q\int_x^1 e^{(s-x)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds - \frac{1}{2}Q\int_0^x e^{(x-s)Q}\left(f(s)-f(0)\right)ds,
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.12, assertion 4, on a

$$\left\{\begin{array}{l}
Q\displaystyle\int_0^x e^{(x-s)Q}\left(f(s)-f(0)\right)ds \in C^{\theta}([0,1];X), \\
Q\displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds \in C^{\theta}([0,1];X).
\end{array}\right. \tag{3.16}$$

En plus, d'après les assertions 1 et 6., de la Proposition 1.12, il vient

$$\left\{\begin{array}{l}
Q\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds \in (X,D(Q))_{\theta,\infty}, \\
Q\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds \;\in (X,D(Q))_{\theta,\infty},
\end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l}
e^{\cdot Q}\left(Q\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds\right) \in C^{\theta}([0,1];X), \\
e^{(1-.)Q}\left(Q\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds\;\right) \in C^{\theta}([0,1];X).
\end{array}\right. \tag{3.17}$$

Grâce à l'hypothèse (3.8), on a

$$\begin{aligned}
& Q^2e^{xQ}\Lambda^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds \\
= \; & e^{xQ}Q^2\Lambda^{-1}Q^{-1}\left(Q\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s)-f(0)\right)ds\right) \in C^{\theta}([0,1];X),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned}
& Q^2e^{xQ}\Lambda^{-1}e^{Q}\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds \\
= \; & e^{xQ}Q^2\Lambda^{-1}Q^{-1}e^{Q}\left(Q\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f(s)-f(1)\right)ds\;\right) \in C^{\theta}([0,1];X),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Finalement, grâce à (3.16)∼(3.19), on obtient

$$AS_2(.,f) \in C^{\theta}([0,1];X), 0<\theta<1.$$

■

3.5 Résultats principaux

Le résultat principal de cette partie est donné par les théorèmes suivants :

Théorème 3.1 *On suppose (3.3)∼(3.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution classique.*
2. u_1, $\Pi^{-1}d_0 \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} Au_1 - f(1) \in \overline{D(Q)} = \overline{D(A)}, \\ A\Pi^{-1}d_0 - f(0) \in \overline{D(Q)} = \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Théorème 3.2 *On suppose (3.3)∼(3.8). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (3.1)-(3.2) admet solution classique u qui satisfait la propriété de la régularité maximale*
$$u'',\ Au \in C^{\theta}([0,1];X), \quad \theta \in]0,1[\,.$$
2. u_1, $\Pi^{-1}d_0 \in D(A)$ et
$$\begin{cases} Au_1 - f(1) \in (D(A),X)_{1-(\theta/2),\infty}\,, \quad \theta \in]0,1[\,, \\ A\Pi^{-1}d_0 - f(0) \in (D(A),X)_{1-(\theta/2),\infty}\,, \quad \theta \in]0,1[\,. \end{cases}$$

La solution u est unique et est donnée par la formule de représentation (3.11).

3.5.1 Preuve du théorème 3.1

On suppose que u est une solution classique du Problème (3.1)-(3.2), on a donc

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)).$$

En utilisant les Lemmes 3.1 et 3.2, nous avons

$$AS_2(.,f) \in C^{\theta}([0,1];X) \qquad \text{et} \quad A\overline{R}(.,d_0,u_1,f) \in C^{\infty}([0,1];X),$$

on déduit donc

$$AS_1(.,d_0,u_1) = Au(.) - A\overline{R}(.,d_0,u_1,f) - AS_2(.,f) \in C([0,1];X).$$

avec

$$\begin{aligned} & AS_1(x,d_0,u_1) \\ = \ & e^{xQ}\left(-Q^2\Pi^{-1}d_0 - f(0)\right) + e^{(1-x)Q}\left(-Q^2u_1 - f(1)\right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

En utilisant (3.10), on a $u_1 \in D(A)$ et $Au_1 - f(1) \in \overline{D(A)}$, c'est à dire

$$e^{(1-.)Q}(Au_1 - f(1)) \in C([0,1];X).$$

Donc $AS_1(.,d_0,u_1)$ est dans $C([0,1];X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} u_1,\ \Pi^{-1}d_0 \in D(A), \\ e^{\cdot Q}(A\Pi^{-1}d_0 - f(0)) \in C([0,1];X), \\ e^{(1-.)Q}(Au_1 - f(1)) \in C([0,1];X), \end{cases}$$

et grâce à la proposition 1.12, les conditions précédentes sont équivalentes à

$$\begin{cases} u_1,\ \Pi^{-1}d_0 \in D(A), \\ A\Pi^{-1}d_0 - f(0) \in \overline{D(Q)} = \overline{D(A)}, \\ Au_1 - f(1) \in \overline{D(Q)} = \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Réciproquement, supposons que u_1, $\Pi^{-1}d_0 \in D(A)$ et

$$\begin{cases} Au_1 - f(1) \in \overline{D(Q)}, \\ A\Pi^{-1}d_0 - f(0) \in \overline{D(Q)}, \end{cases} \tag{3.21}$$

et montrons que le Problème (3.1)-(3.2) admet une solution classique u, c'est-à-dire

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)),$$

et u vérifiant le Problème (3.1)-(3.2). D'après la Proposition 1.12, point 2, (3.21) est vérifie si et seulement si

$$\begin{cases} u_1,\ \Pi^{-1}d_0 \in D(A), \\ e^{\cdot Q}(A\Pi^{-1}d_0 - f(0)) \in C([0,1];X), \\ e^{(1-\cdot)Q}(Au_1 - f(1)) \in C([0,1];X), \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} AS_1(.,d_0,u_1) \in C([0,1];X) \quad &\Leftrightarrow \quad Au(.) \in C([0,1];X) \\ &\Leftrightarrow \quad u \in C([0,1];D(A)). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Puisque

$$f \in C^\theta([0,1];X),\ 0 < \theta < 1,$$

donc

$$u'' = f - Au \in C([0,1];X). \tag{3.23}$$

Il s'ensuit, de (3.22) et (3.23), que

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)).$$

3.5.2 Preuve du théorème 3.2

On suppose que u est une solution classique du Problème (3.1)-(3.2) vérifiant les conditions de la régularité maximale. Alors

$$u'',\ Au \in C^\theta([0,1];X),\quad \theta \in \,]0,1[\,.$$

On a

$$Au(.) = AR(.,d_0,u_1,f) + AS_1(.,d_0,u_1) + AS_2(.,f) \in C^\theta([0,1];X),\ \theta \in \,]0,1[\,,$$

et d'après les Lemmes 3.1 et 3.2, nous avons

$$\begin{cases} AS_2(.,f) \in C^\theta([0,1];X), \\ AR(.,d_0,u_1,f) \in C^\infty([0,1];X), \end{cases}$$

on en déduit donc

$$AS_1(.,d_0,u_1) \in C^\theta([0,1]\,;X),\ \ \theta \in \left]0,1\right[,$$

avec

$$\begin{array}{rl} & AS_1(x,d_0,u_1) \\ = & e^{xQ}\left(-Q^2\Pi^{-1}d_0 - f\left(0\right)\right) + e^{(1-x)Q}\left(Au_1 - f\left(1\right)\right). \end{array}$$

En utilisant l'assertion 1. du Lemme 1.12, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1,\ \Pi^{-1}d_0 \in D(A), \\ e^{(1-.)Q}\left(Au_1 - f\left(1\right)\right) \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right),\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[, \\ e^{\cdot Q}\left(A\Pi^{-1}d_0 - f\left(0\right)\right) \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right),\ \ \theta \in \left]0,1\right[, \end{array} \right.$$

qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_1 - f\left(1\right) \in \left(D(Q),X\right)_{1-\theta,\infty},\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[, \\ A\Pi^{-1}d_0 - f\left(0\right) \in \left(D(Q),X\right)_{1-\theta,\infty},\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[, \end{array} \right.$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_1 - f\left(1\right) \in \left(D(A),X\right)_{1-(\theta/2),\infty},\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[, \\ A\Pi^{-1}d_0 - f\left(0\right) \in \left(D(A),X\right)_{1-(\theta/2),\infty},\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[. \end{array} \right.$$

Réciproquement, supposons que

$$f \in C^\theta([0,1]\,,X),\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[,$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1, \Pi^{-1}d_0 \in D(A), \\ Au_1 - f\left(1\right) \in \left(D(A),X\right)_{1-(\theta/2),\infty},\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[, \\ A\Pi^{-1}d_0 - f\left(0\right) \in \left(D(A),X\right)_{1-(\theta/2),\infty},\ \ \ \theta \in \left]0,1\right[. \end{array} \right.$$

et montrons que le Problème (3.1)-(3.2) admet une solution classique u vérifiant les conditions de la régularité maximale. En utilisant le même raisonnement de la preuve du théorème 3.1, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1,\ \Pi^{-1}d_0 \in D(A), \\ e^{\cdot Q}\left(A\Pi^{-1}d_0 - f\left(0\right)\right) \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right),\ \ \theta \in \left]0,1\right[, \\ e^{(1-.)Q}\left(Au_1 - f\left(1\right)\right) \in C^\theta\left([0,1]\,;X\right),\ \ \theta \in \left]0,1\right[, \end{array} \right.$$

on en déduit alors

$$AS_1(.,f) \in C^\theta([0,1]\,;X),\ \ \theta \in \left]0,1\right[,$$

ce qui donne

$$Au(.) \in C^\theta([0,1]\,;X),\ \ \theta \in \left]0,1\right[,$$

c'est-à-dire

$$u(.) \in C^\theta([0,1]\,;D(A)),\ \ \theta \in \left]0,1\right[.$$

Le fait que $f \in C^\theta([0,1]\,,X)$ alors

$$u'' = f - Au \in C^\theta([0,1]\,;X),\ \ \theta \in \left]0,1\right[,$$

d'où le résultat.

3.6 Problème avec un paramètre spectral

On s'intéresse aux équations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{3.24}$$

sous des conditions aux limites de Robin

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \; u(1) = u_1, \tag{3.25}$$

où A, H des opérateurs linéaires fermés ne commutent pas, $f \in C^\theta([0,1]\,;X)$ avec $0 < \theta < 1$, d_0, u_1 sont des éléments donnés dans un espace de Banach complexe X et ω est un réel positif assez grand.

On s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution classique du Problème (3.1)-(3.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in C^2([0,1]\,;X) \cap C([0,1]\,;D(A)),$$

$u(0) \in D(H)$ et u satisfaisant le Problème (3.24)-(3.25) ainsi qu'à la régularité maximale de la solution classique u, c'est-à-dire

$$u'', \; Au \in C^\theta([0,1]\,;X), \; 0 < \theta < 1.$$

Pour des raisons de commodité, on va traiter l'équation (3.24) avec la notation

$$A_\omega = A - \omega I, \quad \omega > 0.$$

3.7 Hypothèses

On suppose qu'il existe un réel positif fixé ω_0 tel que, pour tout $\omega \geqslant \omega_0$, les opérateurs linéaires fermés A_ω et H vérifient

$$\left\{\begin{array}{l}]0,+\infty[\; \subset \rho(A_\omega), \ker(A_\omega) = \{0\}, \; \overline{\operatorname{Im}(A_\omega)} = X, \\ \text{et } \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{array}\right. \tag{3.26}$$

$$D(A) \subset D(H), \tag{3.27}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \exists \nu \in]0, \tfrac{1}{2}[, \exists C > 0 : \forall \mu > 0, \\ \text{et } \left\| H (A_\omega - \mu I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C}{|\omega + \mu|^{1/2+\nu}}, \end{array}\right. \tag{3.28}$$

d'après le chapitre précédent, les hypothèses (3.26)$\sim$(3.28) nous assurent existence de ω^* tel que, pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, les opérateurs Λ_ω et Π_ω sont inversibles avec

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda_\omega = (Q_\omega - H) + e^{2Q_\omega}(Q_\omega + H), \\ \Pi_\omega = (Q_\omega - H) + (Q_\omega + H)\, e^{2Q_\omega}, \end{array}\right. \tag{3.29}$$

on suppose aussi que

$$\forall \xi \in D(Q_\omega); \quad Q_\omega \Lambda_\omega^{-1} \xi \in D(Q_\omega), \quad Q_\omega^2 \Lambda_\omega^{-1} \xi \in (D(A), X)_{1-(\theta/2),\infty}. \tag{3.30}$$

Théorème 3.3 *On suppose (3.26)∼(3.30). Alors, il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega^* \geqslant \omega_0$*, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (3.24)-(3.25) admet une unique solution classique.*
2. u_1, $\Pi_\omega^{-1} d_0 \in D(A)$ *et*

$$\begin{cases} A_\omega \Pi_\omega^{-1} d_0 - f(0) \in \overline{D(Q_\omega)} = \overline{D(A)}, \\ A_\omega u_1 - f(1) \in \overline{D(Q_\omega)} = \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Théorème 3.4 *On suppose (3.26)∼(3.30). Alors, il existe* $\omega^* \geqslant \omega_0$ *tel que pour tout* $\omega^* \geqslant \omega_0$*, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le Problème (3.24)-(3.25) admet une solution classique et unique u qui satisfait la propriété de la régularité maximale*

$$u'', \ A_\omega u \in C^\theta([0,1]\,; X), \quad \theta \in \,]0,1[\,.$$

2. u_1, $\Pi_\omega^{-1} d_0 \in D(A)$ et

$$\begin{cases} A_\omega \Pi_\omega^{-1} d_0 - f(0) \in (D(A), X)_{1-(\theta/2),\infty}\,, \quad \theta \in \,]0,1[\,. \\ A_\omega u_1 - f(1) \in (D(A), X)_{1-(\theta/2),\infty}\,, \quad \theta \in \,]0,1[\,, \end{cases}$$

Chapitre 4

Equations différentielles opérationnelles avec des conditions aux limites non locales dans les espaces L^p : cadre non commutatif

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique, posées sur l'intervalle borné $(0, 1)$

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{4.1}$$

munies des conditions aux limites à coefficients opérateur du type non locales

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{4.2}$$

où A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X, un espace de Banach complexe, $f \in L^P(0,1;X)$ avec $1 < p < \infty$ et $u_0, u_{1,0}$, sont des éléments donnés dans X.

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de deux types de solutions du Problème (4.1)-(4.2) :

– Une solution classique du Problème (4.1)-(4.2), c'est-à-dire une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} i)\ u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \\ ii)\ u'(0) \in D(H), \\ iii)\ u \text{ satisfait } (4.1)\text{-}(4.2). \end{cases}$$

– Une solution semi-classique du Problème (4.1)-(4.2), c'est-à-dire une fonction u vérifiant, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$

$$\begin{cases} i)\ u \in W^{2,p}(0,1-\varepsilon;X) \cap L^p(0,1-\varepsilon;D(A)) \cap W^{1,p}(0,1;X), \\ ii)\ u'(0) \in D(H), \\ iii)\ u \text{ satisfait } (4.1)\text{-}(4.2). \end{cases}$$

4.2 Hypothèses

On suppose que

$$X \text{ est un espace de type } UMD, \tag{4.3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A \text{ est un opérateur linéaire fermé } X,\ [0,+\infty[\ \subset \rho(A) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda\geqslant 0}\left\|\lambda(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} < +\infty, \end{array}\right. \tag{4.4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall s\in\mathbb{R} : (-A)^{is}\in\mathcal{L}(X) \text{ et } \exists C\geqslant 1, \theta_A\in\,]0,\pi[\,, \\ \left\|(-A)^{is}\right\|_{L(X)}\leqslant Ce^{\theta_A|s|}, \end{array}\right. \tag{4.5}$$

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \tag{4.6}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right)\subset D(H), \tag{4.7}$$

et

$$0\in\rho(\Lambda), \tag{4.8}$$

où

$$\Lambda := I - e^{2Q} - 2HQe^{Q}.$$

Notons que cet opérateur Λ, dans un certain sens, est le déterminant du Problème (4.1)-(4.2).

Dans ce travail, il s'agit en particulier de prolonger et d'améliorer le travail des auteurs H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot et A. Medeghri (voir [26]) où ils ont traité le Problème (4.1)-(4.2) sous les hypothèses (4.3)∼(4.6) et (4.8) ainsi que

$$D(Q)\subset D(H), \tag{4.9}$$

au lieu de (4.7). De plus, ils ont supposé la condition supplémentaire de commutativité suivante :

$$\forall\zeta\in D(H) : A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta, \tag{4.10}$$

et ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 4.1 *Sous les hypothèses (4.3)∼(4.6), (4.8) en plus de (4.9) et (4.10). Soient* $u_0, u_{1,0}\in X$ *et* $f\in L^p(0,1,X)$, $1<p<+\infty$. *Alors, le Problème (4.1)-(4.2) admet une unique*

1. *solution semi-classique* u *si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} u_0\in(D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}, \\ Qu_0-\displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega}f(s)\,ds\in D(H), \\ u_{1,0}-H\left(Qu_0-\displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega}f(s)\,ds\right)\in(D(A),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \end{array}\right. \tag{4.11}$$

2. solution classique u si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in D(H) \\ u_{1,0} - H\left(Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Le but de ce chapitre est d'améliorer le résultat précédent en suivant les étapes suivantes :

1. on ne suppose pas l'hypothèse de commutativité (4.10),
2. on considère l'hypothèse (4.7) qui est plus faible que la condition $D(Q) \subset D(H)$ supposée dans [26],
3. on construit une formule de représentation adaptée à la solution classique,
4. on détermine les conditions nécessaires et suffisantes sur les données pour l'existence et l'unicité d'une solution classique et semi-classique du Problème (4.1)-(4.2),
5. finalement, on détermine la régularité optimale en supposant l'une des deux conditions régularisantes suivantes :

$$\Lambda^{-1}\left((D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}\right) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, \tag{4.13}$$

ou bien

$$\forall \varphi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right), H\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}. \tag{4.14}$$

Notons que, dans le cadre commutatif, les deux hypothèses précédentes sont naturellement vérifiées et les conditions citées au-dessus coïncident exactement avec (4.11) et (4.12).

4.3 Conséquences des hypothèses

Remarque 4.1

1. *Sous l'hypothèse (4.4), puisque $Q = -\sqrt{-A}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur X on a, pour tout $\xi \in X, x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$*

$$e^{xQ}\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q^k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) \text{ et } Q^n e^{xQ} \in \mathcal{L}(X). \tag{4.15}$$

2. *Sous (4.4), (4.5) et (4.7), le fait que H est un opérateur fermé et $Qe^Q \in \mathcal{L}(X)$, on en déduit que l'opérateur HQe^Q est fermé. De plus, suite à (4.15), on obtient $D\left(HQe^Q\right) = X$, et donc, grâce au théorème du graphe fermé, on a $HQe^Q \in \mathcal{L}(X)$. Alors*

$$\Lambda \in \mathcal{L}(X).$$

3. *Il n'est pas facile de vérifier la condition (4.13), mais*

$$\Lambda^{-1} = I + e^{2Q}\Lambda^{-1} + 2HQe^Q\Lambda^{-1}, \tag{4.16}$$

donc, suite à (4.15), l'hypothèse (4.14) implique (4.13).

Remarque 4.2

1. *Le fait que* $W^{2,p}(0,1;X) \subset C^1([0,1];X)$*, les conditions aux limites ont un sens lorsqu'on cherche une solution classique.*
2. *Si* u *est une solution semi-classique vérifiant, pour tout* $\varepsilon \in]0,1[, u \in W^{1,p}(0,1;X) \cap W^{2,p}(0,1-\varepsilon;X)$*, alors*
$$u \in C([0,1];X) \cap C^1([0,1[;X).$$
3. *d'autre part, si* $u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A))$*, alors*
$$u(0),\ u(1) \in \left(D(A), X\right)_{\frac{1}{2p},p}, \tag{4.17}$$
(voir [17], Remarque 1, assertion 6, p. 197). Dans ce cas, on a $u(0), u(1) \in D(Q)$*, car*
$$(D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} = \left(X, D\left(Q^2\right)\right)_{1-\frac{1}{2p},p} = (X, D(Q))_{2-\frac{1}{p},p} \subset D(Q).$$

4.4 Représentation de la solution

On suppose (4.4)∼(4.8). Soit u une solution classique ou semi-classique du Problème (4.1)-(4.2), alors il existe $\xi_0, \xi_1 \in X$ tels que pour presque tout $x \in (0,1)$
$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I(x) + J(x), \qquad x \in (0,1), \tag{4.18}$$
où
$$I(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds \text{ et } J(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds.$$
Cette formule est obtenue en utilisant la méthode de réduction d'ordre de Krein [30] (voir aussi [4], p. 989). Le but est de calculer ξ_0 et ξ_1 en utilisant les conditions aux limites (4.2).

Pour presque tout $x \in (0,1)$, on a
$$u'(x) = Qe^{xQ}\xi_0 - Qe^{(1-x)Q}\xi_1 + QI(x) - QJ(x), \qquad x \in (0,1),$$
alors
$$u'(0) = Q\xi_0 - Qe^{Q}\xi_1 - QJ(0) \in D(H).$$
Utilisant (4.2), on trouve
$$\begin{cases} \xi_0 + e^Q\xi_1 + J(0) = u_0, \\ e^Q\xi_0 + \xi_1 + I(1) + H\left[Q\xi_0 - Qe^Q\xi_1 - QJ(0)\right] = u_{1,0}, \end{cases}$$
on en déduit
$$\xi_0 = u_0 - e^Q\xi_1 - J(0),$$
et
$$e^Q\left(u_0 - e^Q\xi_1 - J(0)\right) + \xi_1 + H\left[Q\xi_0 - Qe^Q\xi_1 - QJ(0)\right] = u_{1,0} - I(1),$$
ce qui implique
$$\begin{aligned} &\left(I - e^{2Q}\right)\xi_1 + H\left[-2Qe^Q\xi_1 + Q\left(u_0 - 2J(0)\right)\right] \\ = \;& u_{1,0} - I(1) - e^Q\left(u_0 - J(0)\right). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Notons que

$$u'(0) = -2Qe^{Q}\xi_1 + Qu_0 - 2QJ\,(0) \in D\,(H)\,, \tag{4.20}$$

et d'après (4.7), $-2Qe^{Q}\xi_1 \in D\,(H)$, on obtient donc

$$Q\,(u_0 - 2J\,(0)) \in D\,(H)\,,$$

alors, (4.19) devient

$$\left[I - e^{2Q} - 2HQe^{Q}\right]\xi_1 = u_{1,0} - I\,(1) - e^{Q}\,(u_0 - J\,(0)) - HQ\,(u_0 - 2J\,(0))\,,$$

en vertu de l'hypothèse (4.8), on en déduit que

$$\xi_1 = \Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - I\,(1) - e^{Q}\,(u_0 - J\,(0)) - HQ\,(u_0 - 2J\,(0))\right], \tag{4.21}$$

et donc

$$\begin{aligned}\xi_0 \;&=\; u_0 - J\,(0) \\ &\quad -e^{Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - I\,(1) - e^{Q}\,(u_0 - J\,(0)) - HQ\,(u_0 - 2J\,(0))\right].\end{aligned} \tag{4.22}$$

Finalement, en insérant (4.21) et (4.22) dans (4.18) on déduit que, la solution du Problème (4.1)-(4.2) u est donnée formellement, pour tout $x \in [0,1]$, par

$$\begin{aligned}u\,(x) \;&=\; e^{xQ}u_0 + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - HQ\,(u_0 - 2J\,(0))\right] \\ &\quad +S\,(x) + R\,(x)\,,\end{aligned} \tag{4.23}$$

où

$$\begin{aligned}S\,(x) \;&=\; -e^{xQ}J\,(0) - e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[e^{Q}\,(u_0 - J\,(0)) + I\,(1)\right], \\ &\quad +I\,(x) + J\,(x)\,,\end{aligned} \tag{4.24}$$

et

$$R\,(x) = -e^{(x+1)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - e^{Q}\,(u_0 - J\,(0)) - I\,(1) - HQ\,(u_0 - 2J\,(0))\right]. \tag{4.25}$$

Notons que, l'étude ci-dessus montre que si le Problème (4.1)-(4.2) admet une solution semi-classique ou classique, alors cette solution est nécessairement unique et déterminée par la formule de représentation (4.23).

4.5 Régularité de la solution

Remarque 4.3 *On suppose (4.4)$\sim$(4.8). Soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$e^{(\cdot+1)Q} = e^{Q}e^{\cdot Q},$$

et

$$\forall \xi \in X, \quad e^{Q}\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q^k\right),$$

alors

$$Q^k R\,(\cdot) \in L^p(0,1;X).$$

Lemme 4.1 *On suppose (4.3)∼(4.8) et (4.13). Soit* $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$. *Alors, on a*

$$AS(.) \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty.$$

Preuve. Pour presque tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} AS(x) &= Q^2 e^{xQ} J(0) + Q^2 e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} e^Q (u_0 - J(0)) \\ &\quad + Q^2 e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} I(1) - \frac{1}{2} Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds - \frac{1}{2} Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 1.2, on a

$$\begin{cases} L(x,f) = Q \displaystyle\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,1,X), \\ L(1-x, f(1-.)) = Q \displaystyle\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,1,X). \end{cases}$$

Notons que, suite à la Remarque 4.1, assertion 2, on a

$$\forall \xi \in X,\ e^Q \xi \in D(A) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p},$$

et en vertu de l'hypothèse (4.13) et du Lemme 1.2, assertion 5, on obtient

$$\Lambda^{-1} e^Q (u_0 - J(0)),\ \Lambda^{-1} I(1) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p},$$

en utilisant le Lemme 1.1, assertion 1, on en déduit

$$\begin{cases} Q^2 e^{(1-\cdot)Q} \Lambda^{-1} e^Q (u_0 - J(0)) \in L^p(0,1;X) \\ Q^2 e^{(1-\cdot)Q} \Lambda^{-1} I(1) \in L^p(0,1;X) \\ Q^2 e^{\cdot Q} J(0) \in L^p(0,1;X), \end{cases}$$

avec $1 < p < \infty$, on obtient donc la régularité désirée. ■

4.5.1 Résultats principaux

Théorème 4.2 *On suppose (4.3)∼(4.8) et (4.13) . Soient* $u_0, u_{1,0} \in X$ *et* $f \in L^p(0,1,X)$ *avec* $1 < p < \infty$. *Alors, le Problème (4.1)-(4.2) admet une unique solution semi-classique* u *si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \subset D(Q), \\ Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in D(H) \quad et \\ \Lambda^{-1} \left[u_{1,0} - H \left(Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \right) \right] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \end{cases} \tag{4.26}$$

où

$$\Lambda = I - e^{2Q} - 2HQe^Q.$$

Preuve. Tout d'abord sous la condition (4.11), u donnée par la formule de représentation (4.23) est la solution semi-classique désirée. On doit vérifier, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, que

$$Au \in L^p(0,1-\varepsilon;X) \text{ et } Qu \in L^p(0,1;X).$$

Pour plus de commodité, on pose

$$u = \overline{u} + S + R$$

où, pour presque tout $x \in (0,1)$

$$\overline{u}(x) = e^{xQ}u_0 + e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - HQ\left(u_0 - 2J(0)\right)\right],$$

et S, R sont définis par (4.24) et (4.25) respectivement. En vertu de la Remarque 4.3 et du Lemme 4.1, il suffit de prouver que $A\overline{u} \in L^p(0,1-\varepsilon;X)$ et $Q\overline{u} \in L^p(0,1;X)$ où, pour p.p. $x \in (0,1)$

$$A\overline{u}(x) = -Q^2e^{xQ}u_0 - Q^2e^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J(0))\right],$$

et

$$Q\overline{u}(x) = Qe^{xQ}u_0 + Qe^{(1-x)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J(0))\right].$$

A partir de (4.11), on a

$$u_0 \in (D(Q^2),X)_{\frac{1}{2p},p} \subset (D(Q^2),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = (D(Q),X)_{\frac{1}{p},p}$$

et

$$\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J(0))\right] \in (D(Q),X)_{\frac{1}{p},p} = (D(A),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

alors, suite au Lemme 1.1, assertions 1. et 2. on conclut alors

$$A\overline{u} \in L^p(0,1-\varepsilon;X) \text{ et } Q\overline{u} \in L^p(0,1;X),$$

et donc

$$Au \in L^p(0,1-\varepsilon;X) \text{ et } Qu \in L^p(0,1;X).$$

De la formule (4.23) on a $u(0) = u_0$, cependant grâce à (4.11), on obtient $u'(0) \in D(H)$ et une fois encore, de la formule (4.23), il s'ensuit que

$$u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}.$$

Réciproquement, si le Problème (4.1)-(4.2) admet une solution semi-classique u alors elle est donnée par (4.23). De la Remarque 4.2, assertion 2, on a $u_0 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}$. Vu que $u'(0) \in D(H)$ et à partir de (4.20), on obtient alors

$$Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds \in D(H),$$

finalement Qu et donc $Q\overline{u}$ appartiennent à $L^p(0,1;X)$, ce qui implique

$$Qe^{(1-\cdot)Q}\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J(0))\right] \in L^p(0,1;X),$$

et suite au Lemme 1.1, assertion 2. on déduit alors

$$\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - H\left(Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds\right)\right] \in (D(A),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

■

Théorème 4.3 *On suppose (4.3)∼(4.8) et (4.13). Soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors, le Problème (4.1)-(4.2) admet une unique solution classique u si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in D(H) \ \ et \\ \Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - H\left(Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds\right)\right] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

Preuve. Si u est une solution classique du Problème (4.1)-(4.2), on a

$$A\overline{u} = -Q^2\overline{u} \in L^p(0,1;X),$$

où, pour presque tout $x \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} & A\overline{u}(x) \\ = \ & -Q^2 e^{xQ} u_0 - Q^2 e^{(1-x)Q} \Lambda^{-1} \{u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J(0))\}, \end{aligned}$$

et vu que

$$u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} = (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p},p},$$

et d'après le Lemme 1.1, point 2, il vient

$$Q^2 e^{\cdot Q} u_0 \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty.$$

L'étude précédente montre immédiatement que

$$A\overline{u} \in L^p(0,1;X), \quad 1 < p < \infty,$$

si et seulement si

$$Q^2 e^{(1-\cdot)Q} \Lambda^{-1} \{u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J(0))\} \in L^p(0,1;X),$$

et en vertu de l'assertion 2. du Lemme 1.1, on obtient

$$\Lambda^{-1} \{u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J(0))\} \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

où

$$J(0) = \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds.$$

Comme dans le Théorème 4.2, la réciproque reste vraie. ■

Théorème 4.4 *On suppose (4.3)∼(4.8) et (4.14). Soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0,1,X)$, avec $1 < p < \infty$. Alors, le Problème (4.1)-(4.2) admet*

1. *une solution semi-classique u si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in D(H) \ \ et \\ u_{1,0} - H\left(Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

2. une solution classique u si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in D(H) \quad et \\ u_{1,0} - H\left(Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

Dans ce cas, u est unique et donnée par la formule de représentation (4.23).

Preuve. Suite à la Remarque 4.1, (4.14) implique l'hypothèse (4.13) et donc, on peut appliquer les Théorèmes 4.2 et 4.3. Rappelons que

$$\Lambda^{-1} = I + e^{2Q}\Lambda^{-1} + 2HQe^{Q}\Lambda^{-1},$$

et donc, la condition (4.14) montre qu'il existe $\psi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$, tel que

$$\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - H(Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds)\right] = u_{1,0} - H(Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds) + \psi.$$

Donc, pour $E = (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$ ou $(D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\Lambda^{-1}\left[u_{1,0} - H(Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds)\right] \in E,$

(b) $u_{1,0} - H(Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds) \in E.$ ■

Notons que le Théorème 4.4 reste vrai si on remplace (4.14) par

$$HQe^{Q}(X) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}. \tag{4.27}$$

Remarque 4.4 *Supposons (4.3)∼(4.6) en plus de (4.8), (4.9) et (4.10).*

1. *Sous l'hypothèse de commutativité (4.10), il est facile de voir que notre formule de représentation de la solution (4.23) coïncide avec celle utilisée dans [26]. En plus, notre hypothèse (4.7) est plus faible que (4.9), considérée dans [26].*
2. *Grâce à l'hypothèse (4.10), ona*

$$\forall \varphi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k),\ H\varphi = A^{-1}HA\varphi \in D(A) \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

donc l'hypothèse (4.14) est satisfaite. Alors, le Théorème 4.4 est une généralisation des Théorèmes 3.6 et 3.7, p.1677, dans [26].

4.6 Problème avec un paramètre spectral

On s'intéresse, cette fois-ci, pour $\omega \geqslant \omega_0$ ($\omega_0 \geqslant 0$ fixé), au problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + A_\omega u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0, \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{4.28}$$

avec

$$A_\omega = A - \omega I.$$

4.7 Les hypothèses

On suppose que :

$$\begin{cases} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ \ [0,+\infty[\subset \rho\left(A_{\omega_0}\right), \\ \text{et } \sup\limits_{\lambda\geqslant 0} \left\| \lambda \left(A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{4.29}$$

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R} : \left(-A_{\omega_0}\right)^{is} \in L\left(X\right) \text{ et } \exists C \geqslant 1, \theta_{A_{\omega_0}} \in]0,\pi[\\ \left\| \left(-A_{\omega_0}\right)^{is} \right\|_{L(X)} \leqslant Ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|}, \end{cases} \tag{4.30}$$

$$H \text{ est un opérateur linéaire fermé } X, \tag{4.31}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) \subset D\left(H\right), \tag{4.32}$$

et

$$\left(\left(D\left(A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}\right) \subset \Lambda_\omega\left(D\left(A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}, \tag{4.33}$$

où

$$\Lambda_\omega := I - e^{2Q_\omega} - 2HQ_\omega e^{Q_\omega}.$$

Lorsque Λ_ω est un opérateur inversible, l'hypothèse précédente est équivalente à

$$\Lambda_\omega^{-1}\left(\left(D\left(A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}\right) \subset \left(D\left(A\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}. \tag{4.34}$$

4.8 Conséquences des hypothèses

Remarque 4.5 *Soit $\omega \geqslant \omega_0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a*

$$D\left(Q_\omega^{2k}\right) = D\left(A_\omega^k\right) = D\left(A^k\right) \subset D\left(Q_\omega^{2k-1}\right),$$

d'où

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(Q_\omega^k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A_\omega^k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right).$$

Lemme 4.2 *On suppose (4.29)∼(4.33). Alors, il existe $\omega^* \geqslant \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, l'opérateur*

$$\Lambda_\omega = I - e^{2Q_\omega} - 2HQ_\omega e^{Q_\omega} \in \mathcal{L}\left(X\right),$$

admet un inverse borné.

Preuve. Soit $\omega \geqslant \omega_0$. On a

$$\Lambda_\omega = I - \mathcal{R}_\omega,$$

où

$$\mathcal{R}_\omega = 2HQ_\omega e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega} \in \mathcal{L}\left(X\right).$$

En utilisant G. Dore et S. Yakubov [14], Lemme 2.6, p. 103, on trouve

$$\begin{cases} \exists c > 0, \exists k > 0 : \forall \omega \geqslant \omega_0, \forall x \geqslant 1/2, \\ \left\| Q_\omega e^{xQ_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant ce^{-kx\sqrt{\omega}} \text{ et } \left\| e^{xQ_\omega} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant ce^{-kx\sqrt{\omega}}. \end{cases} \tag{4.35}$$

D'après Haase [24], Proposition 3.1.7, p. 65, il existe $K>0$ tel que $(T_\omega)_{\omega\geqslant\omega_0}\in\mathcal{L}(X)$ et pour tout $\omega\geqslant\omega_0$ on a

$$\begin{cases}\|T_{\omega-\omega_0}\|_{\mathcal{L}(X)}\leqslant K\sqrt{\omega-\omega_0},\\ (-A_{\omega_0})^{1/2}+T_{\omega-\omega_0}=\left(-A_{\omega_0+(\omega-\omega_0)}\right)^{1/2},\\ A_\omega^{-1}T_{\omega-\omega_0}=T_{\omega-\omega_0}A_\omega^{-1}.\end{cases}$$

Posons $Q_\omega=Q_{\omega_0}-T_{\omega-\omega_0}$. On a

$$T_{\omega-\omega_0}=\left(\sqrt{z+\omega-\omega_0}-\sqrt{z}\right)(-A_{\omega_0}),$$

en plus, Q_{ω_0} et $T_{\omega-\omega_0}$ génèrent des semi-groupes analytiques satisfont

$$e^{x\left(Q_{\omega_0}-T_{\omega-\omega_0}\right)}=e^{xQ_{\omega_0}}e^{-xT_{\omega-\omega_0}},\ x\geqslant 0.$$

Maintenant, on fixe $s>0$ tel que $s(k+K)<k/2$ (alors $1-s>1/2$) et pour tout $\omega\geqslant\omega_0$, on a

$$\begin{aligned}&\|T_{\omega-\omega_0}\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &=\left\|2He^{sQ_\omega}Q_\omega e^{(1-s)Q_\omega}+e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &=\left\|2He^{sQ_{\omega_0}-sT_{\omega-\omega_0}}Q_\omega e^{(1-s)Q_\omega}+e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant 2\left\|He^{sQ_{\omega_0}}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|e^{-sT_{\omega-\omega_0}}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|Q_\omega e^{(1-s)Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)}+\left\|e^{2Q_\omega}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant 2\left\|He^{sQ_{\omega_0}}\right\|_{\mathcal{L}(X)}e^{sK\sqrt{\omega-\omega_0}}ce^{-k(1-s)\sqrt{\omega}}+ce^{-2k\sqrt{\omega}}\\ &\leqslant 2c\left\|He^{sQ_{\omega_0}}\right\|_{\mathcal{L}(X)}e^{(-k+s(k+K))\sqrt{\omega}}+ce^{-2k\sqrt{\omega}}\\ &\leqslant 2c\left\|He^{sQ_{\omega_0}}\right\|_{\mathcal{L}(X)}e^{-(k/2)\sqrt{\omega}}+ce^{-2k\sqrt{\omega}}.\end{aligned}$$

Alors, il existe $\omega^*\geqslant\omega_0$ tel que pour tout $\omega\geqslant\omega_0$, on obtient

$$\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)}<1,$$

d'où $\Lambda_\omega=I-T_\omega$est inversible. ■

4.9 Résultat principal

Le résultat principal obtenu dans la section de ce chapitre est le suivant :

Théorème 4.5 *On suppose (4.3), (4.29)∼(4.33). Soient $u_0,u_{1,0}\in X$, $f\in L^p(0,1,X)$ avec $1<p<\infty$ et $\omega\geqslant\omega^*$.*

Alors, le Problème (4.28) admet :

1. *une solution semi-classique u si et seulement si*

$$\begin{cases}u_0\in(D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}\\ Q_\omega u_0-\int_0^1 e^{sQ_\omega}f(s)\,ds\in D(H)\ \text{ et}\\ \Lambda_\omega^{-1}\left[u_{1,0}-H\left(Q_\omega u_0-\displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega}f(s)\,ds\right)\right]\in(D(A),X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p},\end{cases}$$

2. une solution classique u si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds \in D(H) \ \ and \\ \Lambda_\omega^{-1}\left[u_{1,0} - H\left(Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds\right)\right] \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

où $\Lambda_\omega = I - e^{2Q_\omega} - 2HQ_\omega e^{Q_\omega}$.

Dans ce cas u est unique et donnée par la formule de représentation (4.23) où A est remplacé par A_ω, Q *par* Q_ω *et* Λ *par* Λ_ω.

Comme dans le Théorème 4.4, si on remplace (4.34) par (4.14), alors on peut remplacer, dans les assertions 1 et 2,

$$\Lambda_\omega^{-1}\left[u_{1,0} - H\left(Q_\omega u_0 - \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds\right)\right],$$

par $u_{1,0} - H\left(Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\, ds\right)$.

4.9.1 Exemple

On définit l'opérateur linéaire fermé A dans $L^p(0,1)$, $p \in]1,+\infty[$ par

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1) \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y). \end{cases}$$

L'opérateur A est inversible avec, pour tout $\psi \in L^p(0,1)$ et $y \in (0,1)$

$$\left[A^{-1}\psi\right](y) = (y-1)\int_0^y s\psi(s)ds + y\int_y^1 (s-1)\psi(s)ds,$$

en plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\left(\sqrt{\lambda}\right) > 0$, on a

$$\left[(A-\lambda I)^{-1}\psi\right](y) = \int_0^1 N_{\sqrt{\lambda}}(y,s)\psi(s)ds,$$

où

$$N_{\sqrt{\lambda}}(y,s) = -\begin{cases} \frac{\sinh\sqrt{\lambda}(1-y)\sinh\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } \ 0 \leqslant s \leqslant y, \\ \frac{\sinh\sqrt{\lambda}y\sinh\sqrt{\lambda}(1-s)}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}} & \text{si } \ y \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Maintenant, on définit $q \in]1,+\infty[$ par $1/q + 1/p = 1$ et on considère

$$H(\varphi)(y) = \int_0^y \phi(y,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi, \ \ \varphi \in X, \ \ y \in (0,1),$$

où $\phi(\cdot,\cdot) : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{C}$ est une fonction fixe vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l}\phi(y,\cdot) \in L^q(0,1), \text{ pour p.p. } y \in (0,1) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(y,\cdot), \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y,\cdot) \in L^q(0,1), \text{ pour p.p. } y \in (0,1) \\ \phi_1 : y \longmapsto \phi(y,y), \phi_2 : y \longmapsto \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(y,y) \in L^p(0,1) \\ \Phi : y \longmapsto \phi(y,\cdot) \in L^q(0,1; L^q(0,1)) \\ \phi(1,\cdot) = 0,\end{array}\right. \tag{4.36}$$

Notons que

$$\sup_{y \in [0,1]} \|\phi(y,.)\|_{L^q(0,1)} = C_\phi < +\infty,$$

donc

$$y \to \phi(y,.) \in L^q(0,1; L^q(0,1)).$$

Pour $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, on définie la fonction ϕ par :

$$\phi(y,\xi) = (1-y)^n \psi(\xi), \quad \xi, y \in (0,1),$$

où

$$\psi \in W^{2,q}(0,1) \cap W^{1,p}(0,1).$$

On a, $H \in \mathcal{L}(X)$ car

$$\begin{array}{rcl}\|H(\varphi)\|_X & = & \left(\displaystyle\int_0^1 \left|\int_0^y \phi(y,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right|^p dy\right)^{1/p} \\ & \leq & \left(\displaystyle\int_0^1 \left|\int_0^1 \phi(y,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right|^p dy\right)^{1/p} \\ & \leq & \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 |\phi(y,\xi)|^q d\xi\right)^{1/q} \left(\int_0^1 |\varphi(\xi)|^p d\xi\right)^{1/p} dy \\ & \leq & \|\phi\|_{L^q(0,1;L^q(0,1))} \|\varphi\|_X .\end{array}$$

Ici, notre problème abstrait est

$$\left\{\begin{array}{l}u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad \text{p.p. } x \in (0,1) \\ u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0},\end{array}\right.$$

s'écrit concrètement

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta u(x,y) - \omega u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u(0,y) = u_0(y), \ y \in]0,1[\\ u(1,y) + \int_0^y \phi(y,\xi) \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\xi) d\xi = u_{1,0}(y), \ y \in]0,1[\\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \ x \in]0,1[.\end{array}\right. \tag{4.37}$$

Afin d'appliquer le Théorème 4.5 pour le Problème 4.37, on explicite tout d'abord les conditions citées dans ce théorème :

$$\begin{cases} (i)\ u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \\ (ii)\ Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds \in D(H) \\ (iii)\ \ u_{1,0} - H\left(Qu_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ} f(s)\, ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \ \text{ ou } \ (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

Les espaces d'interpolation $(D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}, (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$ sont décrits par

$$\begin{cases} (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} = \left\{\varphi \in W^{2-1/p,p}((0,1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\}, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = W^{1-1/p,p}((0,1) \ \text{si } p < 2, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = \left\{\varphi \in W^{1-1/p,p}((0,1) : \int_0^1 \frac{|\varphi(t)|^p}{t(1-t)} d\xi < +\infty\right\} \ \text{ si } p = 2, \\ (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} = \left\{\varphi \in W^{1-1/p,p}((0,1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\right\} \ \text{ si } p > 2. \end{cases}$$

voir [11], p. 385.

On rappel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $1 < \theta < 1$

$$W^{k+\theta,p}(0,1) = \left\{ f \in W^{k,p}(0,1) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)\right|^p}{|x-y|^{1+\theta p}} dxdy < +\infty \right\}.$$

Notons que, $u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \subset D(Q)$ et $H \in \mathcal{L}(X)$ donc (ii) est satisfaite.

On vérifie maintenant les hypothèses (avec $\omega_0 = 0$) du Théorème 4.5.

1. L'espace $L^p(0,1)$ est UMD et donc (4.3) est vérifiée.
2. Pour (4.29), voir [11], p. 372, Lemme 8.1.
3. La propriété (4.30) n'est pas facile à montrer, elle est complètement prouvée dans [31].
4. $H \in \mathcal{L}(X)$ et donc les hypothèses (4.31) et (4.32) sont clairement vérifiées.
5. Pour l'hypothèse (4.34), il suffit de montrer (4.14) :

   Soit $\varphi \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D\left(A^k\right) \subset \mathcal{C}(0,1)$, alors pour $y \in (0,1)$

$$H(\varphi)(y) = \int_0^y \phi(y,\xi)\, \varphi(\xi) d\xi, \ \varphi \in X, \ y \in (0,1),$$

$$\begin{cases} \dfrac{dH(\varphi)}{dy}(y) &= \phi(y,y)\, \varphi(y) + \displaystyle\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\xi)\, \varphi(\xi) d\xi \\ &= \phi_1(y)\, \varphi(y) + \displaystyle\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\xi)\, \varphi(\xi) d\xi \\ \dfrac{d^2 H(\varphi)}{dy^2}(y) &= \dfrac{d\phi_1}{dy}(y)\varphi(y) + \phi_1(y) \dfrac{d\varphi}{dy}(y) \\ & \quad + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(y,y)\, \varphi(y) + \displaystyle\int_0^y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y,\xi)\, \varphi(\xi) d\xi, \end{cases}$$

donc $y \mapsto \phi_1(y)\varphi(y) \in L^p(0,1)$ car

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 |\phi_1(y)\varphi(y)|^p\,dy\right)^{1/p} &\leqslant \sup_{z\in[0,1]} |\varphi(z)| \times \left(\int_0^1 |\phi_1(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \\ &\leqslant \sup_{z\in[0,1]} |\varphi(z)| \times \|\phi_1\|_X < +\infty,\end{aligned}$$

de même $y \mapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\partial\phi}{\partial y}(y,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi \in L^p(0,1)$ car

$$\begin{aligned}\|H(\varphi)\|_X &= \left(\int_0^1 \left|\int_0^y \frac{\partial\phi}{\partial y}(y,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi\right|^p dy\right)^{1/p} \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial\phi}{\partial y}(y,\xi)\right|^q d\xi\right)^{1/q} \left(\int_0^1 |\varphi(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} dy \\ &\leqslant \left\|\frac{\partial\phi}{\partial y}(y,\cdot)\right\|_{L^q(0,1)} \|\varphi\|_X < +\infty.\end{aligned}$$

Alors $\dfrac{dH(\varphi)}{dy} \in L^p(0,1)$ et de la même manière, on montre que $\dfrac{d^2H(\varphi)}{dy^2} \in L^p(0,1)$.

Finalement, $H(\varphi) \in W^{2,p}(0,1)$ et on a aussi $H(\varphi)(0) = H(\varphi)(1) = 0$, donc $H(\varphi) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.

En appliquant maintenant le Théorème 4.5, on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.1 *Soient $u_0 \in X, u_{1,0} \in X$, $f \in L^p(0,1,X)$ avec $1 < p < \infty$. Alors il existe $\omega^* \geqslant 0$ tel que pour tout $\omega \geqslant \omega^*$, le Problème (4.37) admet une unique*

1. *solution semi-classique u si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \ \ et \\ u_{1,0} - H\left(Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\,ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \end{cases}$$

2. *solution classique u si et seulement si*

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \ \ et \\ u_{1,0} - H\left(Q_\omega u_0 - \displaystyle\int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s)\,ds\right) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}. \end{cases}$$

Remarque 4.6 *On peut choisir un élément $\varphi \in X$ de telle façon que la condition (4.10) ne soit pas satisfaite. En effet, pour $\varphi \in X$ et $y \in (0,1)$, on a*

$$\begin{aligned}\left[A^{-1}H\varphi\right](y) &= (y-1)\int_0^y sH\varphi(s)ds + y\int_y^1 (s-1)H\varphi(s)ds \\ &= (y-1)\int_0^y s\left(\int_0^s \phi(y,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi\right)ds \\ &\quad + y\int_y^1 (s-1)\int_0^s \phi(y,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left[HA^{-1}\varphi\right](y) &= \int_0^y \phi(y,\xi)\left[A^{-1}\varphi\right](\xi)d\xi \\ &= \int_0^y \phi(y,\xi)\left[(\xi-1)\int_0^\xi s\varphi(s)ds + \xi\int_\xi^1 (s-1)\varphi(s)ds\right]d\xi.\end{aligned}$$

On a $\left[A^{-1}H\varphi\right](0) = \left[A^{-1}H\varphi\right](1) = 0$, *mais en général*

$$HA^{-1}\varphi \neq A^{-1}H\varphi.$$

Bibliographie

[1] A.V. Balakrishnan. : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semi-groups Generated by them, Pacif. J. Math.10 (1960), 419-437.*

[2] J. Bourgain. : *Somme Remarks on Banach Spaces in which Martingale Differences are Unconditional, Ark. Mat., 21 (1983), 163-168.*

[3] D. L. Burkholder. : *A Geometric Condition that Implies the Existence of Certain Singular Integrals of Banach Space Valued Function, Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Chicago, 1981, Wadsworth, Belmont, CA (1983), 270-286.*

[4] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri. : *Sturm-Liouville Problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces, Differential and Integral Equations, volume 21, numbers 9-10 (2008), 981-1000.*

[5] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri. : *Complet Abstract Differential Equations of Elliptic type with General Robin Boundary Conditions, in UMD Spaces,volume 4, number 3, June 2011, pp 523-538.*

[6] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri. : *Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in Hölder Spaces. Applicable Analysis, 2012, Vol. 91, no. 8, pp1453-1475.*

[7] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Medeghri. : *Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in General L_p Sobolev Spaces and Applications. Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS), 2015, vol. 8, no. 3, pp. 56-77.*

[8] M. Cheggag, M. Kaid, R. Labbas and S. Maingot. : *New Results on Elliptic Equations with Nonlocal Boundary Coefficient-operator Conditions in UMD Spaces : Noncommutative Cases. Submitted.*

[9] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and Kh. Ould Melha. : *New Results on Complete Elliptic Equations with Robin Boundary Coefficient-Operator Conditions in non Commutative Case, Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 70-96.*

[10] G. Da Prato. : *Absract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearisation, Proc. Symp. Pure Math. 45(1) (1986), p. 359-370.*

[11] G. Da Prato et P. Grisvard. : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975), p. 305-387.*

[12] G. Dore and A. Venni. : *On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators, Mathematische Zeitschrift, 196 (1987), 270-286.*

[13] G. Dore. : *L^p Regularity for Abstract Differential Equation. Functional Analysis and Related Topics, Kyoto 1991, Lect. Notes in Math. Volume 1540, Springer-Verlag, Berlin, 1993, p. 25-38.*

[14] G. Dore and S. Yakubov. : *Semigroup estimates and noncoercive boundady value problems, semigroups Forum,* 60(2000), 93-121.

[15] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner. : *Study of Complete Abstract Elliptic Differential Equations in non Commutative Cases, Appl. anal, 91(2012), 1495-1510.*

[16] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner. : *Boundary Value Problem For Elliptic Differential Equations in Non-commutative Cases, Discrete and continuous dynamical systems, Volume 33, Number 11&12, November & December 2013, pp. 4967-4990.*

[17] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi. : *A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equation in UMD Space and New Applications, Funkcialaj Ekvacioj, 51 (2008), 165-187.*

[18] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi. : *Necessary and Sufficient Conditions for Maximal Regularity in the Study of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces, Disc. Contin. Dyn. Sys. 22(4) (2008), p. 973-987.*

[19] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi. : *Complete Abstracte Differential Equation of Elliptic type in UMD spaces, Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006) 193-214.*

[20] P. Grisvard. : *Spazi di trace e applicazioni (Italian), Rend. Mat. (6), 5 (1972), 657-729.*

[21] P. Grisvard. : *Equations Differentielles Abstraites, Ann. Sci. Ecol Norm. Sup. (4) 2(3) (1969). p. 311-395.*

[22] D. Guidetti. : *A Introduction to Maximal Regularity for Parabolic Problems and Interpolation Theory with Application to an Inverse Problem, International Minicourse-Workshop, Interplay Between (C_0)- Semigroups and PDEs : Theory and Applications, Bari/Italy September 22-26, 2003, p. 113-146.*

[23] P. L. Gurevich. :*Elliptic Problems with Nonlocal Boundary Conditions and Feller Semigroups, Journal of Mathematical Sciences,Vol . 182, N°3 (2012), 255-440.*

[24] M. Haase. : *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods, Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.*

[25] H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. : *On Some Elliptic Problems with Nonlocal Boundary Coefficient-operator Conditions in the Framework of Hölderian Spaces, EJQTDE,2013 No. 36, p.1-32.*

[26] H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri. :*Nonlocal general boundary value problems of elliptic type in L^p Cases*, Mathematics, Mediterr. J. Math., (2015), 1669–1683.

[27] E. E. Holmes, M. A. Lewis, J. E. Banks and R. R. Veit. :*Partial Differential Equation in Ecology : Spatial Interactions and Population Dynamics,* Ecology, 75 (1), 1994, 17-29.

[28] M. Kaid and K. Ould Melha. : *Sturm-Liouville abstract problems for the second order differential equations in a non commutative case.Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 44-61.*

[29] T. Kato. : *Perturbation Theory for Linear Operators, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.*

[30] S. G. Krein. : *Linear Differential Equations in Banach Spaces, Moscou, 1967; English translation, AMS, Providence, 1971.*

[31] R. Labbas and M. Moussaoui. :*On the resolution of the heat equation with discontinuous coefficients,* Semigroup Forum, vol. 60 (2000), 187-201.

[32] J. L. Lions et J. Peetre. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 19 (1964), p. 5-68.*

[33] J. L. Lions. : *Théorèmes de trace et d'interpolation, I et II. Annali S.N.S. di Pisa, 13, (1959), 389-403 et 14, (1960), 317-331.*

[34] A. Lunardi. : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhaüser, Basel, 1995.*

[35] A. Lunardi. : *Interpolation Theory, Birkhaüser, 1999.*

[36] J. Martin-Vaquero and J. Vigo-Aguiar. :*A note on efficient techniques for the second-order parabolic equation subject to non-local conditions, Applied Numerical Mathematics 59 (2009), 1258-1264.*

[37] A. Pazy. : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.*

[38] J. Prüss and H. Sohr. : *On Operators with Bounded Imaginary Powers in Banach Spaces, Math. Z., 203 (1990), 429-452.*

[39] E. Sinestrari. : *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Space of Continuous Functions, J. Math. Anal. Appl. 107 (1985), p. 16-66.*

[40] A. L. Skubachevskii. :*Nonclassical Boundary-value Problems. I,* Journal of Mathematical Sciences, Vol. 155, N°2 (2008), 199-334.

[41] H. Tanabe. : *Equations of evolution, Osaka University, translated from Japanese by N. Mugibayashi and H. Haneda, Kobe university, 1979.*

[42] H. Triebel. : *Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.*

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des équations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1). \tag{1}$$

Les conditions aux limites considérées dans ce travail sont :

1. Les conditions aux limites de type Robin généralisé :

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

2. Les conditions aux limites non locales :

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) + Hu'(0) = d_{1,0}. \end{cases} \tag{3}$$

Ici, A et H sont deux opérateurs linéaires fermés dans X, un espace de Banach complexe, ne commutant pas, u_0, u_1, $u_{0,1}$ et $d_0 \in X$ et $\omega \geqslant 0$. Notre étude se fera dans deux espaces de Banach de géométrie différente, lorsque le second membre f appartient à l'une des deux classes suivantes :

$$L^p(0,1;X) \text{ avec } 1 < p < \infty \text{ et } C^\theta([0,1];X) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique des Problèmes (1)-(2) et (1)-(3).

Mots clés : Equations différentielles opérationnelles du second ordre de type elliptique ; cadre non commutatif ; semi-groupes analytiques ; régularité maximale ; espace UMD ; espaces de Hölder ; espaces d'interpolation.

Abstract

This work is devoted to the study of the operational differential equations of the second order of elliptic type in non-commutative framework :

$$u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \qquad x \in (0,1). \tag{1}$$

The boundary conditions considered in this work are :

1. the abstract boundary conditions of Robin's type

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

2. nonlocal boundary conditions

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(1) + Hu'(0) = d_{1,0}. \end{cases} \tag{3}$$

where A and H are closed linear operators in a complex Banach space X, u_0, u_1, $u_{0,1}$ and $d_0 \in X$ and $\omega \geqslant 0$. The study is performed in two different frameworks, when the second member f belongs to one of the two following classes :

$$C^{\theta}([0,1], X) \text{ with } 0 < \theta < 1 \text{ and } L^{p}(0,1;X) \text{ with } 1 < p < \infty.$$

We will seek for existence, uniqueness and optimal regularity of the classical solution of Problems (1)-(2) and (1)-(3).

Keywords : second-order abstract elliptic differential equations ; non-commutative case ; analytic semigroups ; maximal regularity ; UMD space ; Hölder spaces ; interpolation spaces.

الملخص:

هذا العمل يأتي في إطار دراسة المعادلات التفاضلية معاملاتها عبارة عن مؤثرات الاتية:

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), (1)$$

مع شروط **"روبن"** المعممة:

$$u'(0) - Hu(0) = d_0 \ , \quad u(1) = u_1 . \qquad (2)$$

وشروط **"غيرمحلي "**:

$$u(1) + Hu'(0) = u_{1,0} \ , \quad u(0) = u_0 \qquad (3)$$

مع Aو H هي مؤثرات خطية مغلقة في فضاء بناخ X و u_1 و d_0 تنتمي الى X.

الدراسة أنجزت في فضاءين مختلفين: الحالة الأولى في الفضاء والحالة الثانية $L^p(0,1;X), 0<\theta<1$

و ثانيا في الفضاء $C^\theta([0,1];X), 0<\theta<1$

نهتم في هذه الدراسة على وجود, وحدانية و الانتظام الاقصى للحل ل(1)-(2) و(1)-(3).

الكلمات والعبارات الرئيسية:

معادلات التفاضلية من الدرجة الثانية, اطار غير تبديلي, نصف الزمر التحليلية, الانتظام الاقصى, فضاء هولدر.