



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique  
**UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS**  
**MOSTAGANEM**

**Polycopié de**  
**PHYSIQUE II**

***COURS ÉLECTROSTATIQUE***  
***ET ÉLECTRODYNAMIQUE***

Présenté par : Dr. SEFIR Yamina

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la première année  
Licence LMD

Domaine Science et Technologie (S.T)

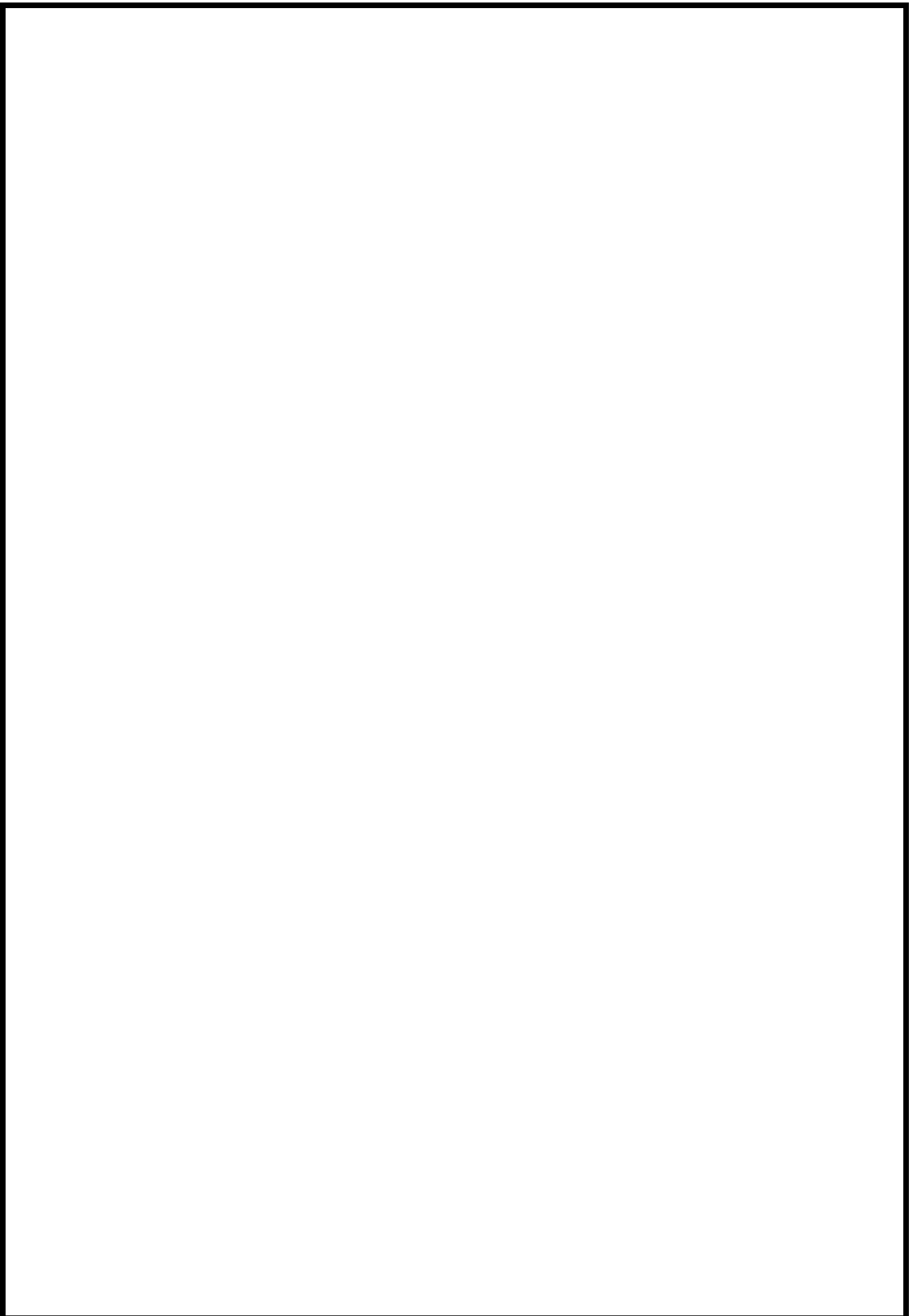
Année Universitaire 2020/2021

## *Préfacé*

Ce polycopié de deuxième semestre de l'année universitaire qui correspond au programme officiel de la matière <<physique 2>> a été rédigé pour permettre aux étudiants de 1ère année LMD du domaine science et technologie, d'avoir un document de référence regroupant l'ensemble des connaissances pour ce module.

Le polycopié comprend deux grands volets :

- ✚ Electrostatique : est axé sur les phénomènes (champ et potentiel électrostatique) créés par des charges électriques statiques.
- ✚ Electrocinétique : est le domaine de la physique où les manifestations des mouvements de charges mobiles sont étudiées en termes de courants et de tensions.



## Chapitre I

### Électrostatique

1. introduction .....	1
1.1. Origine du mot électricité.....	1
1.2. Types d'électricité .....	1
1.3. Electrification .....	2
2. Charges électriques .....	4
2.1. Quantification de la charge électrique.....	4
2.2. Principe de la conservation de la charge électrique.....	4
2.3. Différentes distributions continues de charges/ types de densité.....	5
2.3.1. Distribution linéique de charges/ densité linéique $\lambda$ .....	5
2.3.2. Distribution surfacique .....	5
2.3.3. Distribution volumique .....	5
3. La Force Electrostatique.....	5
3.1. Loi de Coulomb.....	5
3.2. Le principe de superposition .....	7
4. Champ électrostatique .....	8
4.1. Définition .....	8
4.2. Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle .....	9
4.3. Champ crée par un ensemble N de charges ponctuelles isolées.....	9
4.4. Lignes de champ électrique.....	10
4.5. Champ électrostatique crée par une distribution continue de charges .....	12
4.5.1. Champ crée par une distribution de charges linéiques.....	12
4.5.2. Champ crée par une distribution de charges surfacique .....	12
4.5.3. Champ crée par une distribution de charges volumique .....	13
5. Potentiel électrostatique .....	13
5.1. Circulation du champ électrique d'une charge ponctuelle .....	13
5.2. Notion de différence de potentiel .....	13
5.3. Relation entre champ et potentiel électrostatique.....	14
5.4. Potentiel électrique crée par un ensemble de charges ponctuelles.....	15
5.5. Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges.....	15
5.6. Relation entre les lignes de champ électrostatique et surfaces équipotentielles .....	15
6. Travail et énergie.....	18
6.1. Travail de la force électrique.....	18

---

6.2. Energie potentielle.....	19
7. Le dipôle électrique.....	21
7.1 Le moment dipolaire.....	21
7.2. Potentiel électrique créé par un dipôle.....	21
7.3 L'énergie potentielle du dipôle dans un champ uniforme.....	22
7.4 Mouvement du dipôle dans un champ uniforme.....	22
8. Théorème de Gauss.....	24
8.1. Flux d'un vecteur à travers une surface.....	24
8.2. Théorème de Gauss.....	24
9. Conducteur en équilibre.....	28
9.1. Définition.....	28
9.1. Propriétés d'un conducteur en équilibre.....	28
9.2 Champ électrostatique au voisinage du conducteur chargé.....	28
9.3. Pression électrostatique.....	29
9.3. Pouvoir des pointes.....	29
9.4. Capacité d'un conducteur isolé.....	30
9.5. Phénomène d'influence entre conducteurs chargés.....	30
10. Les condensateurs.....	31
10.1. Définition.....	31
10.2. Capacités de quelques condensateurs simples.....	32
10.2.1. Capacité d'un condensateur plan.....	32
10.2.2. Capacité d'un condensateur cylindrique.....	32
10.3.2. Capacité d'un condensateur sphérique.....	33
10.3. Association de condensateurs.....	35
10.4. Énergie électrique emmagasinée par un condensateur.....	36

**Chapitre II**  
**Électrocinétique**

1. introduction.....	38
2. Courant électrique.....	38
2.1. Définitions.....	38
2.2. Intensité du courant électrique.....	38
2.3. Vecteur densité du courant électrique.....	39
2.4. Loi d'Ohm.....	40
2.5. Résistance d'un conducteur.....	40

2.6. L'effet Joule .....	43
2.7. Groupement de résistances .....	43
2.7.1. Groupement en série.....	43
2.7.2. Groupement en parallèle .....	44
3. Eléments d'un circuit électrique.....	45
3.1. Générateurs et récepteurs .....	45
3.1.1. Générateur .....	45
3.1.2. Récepteur.....	47
3.2 Lois de Kirchhoff .....	48
3.2.1 Loi des nœuds (conservation de la charge) .....	48
3.2.2 Loi des mailles (conservation de l'énergie) .....	48
3.3 Théorème de Thévenin.....	50
3.4. Charge et décharge d'un condensateur.....	56
3.4.1. Charge d'un condensateur à travers une résistance.....	56
3.4.2. Décharge du condensateur dans une résistance.....	57

# Chapitre I Électrostatique

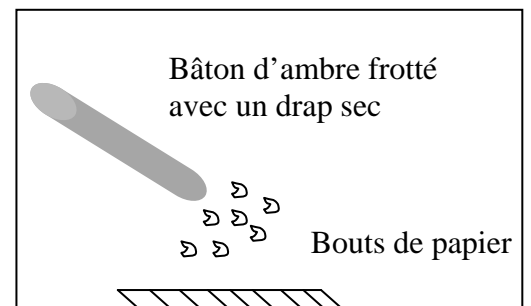
## 1. introduction

### 1.1. Origine du mot électricité

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes (champ et potentiel électrostatique) créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les forces électrostatiques sont décrites par la loi de Coulomb qui présente une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

D'après **Thalès de Millet (625-546 av J.C)**, l'ambre jaune frotté avec de la laine devient capable de petits objets. C'est l'effet électrostatique. L'ambre jaune, en Grec électron est l'origine du mot électrostatique (**Fig.1**).

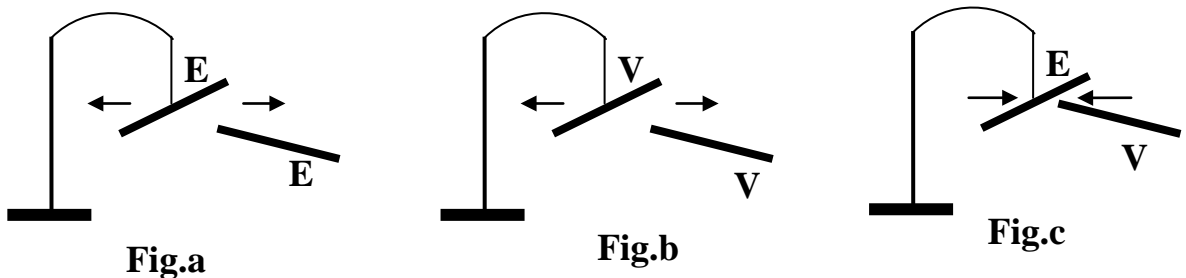
**William Gilbert (1540-1603)** : découvre d'autres substances se comportant comme l'ambre jaune (verre, résine, soufre,....).



**Fig 1.** Electrification.

### 1.2. Types d'électrisation

- 2 bâtons d'ébonites (E) préalablement frottés sont mis en contact. **Résultat** : Répulsion (**Fig.2.a**)
- 2 bâtons en verre (V) préalablement frottés sont mis en contact. **Résultat** : Répulsion (**Fig.2.b**)
- 2 bâtons préalablement frottés, l'un en verre et l'autre en ébonite sont mis en contact. **Résultat** : Attraction (**Fig.2.c**)



**Fig 2.** Types d'électrification.

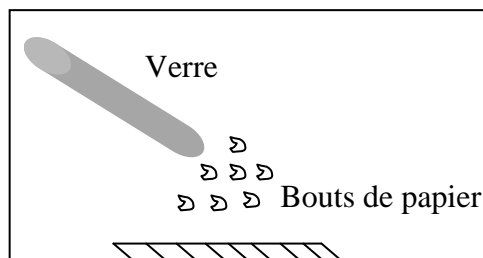
**Benjamin Franklin (1706-1790)** distingua deux types d'électricité. L'électricité **positive ou vitreuse** l'électricité **négative ou résineuse**.

- ✓ 2 corps chargés de même signe se repoussent (Répulsion).
- ✓ 2 corps chargés de signe contraire s'attirent (Attraction).
- ✓ Un corps qui n'est pas chargé est dit neutre.

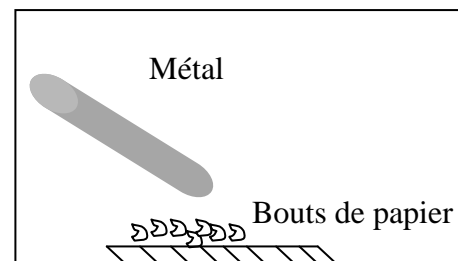
**1.3. Electrification** : c'est le phénomène de transfert de charges

a) **Electrification par frottement** : lorsqu'on frotte deux corps l'un contre l'autre, l'un arrache des électrons à l'autre. Le corps qui possède un excès d'électrons est chargé négativement. Le corps qui a perdu des électrons est chargé positivement.

- Tige en verre frottée avec la soie attire des bouts de papier, le verre a été électrisé. Les charges restent localisées sur la partie frottée seulement. Le verre est un isolant électrique (**Fig.3.a**).
- Tige en métal frottée avec la soie n'attire rien. Les charges dues à l'électrification se déplacent dans le métal et s'écoulent vers la terre à travers le corps de l'expérimentateur. Les métaux sont des conducteurs d'électricité (**Fig.3.b**).



**Fig. a**



**Fig. b**

**Fig 3.** Electrification par frottement.

**Série triboélectrique**

- ❖ La série triboélectrique nous renseigne sur celui qui arrachera des électrons à l'autre.
- ❖ Lorsqu'on frotte deux corps l'un contre l'autre, celui qui précède l'autre sur la liste triboélectrique s'électrise positivement.



Fig 4. Série triboélectrique.

**b) Electrification par contact**

- Deux boules métalliques suspendues par des fils en nylon. Boule **A** préalablement électrisée, boule **B** neutre. (Fig.5. a)
- Rapprochement des boules pour un bref instant. La boule **B** se charge. (Fig.5.b)
- Charge  $q_A$  et  $q_B$ , obtenues sont de même signe, d'où une répulsion. (Fig.5.c)
- Lorsqu'un corps (-) touche un corps neutre, des  $e^-$  peuvent passer sur le corps neutre qui devient ainsi (-).
- Lorsqu'un corps (+) touche un corps neutre, il attire des  $e^-$  du corps neutre qui devient alors (+).

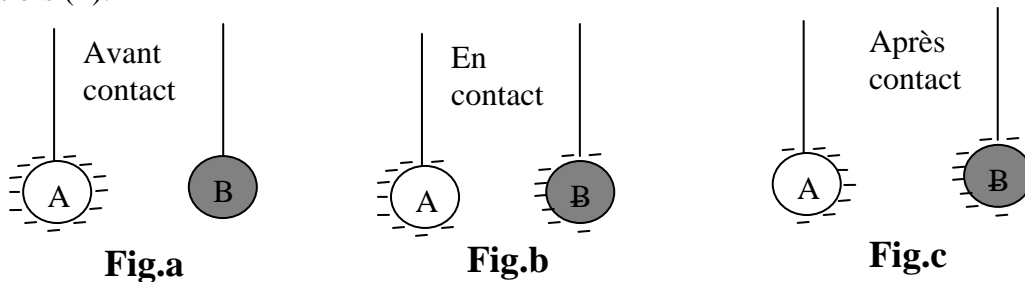


Fig 5. Electrification par contact.

C) Electrisation par influence

Expérience : approchons (sans toucher) une tige en verre électrisée d'une boule initialement neutre.

Résultat : la boule est attirée par la tige.

La boule a été électrisée par influence.

Si on éloigne la tige électrisée, le pendule reprend sa position initiale.

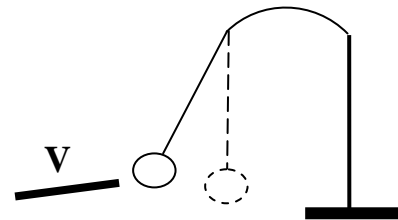


Fig 6. Electrisation par influence.

2. Charges électriques

2.1. Quantification de la charge électrique

Charge électrique(q) : c'est une propriété des portons et électrons, elle n'existe que sous forme de multiples de la charge élémentaire  $e$ .

$$Q = n \cdot e^- \tag{1}$$

$n$  : nombre entier

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{Coulomb}$$

- ❖ Le Coulomb (C) est l'unité de mesure de la charge électrique
- ❖ La charge élémentaire est la charge portée par un électron ou un proton et elle vaut  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$
- ❖ Le Proton porte une charge (+)
- ❖ L'électron porte une charge (-)
- ❖ Un corps chargé négativement possède un surplus d'électron
- ❖ Un corps chargé positivement a un déficit d'électron.

Charge ponctuelle : c'est une charge électrique localisée en un point sans dimensions.

2.2. Principe de la conservation de la charge électrique

Soit une tige en verre frotté avec un morceau de drap(Fig.7).

- La tige acquiert une charge (+)
- le drap prend une charge égale et opposé à celle de la tige en verre
- Les charges (-) arrachées au verre se retrouvant dans le morceau de drap. C'est le principe de la conservation de la charge électrique.

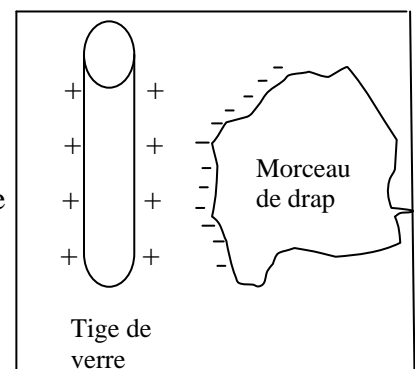


Fig 7. Conservation de la charge électrique.

Dans un système isolé, la somme algébrique des charges électrique reste constante.

$$\Sigma Q_i = \Sigma q_i = c^{te} \quad (2)$$

### 2.3. Différentes distributions continues de charges/ types de densité

#### 2.3.1. Distribution linéique de charges/ densité linéique $\lambda$

La charge  $Q$  est répartie sur un fil de longueur  $l$  avec une densité linéique  $\lambda = \frac{dq}{dl}$ ,  $\lambda$  en  $C/m$ .

La charge totale sur le fil :

$$dq = \lambda \cdot dl \Rightarrow Q = \int_l dq = \int_l \lambda \cdot dl \quad (3)$$

Si  $\lambda = cte$  alors  $Q = \lambda \cdot l$

#### 2.3.2. Distribution surfacique

La charge  $Q$  est répartie sur une surface  $S$  avec une densité surfacique  $\sigma = \frac{dq}{ds}$ ,  $\sigma$  en  $C/m^2$ .

La charge totale sur la surface :

$$dq = \sigma \cdot dS \Rightarrow Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma \cdot dS \quad (4)$$

Si  $\sigma = cte$  alors  $Q = \sigma \cdot S$

#### 2.3.3. Distribution volumique

La charge  $Q$  est répartie dans un volume  $V$  avec une densité volumique  $\rho = \frac{dq}{dV}$ ,  $\rho$  en  $C/m^3$ .

La Charge totale dans le volume  $V$  :

$$dq = \rho \cdot dV \Rightarrow Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho \cdot dV \quad (5)$$

Si  $\rho = cte$ , alors  $Q = \rho \cdot V$

## 3. La Force Electrostatique

### 3.1. Loi de Coulomb

Considérons deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  placées dans le vide. La première exerce sur la seconde une force proportionnelle à sa charge  $q_1$ . Réciproquement, la seconde exerce sur la première une force proportionnelle à sa charge  $q_2$ . On en déduit que la force entre deux charges ponctuelles appelée force électrostatique est proportionnelle au produit de leurs charges  $q_1 q_2$ . Qui s'exprime par :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \quad (6)$$

Cette expression est la loi de Coulomb.

Avec  $r$  : la distance séparant les deux charges.

$K$  dans le système international est défini par la relation:  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

où  $\epsilon_0$  représente la permittivité du vide, dont sa valeur expérimentale égale :

$$\epsilon_0 = 8,854\ 187\ 82 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}.$$

$K = 8.9875 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ . On utilisera souvent la valeur approchée :  $9 \cdot 10^9$ .

$\vec{u}$  vecteur unitaire de direction joignant la charge  $q_1$  à la charge  $q_2$ , dirigé de  $q_1$  vers  $q_2$ .

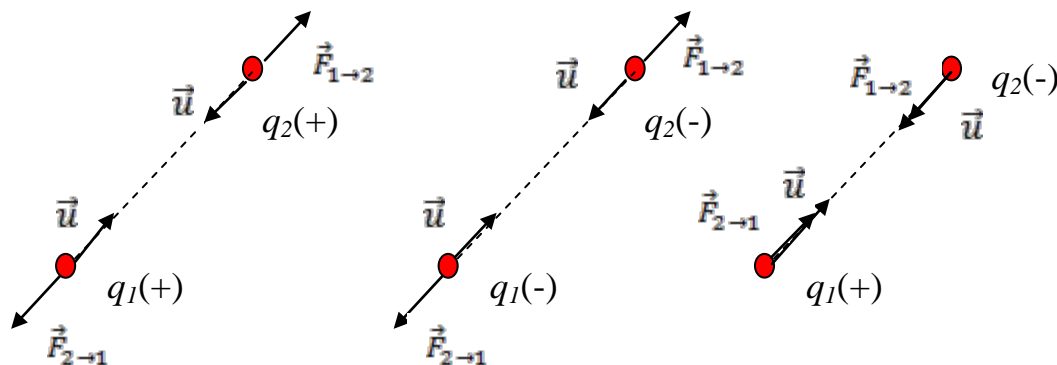


Fig 8. Force de Coulomb.

La force électrostatique est *répulsive* si les charges sont de même signe, et *attractive* si elles sont de signes opposés (Fig.8).

On peut en tirer désormais une définition du coulomb (C) :

C'est la charge d'un point électrisé qui, placé à un mètre d'une charge identique, subit de sa part une force de  $9 \cdot 10^9$ .  $\Rightarrow$  Nécessité d'utiliser des sous multiples du coulomb :

micro C ( $1\mu\text{C} = 10^{-6}\text{C}$ ); nano C ( $1\text{nC} = 10^{-9}\text{C}$ ) ; pico C ( $1\text{pC} = 10^{-12}\text{C}$ )

### Application :

Calculer la force qu'exerce la charge  $q_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ C}$  sur une charge  $q_2 = -5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$  séparées par la distance 20 mm.

### Solution :

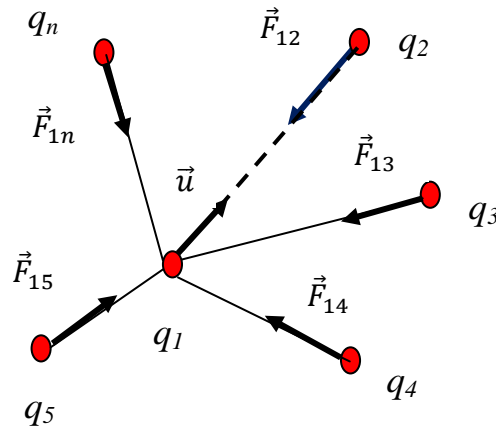
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \quad \text{donc} \quad F = K \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{|(4 \cdot 10^{-3}) \cdot (-5 \cdot 10^{-4})|}{(20 \cdot 10^{-3})^2} = 9 \cdot 10^8 \text{ N}$$

**3.2. Le principe de superposition**

Si une charge (qu'on va appeler  $q_1$ ) est entourée de plusieurs charges (qu'on va numéroter de 2 à  $N$ ), alors la force sur la charge 1 est simplement la somme des forces faites par les autres charges. C'est le principe de superposition (**Fig.9**).

$$\vec{F}_{\text{nette sur la charge 1}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} \tag{7}$$



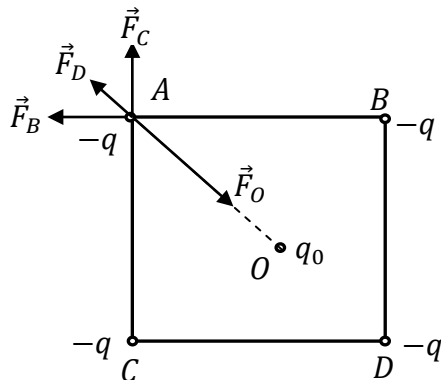
**Fig 9.** Composition des forces électrostatiques.

**Application :**

Quatre charges ponctuelles identiques  $-q$  ( $q > 0$ ) sont fixées aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté  $a$ . Une cinquième charge  $q_0 > 0$  est maintenue fixe au centre O du carré. Déterminer la valeur de  $q_0$  en fonction de  $q$  pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle.

**Solution :**

La force électrostatique  $\vec{F}(O)$  exercée par les quatre charges identiques  $-q$  sur la charge  $q_0$  est nulle quelle que soit la valeur de  $q_0$ . Il reste à évaluer la force totale exercée sur chacune des charges  $-q$ , par exemple la charge placée en A (voir la figure).



D'après le principe de superposition :

$$\vec{F}(A) = \sum_{i=2}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_O = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3} + \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|^3} + \frac{\vec{DA}}{\|\vec{DA}\|^3} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|^3}$$

Or,  $\|\vec{BA}\| = \|\vec{CA}\| = a$

$DA^2 = AB^2 + BD^2 = 2a^2$  ainsi,  $\|\vec{BA}\| = \sqrt{2}a$

$OA = \frac{DA}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Ainsi,

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \left( \vec{BA} + \vec{CA} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \vec{DA} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 \vec{OA}$$

Avec,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$  et  $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \left( \vec{BA} + \vec{CA} + \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{DA} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} 2\sqrt{2} \vec{OA}$$

Puisque :  $\vec{BA} = -\vec{CO}$

$\vec{BA} + \vec{CA} = (\vec{BO} + \vec{OA}) + (\vec{CO} + \vec{OA}) = 2\vec{OA}$  ;  $\vec{DA} = 2\vec{OA}$

$$\vec{F}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( q \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{4} 2 \right) - q_0 2\sqrt{2} \right) \vec{OA} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( q \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - q_0 2\sqrt{2} \right) \vec{OA}$$

La force  $\vec{F}(A)$  est nulle lorsque :  $q \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - q_0 2\sqrt{2} = 0$

Ainsi :

$$q_0 = q \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = q \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$$

## 4. Champ électrostatique

**4.1. Définition :** en électrostatique, on appelle champ électrique une région de l'espace où, en tout point une charge  $q$  maintenant immobile si cette charge est soumise à une force électrique telle que ;

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Dans le système international unité de  $[\mathbf{E}] \text{ V.m}^{-1}$

Le sens de  $\vec{E}$  dépend de signe de  $q$ :

- Si  $q > 0$   $\vec{E}$  et  $\vec{F}$  même sens.
- Si  $q < 0$   $\vec{E}$  et  $\vec{F}$  sont de sens opposés

**4.2. Champ électrostatique créée par une charge ponctuelle**

Soit une charge  $q_1 > 0$  située en un point  $O$  de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge  $q_2 < 0$  située en un point  $M$ . L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb ci-dessus.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \quad (9)$$

Par définition la charge  $q_1 > 0$  située en  $O$  crée en tout point  $M$  de l'espace distinct de  $O$  un champ vectoriel  $\vec{E}_1$  par la loi :

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{F} = q_2 \vec{E}_1 \quad (10)$$

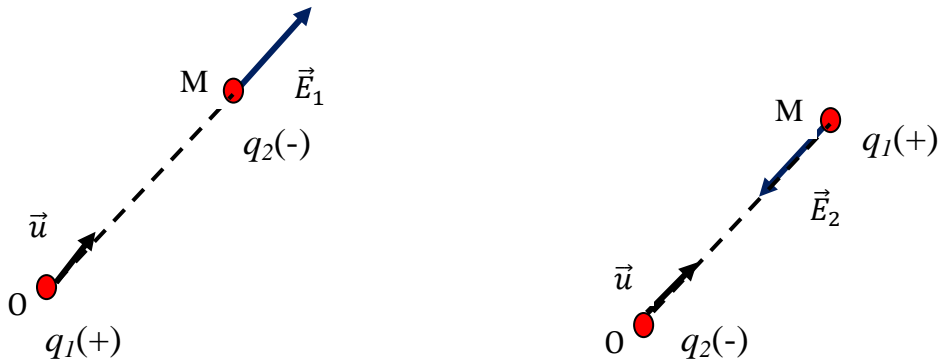


Fig 10. Champ électrique créée par une charge ponctuelle.

**4.3. Champ créé par un ensemble N de charges ponctuelles isolées**

**Principe de superpositions :** Soient  $N$  particules de charges électriques  $Q_i$ , situées à des points  $P_i$ , le champ électrique créée par ces  $N$  charges au point  $M$  distant de  $r_i$  des points  $P_i$  est obtenu par la superposition des champs par charges  $Q_i$ .

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{U}_i \quad (11)$$

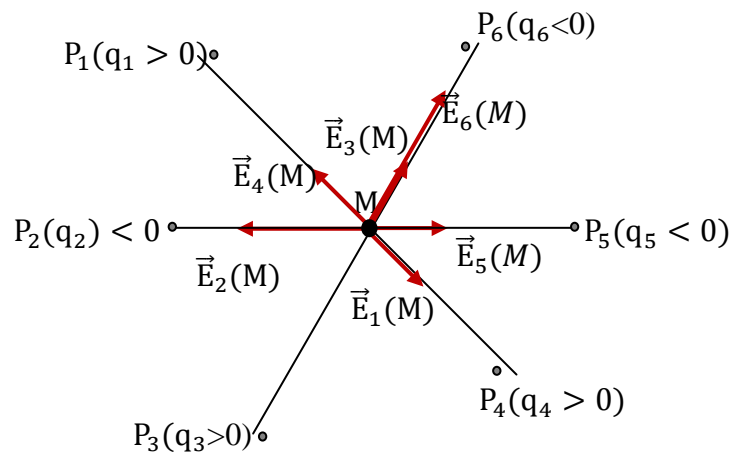


Fig 11. Composition des champs en un point.

#### 4.4. Lignes de champ électrique

Une ligne de champ électrostatique est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ électrostatique défini en ce point. L'ensemble des lignes de champ définit une cartographie du champ.

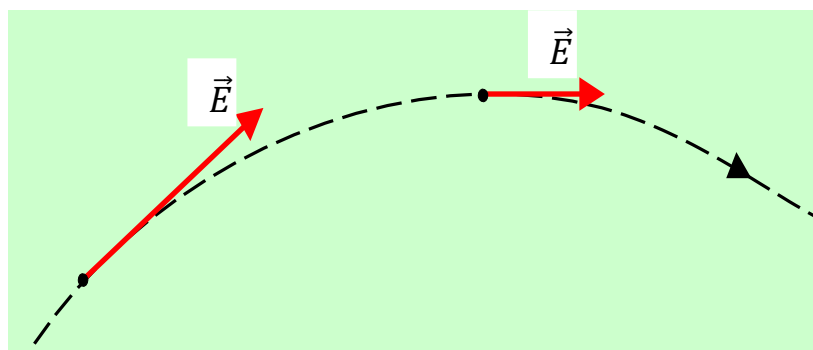


Fig 12. Lignes de champ électrique.

#### Propriétés :

1. Deux lignes de champ ne se croisent jamais en un point  $M$  sauf si le champ  $\vec{E}$  est nul en  $M$ .
2. Une ligne de champ électrostatique n'est pas fermée. Elle part d'une charge  $q$  et se termine sur une charge de signe opposé.
3. Pour savoir quelle est la direction du champ en un point  $M$  d'une ligne de champ, il faut y placer une charge positive et regarder la direction et le sens de la force électrostatique qu'elle subit. Ces direction et sens sont les mêmes que celles du champ.

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les lignes de champ sont des demi-droites qui se coupent au point où se trouve la charge. Si la charge est positive, le champ est dirigé vers l'extérieur, on dit qu'il est partant, il en va de même pour les lignes de champ. Le contraire est vrai pour la charge négative,

Les lignes de champ convergent vers la charge, le champ dans ce cas est dirigé vers la charge (Fig.13).

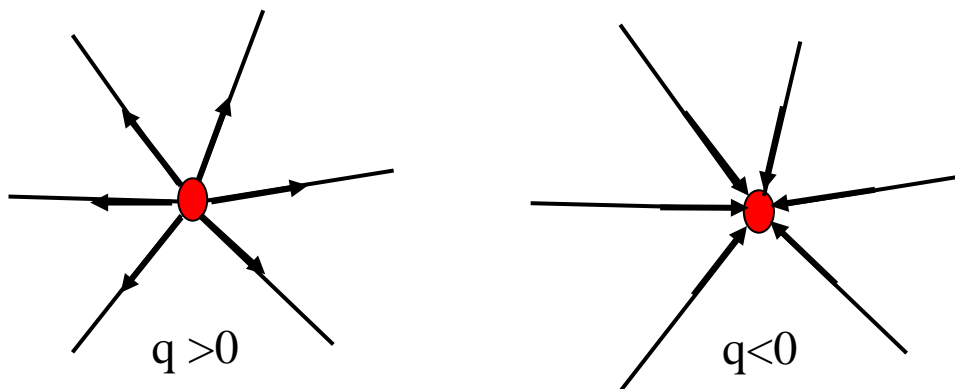


Fig 13. Lignes de champ pour les deux types de charges séparées.

**Application :**

Déterminer le champ électrostatique créée par trois charges ponctuelles identiques  $q > 0$  placées aux sommets d'un triangle équilatéral, en son centre géométrique  $G$ .

**Solution :**

- Détermination du champ électrostatique créée par les trois charges :

D'après le principe de superposition, on a :

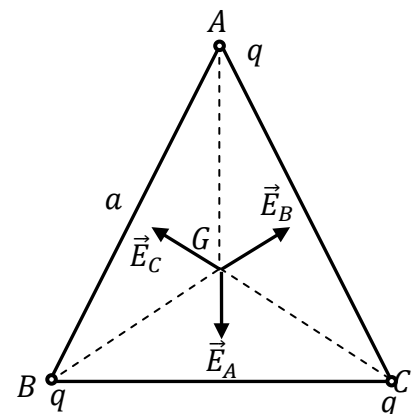
$$\vec{E}(G) = \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{AG}}{\|\vec{AG}\|^3} + \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|^3} + \frac{\vec{CG}}{\|\vec{CG}\|^3} \right)$$

Or,  $\|\vec{AG}\| = \|\vec{BG}\| = \|\vec{CG}\|$

$$\vec{E}(G) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BG}\|^3} (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG})$$

Soit, O étant point quelconque de l'espace :

$$\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + 3\vec{OG} = \vec{0} \text{ car } \vec{OG} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^3 \vec{OA}, \vec{E}(G) = 0$$



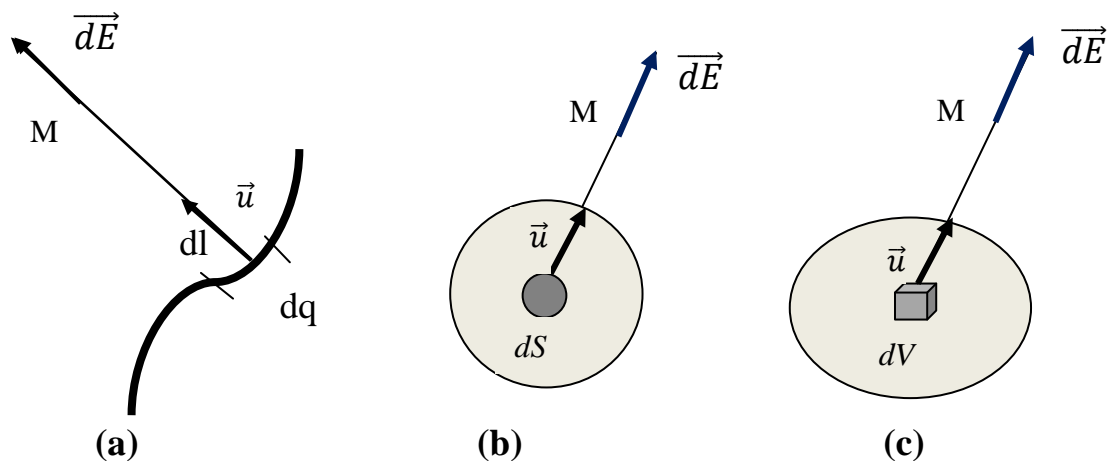
**4.5. Champ électrostatique créée par une distribution continue de charges**

Fig 14. Champ électrostatique créée par une distribution de charges.

**4.5.1. Champ créée par une distribution de charges linéiques**

Lorsque la charge  $q$  est répartie sur un fil (Fig. 14. a) avec une densité linéique  $\lambda$ , chaque élément  $dl$  porte une charge  $dq = \lambda \cdot dl$ , et crée un champ élémentaire :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u} \quad (12)$$

Le champ créée en  $M$  par toutes les charges du fil sera :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u} \quad (13)$$

**4.5.2. Champ créée par une distribution de charges surfacique**

L'élément  $dl$  porte une charge  $dq = \sigma \cdot dS$ , et crée un champ élémentaire :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \vec{u} \quad (14)$$

Le champ créée par toutes les charges de la surface  $S$  (Fig. 14. b) sera :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \vec{u} \quad (15)$$

### 4.5.3. Champ créé par une distribution de charges volumique

De même, dans ce cas le champ créé par toutes les charges réparties dans le volume  $V$  (Fig. 14. c), sera :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \vec{u} \quad (16)$$

## 5. Potentiel électrostatique

C'est l'énergie potentielle d'une particule divisée par la charge de cette particule.

### 5.1. Circulation du champ électrique d'une charge ponctuelle

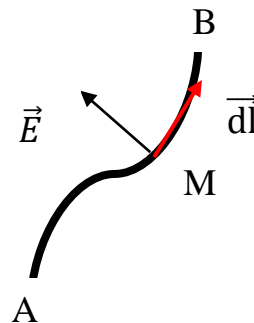
Considérons une région de l'espace où règne un champ électrique. Toute particule chargée  $Q$  placée au point  $M$ , crée à la distance  $r$  le potentiel scalaire  $V$  donné par :

$$V(M) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^M \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot dr \cdot \vec{u}_r = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{kQ}{r} \quad (17)$$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte = \frac{kQ}{r} + cte$$

$V$  est appelé potentiel électrostatique, il est exprimé en volt.

### 5.2. Notion de différence de potentiel



La circulation  $C_{AB}$  du champ  $\vec{E}$  le long de trajet suivi de  $A$  vers  $B$  est :

$$C_A^B(\vec{E}) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = V_{AB} \quad (18)$$

Cette circulation représente la différence de potentiels  $V_{AB}$  qui est indépendante du trajet suivi pour aller de  $A$  à  $B$ , elle ne dépend que des potentiels du départ et d'arrivée donc  $W_{AB}$  est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle.

$$W_{AB} = - \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{PA} - E_{PB}$$

Avec  $E_P = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

On pose  $E_P = q.V$

d'où :

$$W_{AB} = - \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = q (V_A - V_B) \quad (19)$$

### 5.3. Relation entre champ et potentiel électrostatique

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l};$$

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ et } \vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (20)$$

#### Notations

- ❖ L'expression du champ  $\vec{E}$  en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  dans la base associée au repère cartésien  $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad (21)$$

On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad (22)$$

- ❖ L'expression du champ  $\vec{E}$  en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  dans la base associée au repère cylindrique  $(\mathbf{O}, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V = - \frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \quad (23)$$

- ❖ L'expression du champ  $\vec{E}$  en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  dans la base associée au repère sphérique  $(\mathbf{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V = - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{\partial V}{r \sin \theta \partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (24)$$

#### Application:

1/ En déduire le vecteur champ électrique de l'expression du potentiel suivante :

$$V(x, y, z) = 3x^2y + z^2$$

2/ Calculer le module du champ  $\vec{E}$  au point A (1, 2, -1).

**Solution :**

1/ Il suffit de dériver  $V(x, y, z)$  en utilisant la relation (20) et (21) pour trouver :

$$\vec{E} = -[6xy \vec{i} + 3x^2 \vec{j} + 2z \vec{k}]$$

2/ Le module du champ au point A (1, 2, -1) est :

$$\vec{E} = -12 \vec{i} + 3 \vec{j} - 2 \vec{k} \Rightarrow E = \sqrt{12^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{157} \approx 12.53 \text{ V/m}$$

**5.4. Potentiel électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles**

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par un ensemble de charges  $q_1, q_2, \dots, \dots, q_n$  est la somme des potentiels créés par chacune des charges au point  $M$ , on applique le principe de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V(M) = \sum_{i=1}^n K \frac{q_i}{r_i} \quad (25)$$

Où  $r_i$  est la distance entre la charge  $q_i$  et le point  $M$ .

**5.5. Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges**

Lorsque la charge  $q$  est répartie sur un fil avec une densité linéique  $\lambda = dq/dl$  et dans le cas d'une distribution continue superficielle de charges  $\sigma = dq/dS$  ou d'une distribution volumique  $\rho = dq/dV$  on procède comme pour le calcul du champ et on obtient respectivement :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda}{r} dl \quad (26)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma}{r} ds \quad (27)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{r} dV \quad (28)$$

**5.6. Relation entre les lignes de champ électrostatique et surfaces équipotentiels**

Les lignes de champ, qui sont les courbes tangentes en chaque point au champ  $\vec{E}$ .

On appelle surface équipotentielle, une surface  $S$  dont tous les points sont au même potentiel  $V$ .

a) Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentiels qu'elles rencontrent, et sont orientées vers les potentiels décroissants.

b) Dans le cas d'un champ uniforme les lignes de champ sont des droites parallèles et les surfaces équipotentielles sont des plans perpendiculaires à ces droites.

c) Dans le cas d'une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques de centre  $O$  et les lignes de champ sont radiales.

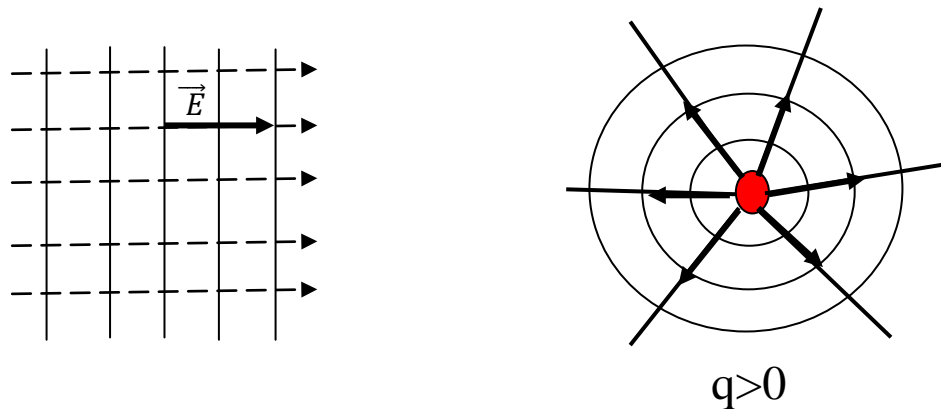


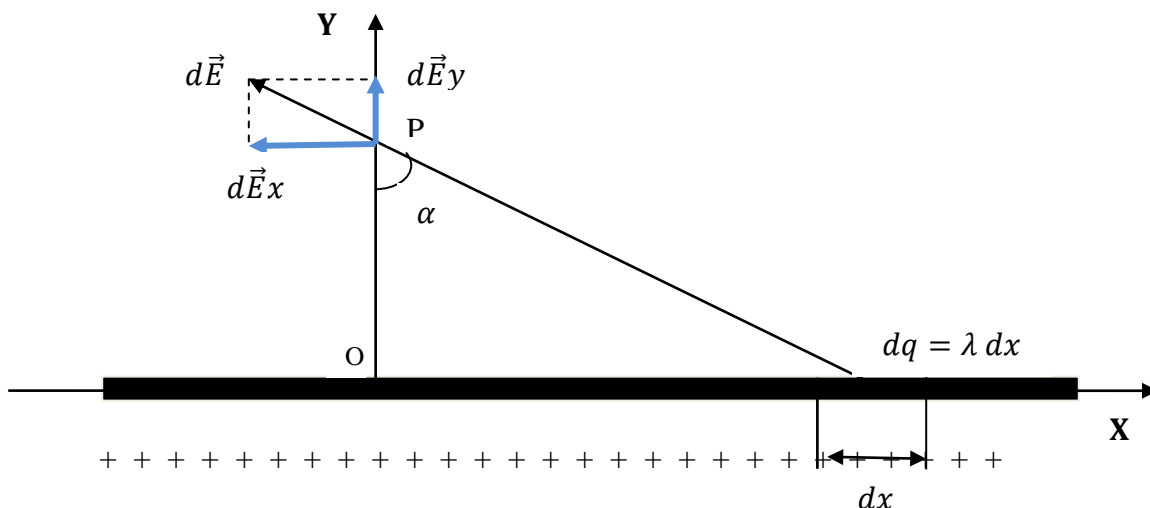
Fig 15. Lignes de champ et surfaces équipotentielles.

**Applications :**

**a/ Première application :** Le champ électrostatique produit par un fil de longueur infinie et portant une charge linéique positive de densité  $\lambda$  constante.

On se propose de calculer le champ électrique statique  $\vec{E}$  produit au point  $P$  par l'ensemble de la charge que porte le fil comment indique dans la figure ci-dessous.

**Solution :** le petit élément que l'on doit prendre en considération est un segment rectiligne de longueur  $dx$ , portant la charge élémentaire  $dq = \lambda dx$ :



La charge  $dq = \lambda dl = \lambda dx$  crée en  $M$  le champ  $d\vec{E}(M)$  s'écrit :

$$d\vec{E} = k \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u}$$

Sachant que :  $d\vec{E} = d\vec{E}_X + d\vec{E}_Y = -dE_X\vec{i} + dE_Y\vec{j}$  donc

$$E_X = \int dE_X = \int dE_X \sin \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \sin \alpha dx$$

$$E_Y = \int dE_Y = \int dE_Y \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \cos \alpha dx$$

On remarque que  $r, X, \alpha$  sont des variables, tandis qu' $OP=R$  est constant, on en déduit :

$$x = R \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha \text{ et } r = R / \cos \alpha$$

Suite à cela, on obtient :

$$E_X = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \sin \alpha dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R/\cos^2 \alpha) d\alpha}{R^2/\cos^2 \alpha} \sin \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R} \sin \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} [-\cos \alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow E_X = 0$  ; Ce résultat ( $\vec{E}_X = \vec{0}$ ) était prévisible vu la symétrie du problème.

De la même façon :

$$E_Y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \cos \alpha dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R/\cos^2 \alpha) d\alpha}{R^2/\cos^2 \alpha} \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R} \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin \alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow E_Y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$  Finalement on obtient :  $\vec{E} = \vec{E}_X + \vec{E}_Y = -E_X\vec{i} + E_Y\vec{j} = E_Y\vec{j}$

$$\boxed{\vec{E} = E_Y\vec{j} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{j} : E = E_Y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}}$$

**b/ deuxième application : Le champ électrostatique produit par un disque fin et portant une charge surfacique positive de densité  $\sigma$  constante.**

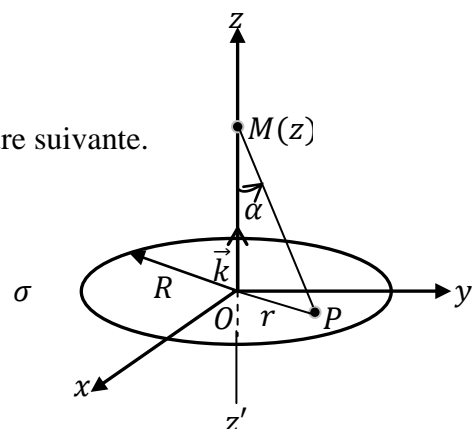
Soit un disque centre  $O$ , de rayon  $R$ ,

uniformément chargé avec une densité

surfaccique de charge  $\sigma > 0$  comme indique dans la figure suivante.

-Calculer le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution

de charges en un point  $M$  de l'axe  $\vec{z}'z$  du disque à partir du potentiel électrostatique



**Solution :**

La charge  $dq = \sigma dS$  crée en  $M$  le potentiel  $V(M)$  s'écrit :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{\|\vec{PM}\|}$$

Avec,  $dS = r dr d\theta$  et  $\|\vec{PM}\| = (r^2 + z^2)^{1/2}$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

Le potentiel  $V(M)$  est obtenu par intégration sur la surface du disque :

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr d\theta}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (r^2 + z^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=R}$$

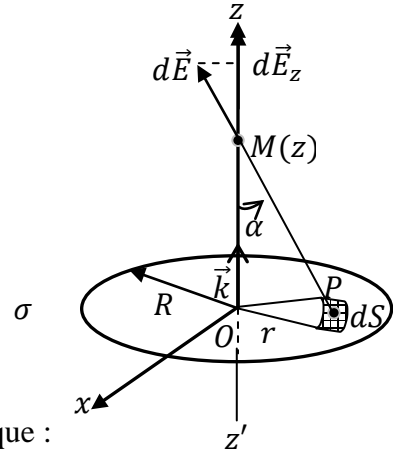
$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (R^2 + z^2)^{1/2} - |z| \right] = V(0, 0, z) = V(0, 0, -z)$$

Le champ  $\vec{E}(M)$  est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \vec{k} = \vec{E}(0, 0, z) = -\vec{E}(0, 0, -z)$$

donc :

$$E = E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$



**6. Travail et énergie**

**6.1. Travail de la force électrique**

Si une charge décrit un trajet **AB** dans une région où règne un champ électrique  $\vec{E}$ , alors à chaque position **M**, la charge **q** subit la force  $\vec{F} = q\vec{E}$

Pendant tout le déplacement élémentaire  $\vec{dl}$ , la force fournit un travail :

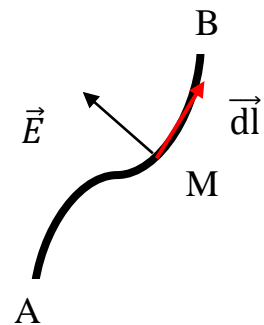
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = F \cdot dl \cos \theta$$

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot \vec{dl} = q \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

La quantité  $\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = C_A^B(\vec{E})$  est la circulation de  $\vec{E}$  sur le trajet AB.

Le travail  $W_{AB}$  ne dépendant pas du trajet suivi **AB**, il ne dépend que du point de départ **A** et d'arrivée **B**.



$$W_{AB} = - \int_A^B q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = q (V_A - V_B) \quad (29)$$

**6.2. Energie potentielle**

Une charge  $q_i$  placée en  $M_i$  sous l'action du potentiel  $V_i$  créée en  $M_i$  par toutes les charges sauf  $q_i$ , son énergie électrostatique est égale  $q_i V_i$ . Pour l'ensemble des charges, l'énergie électrostatique sera :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i^n q_i V_i \quad (30)$$

**Application :**

Toutes les charges ont la même valeur sur la figure ci-dessous

( $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = +q$ ) elles sont placées sur les sommets d'un carré de côté  $a$ .

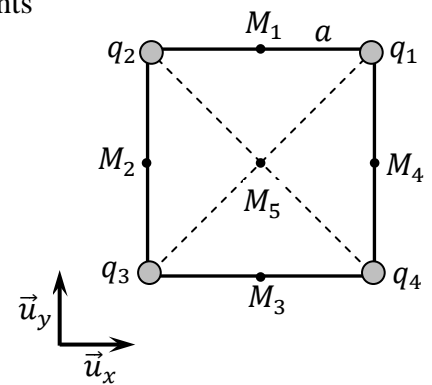
1) Calculez les potentiels électriques  $V_{M_i}$  créés par ces charges aux points

$M_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) au milieu de chaque côté, et au centre.

2) Calculez les vecteurs champs électriques  $\vec{E}_{M_i}$  créés aux points  $M_i$ .

3) Trouvez l'énergie potentielle interne  $U_S$  du système composé de ces quatre charges.

4) Calculez le module de la force appliquée sur la charge  $q_1$  par le reste des charges.



**Solution :**

1. Calculons d'abord les distances  $d_1$  et  $d_2$ .

$$d_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a; \quad d_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

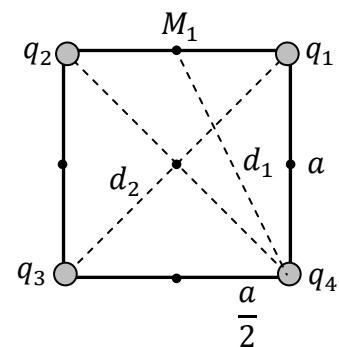
Calculons le potentiel aux points  $M_i$  :

$$V_{M_i} = \sum_i V_i = \sum_i K \frac{q_i}{r_i} = K q_i \sum_i \frac{1}{r_i}$$

$$r_1 = r_2 = \frac{a}{2}; \quad r_3 = r_4 = d_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} a; \quad d_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \Rightarrow \boxed{V_{M_i} = 4K \frac{q}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

En utilisant la symétrie :

$$\boxed{V_{M_1} = V_{M_2} = V_{M_3} = V_{M_4} = 4K \frac{q}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$



$$V_{M_5} = \sum_i V_i = \sum_i K \frac{q_i}{r_i} = Kq \sum_i \frac{1}{r_i} \Rightarrow \boxed{V_{M_5} = 4\sqrt{2} \cdot K \frac{q}{a}}$$

1. Calculons les vecteurs champs aux points  $M_i$  :

$$\vec{E}_{M_5} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = Kq \sum_i \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = K \frac{q}{2a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{M_5} = \vec{0}}$$

$$\vec{E}_{M_i} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = Kq \sum_i \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = 4K \frac{q}{a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{|\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = \frac{4}{5} K \frac{q}{a^2}}$$

$$\vec{E}_{M_i} = 2|\vec{E}_3| \cos \alpha \vec{u}_y \quad \text{d'après la figure ci contre} \quad \cos \alpha = \frac{a}{a_1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{E}_{M_i} = \frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{u}_y}$$
 et en utilisant la symétrie :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_{M_1} &= \frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{u}_x \\ \vec{E}_{M_2} &= -\frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{u}_x \\ \vec{E}_{M_3} &= -\frac{16}{5\sqrt{5}} K \frac{q}{a^2} \vec{u}_y \end{aligned}}$$

2. Calculons l'énergie potentielle du système :

$$U_S = \sum_i \sum_{j>i} U_{ij} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U_S = Kq^2 \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{14}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{24}} + \frac{1}{r_{34}} \right)$$

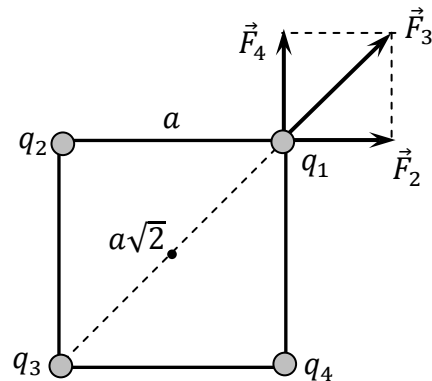
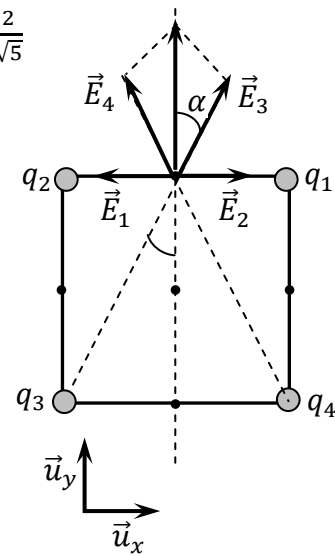
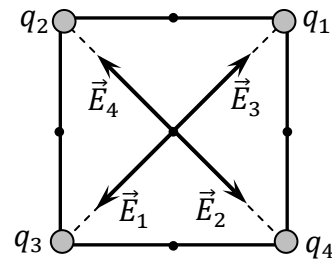
Avec  $\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{r_{14}} = \frac{1}{r_{34}} = \frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_{24}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}$

D'où :  $\boxed{U_S = K \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2})}$

3. La force appliquée sur la charge  $q_1$  :

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = Kq^2 \sum_i \frac{1}{r_{1i}^2} \vec{u}_i$$

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = K \frac{q^2}{a^2} \quad \text{et} \quad |\vec{F}_3| = K \frac{q^2}{2a^2}$$



En utilisant la symétrie :

$$\vec{F}' = \vec{F}_2 + \vec{F}_4 \Rightarrow |\vec{F}'| = \sqrt{|\vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_4|^2} = \sqrt{2}|\vec{F}_2| \Rightarrow \boxed{|\vec{F}'| = \sqrt{2}K \frac{q^2}{a^2}}$$

Comme  $\vec{F}'$  et  $\vec{F}_3$  sont parallèles et dans le même sens

$$|\vec{F}| = |\vec{F}'| + |\vec{F}_3| \Rightarrow \boxed{|\vec{F}| = K \frac{q^2}{a^2} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)}$$

## 7. Le dipôle électrique

Le dipôle électrique est constitué de deux charges égales et de signes contraires  $+q$  et  $-q$ , séparées d'une distance  $a$ . Celle-ci est très petite devant les distances d'observation  $r$ .

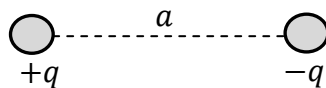


Fig 16. Dipôle électrique.

### 7.1 Le moment dipolaire

Le moment dipolaire d'un dipôle noté  $\vec{P}$  est égal au produit de la valeur de la charge  $q$  par le vecteur déplacement  $\vec{a}$  de la charge, orienté de la charge négative vers la charge positive est défini par :

$$\boxed{\vec{P} = q \vec{a}} \quad (31)$$

### 7.2. Potentiel électrique créé par un dipôle

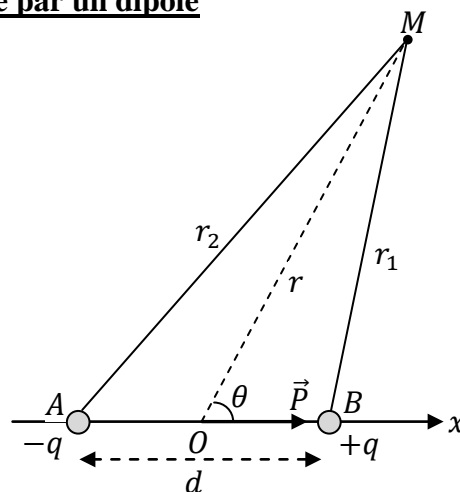


Fig 17 : Dipôle.

Le potentiel  $V$  créé en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du milieu  $O$  du dipôle :

$$V = \sum V_i \Rightarrow V = V_A + V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (32)$$

Puisque  $r \gg a$ , on peut considérer  $r_1 r_2 \approx r^2$  et  $r_2 - r_1 = a \cos \theta$ , donc :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q a \cos \theta}{r^2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad (33)$$

### 7.3 L'énergie potentielle du dipôle placé dans un champ électrique uniforme

L'énergie potentielle d'un dipôle, placé dans un champ  $\vec{E}$ , est calculée en faisant la somme des énergies potentielles de chaque charge :

$$E_p = q(V_A - V_B) \quad (34)$$

Avec  $V_A - V_B = -\vec{E} \cdot \vec{a}$

L'expression devient :

$$E_p = -q\vec{E} \cdot \vec{a} \quad (35)$$

Sachant que :  $\vec{P} = q \vec{a}$

Alors l'énergie potentielle de ce dipôle, est donnée par :

$$\boxed{E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}} \quad (36)$$

### 7.4 Mouvement du dipôle dans un champ uniforme

Si on place un dipôle, de moment dipolaire  $\vec{P}$ , dans un champ extérieur  $\vec{E}$  uniforme, les charges qui le constituent sont soumises à des forces égales et opposées :  $\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$

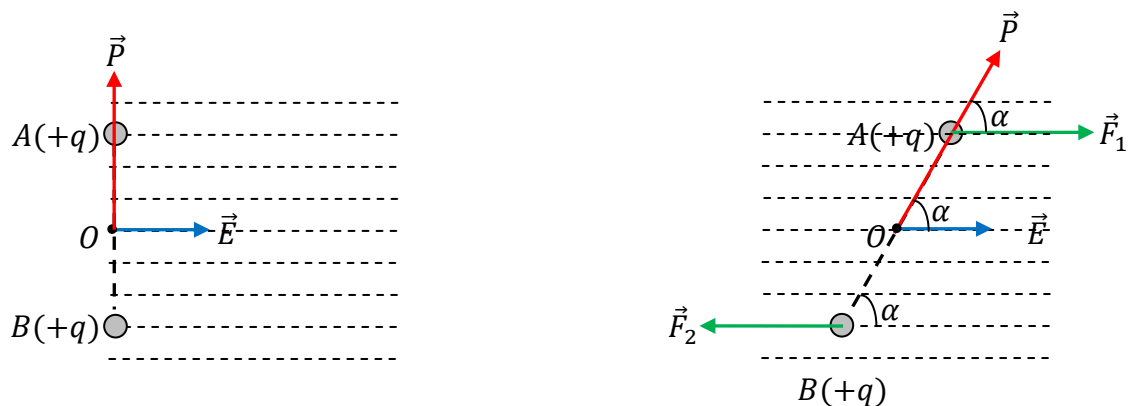


Fig 18. Mouvement du dipôle dans un champ extérieur uniforme.

Le moment du couple de force qui agit sur le dipôle s'écrit :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}} \quad (37)$$

Ce couple fait pivoter le dipôle pour l'aligner parallèlement au champ extérieur (**Figure.18**).

$$\text{Dipôle en équilibre} \Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow PE \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$$

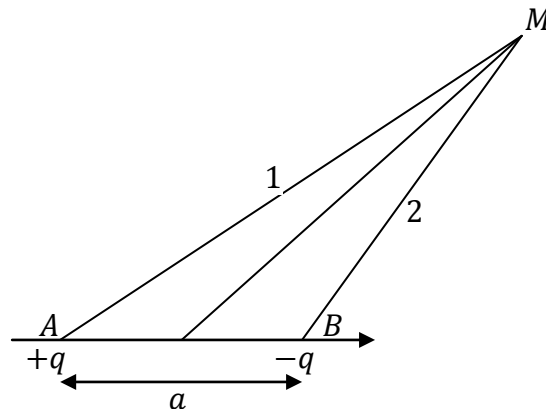
Si  $\alpha = 0$  : équilibre stable du dipôle

Si  $\alpha = \pi$  : équilibre instable du dipôle

**Application :**

Soit un dipôle  $D$ , son moment étant  $\vec{p}$  et  $a$  la distance entre ses deux charges  $-q$  et  $+q$  (Figure ci-dessous).

Calculer le champ et le potentiel électriques produits par le dipôle  $D$  au point  $M$  en fonction de  $p, \theta$  et  $r$ , sachant que  $a \ll r$ .



**Solution :**

Le potentiel électrique produit au point  $M$  :

$$V_M = V_A + V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$\begin{cases} a \ll r \Rightarrow r_1 \approx r_2 \approx r \\ r_2 - r_1 = a \cos \theta \\ P = q \cdot a \end{cases} \Rightarrow V_M = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , le champ possède deux composantes  $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$ . A partir de la formule  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$ , on peut déterminer ces deux composantes polaires :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

Donc le champ est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}$$

## 8. Théorème de Gauss

### 8.1. Flux d'un vecteur à travers une surface

Considérons un élément de surface  $dS$  traversé par un champ  $\vec{E}$ . Par définition le flux élémentaire est donné par :

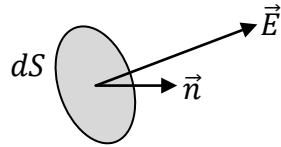


Fig 19. Flux d'un vecteur à travers une surface.

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (38)$$

Avec  $\vec{n}$  le vecteur normal

A travers la surface entière  $S$  :

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_S E \cdot dS \cdot \cos\theta \quad (39)$$

### 8.2. Théorème de Gauss

Le Flux du vecteur déplacement électrique a travers une surface fermée  $S$  et entourant des charges  $Q_{int}$  est égal à la somme algébrique des charges électrique intérieures  $Q_{int}$ , divisée par la permittivité du vide  $\epsilon_0$ .

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (40)$$

$Q_{int} = \sum q_{int}$  : représente la somme algébrique des charges intérieures à la surface fermée.

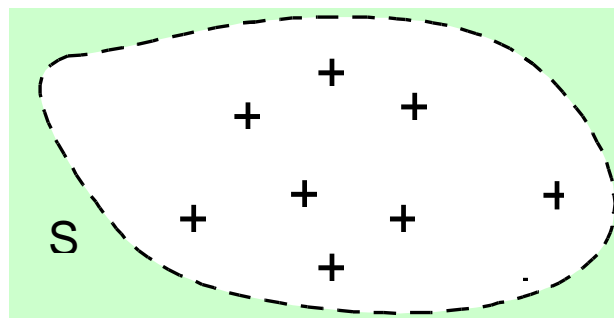


Fig 20. Surface fermée  $S$  contenant une charge électrique totale  $Q_{int}$ .

### Applications du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet le calcul du champ  $\vec{E}$  plus rapidement que la méthode directe. Pour cela Il faut :

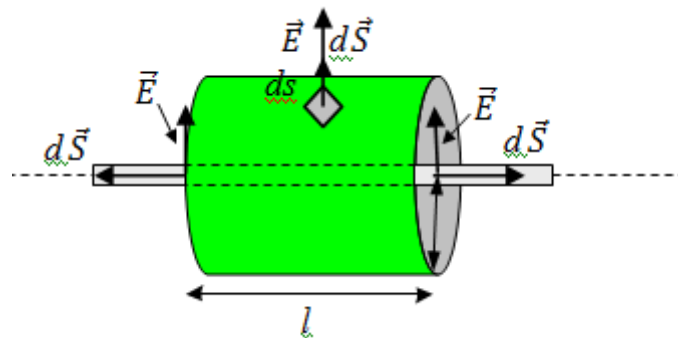
- déterminer la symétrie de la distribution de charge.

- choisir une surface fermée.
- calculer le flux à travers la surface fermée.
- appliquer le théorème de Gauss et en déduire le champ  $\vec{E}$ .

**a/Première Application : Le champ électrique produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée :**

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'un cylindre de longueur  $l$ , et dont l'axe coïncide avec la tige (figure ci-dessous).

Il y a trois surfaces : la surface de base  $S_1$ , la surface de base  $S_2$ , et la surface latérale  $S_L$  :



Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à travers chaque surface, soit :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Phi = \sum \Phi_i \quad \text{donc :}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS}_L$$

$$\text{Sur les surfaces des bases } (S_1) \text{ et } (S_2) \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{dS} \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1$$

$$= \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 = \iint_{S_1} E \cdot dS_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \iint_{S_2} E \cdot dS_2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Mais, par contre sur la surface latérale ( $S_L$ )  $\Rightarrow \vec{E} // \vec{dS} \Rightarrow$

$$\Phi_L = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS}_L = \iint_{S_L} E \cdot dS_L \cdot \cos 0 = E \cdot S_L \quad \text{donc :} \quad \boxed{\Phi = E \cdot S_L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

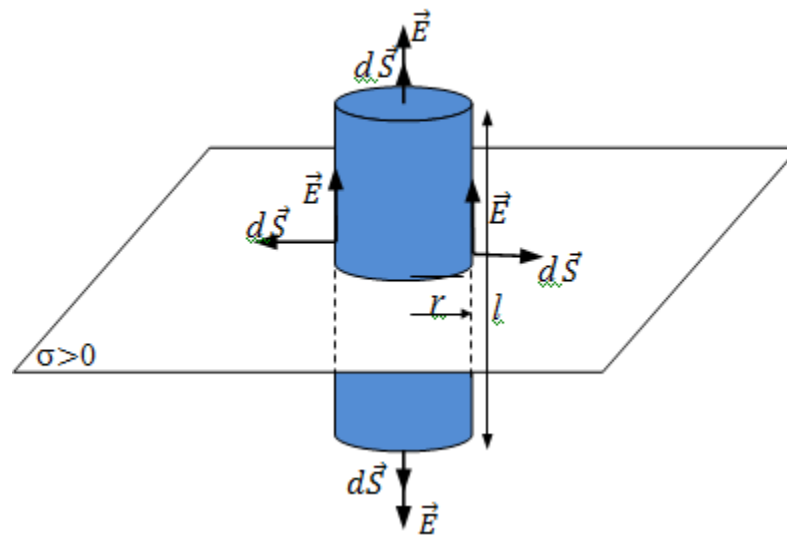
Sachant que :  $dq = \lambda \cdot dl = dQ_i \Rightarrow Q_{int} = Q_i = \lambda \cdot l$  et  $S_L = 2\pi Rl$ , donc :

$$E \cdot 2\pi Rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi R\epsilon_0}}$$

**b/ Deuxième application : Le champ électrique produit par un plan infini chargé uniformément :**

On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique  $\sigma > 0$ . On veut calculer le champ et le potentiel électriques créés par cette distribution de charges en tout point  $M$  de l'espace au voisinage de ce plan.

On choisit comme surface de Gauss un cylindre perpendiculaire au plan. Là aussi on a trois surfaces comme indique sur la figure suivante:



-Le flux de  $\vec{E}$  à travers ce cylindre est :

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS}_L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$S_1, S_2 = S$  sont les surfaces des bases du cylindre et  $S_L$  est sa surface latérale.

$$\Phi = E \cdot S_1 + E \cdot S_2 + 0 = 2E \cdot S \quad (\vec{E} // \vec{dS}_1, \vec{E} // \vec{dS}_2 \text{ et } \vec{E} \perp \vec{dS}_L)$$

Sachant que :  $dq = \sigma \cdot dS = dQ_i \Rightarrow Q_{int} = Q_i = \sigma \cdot S$

$$\Rightarrow \Phi = 2E \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$$

A la fin, on remarque que le champ électrique est uniforme quelque soit la distance entre le point considéré et le plan :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

-le potentiel électrique :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -E \cdot dl \cdot \cos 0 = -E \cdot dl \Rightarrow V = -\int_0^z E \cdot dl = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot dl$$

$$\Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$$

**Application :**

Considérons une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ , chargée uniformément en surface, soit  $\sigma$  sa densité surfacique de charge.

1. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique produit par la sphère en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de  $O$ . Déduire le potentiel  $V(r)$  au point  $M$ .

**Solution:**

En utilisant le théorème de Gauss, le flux total du champ électrique à travers  $S$ :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S \quad \text{Avec} \quad S = 4\pi r^2$$

D'après le théorème de Gauss, on peut écrire :  $E \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

On a deux cas:

a)  $r \geq R$  : la charge à l'extérieur de la sphère est égale à :  $Q_{int} = \sigma 4\pi R^2$

Donc :  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}}$

b)  $r < R$  : la charge à l'intérieur de la sphère est égale à :  $Q_{int} = 0$

$$E \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{E(r) = 0}$$

A partir de l'expression de  $E$  on peut déduire le potentiel  $V(r)$ :

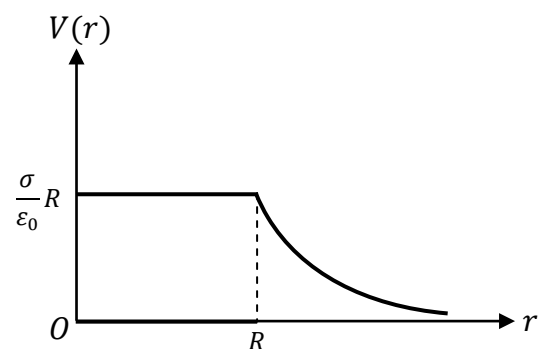
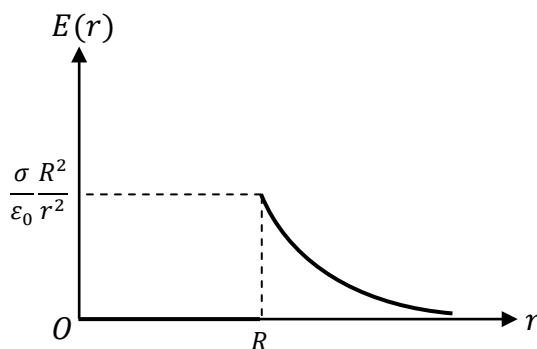
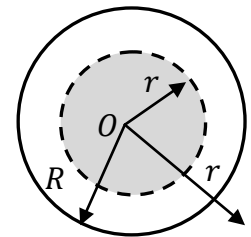
$$V(r) = - \int_r^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{ou} \quad V(r) = - \int E \cdot dr$$

Dans le premier cas ( $r \geq R$ ) :  $V(r) = \int_r^{+\infty} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} dx = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} R^2 \left[ \frac{1}{r} \right]_r^{+\infty} \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}}$

Dans le deuxième cas ( $r < R$ ) on a :  $E(r) = 0 \Rightarrow V(r) = V_0$

le potentiel  $V(r)$  est une fonction continue au point  $r = R$ . En effet au voisinage de ( $R$ ) le

potentiel reste le même :  $V(R^+) = V(R^-) = \int_R^{+\infty} E(r) dx$  donc :  $\boxed{V(R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R = V_0}$



## 9. Conducteur en équilibre

**9.1. Définition :** Un conducteur est en équilibre électrostatique si les charges qu'il renferme sont en état de repos.

### 9.1. Propriétés d'un conducteur en équilibre

- Le Champ électrostatique intérieur est nul  $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ , en effet toute charge  $q$  est au repos, donc :

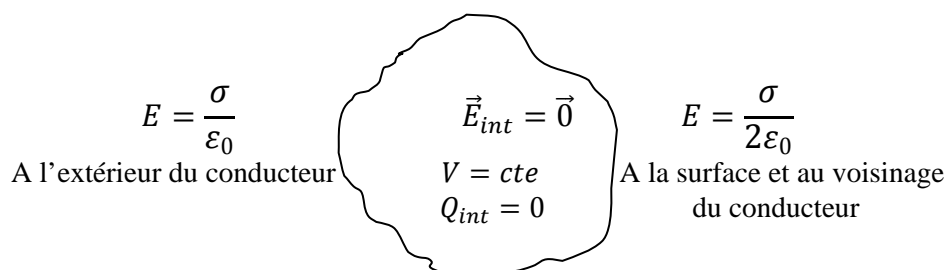
$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{0} \quad (41)$$

- Le potentiel est constant :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \vec{0} \Rightarrow V = cte \quad (42)$$

- La charge dans le conducteur en équilibre est nulle ( $Q_{int} = 0$ ), elle se concentre sur la surface du conducteur donc la distribution des charges électriques ne peut être que surfacique, avec une densité  $\sigma$ .
- Au voisinage d'un conducteur en équilibre, le champ est perpendiculaire à la surface du conducteur et son intensité :  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

**Remarque :** Les mêmes résultats sont encore valables pour un conducteur creux.



**Fig 21.** Propriétés du conducteur en équilibre.

### 9.2 Champ électrostatique au voisinage du conducteur chargé (Théorème de Coulomb)

En conséquence de la discontinuité du champ à la traversée d'une surface chargée, le champ est toujours perpendiculaire à la surface d'un conducteur, et lié à la charge que celui-ci porte en surface par :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (43)$$

Où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal au conducteur et orienté vers l'extérieur.

Si  $\sigma > 0$ , le champ est dirigé vers l'extérieur,

Si  $\sigma < 0$ , il est dirigé vers l'intérieur.

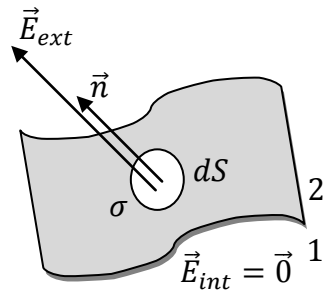


Fig 22. Flux élémentaire.

### 9.3. Pression électrostatique

Par définition la pression électrostatique est la force électrique appliquée sur l'unité de surface

$$P_e = \frac{F}{S} \tag{44}$$

Soit  $dS$  un élément de surface d'un conducteur en équilibre et  $\sigma$  sa densité surfacique, La force  $d\vec{F}$  exercée par l'ensemble de toutes les charges du conducteur vaut :

$$\text{On a : } \vec{F} = q\vec{E}_{ext} \quad \text{donc} \quad d\vec{F} = dq\vec{E}_{ext} = \sigma dS \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \cdot \vec{n}$$

On peut définir la pression électrostatique par :

$$P_e = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \tag{45}$$

### 9.3. Pouvoir des pointes

Nous allons montrer qu'à proximité d'une pointe, le champ électrique est très intense.

Considérons deux sphères de rayons différents  $R_1$  et  $R_2$  reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre chacun avec ses caractéristiques, portées au même potentiel.

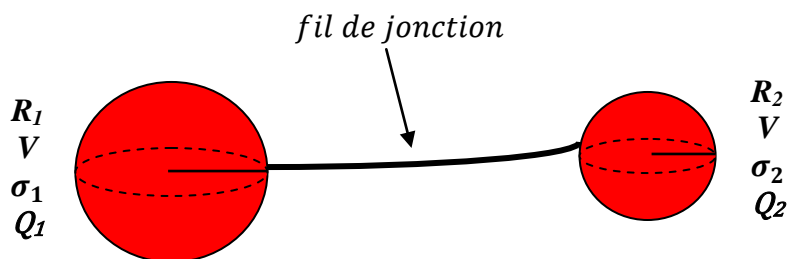


Fig 23. Pouvoir des pointes.

Les sphères sont au même potentiel  $V$  : 
$$V = K \frac{Q_1}{R_1} = K \frac{Q_2}{R_2}$$

$$V = \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 \cdot dS_1}{R_1} = \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 \cdot dS_2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{4\pi R_1 \epsilon_0} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{4\pi R_2 \epsilon_0} \Rightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Puisque  $R_1 > R_2 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1$  : cela est la preuve que les charges ont tendance à s'accumuler sur les surfaces pointues.

#### 9.4. Capacité d'un conducteur isolé

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique  $\sigma$  et porté au potentiel  $V$ , il apparaît alors sur sa surface une charge  $Q$

définie par :  $Q = \iint_S \sigma \cdot dS$  et  $V = K \iint_S \frac{\sigma \cdot dS}{R} = \frac{K \cdot Q}{R} \Rightarrow \frac{Q}{V} = \frac{R}{K} = 4\pi \epsilon_0 R = C^{\text{te}}$

donc :

$$\boxed{\frac{Q}{V} = C} \quad (46)$$

$C$  : capacité électrostatique d'un conducteur qui s'exprime en Farad (F).

#### 9.5. Phénomène d'influence entre conducteurs chargés

##### ➤ Influence partielle

On place la charge  $+q$  au voisinage du conducteur non chargé (**Figure.24**). La charge  $+q$  produit, en tout point de l'espace qui l'entoure, un champ électrique  $\vec{E}$  qui oblige les électrons libres à se déplacer vers la face. Donc la région  $N$  se charge négativement et les électrons en quittant la face  $P$  créent un déséquilibre de charges dans cette région qui se charge positivement alors les charges  $N$  et  $P$  produisent à leur tour au point  $M$  un champ  $\vec{E}'$  de sens contraire à celui du champ  $\vec{E}$ .

Donc le conducteur acquiert toutes les propriétés d'un conducteur en équilibre tel que :

- Au point  $M$  :  $\vec{E}(+q) + \vec{E}(+q') + \vec{E}(-q') = \vec{0}$ , le champ est nul dans le conducteur,
- Sa surface est équipotentielle,
- Les charges sont accumulées sur la surface et réparties de façon singulière. Dans ce cas, il s'est produit une électrisation par influence. La charge totale du conducteur reste nulle.

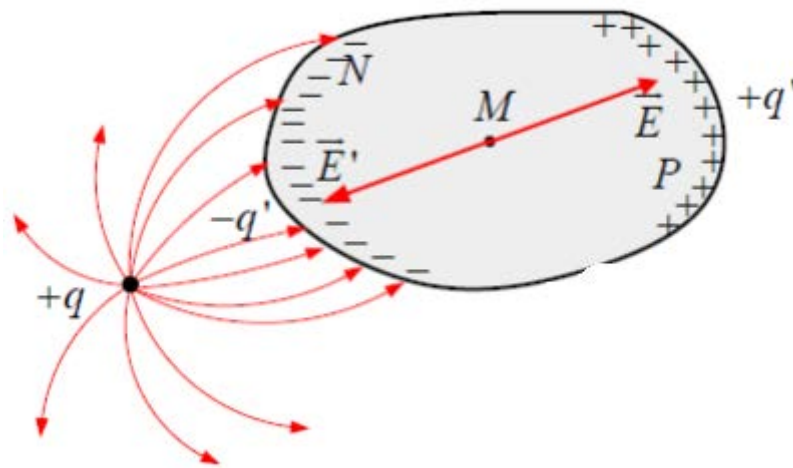


Fig 24. Influence d'une charge sur un conducteur en équilibre.

➤ **Influence totale**

Deux conducteurs  $C_1$  et  $C_2$  sont en influence totale si le corps influencé entoure complètement le corps influent. (Figure.25).

En supposant  $C_1$  chargé positivement, cela implique que la surface interne  $S_2$  du conducteur  $C_2$  se charge négativement. Dans ce cas toutes les lignes de champ issues de  $C_1$  rejoignent la surface  $S_2$  du conducteur  $C_2$ , donc  $\sum Q = Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow \boxed{Q_1 = -Q_2}$ .

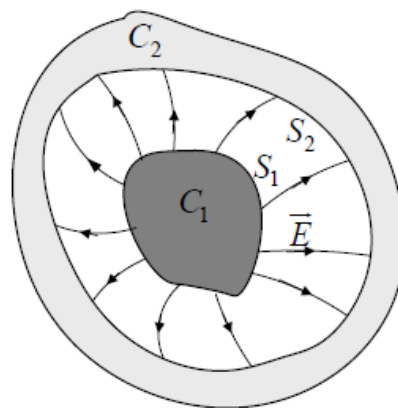
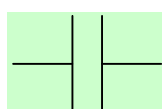


Fig 25. Influence totale.

**10. Les condensateurs**

**10.1. Définition** : Un condensateur est constitué de deux conducteurs (armatures) séparés par un isolant (= diélectrique) en influence totale.

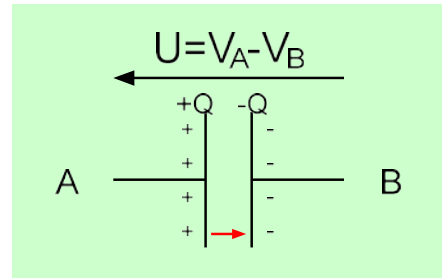
- Symbole :



- La charge électrique sur les armatures :  $Q = Q_A = - Q_B$  : charge du condensateur

- Capacité du condensateur  $C$  et défini par la relation :

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{V_A - V_B}$$



**10.2. Capacités de quelques condensateurs simples**

**10.2.1. Capacité d'un condensateur plan**

Il est constitué de deux plans infinis de surface  $S$  portés aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  et distant de  $d$  (Figure.26). Sa capacité est défini par :

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{V_1 - V_2}{d} \Rightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$$

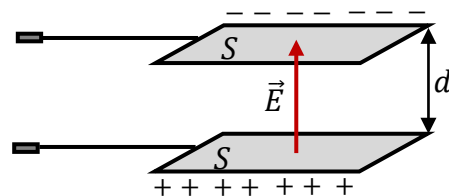


Fig 26. Un condensateur plan.

Où  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} F \cdot m^{-1}$  permittivité du vide et  $d$  épaisseur du diélectrique

**10.2.2. Capacité d'un condensateur cylindrique**

Les armatures sont constituées par deux cylindres coaxiaux, séparés par un isolant(Figure.27).

D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique entre les armatures :

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}$$

La différence de potentiel est donc :

$$U = V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

On en déduit :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

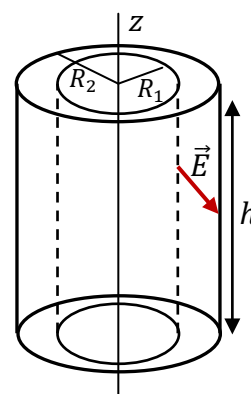
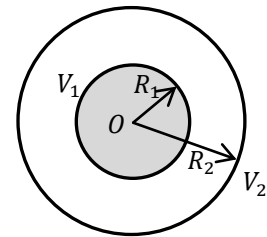


Fig 27. Un condensateur cylindrique.

**10.2.3. Capacité d'un condensateur sphérique**

Le condensateur sphérique est constitué de deux sphères concentriques et conductrices de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , séparées par un isolant (Figure.28).

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{KQ}{r^2} \quad \text{et} \quad U = V_2 - V_1 = KQ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$



On en déduit :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

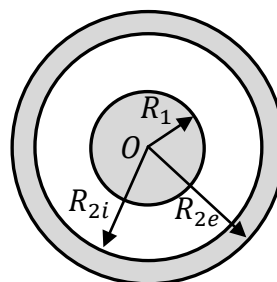
Fig 28. Un condensateur sphérique.

**Application :**

Soient deux sphères ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) concentriques conductrices, placées dans le vide (voir la Figure). ( $S_1$ ) est pleine de rayon  $R_1$ , ( $S_2$ ) est creuse et infiniment mince de rayon  $R_2$ .

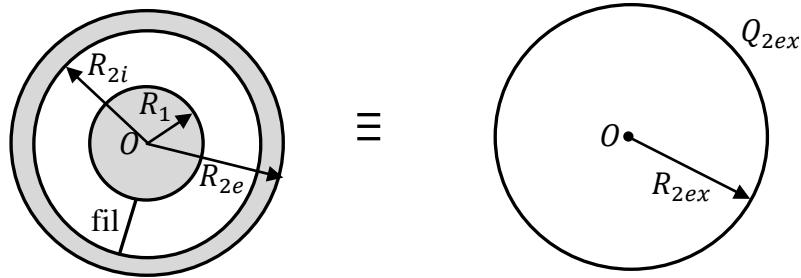
$$(R_{2int} = R_{2ext} = R_2)$$

1. ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) sont reliées par un fil conducteur et portée au potentiel  $V$ , calculer les charges  $Q_1$  de la sphère( $S_1$ ),  $Q_{2int}$  de la face interne de ( $S_2$ ) et  $Q_{2ext}$  de la face externe de  $S_2$
2. Le fil est maintenant rompu ; ( $S_1$ ) est portée au potentiel  $V_1$  et ( $S_2$ ) est portée au potentiel  $V_2$  tels que  $V_1 \neq V_2$ . Donner les charges  $Q'_1$ ,  $Q'_{2int}$  et  $Q'_{2ext}$  en fonction de  $R_1, R_2, V_1$  et  $V_2$
3. déduire la capacité du condensateur formé.



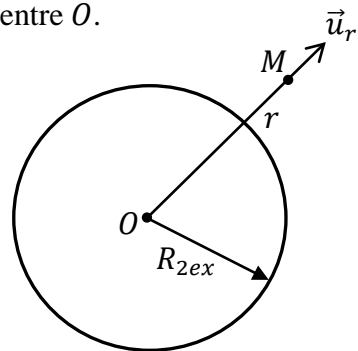
**Solution :**

1. Lorsqu' on relie ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) par un fil conducteur on a qu'un seul conducteur en équilibre, toute la charge est répartie sur la surface extérieure de rayon  $R_{2ext} = R_2$  et à l'intérieur, il n'y a pas de charges donc  $Q_1 = 0$  et  $Q_{2int} = 0$



- Toute la charge est répartie sur la surface de rayon  $R_{2ext}$ , cette charge  $Q_{2ext}$  qui crée le potentiel  $V$  du conducteur.
- La distribution admet une symétrie sphérique donc le potentiel à l'extérieur est le même que celui créé par la charge  $Q_{2ext}$  placée au centre  $O$ .

- Pour  $r > R_{2ext}$  :  $V(r) = \frac{Q_{2ext}}{4\pi\epsilon_0 r}$
- Pour  $r = R_{2ext} = R_2$  :
- $V(r = R_2) = \frac{Q_{2ext}}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow Q_{2e} = 4\pi\epsilon_0 R_2 \cdot V$

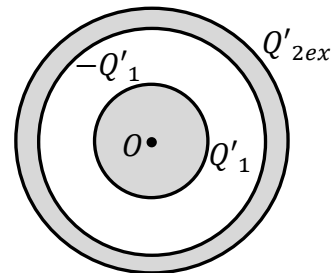


$$\text{finalement } \begin{cases} Q'_1 = 0 \\ Q'_{2int} = 0 \\ Q'_{2ext} = 4\pi\epsilon_0 R_2 \cdot V \end{cases}$$

2. Les deux conducteurs sont en influence total donc :  $Q'_{2int} = -Q'_1$  à l'extérieur.

La distribution admet une symétrie sphérique  $\Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_r$

- Surface de Gauss : la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .
- Pour  $r > R_{2ext}$



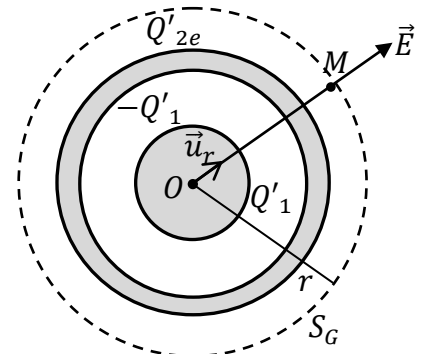
Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \vec{u}_r \cdot ds \vec{u}_r \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot S = \frac{Q'_1 - Q'_1 + Q'_{2ext}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'_{2ext}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q'_{2ext}}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E \cdot dr = -\frac{Q'_{2ext}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr$$

$$V = \frac{Q'_{2ext}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + C \quad (V(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0)$$



- Pour  $r = R_{2ext} = R_2$  :

$$V_2 = \frac{Q'_{2ext}}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow Q'_{2e} = 4\pi\epsilon_0 R_2 \cdot V_2$$

- Pour  $R_1 \leq r \leq R_2$  :  $\Phi = E \cdot S = \frac{Q'_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'_1}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

On a :  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr$

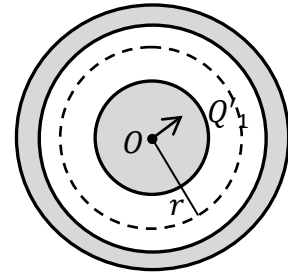
$$\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = V_2 - V_1 = -\frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right)$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \Rightarrow Q'_1 = 4\pi\epsilon_0 (V_1 - V_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Alors  $Q'_{2i} = -Q'_1 = -4\pi\epsilon_0 (V_1 - V_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

3. Par définition :  $C = \frac{Q'_1}{V_1 - V_2} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$



### 10.3. Association de condensateurs

❖ **Association en série** : la capacité équivalente à un groupement de condensateurs en série est égale à la somme des inverses des capacités des différents condensateurs :

Tous les condensateurs emmagasinent la même charge  $Q$ , parce que c'est le même courant qui passe. La tension entre les extrémités de tout l'ensemble est égale à la somme des tensions :

On a :  $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$  et  $V_{AD} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$  ;  $V = \frac{Q}{C} \Rightarrow$

$$V_{AD} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \Rightarrow \frac{Q}{C_{eq}} = Q \left[ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

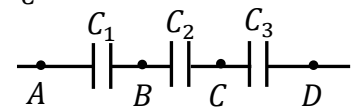


Fig 29 .Groupement de condensateurs en série.

Donc :  $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}$

(47)

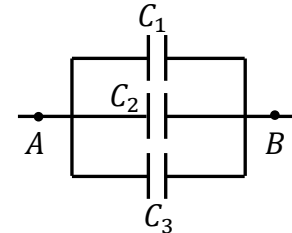
❖ **Association en parallèle :** La capacité équivalente à un groupement de condensateurs en parallèle est égale à la somme des capacités des différents condensateurs :

Tous les condensateurs sont soumis à la même tension  $V$  et la charge totale est égale à la somme des charges :

On a :  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$  et  $V_{AB} = V_1 = V_2 = V_3 = V \Rightarrow$

$C_{eq}V = C_1V + C_2V + C_3V \Rightarrow$   $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$

Donc :  $C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$  (48)



**Fig 30.** Groupement de Condensateurs en parallèle.

**10.4. Énergie électrique emmagasinée par un condensateur**

L'énergie potentielle du conducteur isolé portant une charge  $Q$  est simplement l'énergie d'interaction de la distribution de charge qu'il porte en surface et qui s'exprime par.

$E_p = W_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  (49)

$U = E_p = W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$  (50)

Pour un ensemble de  $N$  conducteurs :

**Application :**

Soit le groupement de condensateurs suivant :

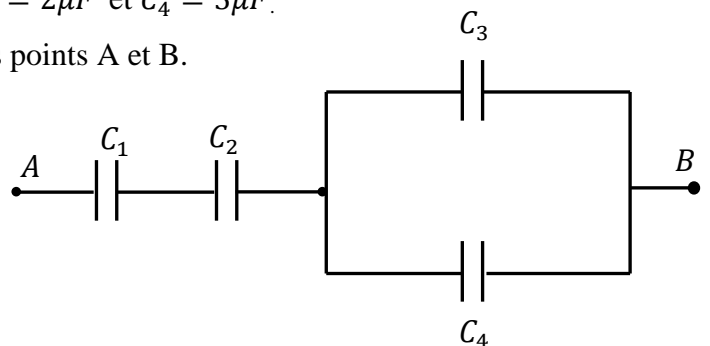
1-Déterminer la capacité équivalente de groupement

de la figure ci-contre :  $C_1 = 5\mu F$ ,  $C_2 = 1\mu F$ ,  $C_3 = 2\mu F$  et  $C_4 = 3\mu F$ .

2-Une tension  $U_{AB}=140V$  est appliquée entre les points A et B.

Calculer la charge et la différence de potentiel

Pour chaque condensateur ainsi que l'énergie de l'ensemble.



**Solution :**

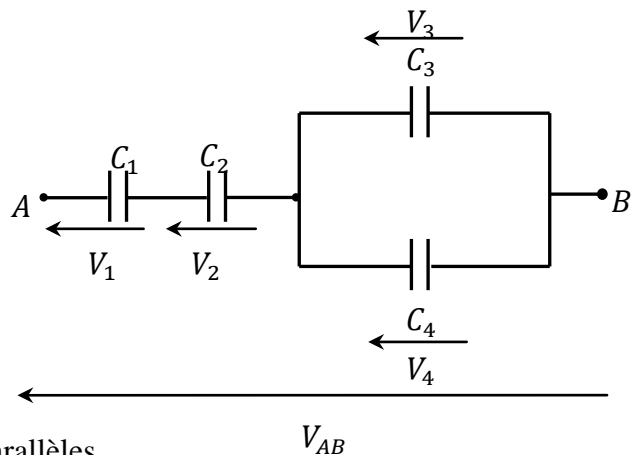
1-La capacité équivalente  $C_{eq}$ :

Les condensateurs  $C_1$  et  $C_2$  sont montés en série,

soit  $C_{eq1}$  leur capacité équivalente :

$$\frac{1}{C_{eq1}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq1} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow$$

$$C_{eq1} = \frac{5 \cdot 1}{5+1} = \frac{5}{6} \mu F$$



Les condensateurs \$C\_3\$ et \$C\_4\$ sont montés en parallèles,

soit \$C\_{eq2}\$ leur capacité équivalente :

$$C_{eq2} = C_3 + C_4 \Rightarrow C_{eq2} = 2 + 3 = 5 \mu F$$

Donc :



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{eq1}} + \frac{1}{C_{eq2}} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_{eq1} \cdot C_{eq2}}{C_{eq1} + C_{eq2}}$$

$$C_{eq} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 5}{\frac{5}{6} + 5} = \frac{5}{7} \mu F \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{5}{7} \mu F}$$

2-la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur:

La charge totale du système est : \$Q\_{eq} = C\_{eq} \cdot U\_{AB} \Rightarrow Q\_{eq} = 100 \mu C\$ donc on a :

$$Q_{eq} = Q_{eq1} = Q_{eq2} \text{ (en série)} \quad \text{et} \quad Q_{eq1} = Q_1 = Q_2 \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{100}{5} = 20V \\ V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{100}{1} = 100V \end{cases}$$

Aussi on a : \$U\_{AB} = V\_{AB} = V\_1 + V\_2 + V\_3\$, (\$V\_3 = V\_4\$ circuit en parallèle) \$\Rightarrow\$

$$V_3 = V_{AB} - (V_1 + V_2) = 20V \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 40 \mu C \\ Q_4 = C_4 \cdot V_4 = 60 \mu C \end{cases}$$

Energie potentielle :

$$\boxed{U_S = \frac{1}{2} Q_{eq} \cdot V = \frac{1}{2} C_{eq} \cdot V^2}$$

A.N :  $\boxed{U_S = 7000 \mu J = 0,007 J}$

# Chapitre II

## Électrocinétique

### 1. introduction

L'électrocinétique est l'étude de circuits électriques, et plus particulièrement celle du déplacement de l'électricité dans les milieux matériels.

### 2. Courant électrique

#### 2.1. Définitions

**Un conducteur :** est un matériau contenant des charges libres capable de se déplacer (électrons ou ions).

**Tension ou différence de potentiel (d.d.p.):** est la circulation du champ électrique le long d'un circuit électrique mesurée en **volts (V)** par un voltmètre placé en parallèle dans un circuit. Elle est notée  $(V,U)$  aux bornes d'un dipôle.

**Dipôle :** un dipôle est un élément électrique qui possède deux bornes, une borne d'entrée et une borne de sortie. Par exemple, les lampes, les interrupteurs, les générateurs, les piles, les batteries, les diodes, les DEL, les résistances et les moteurs.

**Un courant électrique :** est le déplacement collectif des charges électriques, apparaît dans un conducteur quand une différence d.d.p. de potentiel est établie entre les bornes de ce dernier. Elles sont donc soumises au champ électrique extérieur.

- Le déplacement de charges libres de façon continue à l'aide d'un générateur.
- Le sens du courant électrique est celui des charges positives. Il est donc opposé à la direction de déplacements des électrons. A l'extérieur du générateur du pôle + au pôle – et le sens contraire à l'intérieure du générateur.

**2.2. Intensité du courant électrique :** est la quantité d'électricité  $\Delta Q$  traversant une section du conducteur pendant le temps  $\Delta t$  (débit des charges), elle est donnée par :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (1)$$

En régime contenu permanent,

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

L'unité : est l'Ampère ( $A = C/s$ )

On mesure l'intensité du courant  $I$  à l'aide d'un **Ampèremètre** placé en série dans un circuit.

**2.3. Vecteur densité du courant électrique :** On considère un conducteur de section  $dS$ . Soit  $n$  le nombre de charges mobiles par unité de volume et  $\vec{v}$  leur vitesse. Pendant la durée  $dt$ , la charge  $dQ$  qui traverse la section  $dS$  est égale à :

$$dQ = n \cdot q \cdot dV = n \cdot q \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{l} = n \cdot q \cdot d\vec{S} \cdot \vec{v} \cdot dt = \rho \cdot d\vec{S} \cdot \vec{v} \cdot dt \quad (3)$$

On définit le vecteur densité de courant par :

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} \quad (4)$$

$\vec{j}$  : densité de courant ( $A \cdot m^{-2}$ )

$\rho$  : densité volumique de charges mobiles ( $C \cdot m^{-3}$ )

$\vec{v}$  : vitesse moyenne des porteurs ( $m \cdot s^{-1}$ )

Dans le cas d'un cristal composé d'ions au repos et d'électrons libres mobiles, on a :

$$\vec{j} = -ne \cdot \vec{v} \quad (5)$$

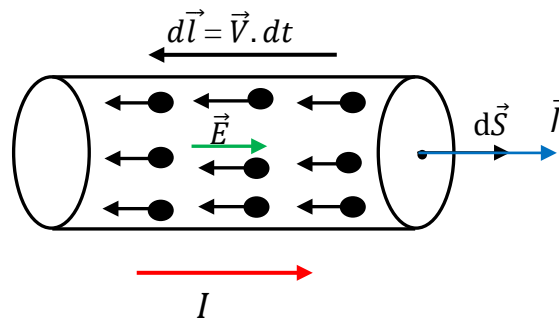


Fig 1. Densité de courant.

L'intensité du courant électrique à travers un conducteur s'écrit donc :

$$I = \iint_{\vec{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{S} = n \cdot q \cdot v \cdot S = \frac{dQ}{dt} \quad (5)$$

**Application :**

- 1-Calculer le nombre d'électrons de cuivre par unité de volume.
- 2-En admettant que chaque atome de cuivre libère deux électrons, et qu'un fil en cuivre de section  $10 \text{ mm}^2$  est traversé par un courant d'intensité 30A, calculer la densité de courant.
- 3-En déduire la vitesse de déplacement des électrons à l'intérieur du cristal de cuivre.

On donne :

masse atomique du cuivre  $M_{Cu} = 63,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ; nombre d'Avogadro  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$   
 masse volumique du cuivre  $\rho_{Cu} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^3$ .

**Solution :**

1- Calcul du nombre d'atomes de cuivre :  $\rho_{Cu} = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho_{Cu} \cdot V \Leftrightarrow \frac{n \cdot M_{Cu}}{N_A} = \rho_{Cu} \cdot V \Rightarrow$

$$n = \frac{\rho_{Cu} \cdot N_A}{M_{Cu}} \quad ; \quad \text{A.N: } n = 8.35 \cdot 10^{28} \text{ atome}$$

2- la densité de courant :

$$I = J \cdot S \Rightarrow J = \frac{I}{S} \quad ; \quad \text{A.N: } J = 3 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

2- la vitesse:

$$J = n \cdot e \cdot v \Rightarrow v = \frac{J}{n \cdot e} \quad ; \quad \text{A.N: } v = 108 \mu \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

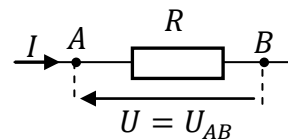
**2.4. Loi d'Ohm**

Pour un conducteur métallique, sous une température constante, le rapport entre la différence de potentiel  $U$  (ou tension) entre ses bornes, et l'intensité  $I$  du courant électrique qui le traverse, est constant et égal à la résistance du conducteur  $R$ . La relation entre l'intensité du courant, la tension et la résistance est connue sous le nom de la **loi d'Ohm**.

**Loi d'Ohm**

$$R = \frac{U}{I}$$

(6)

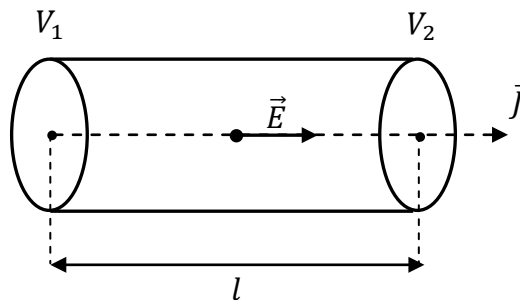


Son unité est l'ohm( $\Omega$ )

**Fig 2.** Résistance.

**2.5. Résistance d'un conducteur**

On considère qu'un conducteur cylindrique de longueur  $l$  et de section est traversé par le courant  $I$ . S'il y a du courant, cela signifie qu'il y a une différence de potentiel et est affecté par la tension  $U$ .



**Fig 3.** Un conducteur cylindrique.

On a :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E \int_0^l dl \quad \Rightarrow U = V_2 - V_1 = E \cdot l = R \cdot I$$

$$\Rightarrow E \cdot l = R \cdot I = R \cdot J \cdot S \quad \Rightarrow \quad J = \frac{l}{R \cdot S} E = \sigma \cdot E \quad \text{alors ;} \quad \boxed{\sigma = \frac{l}{R \cdot S}} \quad (7)$$

$\sigma$  est la conductivité du conducteur. Elle ne dépend que de la nature du matériau, elle est exprimée en  $(\Omega^{-1} \cdot m^{-1})$  ou en Siemens par mètre  $(S \cdot m^{-1})$ .

L'inverse de la conductivité appelé résistivité électrique  $\rho$  :

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{R \cdot S}{l}} \quad (8)$$

Ainsi, peut être écrit la résistance d'un conducteur sous la forme :

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{S}} \quad (9)$$

L'inverse de la résistance appelé conductance électrique  $G$ . Elle s'exprime en Siemens(S).

$$\boxed{G = \frac{1}{R}} \quad (10)$$

### Applications:

#### Application 1 :

Un fil en cuivre de 0.5mm de rayon, de longueur 10m, est traversé par un courant de 10A sous tension de 4V. Sachant que le cuivre possède un électron libre par atome. Calculer :

1. La vitesse de dérive des électrons.
2. la résistivité électrique.
3. la conductivité électrique.
4. La conductance électrique.

On donne : la masse volumique du cuivre  $\rho_{Cu} = 8,8 \cdot 10^3 Kg \cdot m^3$ , sa masse atomique  $M_{Cu} = 63,6 g \cdot mol^{-1}$ , le nombre d'Avogadro  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  et  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$

**Solution 1:**

1- La vitesse de dérive des électrons :

❖ Nombre d'atomes par  $m^3$ :  $n = \frac{\rho_{Cu} \cdot N_A}{M_{Cu}}$     A.N :  $n = 8.44 \cdot 10^{28} \text{ atomes}/m^3$

❖ Section du fil :  $S = \pi R^2$     A.N :  $S = 7.85 \cdot 10^{-7} m^2$

❖ vitesse de dérive des électrons ;

$J = \frac{I}{S} = n \cdot e \cdot v \Rightarrow v = \frac{I}{n \cdot e \cdot S}$     A.N :  $v = 9.43 \cdot 10^{-4} m/S$

2. la résistivité électrique.

$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \Rightarrow \rho = \frac{R \cdot S}{l} = \frac{U \cdot S}{I \cdot l}$     A.N :  $\rho = 3.14 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$

3. la conductivité électrique :

$\sigma = \frac{1}{\rho}$     A.N :  $\sigma = 0.31 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$

4. La conductance électrique.

$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$     A.N :  $G = 2.5 \Omega^{-1}$

**Application 2 :**

Donnée l'expression de la résistance d'un conducteur cylindrique de rayon interne  $R_1$ , de rayon externe  $R_2$  et de hauteur  $h$ .

**Solution 2 :**

On a :  $J = \frac{I}{S} = \sigma \cdot E \Rightarrow E = \frac{I}{\sigma \cdot S}$  avec  $S = 2\pi r h$

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr$

$dV = -E \cdot dr = -\frac{I}{\sigma \cdot 2\pi r h} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{\sigma \cdot 2\pi r h}$

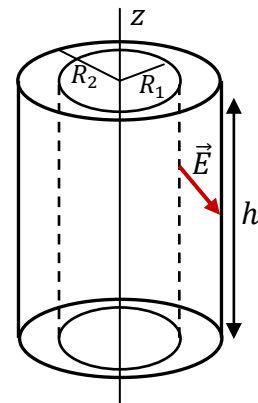
$V_2 - V_1 = \frac{I}{\sigma \cdot 2\pi h} [-Ln r]_{R_1}^{R_2}$

Alors :

$V_1 - V_2 = \frac{I}{\sigma \cdot 2\pi h} [Ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{I}{\sigma \cdot 2\pi h} Ln \frac{R_2}{R_1} = RI$

donc la résistance :

$R = \frac{1}{\sigma \cdot 2\pi h} Ln \frac{R_2}{R_1}$



**2.6. L'effet Joule**

L'effet Joule est un effet de production de chaleur qui se produit lors de passage du courant électrique dans un conducteur présentant une résistance.

Le travail effectué par une charge élémentaire circulant entre deux points **A** et **B** du conducteur :

$$dW = (V_A - V_B)dq = (V_A - V_B)Idt$$

D'après la loi d'Ohm:

$$U = V_A - V_B = RI$$

Le travail s'écrit alors :

$$dW = UI dt = RI^2 dt$$

Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur.

On définit la puissance comme le travail effectué par unité de temps :

$$P = \frac{dW}{dt} = RI^2 \quad \text{alors:} \quad \boxed{P = \frac{U^2}{R} = RI^2 \quad \text{ou} \quad P = UI} \quad (11)$$

Ce phénomène s'appelle effet Joule.

**2.7. Groupement de résistances**

**2.7.1. Groupement en série**

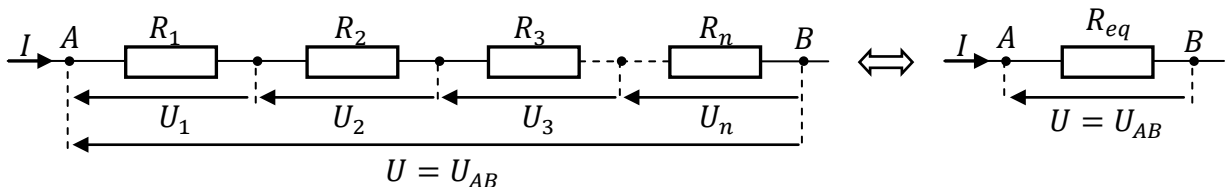
Le même courant **I** traverse toutes les résistances, associées en série.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_N = R_1I + R_2I + R_3I + \dots + R_nI = R_{eq} \cdot I$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

Donc :

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i} \quad (12)$$



**Fig 4.** Groupement en série de résistances.

**2.7.2. Groupement en parallèle**

La tension est la même entre les extrémités de n'importe quelle résistance, par conséquent :

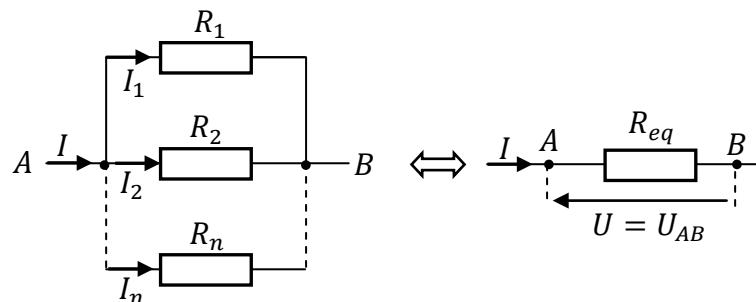
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

Donc :

$$\frac{U}{R_{eq}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right] U$$

D'où la résistance équivalente :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \tag{13}$$



**Fig 5.** Groupement en parallèle de résistances.

**Application :**

Calculer la valeur de la résistance équivalente du circuit.

On donne :  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 2 \Omega$

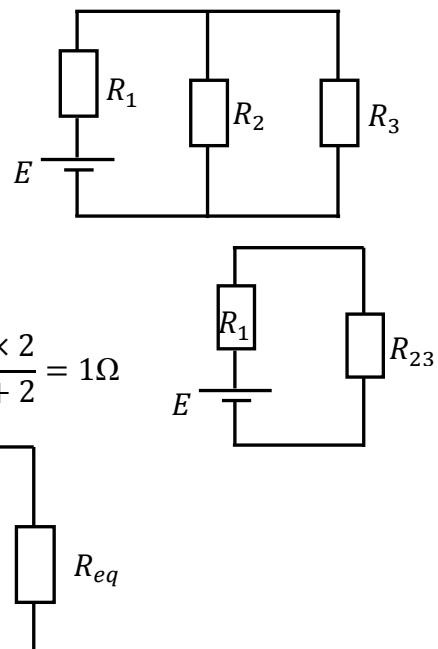
**Solution :**

$R_2$  et  $R_3$  sont en parallèle :

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1 \Omega$$

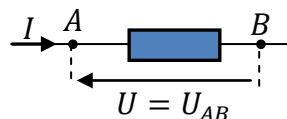
$R_1$  et  $R_{23}$  sont en série :

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} \Rightarrow R_{eq} = 4 \Omega$$



### 3. Eléments d'un circuit électrique

- **Réseau ou circuit électrique** : c'est un circuit constitué d'un groupement d'éléments, appelés dipôles (générateurs, récepteurs, résistances...etc.) reliés entre eux par des fils conducteurs parfaits; le tout constitue une structure fermée. Nous citons ci après quelques éléments.
- **Dipôle** : un dipôle est un élément électrique qui possède une borne d'entrée et une borne de sortie. Il est caractérisé par un courant  $I$  qui le traverse et sa (*d.d.p.*) ;  $U_{AB}$ .



- **Dipôle passif** : c'est un dipôle qui consomme l'énergie électrique. Par exemple, les résistances, les condensateurs, les inductances, les diodes, les moteurs.
- **Dipôle actif** : c'est un dipôle qui produit du courant électrique. Par exemple, les générateurs, les piles, les batteries.
- **Nœud**: On appelle nœud tout point où aboutissent plus de deux conducteurs reliant les éléments entre eux.
- **Branche** : est une portion du circuit située entre deux nœuds consécutifs.
- **Maille** : est un ensemble de branches formant une boucle fermée.

#### Exemple :

Ce circuit contient :

5 dipôles (2 sources de tension et 3 résistances)

- 2 nœuds **B** et **C**.
- 3 branches : **ABCD**, **BC** et **BEFC**.
- 3 mailles : **ABCD** et **BEFC** et **AEFDA**.

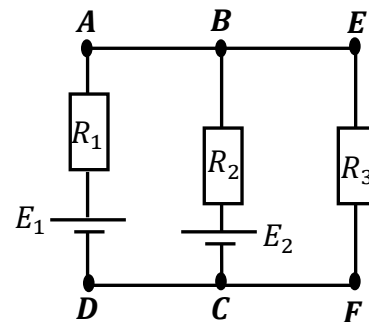


Fig 6. Circuit électrique.

### 3.1. Générateurs et récepteurs

#### 3.1.1. Générateur

**Définition** : est un dipôle actif qui transforme une énergie thermique ou mécanique ou lumineuse en énergie électrique qu'il fournit au circuit. Il est caractérisé par une force électromotrice (**fem**) définie par  $E$  ou  $e$  ( $E = e$ ) et une faible résistance interne  $r$ .

(la Figure.7) représente le schéma équivalent d'un générateur de tension.

La force électromotrice (**fem**) : la tension entre les pôles d'un générateur.

**Par convention** : dans un générateur le courant circule dans le sens des potentiels croissants,  $U$  et  $I$  sont orientés dans le même sens.

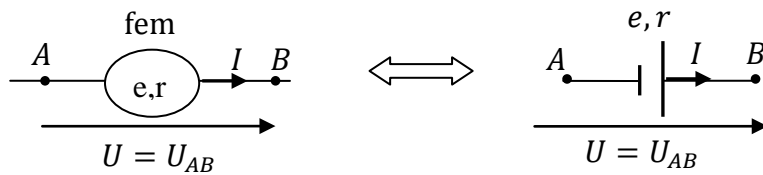


Fig 7. Générateur de tension.

**La différence de potentiel aux bornes d'un générateur de tension :**

$$U = U_{AB} = E - rI = e - rI \quad (14)$$

**Energie, puissance et le rendement d'un générateur :**

Energie (Travail) :

$$W = UIt = (E - rI)t = (e - rI)It = eIt - rtI^2 \quad (15)$$

Puissance :

$$P = UI = (E - rI)I = (e - rI)I = eI - rI^2 = P_G - P_r \quad (16)$$

$P_G = eI$  : Puissance totale fournit par le générateur.

$P_r = rI^2$  : Puissance perdue en chaleur dans la résistance interne par effet Joule.

$P = UI$  : Puissance que le générateur fournit au circuit.

Rendement :

$$\eta = \frac{P}{P_G} = \frac{UI}{eI} = \frac{U}{e} \quad (17)$$

**Application :**

On considère un générateur (e, r) branché à un circuit électrique. Calculer la puissance et le rendement du générateur.

On donne :  $e = 5V$ ,  $r = 2 \Omega$ ,  $I = 0.5A$

**Solution :**

Puissance que le générateur fournit au circuit :  $P = UI = (e - rI)I = eI - rI^2 \Rightarrow P = 2W$

Puissance fournit par le générateur :  $P_G = eI \Rightarrow P_G = 2.5 \text{ Watts}$

Puissance perdue par effet Joule :  $P_r = rI^2 \Rightarrow P_r = 0.5W$

Rendement :  $\eta = \frac{P}{P_G} = \frac{U}{e} = \frac{e - rI}{e} \Rightarrow \eta = 80\%$

**3.1.2. Récepteur**

**Définition :** est un dipôle passif qui transforme l'énergie électrique sous une autre forme d'énergie. Il est caractérisé par une force contre électromotrice (**fcem**) défini par  $e'$  et une résistance interne  $r'$ . (**La Figure.8**) représente le schéma équivalent d'un récepteur.

**Par convention :** dans un récepteur le courant circule dans le sens des potentiels décroissants,  $U$  et  $I$  sont orientés en sens contraire.

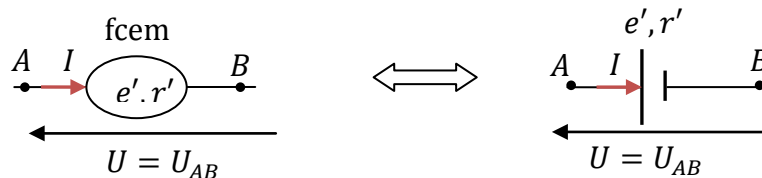


Fig 8. Récepteur.

**La différence de potentiel aux bornes d'un récepteur :**

$$U = U_{AB} = e' + r'I \tag{18}$$

**Energie, puissance et le rendement d'un récepteur :**

Energie (Travail) :

$$W = UIt = (e' + r'I)It = e'tI + r'tI^2 \tag{19}$$

Puissance :

$$P = UI = (e' + r'I)I = e'I + r'I^2 = P_R + P_r \tag{20}$$

$P_R = e'I$  : Puissance consommée par le récepteur.

$P_r = rI^2$  : Puissance perdue en chaleur dans la résistance interne par effet Joule.

$P = UI$  : Puissance reçue par un récepteur.

Rendement :

$$\eta' = \frac{P_R}{P} = \frac{e'I}{UI} = \frac{e'}{U} \tag{21}$$

**Exemples de récepteurs :**

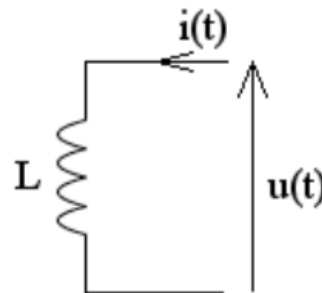
❖ **Condensateur :** est un dipôle de stockage de l'énergie électrique. La relation entre le courant électrique et la tension aux bornes du condensateur est donnée par :

$$q = CU \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

- ❖ **Inductance** : est un dipôle de stockage de l'énergie électromagnétique sous forme de bobine. La relation entre le courant électrique et la tension aux bornes d'inductance est donnée par :

$$\Phi = Li \quad \text{et} \quad U = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

$L$  est l'inductance de la bobine mesurée en Henry (**H**)



### 3.2 Lois de Kirchhoff

#### 3.2.1 Loi des nœuds (conservation de la charge)

En un nœud du circuit électrique, la somme des intensités des courants entrants est égale à la somme des intensités des courants sortants :

$$\sum I_{entrants} = \sum I_{sortants} \tag{22}$$

Dans ce cas :  $I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5$

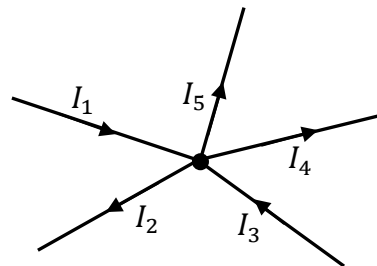


Fig 9. Les courants entrants et sortants du nœud.

#### 3.2.2 Loi des mailles (conservation de l'énergie)

En une maille d'un circuit électrique, la somme algébrique du produit de la résistance et le courant ( $\sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k$ ) est égale à la somme algébrique des forces électromotrices (**fem**) ( $\sum_{k=1}^n e_k$ ).

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k \tag{23}$$

#### Règles

- ✓ On définit un sens arbitraire des courants
- ✓ On définit un sens arbitraire des parcours
- ✓ Pour les (**fem**), on attribue le signe par lequel on rentre

- ✓ Pour les chutes de tension  $RI$ , on attribue un signe (+) si le sens de parcours coïncide avec le sens des courants, un signe (-) si le sens de parcours est différent du sens du courant.

**Remarque :**

Si on a :  $b$  branches  $\longrightarrow$  donc  $b$  courants à calculer.

$n$  nœuds  $\longrightarrow$   $(n-1)$  équations indépendantes.

La loi des mailles  $\longrightarrow$   $m = b - (n-1)$  nombres d'équations de mailles.

**Résolution des équations de Kirchhoff**

Pour résoudre ce système, on applique deux méthodes : la méthode de substitution (superposition) et la méthode de Kramer (déterminant). Nous allons le voir à travers des exemples.

**Application:**

On considère le circuit de la figure ci-contre.

Déterminer les courants  $I_1, I_2$  et  $I_3$ .

**Solution:**

Les sens des courants et des parcours des mailles étant choisis arbitrairement comme l'indique la figure.

On applique la loi des nœuds en A :

$$I_2 = I_1 + I_3 \quad (1)$$

On applique la loi des mailles :

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k$$

Maille (I) :

$$E_1 - E_2 = R_2 I_2 \quad (2)$$

Maille (II) :

$$E_2 = -R_2 I_2 - R_3 I_3 \quad (3)$$

On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues  $I_1, I_2$  et  $I_3$  :

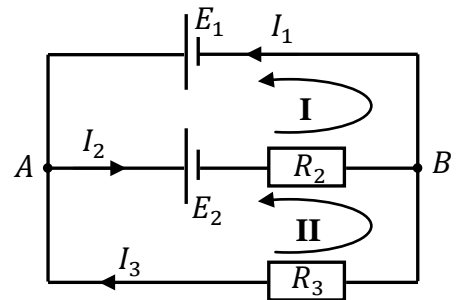
$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 & (1) \\ -R_2 I_2 + E_1 - E_2 = 0 & (2) \\ -R_2 I_2 - R_3 I_3 + E_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système par la méthode de superposition donne :

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{-E_1}{R_3}$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_3 E_2}{R_2 R_3}$$

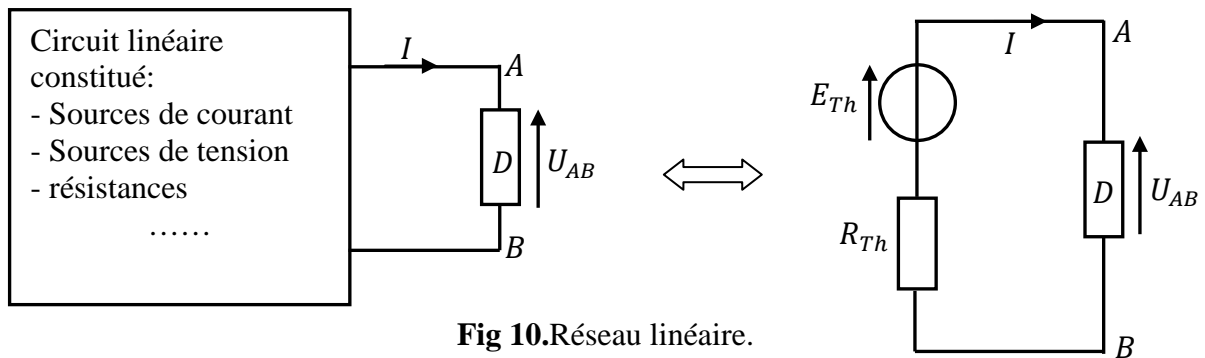


**3.3 Théorème de Thévenin**

On peut remplacer tout circuit linéaire, qui alimente par les bornes  $A$  et  $B$  un dipôle  $D$ , par un générateur de tension idéal en série avec une résistance  $R_{Th}$ .

La (fem)  $E_{Th}$  du générateur est égale à la **d.d.p** mesurée entre  $A$  et  $B$  quand le dipôle  $D$  est débranché.

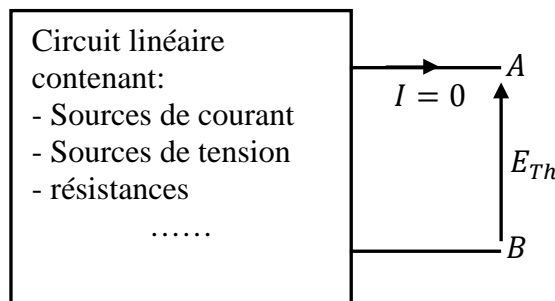
La résistance  $R_{Th}$  est égale à la résistance mesurée entre  $A$  et  $B$  quand le dipôle  $D$  est débranché et que les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes.



**Fig 10.**Réseau linéaire.

Comment calculer les caractéristiques du générateur de Thévenin :

- Calcul de la valeur de  $E_{Th}$  : c'est la **d.d.p** qui apparaît à vide entre  $A$  et  $B$ .



**Fig 11.**Réseau linéaire.

- Calcul de la résistance  $R_{Th}$ : on éteint toutes les sources et on calcule ou on mesure la résistance entre  $A$  et  $B$ .

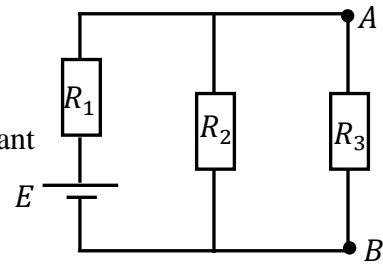
**Remarque :** Le calcul de  $E_{Th}$  et le calcul de  $R_{Th}$  peuvent être effectué dans n'importe quel ordre.

**Application :**

On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :

- On donne :  $E = 8V$  ;  $R_1 = 4\Omega$  ;  $R_2 = 12\Omega$  ;  $R_3 = 9\Omega$

- Calculer le courant  $I_3$  qui traverse la résistance  $R_3$  en appliquant le théorème de Thevenin,



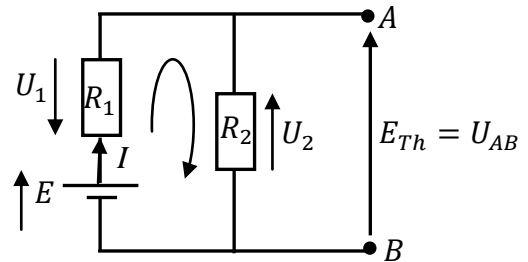
**Solution :**

1) Calcul de  $E_{Th}$

On débranche la résistance  $R_3$ , donc :

$$E_{Th} = U_{AB} = R_2 I$$

$$E - (R_1 + R_2)I = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

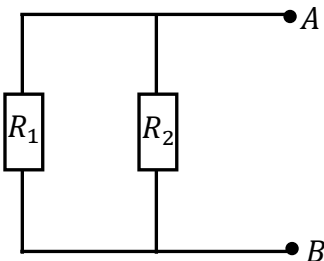


$$E_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{12}{4 + 12} \times 8 = 6V$$

2) Calcul de  $R_{Th}$

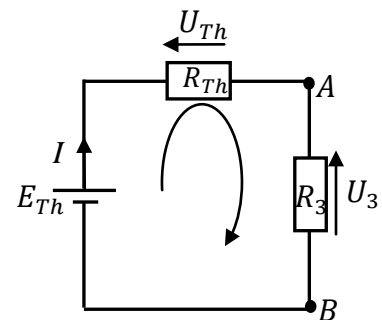
$R_3$  étant toujours débranchée,  $R_1$  et  $R_2$  sont en parallèle donc :

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3\Omega$$



3) Calcul de I

$$E_{Th} - (R_{Th} + R_3)I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_3} = \frac{6}{3 + 9} = 0,5A$$



**Exercice:**

On considère le circuit de la figure (a) et (b) ci-dessous.

1. En appliquant les lois de Kirchhoff, déterminer les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  en fonction de  $E$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .

Pour les questions suivantes, on prendra  $R_1 = R_2 = R_3 = R$

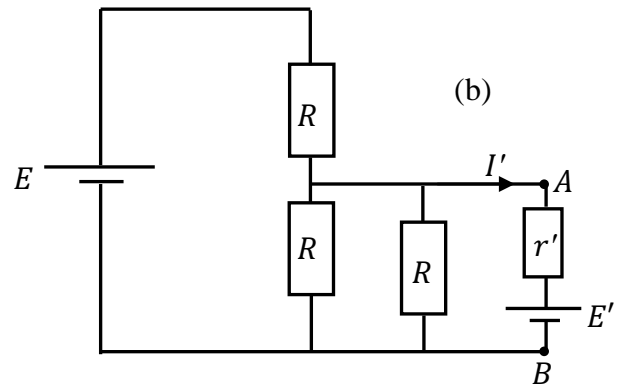
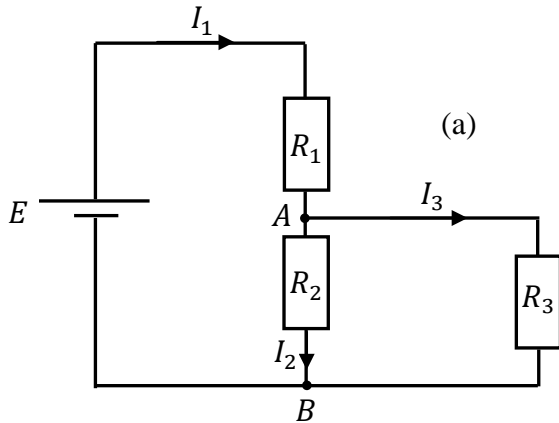
2. on branche aux bornes de la résistance  $R_3$  un dipôle ( $E'$ ,  $r'$ ) (voir figure b), par application du théorème de Thevenin, déterminer le courant  $I'$  traversant le dipôle ( $E'$ ,  $r'$ ) (on donnera l'expression littérale de  $I'$  ).

3. Calculer le courant  $I'$ . Le dipôle est-il un générateur ou un récepteur? Justifier votre réponse.

4. Calculer la puissance consommée par le dipôle ( $E', r'$ ).

On donne :

$$E = 40V, \quad E' = 10V, \quad r' = 2\Omega \text{ et } R = 24\Omega$$



Figure

**Réponse :**

1- Application des lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) au circuit de la figure (a).

- loi des nœuds :

Nœud A :  $I_1 = I_2 + I_3$

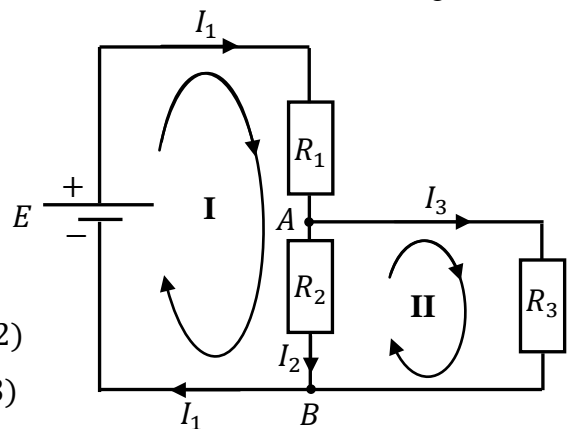
Nœud B :  $I_2 + I_3 = I_1$  (même équation)

$$\Rightarrow I_1 - I_2 + I_3 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

- loi des mailles :

➤ maille (I) :  $E - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$

➤ maille (II) :  $-R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \dots \dots \dots (3)$



Les relations(1), (2) et (3) forment le système suivant :

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 & (1) \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0 = E & (2) \\ 0 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on a deux méthodes

**Méthode de superposition :**

$$(2) \Rightarrow R_2 I_2 = E - R_1 I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} I_1 \dots \dots \dots (2')$$

$$(3) \Rightarrow R_3 I_3 = R_2 I_2 \Rightarrow I_3 = \frac{R_2}{R_3} I_2 \dots \dots \dots (3')$$

$$(3') \text{ dans } (1) \Rightarrow I_1 - I_2 - \frac{R_2}{R_3} I_2 = 0 \Rightarrow I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0 \dots \dots \dots (1')$$

$$\begin{aligned}
 (2') \text{ dans } (1') &\Rightarrow I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \left(\frac{E}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} I_1\right) = 0 \\
 &\Rightarrow I_1 - \left[\frac{E}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} I_1 + \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{E}{R_2} - \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_1}{R_2} I_1\right] = 0 \\
 &\Rightarrow I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) - \left(\frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) = \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3} \Rightarrow I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} \\
 &\Rightarrow I_1 = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} \times \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} \Rightarrow I_1 = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_2 R_1}
 \end{aligned}$$

▪ Pour  $I_2$  :

$$(2) \Rightarrow R_1 I_1 = E - R_2 I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2 \dots \dots \dots (2'')$$

$$(1') \Rightarrow I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (2'') \text{ dans } (1') &\Rightarrow \frac{E}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0 \Rightarrow -I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}\right) = -\frac{E}{R_1} \\
 &\Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_1} \times \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_3 E}{R_3 R_1} \times \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{R_3 E}{R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_3 R_2}$$

▪ Pour  $I_3$  :

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } I_1 - I_2 - I_3 = 0 &\Rightarrow I_3 = I_1 - I_2 \\
 &\Rightarrow I_3 = \frac{R_2 E}{R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_3 R_2} + \frac{R_3 E}{R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_3 R_2} - \frac{R_3 E}{R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_3 R_2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{R_2 E}{R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_3 R_2}$$

**Méthode du déterminant:**

$$\text{On a : } \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 & (1) \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0 = E & (2) \\ 0 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}}_I \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

I : la matrice associé au système

$$\text{Donc : } I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}, \quad I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} \quad \text{et} \quad I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta}$$

Avec  $\Delta = D = \det A$  le déterminant associé au système

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & -R_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta = D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} R_2 & 0 \\ -R_2 & R_3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & -R_2 \end{vmatrix} \\ &= 1[R_2R_3 - (0 \times (-R_2))] + 1[R_1R_3 - (0 \times 0)] - 1[-R_1R_2 - (-R_2 \times 0)] \\ &D = R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2 \end{aligned}$$

Pour  $I_1$  :

En remplaçant la 1<sup>er</sup> colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  par  $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} DI_1 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} R_2 & 0 \\ -R_2 & R_3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & R_3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} E & R_2 \\ 0 & -R_2 \end{vmatrix} \\ &= 0 + ER_3 - 1(E(-R_2)) = ER_3 + ER_2 = (R_2 + R_3)E \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } I_1 = \frac{DI_1}{D} = \frac{(R_2 + R_3)E}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

▪ Pour  $I_2$  :

En remplaçant la 1<sup>er</sup> colonne  $\begin{pmatrix} 1 \\ R_2 \\ -R_2 \end{pmatrix}$  par  $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} DI_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & R_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} R_1 & E \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= ER_3 - 0 - 0 \times R_1R_3 - 0 = ER_3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } I_2 = \frac{DI_2}{D} = \frac{ER_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

▪ Pour  $I_3$  :

En remplaçant la 1<sup>er</sup> colonne  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ R_3 \end{pmatrix}$  par  $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} DI_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & -R_2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} R_2 & E \\ -R_2 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} R_1 & E \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & -R_2 \end{vmatrix} = ER_2 + 0 + \\ &0 = ER_2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } I_3 = \frac{DI_3}{D} = \frac{ER_2}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

Par la suite on prendra  $R_1 = R_2 = R_3 = R$

2. Application du théorème de Thevenin

\* On enlève la branche  $AB$  contenant le dipôle  $(E', r')$  (figure(b)) avec  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ .

- Tension de Thevenin  $E_{th}$  :

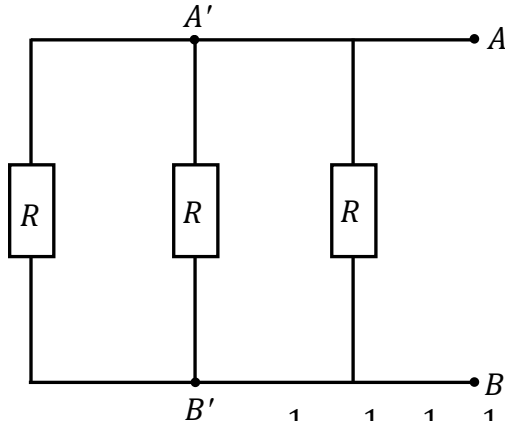
$$E_{th} = (V_A - V_B) = RI'_3$$

$$\text{avec : } I'_3 = \frac{RE}{R^2 + R^2 + R^2} = \frac{E}{3R}$$

$$\Rightarrow E_{th} = R \frac{E}{3R} \Rightarrow \boxed{E_{th} = \frac{E}{3}}$$

- Résistance de Thevenin  $R_{th}$  :

On court-circuite le générateur  $E$



$$R_{th} = R//R//R \Rightarrow \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{th} = \frac{R}{3}}$$

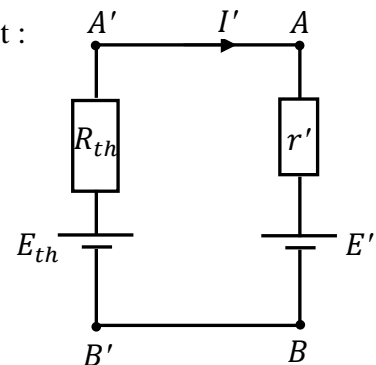
- On remet la branche  $AB$  enlevée, soit le montage suivant :

$$V_{AB} = V_{A'B'}$$

$$\begin{cases} V_{AB} = E_{th} - R_{th}I' \\ V_{A'B'} = E' + r'I' \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{th} - R_{th}I' = E' + r'I' \Rightarrow E_{th} - E' = (r' + R_{th})I'$$

$$\Rightarrow I' = \frac{E_{th} - E'}{r' + R_{th}} = \frac{\frac{E}{3} - E'}{r' + \frac{R}{3}} \Rightarrow \boxed{I' = \frac{E - 3E'}{3r' + R}}$$



3. Application numérique :

$$E = 40V, \quad E' = 10V, \quad r' = 2\Omega \text{ et } R = 24\Omega$$

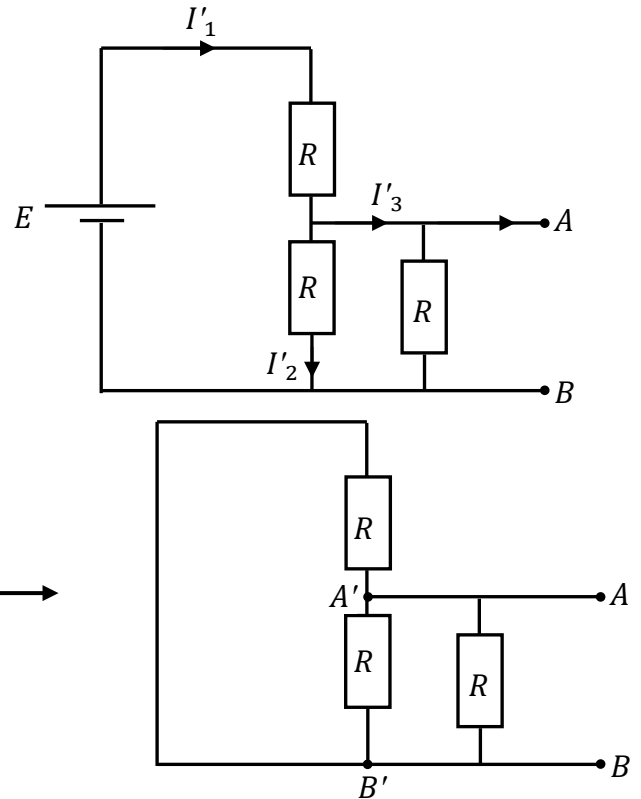
$$I' = \frac{E - 3E'}{3r' + R} = \frac{40 - 3 \times 10}{3 \times 2 + 24} = 0,33A$$

On a  $I' > 0 \Rightarrow$  le dipôle( $E', r'$ ) se comporte comme un récepteur

4. La puissance consommée par le dipôle( $E', r'$ ) :

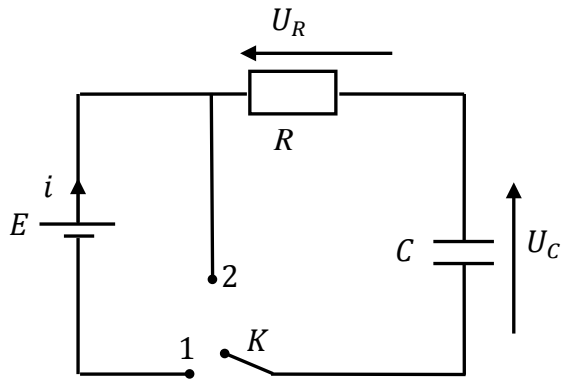
$$P = (E' + r'I')I' = E'I' + r'I'^2$$

$$\text{A.N : } P = 10 \times 0,33 + 2 \times (0,33)^2 \Rightarrow \boxed{P = 3,52 W}$$



**3.4. Charge et décharge d'un condensateur****3.4.1. Charge d'un condensateur à travers une résistance**

Soit un condensateur de capacité  $C$  initialement déchargé que l'on branche en série aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'un générateur idéal de (fem),  $E$ .



**Fig 12.** Charge d'un condensateur.

**a) Etablissement de l'équation différentielle :**

L'interrupteur  $K$  est en position 1 (le condensateur est vide de charge) :

A l'instant  $t$ , on a :

$$E = U_R(t) + U_C(t) = R \cdot i(t) + U_C(t)$$

Où :

$$\begin{cases} i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \\ q(t) = C \cdot U_C(t) \end{cases}$$

Donc :

$$i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$$

Soit :

$$RC \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = E$$

On obtient :

$$\boxed{\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} U_C(t) = \frac{E}{RC}} \quad (24)$$

C'est une équation différentielle du 1er ordre avec second membre.

Avec  $q(t) = C \cdot U_C(t)$ , on a :

$$\boxed{\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{E}{R}} \quad (25)$$

Pour résoudre cette équation en utilisant les conditions initiales :

$$\text{à } t = 0, q(0) = C \cdot U_C(0) = 0 \quad \Rightarrow \left. \frac{dU_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{RC}$$

$$\text{à } t = \infty, \left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=\infty} = C \left. \frac{dU_C(t)}{dt} \right|_{t=\infty} = 0 \quad \Rightarrow \left. \frac{dU_C(t)}{dt} \right|_{t=\infty} = 0$$

D'après l'équation différentielle, on a :  $U_C(\infty) = E$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{U_C(t) = E \left( 1 - e^{-t/RC} \right)} \quad (26)$$

En appliquant les relations :

$$q(t) = C \cdot U_C(t) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$$

On obtient :

$$\boxed{\begin{cases} q(t) = EC \left( 1 - e^{-t/RC} \right) \\ i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-t/RC} \end{cases}} \quad (27)$$

### b) Constante de temps du dipôle RC

Le produit :  $\tau = RC$  est homogène à un temps, appelé constante de temps du dipôle **RC**.

Lors de la charge :

$$U_C(t) = E \left( 1 - e^{-t/RC} \right)$$

On détermine :

$$U_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63E$$

Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe dont l'ordonnée est égale à  $0,63E$ , on obtient la valeur de  $\tau$ .

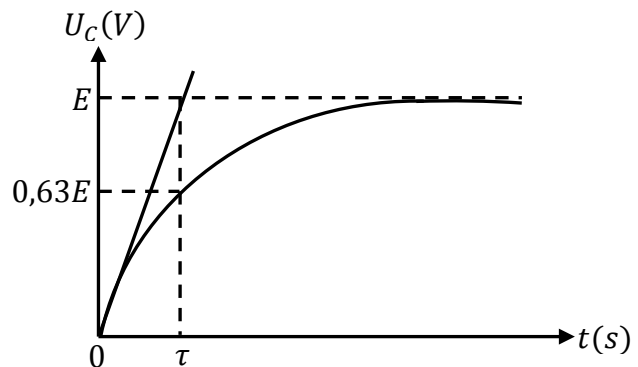


Fig 13. L'évolution de  $U_C(V)$  en fonction du temps (charge du condensateur)

### 3.4.2. Décharge du condensateur dans une résistance

#### a) Etablissement de l'équation différentielle

L'interrupteur **K** est en position **2** :

A l'instant  $t$ , on a :

$$U_R(t) + U_C(t) = R \cdot i(t) + U_C(t) = 0$$

On a :

$$\begin{cases} i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \\ q(t) = C \cdot U_C(t) \end{cases}$$

Donc :

$$i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$$

Soit :

$$RC \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = 0$$

On obtient :

$$\boxed{\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} U_C(t) = 0} \quad (28)$$

C'est une équation différentielle du 1er ordre sans second membre.

Avec  $q(t) = C \cdot U_C(t)$ , on a :

$$\boxed{\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q(t) = 0} \quad (29)$$

En utilisant les conditions initiales :

$$\text{à } t = 0, q(0) = C \cdot U_C(0) = EC \Rightarrow \left. \frac{dU_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{E}{RC}$$

$$\text{à } t = \infty, \left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=\infty} = C \left. \frac{dU_C(t)}{dt} \right|_{t=\infty} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dU_C(t)}{dt} \right|_{t=\infty} = 0$$

D'après l'équation différentielle, on a :  $U_C(\infty) = 0$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{U_C(t) = E e^{-t/RC}} \quad (30)$$

En appliquant les relations :

$$q(t) = C \cdot U_C(t), i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$$

On obtient :

$$\boxed{\begin{cases} q(t) = EC e^{-t/RC} \\ i(t) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-t/RC} \end{cases}} \quad (31)$$

**b) Constante de temps du dipôle RC**

Le produit :  $\tau = RC$  est homogène à un temps, appelé constante de temps du dipôle **RC**.

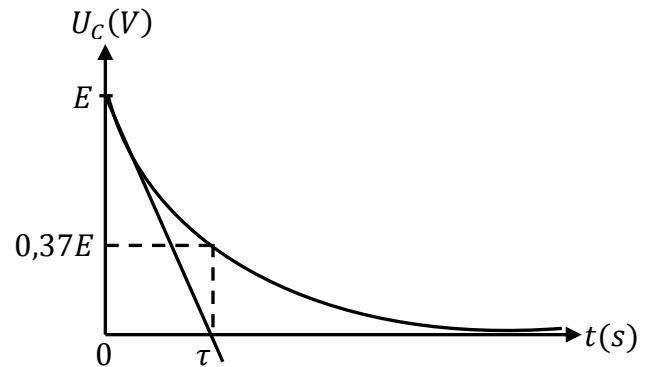
Lors de la décharge :

$$U_C(t) = E e^{-t/RC},$$

On a :

$$U_C(\tau) = E e^{-1} \approx 0,37E$$

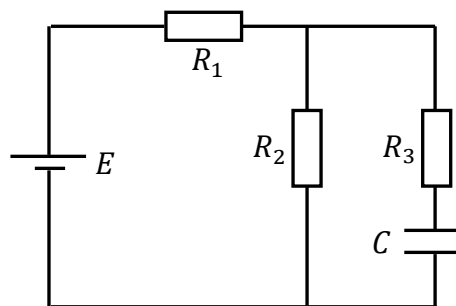
Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe dont l'ordonnée est égale à  $0,37E$ , on obtient la valeur de  $\tau$ .



**Fig 14.** L'évolution de  $U_C(V)$  en fonction du temps (décharge du condensateur)

**Application :**

On considère le montage ci-dessous où le condensateur C est initialement déchargé.



1) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge de ce condensateur au cours du temps. Montrer que l'on peut la mettre sous la forme :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau}q = A$$

Donner les expressions de  $A$  et  $\tau$  et les calculer.

2) Trouver l'expression de la charge en fonction du temps.

3) Le condensateur étant entièrement chargé en déduire le courant circulant dans chaque branche.

4) Calculer, dans ce cas la charge finale du condensateur.

5) En déduire l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

**Données :**  $E = 8 V$ ;  $C = 1\mu F$ ;  $R_1 = 4\Omega$ ;  $R_2 = 12\Omega$ ;  $R_3 = 9k\Omega$ ;  $E_{Th} = 6V$

**Solution :**

Nous avons précédemment étudié cet exemple (page51),  
et en utilisant la théorème de Thévenin,  
nous l'avons trouvé :

$$E_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \quad \text{et} \quad R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

1- Equation différentielle :

- loi des mailles :

$$E_{Th} - U_{R_{Th}} - U_{R_3} - U_C = 0 \Rightarrow$$

$$(R_{Th} + R_3)i + \frac{q}{C} = E_{Th} \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{(R_{Th} + R_3)C} q = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_3}$$

Donc :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C} q = \frac{R_2 E_{Th}}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau} q = A$$

Donc :

$$\begin{cases} A = \frac{R_2 E_{Th}}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} \\ \tau = \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C}{(R_1 + R_2)} \end{cases}$$

A.N :  $A = 0,375 \text{ A}$  et  $\tau = 12 \mu\text{S}$

- Solution particulière :

$$\frac{dq}{dt} = 0 \text{ et } q_1 = \frac{R_2 E_{Th} C}{(R_1 + R_2)}$$

- Solution sans second membre :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau} q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow q_2(t) = k e^{-t/\tau}$$

La solution est donc :

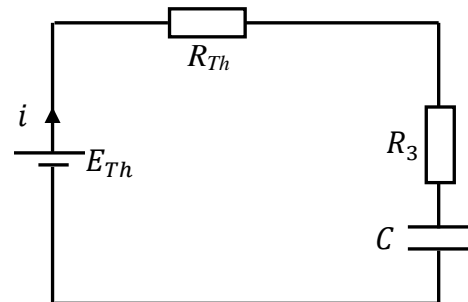
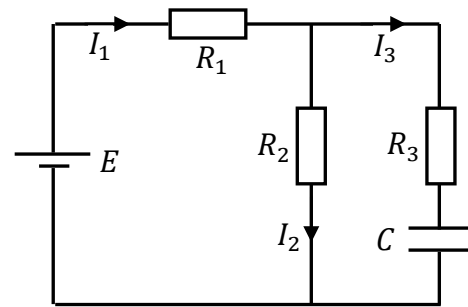
$$q(t) = \frac{R_2 E_{Th} C}{(R_1 + R_2)} + k e^{-t/\tau}$$

En posant à  $t = 0$ ;  $q(0) = 0$  on a :

$$k = -\frac{R_2 E_{Th} C}{(R_1 + R_2)} \text{ et } \boxed{q(t) = \frac{R_2 E_{Th} C}{(R_1 + R_2)} (1 - e^{-t/\tau})}$$

3- C chargé :

$$\begin{cases} I_3 = 0 \\ I_1 = I_2 = \frac{E_{Th}}{R_1 + R_2} = 0.375 \text{ A} \end{cases}$$



4- Charge de C :

$$R_2 I_2 = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = R_2 I_2 C = \frac{R_2 E_{Th} C}{R_1 + R_2} = 4.5 \mu C$$

5- Energie du condensateur :

$$E_{cond} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 10.125 \mu J$$

**Exercice :**

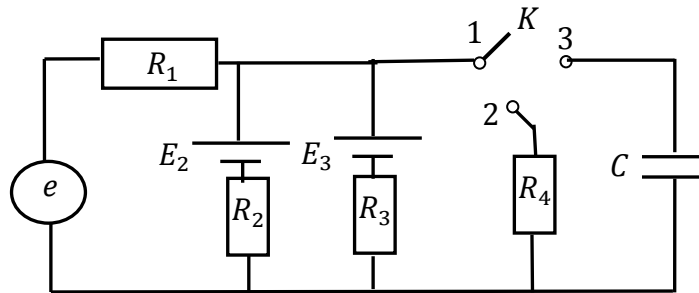
Soit le circuit représenté sur la fige ci-contre.

1-On met l'interrupteur K en position 1(ouvert), calculer les courant  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , en utilisant les lois de Kirchhoff (la méthode du déterminant).

2- On met l'interrupteur K en position 2, calculer le courant  $I_4$  qui circule dans la résistance, en utilisant le théorème de Thévenin.

3-On met l'interrupteur K en position 3, écrire l'équation différentielle qui donne la charge  $q(t)$ . Donner sa solution, en déduire le temps de relaxation  $\tau$  la charge totale  $Q_0$ .

On donne :  $e = 8V$ ,  $E_2 = 5V$ ,  $E_3 = 50V$ ,  $R_1 = 6\Omega$ ,  $R_2 = 15\Omega$ ,  $R_3 = 10\Omega$ ,  $R_4 = 10\Omega$ ,  $C = 50\mu C$



**Solution :**

1- L'interrupteur K en position 1(ouvert), en utilisant les lois de Kirchhoff (la méthode du déterminant) pour calculer  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

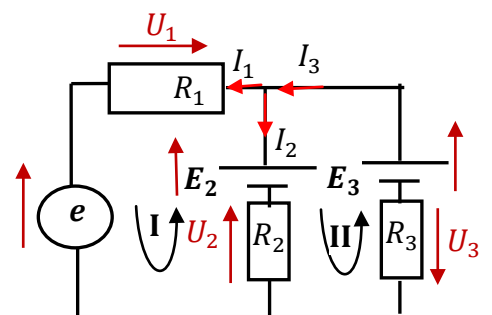
- loi des nœuds :  $\sum I_e = \sum I_s \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 \dots \dots \dots (1)$

loi des mailles :  $\sum U=0 \Rightarrow$

- maille (I) :  $-e + E_2 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$

- maille (II) :  $E_3 - E_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \dots \dots \dots (3)$

Les relations(1), (2) et (3) forment le système suivant :



$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 & (1) \\ -6I_1 + 15I_2 + 0I_3 = 3 & (2) \\ 0I_1 + 15I_2 + 10I_3 = 45 & (3) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix} = 300, \text{ alors}$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 15 & 0 \\ 45 & 15 & 10 \end{vmatrix} = 600, \quad \Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 45 & 10 \end{vmatrix} = 300 \quad \text{et}$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & 15 & 3 \\ 0 & 15 & 45 \end{vmatrix} = 900$$

Donc :  $I_1 = \frac{\Delta I_1}{D} = 2A$ ,  $I_2 = \frac{\Delta I_2}{D} = 1A$  et  $I_3 = \frac{\Delta I_3}{D} = 3A$

2- On met l'interrupteur K en position 2, en utilisant le théorème de Thévenin pour calculer  $I_4$ .

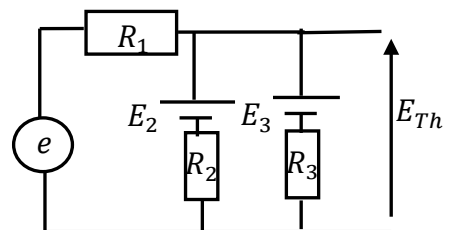
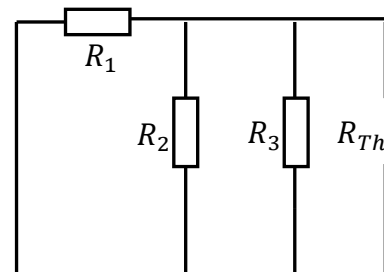
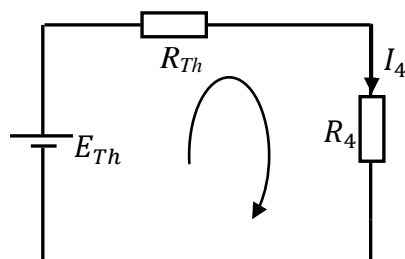
- On débranche la résistance  $R_4$  pour calculer  $R_{Th}$  et  $E_{Th}$  donc :

$$R_{Th} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 3\Omega$$

$$E_{Th} = E_3 - R_3 I_3 = E_2 + R_2 I_2 = e + R_1 I_1 = 20V$$

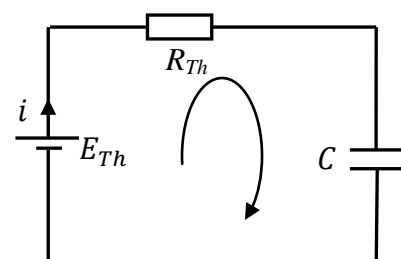
$$E_{Th} - (R_{Th} + R_4) I_4 = 0$$

$$I_4 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_4} = 2A$$



3-On met l'interrupteur K en position 3, donc :

A l'instant  $t$ , on a :



$$E_{Th} = U_{Th} + U_C = R_{Th}i + U_C \Rightarrow R_{Th}i + \frac{q}{C} = E_{Th} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C}q = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$$

C'est une équation différentielle du 1er ordre avec second membre, sa solution donne

$$\text{par : } q(t) = E_{Th}C \left(1 - e^{-t/R_{Th}C}\right) = E_{Th}C \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\text{Avec : } \tau = R_{Th}C = 15\text{S} \quad \text{et} \quad Q_0 = E_{Th}C = 1000\text{C}$$

$\tau$  : Temps de relaxation

$Q_0$  : la charge totale

### Bibliographie

- [1] A.ZITOUNI, «Polycopié de Cours et Exercices corrigés PHYSIQUE 2 » 1ère année Socle Commun Domaine Science et Technologie, 2017.
- [2] M.ABDELADIM, «Polycopié de Cours PHYSIQUE 2 » 1ère année Socle Commun Domaine Science et Technologie, 2016.
- [3] A. FIZAZI, « Electricité et Magnétisme », OPU, 2012.
- [4] R. TADILI Filière, « Electricité » Module Physique II, SMI, 2008.
- [5] E.HECHT, Deboek, Bruxelles, 2007.
- [6] E. AMZALLAG, J. CIPRIANI, J. BEN NAIM et N. PICCIOLI « La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique » 2ième Edition, Edi-Science, 2006.
- [7] J.M.BERBEC et autres, « Exercices et Problèmes », Hachette supérieur, Paris 2004.
- [8] J.FERREIRA « Cours d'Electrostatique-Electrocinétique », Université Joseph Fourier, 2002.