République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

THÈSE

Présentée pour l'obtention d'un

DOCTORAT EN SCIENCE

Option : Analyse des systèmes et contrôle

par :

HAMADI Yassamina

Analyse et contrôle de quelques problèmes non linéaires singuliers en épidémiologie

Soutenu publiquement le 18 / 07 / 2019 devant le Jury composé de :

Président :	**M. DAHMANI Zoubir**	**Prof.**	**U. Mostaganem**
Examinateurs :	**M. BENAHMED Boubakeur**	**Prof.**	**ENP Oran Maurice Audin**
	M. BENHADID Samir	**MCA**	**U. Constantine**
	M. OULD ALI Mohand	**MCA**	**U. Mostaganem**
Directeur de thèse :	**M. BOUAGADA Djillali**	**Prof.**	**U. Mostaganem**
Co-directeur	**M. OMRANE Abdennebi**	**Prof.**	**U. Guyane - France**

Année Universitaire : 2018 - 2019

Table des matières

Dédicaces

A ma mère et mon père, merci pour tout.

A mes soeurs Fatima, Samia.

Spéciale dédicace à mon mari, merci pour vos encouragements.

Remerciements

En premier lieu, je voudrais exprimer ma reconnaissance la plus sincère à mes Professeurs Djillali BOUAGADA et Abdennebi OMRANE, pour avoir encadré ma thèse et pour m'avoir accompagnée avec autant de rigueur et de disponibilité tout au long de ces années de recherche doctorale. Travailler à leurs côtés a été un réel plaisir et m'a beaucoup apporté tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.
Je tiens à remercier le Professeur Bouagada pour m'avoir accueillie dans son équipe ACSY (Analyse et Contrôle des Systèmes) du laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l'université de Mostaganem. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente pour répondre à mes nombreuses questions, et pour les nombreux encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer. Je remercie aussi mon co-encadreur le Professeur Omrane pour avoir surtout initié mes premières recherches dans le domaine des modèles épidémiologiques et leur analyse et contrôle, de m'avoir accueillie dans son équipe de recherche durant les stages de formation de courtes durées à l'université de Guyane. Merci de m'avoir soutenue, conseillée, encouragée et de m'avoir poussée vers l'avant.

Mes sincères remerciements vont également au Professeur Benahmed Boubakeur de l'ENPO d'Oran, au Professeur Ould ALI Mohand de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, et au Professeur Benhadid Samir de l'université des frères Mentouri de Constantine, d'avoir accepté d'être parmi le jury et de rapporter sur ma thèse. Je les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je tiens également à remercier le Professeur Dahmani Zoubir de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem pour m'avoir fait l'honneur de participer et de présider ce jury.

Je tiens à remercier ici, tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidée à me construire, en me donnant des coups de main. Au Docteur Zineb KAISSERLI de l'équipe ACSY-LMPA, pour ton dépannage chaque fois que je me trouvais face à un problème avec Latex, pour ton soutien, merci.

A tous les membres de l'équipe ACSY-LMPA de l'université de Mostaganem et à tous mes collègues du département de Mathématique et informatique de l'Ecole Polytechnique d' Oran.

Résumé

La contrôlabilité du modèle épidémiologique classique SIR de Kermack et McKendrick [15] avec diffusion spatiale, est étudiée en application à la méthode sentinelle de Lions [17], où nous considérons l'observation et le contrôle ayant leur support dans deux ouverts différents.

La perturbation affecte la population malade I alors que l'état initial des individus susceptibles S n'est pas complètement connu. Ceci, motive l'utilisation de la méthode des sentinelles de Lions. Nous montrons que nous avons une contrôlabilité à zéro, ce qui prouve l'existence d'une sentinelle pour le modèle SIR.

En considérant ce modèle sans diffusion spatiale, on montre que la dynamique change et qu'un équilibre de coexistence a lieu, qui est globalement asymptotiquement stable sous certaines conditions.

L'étude de la stabilité des états d'équilibres est essentiellement faite par la construction des fonctions de Lyapunov combinées avec le principe d'invariance de LaSalle.

Mots clés. Modèle SIR, diffusion spatiale, contrôlabilité à zéro, sentinelles, stabilité

Abstract

The controllability of the classical epidemiological SIR model of Kermack and McKendrick [15] with spatial diffusion is studied in application to the sentinel method of Lions [17], where we consider the observation and the control having their support in two different open sets.

The perturbation does affect the ill population I while the initial condition of the susceptible individuals S is incomplete. This considerations motivate our work. We show that we have null-controllability, which proves the existence of a sentinel for the SIR model.

Considering this model without spatial diffusion, we show that the dynamics changes and that a coexistence equilibrium exists, and that the equilibrium is globally asymptotically stable under some conditions.

The study of equilibrium state stability is essentially made by the construction of Lyapunov functions combined with the LaSalle invariance principle.

Key words. SIR model, Spatial diffusion, Null-controllability, Sentinels, Stability.

Publication et conférences

Publication dans une Revue Internationale

– Hamadi Y., Bouagada D. et Omrane A., *Sentinels for an epidemiological SIR model with spatial diffusion*, Mathematica Journal (2018).

Communications dans Conférences Nationales et Internationales

– Hamadi Y., Omrane A., Bouagada D., *Null-Controllability for an SIR problem in Epidemiology. Application to the Sentinel method of Lions*, Bulletin d'information de l'académie HassenII des Sciences et Technologies ISSN :2028-411X. MADEV Conference, Rabat, Maroc, 16-19 Octobre 2017.

Notation

Ω : Un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

$\partial\Omega =: \Gamma$ Frontière de Ω de classe $\mathcal{C}^2$, $\quad \Sigma = \Gamma \times (0,T)$

$Q = \Omega \times (0,T)\,, \quad \overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,T]$: L'adhérence de Q

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\top}$: Gradient de u

$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplacien de u

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i = \nabla u.\overrightarrow{\nu}$: Dérivée normale extérieure

$\mathcal{D}(Q)$: Espace des fonctions infiniment dérivables à support compact dans Q

$\mathcal{C}^1\,(I;E))$: Espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ définies sur intervalle I à valeurs dans E.

$L^2\,(0,T;E) = \{\varphi \quad / \; \varphi\,(t) \in L^2\,(E)\}\,.$

$L^2\left(\dfrac{1}{\theta}, X\right) = \left\{ \varphi \in L^2\,(X) \middle/ \displaystyle\int_X \frac{1}{\theta^2}\,|\varphi|^2 < +\infty \right\}.$

$H^m\,(\Omega) = \{v \in L^2\,(\Omega) \,/\; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \quad D^{\alpha} v \in L^2\,(\Omega)\}\,, m \in \mathbb{N}$

$H_0^m\,(\Omega) = \left\{ v \in H^m\,(\Omega) \middle/ \dfrac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad 0 \leq k \leq m-1 \right\}$. $H^{-m}(\Omega)$: Dual de $H_0^m(\Omega)$

$H^1\,(0,T;E)$: Espace des fonctions H^1 définies sur $[0,T]$ à valeurs dans E.

$H^{2,1}(Q) = L^2\,(0,T;H^2\,(\Omega)) \cap H^1\,(0,T;L^2\,(\Omega))$

Introduction et motivation

Les modèles mathématiques sont considérés comme des outils complémentaires, pour comprendre le fonctionnement des modèles concrets et pour prévoir leurs évolutions. Parmi les premiers modèles SIR (depuis le début du 19 ^{ème} siècle), on distingue le modèle de Kermack et Mckendrick [15]. Dans ce cas, les auteurs observent en particulier que l'une des caractéristiques de l'étude des épidémies est la diversité de l'ampleur de l'épidémie en raison de nombreux facteurs (comportant des donnée incomplètes). Un modèle épidémique SIR est composé sur trois compartiments (ou populations) S, compartiment des individus sensibles (individus en bonne santé, pouvant être atteints de maladie), I compartiment des infectés et R compartiment des individus ayant récupéré. Plusieurs études ont été menées autour du modèle SIR (voir par exemple Brauer et al. [7], Capasso [8] ou le livre classique de Murray [22] et les références qui y figurent).

Nous utilisons ici le modèle de [15], nous proposons un modèle du type SIR dans lequel nous incluons des termes de mortalité et une diffusion spatiale, en effet nous supposons la situation la plus réaliste de propagation géographique des épidémies, nous ajoutons donc la diffusion spatiale en tant que processus diffusif, où les trois compartiments ont le même coefficient de diffusion, seuls quelques articles traitant cette situation (voir à titre d' exemple Abramson [1]). De plus, nous allons considérer le cas des perturbations et des données incomplètes, en effet, certains paramètres du modèle SIR ne sont pas directement observables. La prévision des données inconnues avec la confrontation des paramètres réels est parfois nécessaire, et notre objectif est de montrer qu'en utilisant la méthode de sentinelle de Lions [16] (voir aussi [17]), une réponse mathématique peut néanmoins être donnée.

La méthode de sentinelle de Lions est un cas particulier de la méthode des moindres carrés, que nous trouvons bien adaptée à l'identification de paramètres dans les écosystèmes contenant des données incomplètes. Le concept de "sentinelle" repose sur les trois objets suivants : une équation d'état, une fonction d'observation et une fonction de contrôle à déterminer. Nous verrons que trouver une sentinelle dans le modèle SIR, revient à étudier la contrôlabilité à zéro du problème. Pour les articles traitant de la contrôlabilité des problèmes SIR ou $SEIR$, on peut voir, par exemple, les travaux récents de Löber [19] et les références qu'ils contiennent.

De nombreux auteurs ont utilisé la méthode des sentinelles de Lions dans différents problèmes écologiques comme la pollution de l'eau. Voir par exemple Ainseba et al. [2], Bodart et Demeestere [6]. Dans ces travaux, la fonction de contrôle et de l'observation ont leurs supports dans le même ensemble ouvert appelé : observatoire. Dans ce cas, il existe toujours une sentinelle (comme on le verra). Dans Miloudi et al. [21] (voir aussi Omrane [25]), les fonctions d'observation et de contrôle peuvent avoir leurs supports dans deux ensembles différents, ce qui rend le problème de la recherche d'une sentinelle non trivial. La méthode de Miloudi et al. [21] permet également de trouver une sentinelle instantanée (voir aussi les références qui y figurent).

Dans la présente thèse, nous montrons comment appliquer cette méthode des sentinelles au problème épidémiologique SIR à données manquantes. La stabilité globale des équilibres d'un modèle SIR avec une population totale constante, en utilisant les fonctions de Lyapunov est étudiée dans [4]. Cependant, dans ce modèle, les taux de mortalité dans S et I sont égaux et celui dans R est ajusté relativement au taux de mortalité de S et au taux de natalité. Cet ajustement est posé pour obtenir une population totale constante.

Si on note par R_0 le nombre de reproduction de base, celui-ci est défini comme le nombre de nouveaux cas d'infection causé par un individu infecté dans une population susceptible (voir [27], [29]). Nous démontrons alors dans ce travail la stabilité globale de l'équilibre sans maladie (DFE) si $R_0 < 1$ et nous prouvons qu'il existe un unique équilibre endémique (EE) si $R_0 < 1$, qui est de plus globalement asymptotiquement stable sur le domaine privé de la variété stable du DFE. L'analyse de la stabilté des modèles SIR classique est connue depuis

1976 [4]. La raison en est que l'étude de la stabilité de ces modèles se réduit aux systèmes plans, et donc les méthodes de plan de phases peuvent être utilisées : le théorème de Poincaré-Bendixon.

Les orbites périodiques peuvent être exhibées en utilisant le critère de Dulac ou le critère de Busenberg et van den Driessche [27]. Dans la littérature récente, la méthode de Lyapunov a été utilisée avec succès pour prouver la stabilté globale de l'équilibre endémique. La méthode consiste à trouver une fonction, souvent notée V, définie positive telle que sa dérivée le long des trajectoires est définie négative. Si la dérivée V est seulement négative, le principe d'invariance de LaSalle étend la méthode de Lyapunov dans certains cas. En 2002, Korobeinikov et Wake ont utilisé ce type de fonction, pour prouver la stabilité des modèles SIR, SIRS et SIS dans [4] et en 2004, pour les modèles SEIR et SEIS [3] et donnent une preuve simple des résultats de Li et Muldowney [23].

L'objectif de notre travail est d'une part, l'étude de l'existence des sentinelles (contrôlabilité à zéro) pour le modèle épidémiologique classique SIR, et d'autre part, l'étude de la stabilité des équilibres.

Ce travail est organisé de la façon suivant : Dans le premier chapitre, nous exposons les notions de base et théorèmes nécessaires. Dans le chapitre 2 nous donnons quelques résultats fondamentaux de contrôlabilité qui soit la base de la théorie des sentinelles, le troisième chapitre donne une présentation et une description de quelques modèles épidémiologiques. Dans le chapitre 4 on introduit la problématique de modèles SIR et la mise sous forme de problème de contrôlabilité à zéro, tout en étudiant l'existence et la construction de la sentinelle. Dans le chapitre 5 nous considérons le modèle SIR avec même mortalité dans le premier cas et dans le deuxième cas avec mortalité différente. La stabilité globale des équilibres est alors établie en utilisant la méthode de Lypunov. Enfin le chapitre 6 illustre un exemple d'application.

Chapitre 1

Préliminaires

Les systèmes différentielles étudiés dans cette thèse sont non linéaires, donc dans ce chapitre nous exposons les outils mathématiques, dont nous aurons besoin par la suite. les concepts que nous rappelons ici sont classiques et pour la plupart de nature élémentaire pour un mathématicien. Nous allons présenter les notions de systèmes à données incomplètes, systèmes dynamiques, système adjoint, systèmes autonomes, système singulier, et stabilité des solutions d'un système dynamique, aussi la méthode de van den Driessche et Watmough pour le calcul du nombre de reproduction de base R_0.

1.1 Système à données incomplètes

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t N - \delta \Delta N & = & \lambda \widehat{I} & \text{dans } Q, \\ N(0) & = & N^0 + \tau \widehat{S^0} & \text{dans } \Omega, \\ N & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Pour que l'état N du système (1.1.1) puisse être définie, il faut connaître :

- l'ouvert Ω,

- les termes sources qui apparaissent au second membre de la première équation du système (1.1.1),

- les conditions initiales,

- et les conditions aux limites.

Définition 1.1.1 *le système (1.1.1) est dit à données incomplètes si l'une au moins des informations çi-dessous :*

- n'est pas connue.

- n'est pas partiellement connue.

Ici dans le système (1.1.1), N est une fonction qui dépend des données du second membre, elles-mêmes non connues. Plus précisément :

1- le terme source $\lambda\widehat{I}$ n'est pas connu dans $L^2(Q)$, $\left\|\widehat{I}\right\|_{L^2(Q)} \leq 1$, λassez petit.

2- la condition aux limites de Dirichlet $N = 0$ sur Σ est connue.

3- la condition initiale $N(.,0) = N(0)$ n'est pas connu. N^0 connu dans $L^2(Q)$, $\tau\widehat{S^0}$ inconnu dans $L^2(\Omega)$.

$\left\|\widehat{S^0}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, *τ assez petit.*

Théorème 1.1.1 *Sous les hypothèses (1), (2) le système (1.1.1) admet une solution unique $N \in C([0,T], L^2(\Omega))$ qu'on notera $N := N(\lambda,\tau)$. De plus l'application*

$$(\lambda,\tau) \to N(\lambda,\tau)$$

$$N \in \mathcal{C}^0\left([0,T[; L^2(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^0\left(]0,T[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$$

Preuve. (voir Lions-Magenes [18], Vol. 1, Chapitre 3 pour plus de détails).

□

Système adjoint

Définition 1.1.2 *On appelle système adjoint du (1.1.1) ou bien problème de la chaleur rétrograde le système :*

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial t} - \delta\Delta q & = \widetilde{h} \quad \text{dans } Q \\ q(T) & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ q & = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{1.1.2}$$

avec $\widetilde{h} \in L^2(Q)$, choisi selon le problème posé.

Théorème 1.1.2 *Le système adjoint (1.1.2) admet une unique solution $q := q(x,t)$ telle que $q \in H^{2,1}(Q)$. De plus, il existe une constante C telle que :*

$$\|q\|_{H^{2,1}(Q)} \leq C\left\|\widetilde{h}\right\|_{L^2(Q)}$$

Preuve. Voir également Lions-Magenes [18]. □

Définition 1.1.3 (Système dynamique à temps continu) *On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω, une famille d'applications $\{\Phi_t,\ t \in R^+\}$ paramétrée soit par l'ensemble R^+ des réels positifs ou nuls, soit par l'ensemble R de tous les réels.*

Définition 1.1.4 (Systèmes autonomes) *Soit Ω un sous ensemble de R^n, on appelle système autonome, l'équation différentielle définie par :*

$$\dot{x} \ = \ f(x) \tag{1.1.3}$$

On suppose que $f : \Omega \subset R^n \rightarrow R^n$ est continue et satisfait des conditions telles qu'une solution de système (1.1.1) existe en tout point, est unique et dépend du manière continue des conditions initiales.

Définition 1.1.5 ***(Ensemble invariant)***
Un sous ensemble K de Ω est dit positivement invariante à (1.1.1) si $x(t, K) \subset K$, pour tout $t \geq 0$, K est dit invariant si $x(t, K) = K$ pour tout t.

On considère le système non autonome

$$\dot{x} \ = f(x, t), t \in \mathbb{R}^n \tag{1.1.4}$$

Où la fonction f peut dépendre de la variable t.

Définition 1.1.6 *Un point $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point d'équilibre (également point critique, solution stable,...) de système* (1.1.3) *si $f(\overline{x}) = 0$. Un point d'équilibre $\overline{x}$ est appelé point d'équilibre hyperbolique de* (1.1.3) *si aucune des valeurs propres de la matrice $Df(\overline{x})$ n'a pas une partie réelle nulle.*

On considère le système linéaire

$$\dot{x} \ = \ Ax \tag{1.1.5}$$

avec $A = Df(\overline{x})$ alors Ax est appelé le linéarisé de (1.1.3) au point $\overline{x}$.

Théorème 1.1.3 *Supposons que toutes les valeurs propres de $Df(\overline{x})$ ont des parties réelles négatives alors le point d'équilibre $\overline{x}$ du système* (1.1.3) *est localement asymtotiquement stable, et instable si au moins une des valeurs propres a une partie réelle positive.*

Définition 1.1.7 ***(Système singuliers)***

Les systèmes singuliers sont des problèmes à données manquants ou des problèmes mal posés.

Théorème 1.1.4 (Lions-Magenes) *Soit V un espace de Banach, $\mathcal{A}$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et L une forme linéaire continue sur V. Alors, il existe un unique élément $\overline{u}$ de V solution du problème variationnel suivant :*

$$\mathcal{A}(\overline{u}, v) = L(v) \qquad \forall v \in V.$$

Méthode de calcul R_0

Cette technique a été élaborée d'abord par Diekmann [26] et puis reprise par Van den Driessche et Watmough [29] pour les systèmes de dimention finie.

On considère un modèle épidémiologique comportant n compartiments

$$\dot{x_i} = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) + \mathcal{V}_i^+(x) - \mathcal{V}_i^-(x) \tag{1.1.6}$$

x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ est le nombre d'individus dans les compartiments qui sont ordonnés de tel sorte que les m premiers compartiments sont correspondant à des états infectés (latents, infectieux,...) et les derniers sont correspondant à des individus libres d 'infection (susceptibles,...).

Définition 1.1.8 *Soit $\Omega = \{x \geq 0$ telle que $x_i = 0,\ i \in \{1, \ldots, m\}\}$ l'ensemble de tous les états sans maladie.*

Remarque 1.1.1 *Les fonctions $\mathcal{F}_i(x)$ disignent le taux d'apparition des nouveaux infectés dans le compartiment i.*

Les fonctions $\mathcal{V}_i^+(x)$ disignent le taux de transfert (entrant) des individus dans le compartiment i par tout autre cause.

Les fonctions $\mathcal{V}_i^-(x)$ disignent le taux de transfert (sortant) des individus hors compartiment i. Pour des raison biologiques les fonctions $\mathcal{F}_i(x)$, $\mathcal{V}_i^+(x)$, $\mathcal{V}_i^-(x)$ sont supposées vérifiant les hypothèses (A_1).....(A_5) suivantes :

(A_1) : Si $x \geq 0$, alors $\mathcal{F}_i(x)$, $\mathcal{V}_i^+(x)$, $\mathcal{V}_i^-(x) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, ...n\}$

(A_2) : Si $x_i = 0$, alors $\mathcal{V}_i^-(x) = 0$ en particulier si $x \in \Omega$ alors $\mathcal{V}_i^-(x) = 0$ pour tout $i \in \{1, ...m\}$

(A_3) : Si $i > m$, alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$

(A_4) : Si $x \in \Omega$, alors $\mathcal{F}_i(x) = \mathcal{V}_i^+(x) = 0$ pour $i \in \{1, ...m\}$.

(A_5) : Si $\mathcal{F}_i(x) = 0$, le système admet un point d'équilibre $\overline{x}$ localement asymptotiquement stable c'est à dire $D(\mathcal{V}_i^+ - \mathcal{V}_i^-)(\overline{x})$ possède des valeurs propres à parties réelles strictement négatives.

Les fonctions $\mathcal{F}_i(x)$, $\mathcal{V}_i^+(x)$, $\mathcal{V}_i^-(x)$ sont supposées être au moins deux fois différentiable.

On introduit le Lemme et le théorème suivantes pour utilité et pour ce faire, on se base de la référence suivante [29].

Définition 1.1.9 *Un état du système x_0 est sans maladie, si les compartiments des infectés sont vides. C'est l'équilibre de mortalité : Disease Free Equilibrium (DFE).*

Lemme 1.1.1 *Si $\overline{x}$ est un DFE c'est à dire point d'équilibre sans maladie du système* (1.1.4) *et les fonctions $f_i(x)$ vérifient (A_1).....(A_5) alors les matrices*

$$D\mathcal{F}(\overline{x}) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad et \quad D\mathcal{V}(\overline{x}) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ J_1 & J_2 \end{bmatrix}$$

se décomposent en blocs

Où $F \geq 0$ est une matrice définie positive et V c'est une matrice inversible.

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_j(\overline{x})}{\partial x_i}\right], \quad V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_j(\overline{x})}{\partial x_i}\right] \quad avec\ i, j = 1, ...n$$

Définition 1.1.10 *[26] Le nombre de reproduction de base R_0 est le rayon spectral c'est à dire le plus grand module des valeurs propres de la matrice de prochaine génération, est définie par :*

$$R_0 = \rho(-FV^{-1}).$$

Théorème 1.1.5 *Soit le modèle de transmission de la maladie* (1.1.4) *avec $f_i(x)$ satisfaisant $(A_1)\ldots(A_5)$ si $\overline{x}$ est un DFE du modèle* (1.1.4) *alors $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$ et instable si $R_0 > 1$.*

La méthode de Lyapunov :

La méthode de Lyapunov a été utilisée pour prouver la stabilité globale de point d'équilibre DFE et le point endémique. La méthode consiste à trouver une fonction V, cette fonction est très difficile à trouver en général, et elle est de la forme

$$V = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - \overline{x_i}\log x_i).$$

Théorème 1.1.6 *Si la fonction V est définie positive et $\dot{V}$ semi définie négative sur D_V alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est stable pour le système* (1.1.4)*.Si la fonction V est définie positive et $\dot{V}$ définie négative sur D_V alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est asymptotiquement stable pour le système* (1.1.4)*.*

Théorème 1.1.7 (Le principe d'invariance de la Salle) *Soit Ω un sous ensemble de R^n, supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système* $(1.1;4)$ *en $\overline{x}$ Soit V : $\Omega \to R$ une fonction de classe C^1 en $\overline{x}$ telle que $\dot{V} \leq 0$ sur Ω. Soit $E = \Big\{x \in \Omega$ telle que $\dot{V}(x) = 0\Big\}$ et L le plus grand ensemble invariant par Ω et contenu dans E alors toute solution bornnée commençant dans Ω tend vers l'ensemble L lorsque le temps tend vers l'infini.*

Corollaire 1.1.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent si l'ensemble L est réduit au point $\overline{x} \in \Omega$ alors $\overline{x}$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système* (1.1.4) *.*

Chapitre 2

Contrôlabilité : Résultats fondamentaux

La contrôlabilité est une notion très importante dans l'étude et l'analyse des systèmes dynamiques. Ce paragraphe contient quelques rappels théoriques et méthodes qui sont nécessaires pour la compréhention de ce qui suit. Pour ce faire nous nous basons sur les références suivantes bien connues de Immanuvilov et Fursikov [10], [12].

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joingnant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable c'est le problème de contrôlabilité. Ensuite une fois ce problème résolu, il faut chercher parmi toutes ces trajectoires possibles celles obtenues à coût minimal.

2.1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Etant donné un point $x_1 \in R^n$, existe t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne x_0 à x_1 en un temps fini T ? C'est c'est le problème de contrôlabilité.

Caractérisation hamiltonienne :

Considérons le système de contrôle optimal général

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{2.1.1}$$

où f est une application de classe $C^1\left(R^{1+n+m}\right)$

Définition 2.1.1 *Le Hamiltonien du système est la fonction :*

$$\begin{aligned} H \quad &: \quad R \times R^n \times R^n - \{0\} \times R^m \rightarrow R \\ (t, x, p, u) \quad &\rightarrow \quad H(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x(t), u(t)) \rangle \end{aligned}$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire usuel de R^n.

Proposition 2.1.1 (Etat adjoint) *Soit u un contrôle singulier sur $[0,T]$ pour le système de contrôle, et soit $x(.)$ la trajectoire singulière associée. Alors il existe une application absolument continue*

$$p \ : \ [0,T] \rightarrow R^n - \{0\}$$

appelée vecteur (ou état) adjoint, telle que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), u(t)), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), u(t)) = 0 \tag{2.1.2}$$

où H est le Hamiltonien du système. L'équation est appelée équation de contraintes.

Remarque 2.1.1 *pour les définitions :contrôle singulier, trajectoire singulière voir [10].*

2.2 Théorie des sentinelles

Une sentinelle est une forme linéaire agissant sur les observations qui doit vérifier des conditions de sensibilité à certains paramètres du système, et l'insensibilité à d'autres paramètres.

Donc l'idée des sentinelles semble un peu différente de ce qui est vu à la section précédente. La méthode des sentinelles nous permettra de reconstituer un paramètre ou une approximation de ce dernier, indépendamment des autres données qu'on ne veut pas identifier, les sentinelles sont donc une méthode d'identification de paramètres.

L'étude de leur existence conduit à la résolution de problème contrôlabilité de systèmes distribués (gouvernés cette fois par des EDP), une sentinelle devra encore être insensible aux perturbations, mais aussi insensible à tous les paramètres devant être identifiés sauf un. Pour ce dernier on impose au contraire une contrainte de sensibilité, on est alors conduit à résoudre des problèmes de contrôlabilité à zéro.

2.2.1 Théorie du contrôle optimal

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est a dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (où contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

On considère pour cela l'équation d'évolution (le temps intervient) suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + AN &= Bv_1 & \text{dans} & Q, \\ N(0) &= N_o & \text{dans} & \Omega, \\ N &= Cv_2 & \text{sur} & \Sigma, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$\cup$où A, B et C sont des opérateurs indépendants du temps, et les fonctions $v_1 : Q \longrightarrow \mathbb{R}, v_2 : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ représentent les fonctions de contrôle.

Contrôlabilité de l'équation de la chaleur

On considère un système régi par l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} - \delta \Delta N & = & f + v\chi_\omega & \text{dans} & Q, \\ N(0) & = & N_o & \text{dans} & \Omega, \\ N & = & 0 & \text{sur} & \Sigma \end{cases} \tag{2.2.2}$$

où $f \in L^2(Q)$. ω un ouvert de Ω, $v \in L^2(\omega \times (0,T))$, $N \in L^2(\Omega)$.

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité de la solution du système (2.2.2).

Théorème 2.2.1 *Pour tout $N_o \in L^2(\Omega)$, et pour tout $f \in L^2(Q)$, il existe une unique solution N du système* (2.2.2) *avec*

$$\begin{cases} N \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{cases}$$

2.2.2 Contrôlabilité à zéro

Définition 2.2.1 *Le système* (2.2.2) *est contrôlable à zéro en temps T si, de toute donnée initiale, on peut atteindre la trajectoire nulle en temps T. Ce qui est encore équivalent à :*
$\forall N_o \in L^2(\Omega)$, $\exists\, v \in L^2(Q)$ *tel que si N est solution de* (2.2.2), *on ait*

$$N(T) = 0. \tag{2.2.3}$$

2.2.3 Inégalités de Carleman

Les estimations de Carleman ont été introduites en 1939, par T. Carleman [9] pour démontrer des résultats d'unicité pour les solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires elliptiques.

L'inègalité d'observabilité (dite de) Carleman est un outil mathématique nécessaire pour la résolution des problèmes de contrôlabilité, de systèmes complexes.

Beaucoup d'auteurs utilisent ce moyen pour assurer la contrôlabilité des problèmes d'EDP étudiés. On peut citer les travaux de Puel [30], l'auteur présente une application de l'inégalité de Carlemen globale aux problèmes inverses et de contrôlabilité, dans Nakoulima [28], l'auteur utilise une inégalité de Carleman pour résoudre le problème de contrôlabilité avec contraintes sur le contrôle pour le problème à un temps. Quant aux problèmes d'évolution à deux variables temps, l'inégalité de Carleman globale a été établie par Ainseba [5] .

2.2.4 Quelques autres résultats

Lemme 2.2.1 *Il existe une fonction poids θ vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta \text{ est de classe } C^2 \text{ dans } Q \\ \frac{1}{\theta} \text{ bornée sur } Q \end{array} \right.$$

L'existence de la fonction poids due à Fursikov et O. Imanvilov [12].

Et il existe une constante positive $C > 0$ telle que pour tout $\rho \in \mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = \left\{ \rho \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q}),\ \rho = 0 \ sur \Sigma \right\}.$$

On a

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dxdt \leq C \left[\int_Q |L\rho|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} |\rho|^2 \, dxdt \right] \tag{2.2.4}$$

avec

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \delta \Delta. \quad Q_\omega = \omega \times (0, T)$$

Preuve. On se réfère à Fursikov et Emanuvilov [12]. □

Si la condition de problème de contrôlabilité est résolu, existe- t-il un contrôle joignant x_0 à x_1, et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle ? c'est le problème de contrôle optimal.

On considére le système précédent et on se donne une fonctionnelle (fonction) coût du système (2.2.2)$-$(**??**). Le problème consiste à trouver un couple contrôle-état $(\hat{v}, \hat{y}) \in L^2(\omega \times (0, T)) \times L^2(Q)$ solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min J(v, N) \\ (v, N) \text{ vérifiant } (2.2.2) \end{array} \right. ,$$

$$\text{tel que, } N(T) = 0. \tag{2.2.5}$$

2.2.5 Méthode de pénalisation

La pénalisation est un concept simple qui permet de transformer un problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte.

Les différentes techniques de pénalisation relèvent souvent du principe suivant. On remplace le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \inf\limits_{x \in X} f(x), \end{cases}$$

où X est une partie d'un espace vectoriel E et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, par un ou des problème(s) du type

$$(\mathcal{P}_r) \quad \begin{cases} \inf\limits_{x \in E} \varphi_r(x), \end{cases}$$

où φ_r est une fonction définie par

$$\varphi_r(x) = f(x) + rp(x),$$

avec $r > 0$ et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction choisie selon les contraintes.

Chapitre 3

Modélisation en épidémiologie

L'épidémiologie est l'étude de l'état de santé des populations, de ses variations et de ses causes. Ici, on construit un modèle mathématique qui permet de rendre compte de la dynamique de la maladie en question à l'échelle de la population, à partir de données et d'hypothèses de nature miscroscropique sur la population. Les premiers modèles théoriques modernes sont l'oeuvre de En'ko, Hamer et Ross et datent du début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, ceux-ci proposent la description compartimentale de l'histoire naturelle d'une infection en trois phases : Susceptibles avant l'infection, Infectieux pour une personne infectée et contagieuse, Retirés pour les personnes guéries, immunes ou décédées. La deuxième étape importante est due à Kermack et Mckendrik 1927.

3.1 Modèles compartimentaux

Les modèles compartimentaux [7] jouent un rôle crucial en épidémiologie. Leur étude permet d'apprendre beaucoup sur les comportements de base des systèmes épidémiologiques [8] et est utile lorsque l'on doit faire face à des modèles complexes. On présente d'abord des modèles compartimentaux SI, SIS, SIR qui sont à la base de presque tous les autres modèles, et ce, quelle que soit la situation épidémiologique considérée.

3.1.1 Modèles SI

On considère d'abord une maladie se transmetant directement d'un membre d'une population donnée à un autre en un temps suffisamment court. On appelle susceptible la fraction de population qui est saine mais pouvant potentiellement devenir infectée par la maladie et notons S le compartiment contenant ces individus. A l'instant t, le compartiment S comporte $S(t)$ individus. De la même façon, on qualifie d'infectés les individus affligés par la maladie. Le compartiment contenant cette fraction de la population sera noté I et contient $I(t)$ individus au temps t.

On considère maitenant que la probabilité qu'un individu susceptible devienne infecté, soit proportionnelle au nombre d'individus actuellement infectés, et que le coefficient de proportionnalité soit $\beta \geq 0$. Si un grand nombre d'individus est en cause, on peut s'attendre à ce que βIS d'entre eux deviennent nouvellement infectés à leur tour. Le modèle correspondant d'équation différentielle sera donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{S} & = & -\beta IS \\ \dot{I} & = & \beta IS \end{array} \right.$$

On nomme modèle SI ce genre de modèle très simple où le seul événement pouvant survenir, est celui de l'infection d'un individu susceptible.

3.1.2 Modèle SIS

Pour bon nombre de maladies, la guérison est heureusement possible. Si à chaque unité de temps un individu infecté a une probabilité g de guérir de la maladie et de redevenir susceptible, on a en moyenne gI individus guérissant chaque jour. Le système d'équations devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{S} & = & -\beta IS + gI \\ \dot{I} & = & \beta IS - gI \end{array} \right.$$

3.1.3 Modèle SIR

Dans les articles correspondant à cette étude (Kermack et al, 1927 ; KermacK et al, 1932-1933 [15] les auteurs décrivent ce qui est maitenant connu sous le nom de modèle SIR. Sous la forme la plus simple, ce modèle correspond au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} & = & \lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \dot{I} & = & \beta S(t)I(t) - (\gamma + \mu)I(t) \\ \dot{R} & = & \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

où $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ correspondent au nombre de personnes dans chaque compartiment à un instant t donné, et plusieurs paramètres sont utilisés pour rendre compte de la dynamique de cette population : λ correspond aux naissances dans la population, supposées toutes susceptibles, $\frac{1}{\mu}$ est la durée de vie moyenne, $\frac{1}{\gamma}$ la durée infectieuse moyenne et β correspond au taux de contact menant à une transmission effective de la maladie. En pratique, ce modèle restitue de manière saisissante la forme des épidémies observées et rapportées dans la littérature.

Historique

L'analyse des propriétés d'équilibre de ce système d'équations fait apparaître un résultat d'une portée pratique inattendue, le théorème du seuil [29] : pour q'une épidémie puisse avoir lieu, il faut une communauté susceptible de taille supérieure à un seuil déterminé par deux termes : la contagiosité de l'infection et la durée de la phase infectieuse. Ce seuil serait par exemple de l'ordre de 200 000 à 300 000 pour la rougeole dans les pays occidentaux en l'absence de vaccination. D'autre part, la taille de l'épidémie peut facilement s'expliquer en fonction de la fraction de susceptibles de la population avant l'épidémie. Plusieurs faits surprenants furent également tirés de l'analyse mathématique du modèle :

- La dissémination d'une maladie repose avant tout sur le nombre de personnes qui ne l'ont pas eue, beaucoup plus que sur le nombre initial de personnes infectées ;
- Il est normal d'échapper naturellement à une épidémie, puisque celle-ci s'arrête avant d'utiliser tous les susceptibles ;

- une situation endémique stable peut prévaloir dans une population, lorsque l'incidence peut être exactement compensée par les retraits de personnes infectieuses.

Le théorème du seuil a été reformulé par la notion du ratio de reproduction de l'épidémie, noté R_0 [29] dont l'interprétation usuelle est le nombre de cas directement infectés par un unique sujet infecté dans une population entièrement suscptible. L'intuition, et les mathématiques, montrent que lorsque R_0 est plus grand que 1, on aura une épidémie ; et pas lorsque R_0 sera inférieur à 1.
Suivant les travaux de Kermack et Mckendrik, de très nombreuses extensions ont été proposées : prendre en compte les effets aléatoires, structurer les compartiments, estimer des paramètres à partir de données. Bernoulli avait montré dès le 17$^{\text{ème}}$ siècle l'intérêt de la modélisation mathématique dans l'étude de la variolisation, pratique précurseur de la vaccination antivariolique.

L'étude des conditions d'une vaccination optimale est toujours à l'origine de nombreux développements en épidémiologie théorique. En effet, du point de vue d'un individu, il semble que la prévention de la maladie passe toujours par la vaccination. Mais l'existence d'un seuil critique de population d'être susceptible et du quel une épidémie est impossible montre qu'il n'en est rien : un individu pourrait échapper à la maladie sans être vacciné dans une population . Ceci est l'immunité grégaire. Avec cette propriété, il apparaît également possible d'éradiquer une maladie transmissible : si la proportion de susceptibles est toujours inférieurs au seuil critique, alors la maladie doit disparaître. Ceci a été le cas avec la variole, et on espère aujourd'hui l'éradication totale de la poliomyélite et de la rougeole.

La vaccination pose encore aujourd'hui des problèmes nouveaux, pour lesquels la modélisation mathématique demeure indispensable. Notamment, la disparition programmée de maladies amène à réfléchir sur la nécessité de renforcer la vaccination ou de l'arrêter ; la diminution rapide de l'immunité vaccinale est également à l'origine de questions de santé publique que l'on peut étudier par modélisation.

La méthode compartimentale est très souvent utilisée dans la construction des modèles épidémiologiques, elle consiste à partitionner la population en compartiments disjoints dont la taille varie en fonction du temps, chaque compartiment regroupe les individus qui se trouvent dans la même état vis à vis de la maladie. Les différentes connaissances dont on dispose en ce qui concerne la maladie sont ensuite utilisées pour déterminer les taux de transfert entre les différents compartiments.

Retour sur le modèle SIR

Dans le modèle SIR, la population est divisée en trois compartiments, à savoir les susceptibles S, les infectieux I, et les immunisés R.
La véracité du modèle SIR dépend du nombre de paramètres, plus les paramètres sont nombreux plus ce modèle se rapproche de la réalité, il est utilisé comme par exemple dans la cas de la grippe A en 2009, le système SIR permet de modéliser la propagation d'un virus de la grippe [24] au sein d'une population, ainsi que déterminer le taux de vaccination permettant de stopper la propagation du virus.

Pour bon nombre de maladies les individus ayant guéri d'une infection développent une immunité à cette infection. Dans certains cas cette immunité est permanente et dans d'autres elle est temporaire. L'introduction du compartiment R peut aussi représenter les individus isolés ou les individus morts. Le système d'équations différentielles régissant un tel modèle prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu N - \beta SI - \mu S \\ \dot{I} = \beta SI - (\gamma + \mu)I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec :

$S(t) + I(t) + R(t) = N =$ constante.

β taux d'infection.

γ taux de guérison.

μ taux de mortalité.

N : La population totale.

S : les individus qui ne sont pas malades mais sont susceptibles de le devenir.

I : les individus malades et capables de transmettre l'infection.

R : les individus qui ont contracté la maladie et qui ne peuvent plus la transmettre.

Le nombre de nouveaux cas d'infection par unité de temps est proportionnel au nombre de contacts par unité de temps entre S et I. La transition vers le compartiment R est proportionnelle à I .
La constante de proportionnalité γ représente le taux (par unité de temps et par individus infectieux) de guérison (si R représente les guéris).

Le modèle SIR avec diffusion spatiale

Dans cette thèse on étudie le cas complexe où les populations peuvent se déplacer et ne sont donc pas confinées dans un endroit précis. La densité de population est représentée par une fonction en x et t. On obtient une EDP.

Dans le cas où l'on rajoute le déplacement de population et l'état du sytème est perturbé, on rajoute de la diffusion spaciale $\delta\Delta$ et le terme de pollution λ, le terme manquant τ le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\partial_t S - \delta\Delta S & = & \mu N - \beta S I - \mu S & \text{dans } Q, \\
\partial_t I - \delta\Delta I & = & \beta S I - (\gamma+\mu) I + \lambda \widehat{I} & \text{dans } Q, \\
\partial_t R - \delta\Delta R & = & \gamma I - \mu R & \text{dans } Q, \\
 & & & \\
S(0) & = & S^0 + \tau \widehat{S^0} & \text{dans } \Omega, \\
I(0) & = & I^0 & \text{dans } \Omega, \\
R(0) & = & R^0 & \text{dans } \Omega, \\
 & & & \\
S & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\
I & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\
R & = & 0 & \text{sur } \Sigma.
\end{array}\right. \tag{3.1.2}$$

Interprétation des équations :

Le signe $-$ dans L'équation (1) indique qu' avec le temps l'épidémie a déja touché un certain nombre de la population, l'équation (2) décrit l'accroissement du nombre d'infectés au fil du temps et l'espace, car on a un signe $+$ qui signifie que le nombre d'infecté qui croit avec le temps et le $-$ signifie qu'un nombre d'infecté s'immunise. L'équation (3) décrit l'accroissement du nombre de retirés au fil du temps et l'espace.

Le nombre de reproduction de base $\mathbf{R}_0$:

Le modèle épidémiologie SIR à un équilibre sans maladie c'est à dire tous les compartiments contenant des infectés sont vides.

La question de savoir si la maladie risque de proliférer peut alors être cernée parl'étude de la stabilité de cet équilibre. Une maladie peut profilérer dans une population si en moyenne un individu infectieux en infecte plus qu'un, ceci permet de définir le taux de reproduction de base R_0. Ce paramètre détermine le nombre de personnes infecté par un individu ayant contracté la maladie avant sa mort ou sa guérison. S' il est inférieur à 1, $I(t)$ décroit en revanche, s'il supérieur à 1 on est en présence d'une épidémie. Le but pour enrayer une épidémie et donc de faire chuter ce R_0 soit en vaccinant la population soit prenant d'autre précaution faissant baisser β.

Chapitre 4

Sentinelles pour le modèle épidémiologique SIR

4.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on propose d'étudier l'existence et la construction d'une sentinelle pour le modèle SIR avec diffusion spatiale. On montre que l'existence d'une sentinelle est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro. Pour résoudre ce dernier, on utilise une Inégalité d'observabilité basée sur les inégalités de type de Carleman.

On considère alors le problème SIR suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccll}
\partial_t S - \delta\Delta S & = & \mu N - \beta SI - \mu S & \text{dans } Q, \\
\partial_t I - \delta\Delta I & = & \beta SI - (\gamma+\mu)I + \lambda\widehat{I} & \text{dans } Q, \\
\partial_t R - \delta\Delta R & = & \gamma I - \mu R & \text{dans } Q, \\
S(0) & = & S^0 + \tau\widehat{S^0} & \text{dans } \Omega, \\
I(0) & = & I^0 & \text{dans } \Omega, \\
R(0) & = & R^0 & \text{dans } \Omega, \\
S & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\
I & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\
R & = & 0 & \text{sur } \Sigma.
\end{array}\right. \tag{4.1.1}$$

Les individus sont dans une région bornée Ω, ensemble ouvert de R^d, $d = 2$ ou 3, de frontière régulière Γ. Pour $T > 0$, représentant la variable de temps, nous notons $Q = (0,T) \times \Omega$ et $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$.

Explication biologique du modèle. Notons par N la densité de population totale $N =: S + I + R$. Comme il y a un terme de diffusion spatiale $-\delta\Delta$, la population totale N n'est pas constante et donc $\partial_t N \neq 0$.

Le terme $\lambda\widehat{I}$ représente la perturbation autour de la population infectée dont la densité I n'est pas complètement connue, $\tau\widehat{S^0}$ est le terme manquant de la population susceptible d'être infectée. Nous supposons que $\left\|\widehat{I}\right\|_{L^2(Q)} \leq 1$ et aussi que $\left\|\widehat{S^0}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$. Ce sont les paramètres réels λ et τ qui sont inconnus.

Les autres paramètres sont connus et ont la signification suivante : β est le taux d'infection, γ le taux de guérison, μ est le taux de mortalité et δ est le paramètre de diffusion. Nous prenons le même coefficient de diffusion δ dans les trois classes S, I et R, ce qui représente une même propagation des épidémies (ceci simplifie le modèle également).

Si nous additionnons les trois premières équations ci-dessus du modèle SIR que nous étudions, nous obtenons le système simplifié :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \partial_t N - \delta\Delta N & = & \lambda\widehat{I} & \text{dans } Q, \\ N(0) & = & N^0 + \tau\widehat{S^0} & \text{dans } \Omega, \\ N & = & 0 & \text{sur } \ \Sigma, \end{array}\right. \tag{4.1.2}$$

où $N^0 = S^0 + I^0 + R^0$. Par conséquent, dans ce qui suit, le système (4.1.2) est considéré.

Remarque 4.1.1 *On suppose ici que les données initiales S^0, I^0 et R^0 sont des fonctions connues et appartiennent à $L^2(\Omega)$. D'après Lions-Magenes ([18], volume 1, chapitre 3), nous savons qu'il existe une solution unique de cette équation de type parabolique telle que :*

$$N \in \mathcal{C}^0\left([0,T[; L^2(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^0\left(]0,T[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right). \tag{4.1.3}$$

Maintenant, le problème qui se pose est le suivant : existe-t'il une méthode permettant d'obtenir des informations sur le terme $\lambda\widehat{I}$ de population infectée, insensible au terme manquant de la population susceptible $\tau\widehat{S^0}$?

Une réponse partielle peut être obtenue à l'aide de la méthode des moindres carrés, mais la méthode consiste à prendre les inconnues $\{\lambda\widehat{I}, \tau\widehat{S^0}\} = \{v, w\}$ comme variables de contrôle, et on ne peut pas nettement séparer v et w. La notion de sentinelle fournit la bonne réponse à ce type de problème, et c'est la méthode que nous utilisons ici.

4.2 Méthode des sentinelles

Naturellement, pour espérer pouvoir obtenir des informations, il faut observer l'état de la population infectée.

Soit $O \subset \Omega$ un sous-ensemble ouvert de Ω que nous appellerons observatoire. Ici, on observe N sur O.

Soit l'état $N(t,x;\lambda,\tau) := N(\lambda,\tau)$ correspandant à une population infectée $\lambda\widehat{I}$ et à un terme manquant $\tau\widehat{S^0}$. Pendant un temps T on choisit h_0 tel que $h_0(x,t) \in L^2(O \times (0,T))$.

Soit ω (domaine contrôle) un sous-ensemble ouvert non vide de Ω différent de l'observatoire ($\omega \subset \Omega$, $\omega \neq O$). Étant donnée une fonction de contrôle $v(x,t) \in L^2(\omega \times (0,T))$, on définit enfin la sentinelle par la fonctionnelle :

$$\mathcal{S}(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_O h_0 \, N(x,t,\lambda,\tau) \, dxdt + \int_0^T \int_\omega v \, N(x,t,\lambda,\tau) \, dxdt. \tag{4.2.1}$$

Ecrivons le développement de $\mathcal{S}(\lambda,\tau)$ autour de $\lambda = \tau = 0$, au premier ordre :

$$\mathcal{S}(\lambda,\tau) \simeq \mathcal{S}(0,0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0,0) + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0).$$

Le problème consiste à trouver v tel que le couple contrôle-sentinelle $(v,\mathcal{S})$ remplisse les conditions suivantes :

– La sentinelle $\mathcal{S}$ est insensible, au premier ordre, aux termes manquants $\tau \in \mathbb{R}$, cela signifie que :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0) = 0. \tag{4.2.2}$$

– La fonction de contrôle v admet la propriété de norme minimale dans $L^2(\omega \times (0,T))$ au sens suivant :

$$\|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))} = \min_{u \in L^2(\omega\times(0,T))} \|u\| . \tag{4.2.3}$$

Remarque 4.2.1 *La sentinelle de J.-L. Lions correspond au cas $\omega = O$, c'est à dire :*

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_O (h_0 + v) N(\lambda, \tau)\, dxdt. \qquad (4.2.4)$$

Dans ce cas, il existe toujours une sentinelle satisfaisant (4.2.2) définie par $v = -h_0$.

Remarque 4.2.2 *La définition (4.2.1) donne une généralisation de la sentinelle de Lions au cas où l'observation et le contrôle ont leurs supports dans deux ensembles différents (voir [21] et [25] pour plus de détails). Il est également plus réaliste d'avoir un ensemble de contrôles plus petit en raison des coûts (on ne peut pas contrôler partout).*
Dans ce qui suit, nous considérons :

$$\Omega \subset\subset O. \qquad (4.2.5)$$

4.3 Equivalence à un problème de contrôlabilité

Nous allons montrer dans cette section que le problème d'existence d'une sentinelle est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro. Nous commençons par le :

Lemme 4.3.1 *La condition (4.2.2) d'insensibilité de la sentinelle par rapport aux termes manquants est équivalente à :*

$$\int_0^T \int_O h_0\, N_\tau(\lambda, \tau)\, dxdt + \int_0^T \int_\omega v\, N_\tau(\lambda, \tau)\, dxdt = 0 \qquad (4.3.1)$$

avec :

$$N_\tau = \frac{\partial N}{\partial \tau}(0,0) = \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{N(0,\tau) - N(0,0)}{\tau} \right) \qquad (4.3.2)$$

où $N_\tau = S_\tau + I_\tau + R_\tau$ est la solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t N_\tau - \delta\, \Delta N_\tau & = & 0 & dans \;\; Q, \\ N_\tau\,(0) & = & \widehat{S}^0 & dans \;\; \Omega, \\ N_\tau & = & 0 & sur \;\; \Sigma. \end{array} \right. \qquad (4.3.3)$$

Preuve. Rappelons que la solution N_τ admet la régularité donnée plus haut (4.1.3). En utilisant la définition de la dérivée (4.3.2), on obtient immédiatement le résultat pour le système (4.1.2). $\square$

Etat adjoint. Nous introduisons maintenant l'état adjoint $q = q(t,x)$ solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -\partial_t q - \delta\,\Delta q & = & h_0\chi_O + v\chi_\omega & \text{dans} & Q, \\ q\,(T) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ q & = & 0 & \text{sur} & \Sigma. \end{array}\right. \tag{4.3.4}$$

Puisque $h_0 \in L^2((0,T)\times O)$ et $v \in L^2((0,T)\times\omega)$, le problème adjoint (4.3.4) admet une solution unique donnée par :

$$q \in L^2\,(Q) \cap C\left([0,T]\,;H^{-1}\,(\Omega)\right)$$

(voir Lions-Magenes [18]).

Dans la suite, et par mesure de simplicité, on note par :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \delta\Delta \quad \text{l'opérateur différentiable et par} \;\; L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \delta\Delta \text{ son adjoint.}$$

La proposition suivante prouve que l'existence de la sentinelle insensible par rapport aux termes manquants est équivalante à un problème de contrôlabilité à zéro.

Proposition 4.3.1 *Soit q la solution du problème adjoint (4.3.4), alors le problème de l'existence d'une sentinelle insensible aux termes manquants est équivalente au problème d'existence d'une fonction contrôle v de norme minimale tel que si q est solution de (4.3.4), on ait :*

$$q(0) = 0 \quad \textit{dans} \;\; \Omega. \tag{4.3.5}$$

Preuve. On multiplie la première équation du système (4.3.4) par N_τ et on intègre par parties sur Q :

$$\begin{aligned} \int_Q N_\tau\,(L^*q)\,dxdt \;\; &= \;\; -\int_\Omega q(T)N_\tau(T)\,dx + \int_\Omega q(0)N_\tau(0)\,dx \\ &\quad - \int_Q q\,(LN_\tau)\,dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial q}{\partial\nu}N_\tau d\sigma + \int_\Sigma q\frac{\partial N_\tau}{\partial\nu}d\sigma. \end{aligned}$$

Comme N_τ et q sont respectivement solutions des systèmes (4.3.3) et (4.3.4), on obtient :

$$\int_0^T\int_\Omega N_\tau(h_0\chi_O + w\chi_\omega)dxdt = \int_\Omega q(0)\widehat{S^0}dx, \qquad \forall\;\widehat{S^0} \in L^2(\Omega). \tag{4.3.6}$$

Par suite, si la sentinelle existe, c'est à dire (4.3.1) vérifiée, alors (4.3.6) devient :

$$\int_\Omega q(0)\widehat{S^0}dx = 0, \qquad \forall\ \widehat{S^0} \in L^2(\Omega).$$

Par conséquent :

$$q(0) = 0, \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.3.7}$$

La réciproque est immédiate, en suivant les mêmes étapes. □

4.4 Informations fournies par les sentinelles

On suppose que la densité de population N est observée sur O donc :

$$N_{\text{obs}} = m_0 \qquad \text{sur } O. \tag{4.4.1}$$

Notons $S_{obs}(\lambda,\tau)$ la sentinelle correspendant à l'état N, un développement limité à l'ordre 1 de S au voisinage de $(0,0)$ donne

$$S_{obs}(\lambda,\tau) \simeq S(0,0) + \lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) + \tau\frac{\partial S}{\partial\tau}(0,0).$$

Puisque $\dfrac{\partial S}{\partial\tau}(0,0) = 0$, alors :

$$S_{obs}(\lambda,\tau) \simeq S(0,0) + \lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0).$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\int_0^T\int_O h_0\, N_{obs}(\lambda,\tau)\, dxdt - \int_0^T\int_\omega v\, N_0(\lambda,\tau)\, dxdt = \lambda\int_Q \left(h_0\chi_O + v\chi_\omega\right) N_\lambda dxdt.$$

En utilisant (4.4.1), on obtient

$$\int_Q \left(h_0\chi_O + v\chi_\omega\right)(m_0 - N_0)\, dxdt = \lambda\int_Q \left(h_0\chi_O + v\chi_\omega\right) N_\lambda dxdt \tag{4.4.2}$$

où N_0 est l'état calculé pour $\lambda = \tau = 0$. On trouve alors :

$$\left\{\begin{array}{ccll} \frac{\partial N_\lambda}{\partial t} - \delta\Delta N_\lambda & = & \widehat{I} & \text{dans } Q \\ N_\lambda(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ N_\lambda & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{4.4.3}$$

Maintenant, en multipliant la première équations de (4.4.3) par q et en intégrant par parties sur Q, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_Q q\widehat{I}dxdt &= \int_Q q\frac{\partial N_\lambda}{\partial t}dxdt - \int_Q \delta\Delta N_\lambda q dxdt \\ &= \int_\Omega N_\lambda(T)q\,(T)\,dx - \int_\Omega N_\lambda(0)q\,(0)\,dx - \int_Q N_\lambda\frac{\partial q}{\partial t}dxdt \\ &\quad - \int_Q N_\lambda\delta\Delta q dxdt + \int_\Sigma \frac{\partial N_\lambda}{\partial \nu}qd\Sigma - \int_\Sigma N_\lambda\frac{\partial q}{\partial \nu}d\Sigma.\end{aligned}$$

Comme q et N_λ sont respectivement solutions des systèmes (4.3.4) et (4.4.3) alors :

$$\int_Q N_\lambda(h_0\chi_O + v\chi_\omega)dxdt = \int_Q \lambda q\widehat{I}dxdt. \tag{4.4.4}$$

Donc, de (4.4.2) et (4.4.4), il vient :

$$\int_Q N_\lambda(h_0\chi_O + w\chi_\omega) = \int_Q (h_0\chi_O + w\chi_\omega)(m_0 - N_0)dxdt.$$

Par conséquent

$$\langle q, \lambda\widehat{I}\rangle_{L^2(Q)} = \int_Q (h_0\chi_O + v\chi_\omega)(m_0 - N_0)dxdt.$$

La connaissance du contrôle v, nous fournie bien des informations sur la population infectée $\lambda\widehat{I}$.

4.5 Existence d'une sentinelle pour le modèle SIR

De ce qui précède (proposition 4.3.1), on a montré que l'existence de la sentinelle se ramène à un problème de contrôlabilité à zéro, et à l'étude du problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \min_{(v,q)\in B} \|v\|,$$

avec,

$$B = \left\{ (v,q) \Big\backslash \left\{ \begin{array}{rcll} -\partial_t q - \delta\,\Delta q &=& h_0\chi_O + v\chi_\omega & \text{dans} \quad Q \\ q(0) = q\,(T) &=& 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ q &=& 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{array} \right. \right\}. \tag{4.5.1}$$

Notre objectif dans cette partie est de montrer que le domaine des contraintes B est non vide, ce qui justifie l'existence de la sentinelle. L'outil essentiel pour résoudre le problème d'existence est une inégalité d'observabilité basée sur les estimations de type Carleman.

On introduit l'espace,

$$\mathcal{V} = \left\{ \rho \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{Q}),\ \rho = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}.$$

Alors, la proposition suivante donne une inégalité d'observabilité de type Carleman.

Proposition 4.5.1 *Soit $Q_\omega = (0,T) \times \omega$, alors il existe constante $C = C(\Omega, \omega) > 0$ tel que pour tout $\rho \in \mathcal{V}$, on a :*

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dxdt \leq C \left[\int_Q |L\rho|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} |\rho|^2 \, dxdt \right], \tag{4.5.2}$$

où $\theta \in C^2(Q)$, θ positif avec $\frac{1}{\theta}$ borné.

Preuve. Pour la preuve de ce résultat classique, identique à celle de l'équation de la chaleur, nous renvoyons aux travaux de Fursikov et Imanuvilov [12].

□

Dans la suite, on va s'assurer de la non vacuité du domaine B. Pour cela, on introduit la forme bilinéaire $a(.,.) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$a(\rho, \rho') = \int_Q L\rho \, L\rho' \, dxdt + \int_{Q_\omega} \rho\rho' \, dxdt, \quad \rho, \rho' \in \mathcal{V}. \tag{4.5.3}$$

Lemme 4.5.1 *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est un produit scalaire.*

Preuve. Il est claire que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, on a :

$$a(\rho, \rho) = \int_Q |L\rho|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} |\rho|^2 \, dxdt = 0,$$

d'où $\rho = 0$ sur Q_w et $L\rho = 0$ dans Q.

Grâce à l'négalité d'observabilité (4.5.2), on déduit :

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dxdt = 0.$$

Enfin, en utilisant le théorème de continuation unique, on obtient $\rho = 0$ dans Q.

$\square$

Lemme 4.5.2 *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue.*

Preuve. Notons par V l'espace complété de $\mathcal{V}$ pour la norme $\|.\|_V$ définie par :

$$\|\rho\|_V^2 = a(\rho, \rho) = \|L\rho\|_{L^2(Q)}^2 + \|\rho\|_{L^2(Q_\omega)}^2 .$$

Alors :

$$|a(\rho, \rho')| \leq \int_Q |L\rho| \, |L\rho'| \, dxdt + \int_{Q_\omega} |\rho| \, |\rho'| \, dxdt. \tag{4.5.4}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (4.5.4), il vient

$$|a(\rho, \rho')| \leq \|L\rho\|_{L^2(Q)} \|L\rho'\|_{L^2(Q)} + \|\rho\|_{L^2(Q_\omega)} \|\rho'\|_{L^2(Q_\omega)} \tag{4.5.5}$$

d'autre part,

$$\|\rho\|_V^2 = \|L\rho\|_{L^2(Q)}^2 + \|\rho\|_{L^2(Q_\omega)}^2 .$$

Ce qui implique que,

$$\|\rho\|_V^2 \geq \|L\rho\|_{L^2(Q)} . \tag{4.5.6}$$

Et

$$\|\rho\|_V \geq \|\rho\|_{L^2(Q_\omega)} . \tag{4.5.7}$$

Utilisant l'inégalité (4.5.6) et (4.5.7) dans (4.5.5), on trouve

$$|a(\rho, \rho')| \leq 2 \|\rho\|_V \|\rho'\|_V .$$

Ainsi $a(.,.)$ est continue. $\square$

Lemme 4.5.3 *On suppose que $h_0 \in L^2(Q)$ et que $\theta h_0 \in L^2(Q)$, alors l'application $\mathcal{L}$ définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}: & V & \to & \mathbb{R} \\ & \rho & \longmapsto & \mathcal{L}(\rho) = \displaystyle\int_Q h_0 \chi_{\mathcal{O}} \, \rho \, dxdt \end{array}$$

est linéaire et continue sur V.

Preuve. En utilisant l'hypothèse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient,

$$|\mathcal{L}(\rho)| \leq \left(\int_Q |\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{a(\rho,\rho)} = C \|\rho\|_V .$$

donc $\mathcal{L}$ est continu sur$V$. □

Remarque 4.5.1 *L'espace V est un espace de Hilbert pondéré. En effet, si on définit $H_\theta(Q)$ par :*

$$H_\theta(Q) = \left\{\rho \in L^2(Q) \text{ tel que } \int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dxdt < \infty\right\}$$

muni de la norme $\|\rho\|_\theta = \left(\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$, puis en utilisant l'inégalité d'observabilité (4.5.2), on obtient :

$$\|\rho\|_\theta \leq C \|\rho\|_V .$$

Cela montre que V s'injecte continûment dans $H_\theta(Q)$.

Par conséquent, on a :

Corollaire 4.5.1 *Sous les hypothèses du lemme 4.5.3, il existe une fonction unique $\overline{\rho} \in V$ solution du problème variationnel :*

$$a(\overline{\rho}, \rho) = \int_0^T \int_\Omega h_0 \chi_{\mathcal{O}} \rho \, dxdt, \quad \forall \rho \in V. \tag{4.5.8}$$

Preuve. Comme la forme bilinéaire $a(.,.)$ et symétrique est continue et coercive sur $V \times V$, et que la forme $\mathcal{L}$ dans le membre de droite de (4.5.8) est linéaire et continue sur$V$, ce problème admet une unique $\overline{\rho} \in V$.

□

La proposition suivante montre que le domaine B du problème (P) est non vide.

Proposition 4.5.2 *Sous les hypothèses de corollaire précédent, soit $\overline{\rho} \in V$ la solution unique de (4.5.8). On pose :*

$$\overline{v} = -\overline{\rho} \chi_\omega, \tag{4.5.9}$$

$$\overline{q} = L\overline{\rho}. \tag{4.5.10}$$

Alors le couple $(\overline{v}, \overline{q})$ *est la solution unique du problème de la contrôlabilité à zéro (4.3.4)-(4.3.5). De plus, on a :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \|\overline{\rho}\|_V & \leq & C \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} , \\ \|v\|_{L^2(Q_\omega)} & \leq & C \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} , \\ \|q\|_{L^2(Q)} & \leq & C \|\theta h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} , \end{array} \right. \tag{4.5.11}$$

où C *est une constante.*

Preuve. On montre que le couple $(\overline{v}, \overline{q})$ vérifie bien le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -\frac{\partial q}{\partial t} - \delta \Delta q & = & h_0 \chi_O + v \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ q\,(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ q & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

avec $q(0) = 0$. En effet, comme $\overline{\rho}$ est solution de (4.5.8), alors :

$$\int_0^T \int_\Omega L\overline{\rho} L\widehat{\rho} dxdt + \int_0^T \int_\omega \overline{\rho}\widehat{\rho} dxdt = \int_0^T \int_\Omega h_o \chi_{\mathcal{O}} \widehat{\rho} dxdt, \ \forall \widehat{\rho} \in V.$$

Or le couple $(\overline{v}, \overline{q})$ satisfait (4.5.9)-(4.5.10) donc :

$$\int_0^T \int_\Omega \overline{q} L\widehat{\rho} dxdt - \int_0^T \int_\omega \overline{v} \chi_\omega \widehat{\rho} dxdt = \int_0^T \int_\Omega h_o \chi_{\mathcal{O}} \widehat{\rho} dxdt, \ \forall v \in V,$$

c'est à dire :

$$\int_0^T \int_\Omega \overline{q} L\widehat{\rho} dxdt = \int_0^T \int_\Omega (h_o \chi_{\mathcal{O}} + \overline{v} \chi_\omega) \widehat{\rho} dxdt, \ \forall \widehat{\rho} \in V. \tag{4.5.12}$$

L'équation (4.5.12) est vraie en particulier pour $\widehat{\rho} \in D(Q) \subset \mathcal{V} \subset V$, donc on a :

$$\langle L^* \, \overline{q}, \widehat{\rho} \rangle_{L^2(Q)} = \langle h_o \chi_{\mathcal{O}} + \overline{v} \chi_\omega, \widehat{\rho} \rangle_{L^2(Q)}, \forall \widehat{\rho} \in D(Q).$$

Enfin, on déduit que :

$$L^* \overline{q} = h_o \chi_{\mathcal{O}} + \overline{v} \chi_\omega. \tag{4.5.13}$$

Comme $h_o \chi_{\mathcal{O}} + \overline{v} \chi_\omega \in L^2(Q)$, donc $L^* \overline{q} \in L^2(Q)$, de plus $\overline{q} \in L^2(Q)$. Par application du théorème de Lions-Magenes [18], les fonctions traces $q_{|\Sigma}$ et $q(T\ )$, $q(0)$ existent. On multiplie

(4.5.13) par $\rho \in C^{\infty}(\overline{Q})$ et on intégre par parties sur Q, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_Q \rho L^* \overline{q} dxdt &= \int_Q \overline{q} L\rho dxdt - \int_\Omega \overline{q}(T)\rho(T)dx + \int_\Omega \overline{q}(0)\rho(0)dx \\ &\quad -\delta \int_\Sigma \frac{\partial \overline{q}}{\partial \upsilon}\rho d\Sigma + \delta \int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial \upsilon}\overline{q} d\Sigma \\ &= \int_0^T \int_\Omega (h_o \chi_{\mathcal{O}} + \overline{v}\chi_\omega)\rho dxdt.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_Q \rho(L^*\overline{q} - h_o\chi_{\mathcal{O}} + \overline{v}\chi_\omega)dxdt = 0.$$

Il reste,

$$\int_Q \overline{q} L\rho dxdt - \int_\Omega \overline{q}(T)\rho(T)dx + \int_\Omega \overline{q}(0)\rho(0)dx - \delta \int_\Sigma \frac{\partial \overline{q}}{\partial \upsilon}\rho d\Sigma + \delta \int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial \upsilon}\overline{q} d\Sigma = 0. \quad (4.5.14)$$

L'équation (4.5.12) est aussi vraie, en particulier pour $\widehat{\rho} = \rho \in \mathcal{V} \subset C^{\infty}(\overline{Q})$ donc :

$$\int_Q \overline{q} L\rho dxdt = \int_0^T \int_\Omega (h_o \chi_{\mathcal{O}} + \overline{v}\chi_\omega)\rho dxdt \quad (4.5.15)$$

Ainsi de (4.5.14) et (4.5.15), on trouve :

$$-\int_\Omega \overline{q}(T)\rho(T)dx + \int_\Omega \overline{q}(0)\rho(0)dx - \delta \int_\Sigma \frac{\partial \overline{q}}{\partial \upsilon}\rho d\Sigma + \delta \int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial \upsilon}\overline{q} d\Sigma = 0. \quad (4.5.16)$$

En particulier pour $\rho \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\rho(0) = \rho(T) = 0.$$

Alors, il vient de l'équation (4.5.16) :

$$\int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial \upsilon}\overline{q} d\Sigma = 0 \Rightarrow \overline{q} = 0 \ \text{ sur } \Sigma.$$

Il en est de même pour $\rho \in \mathcal{V}$ tel que

$$\rho(0) = 0.$$

Alors,

$$\int_{\Omega} \overline{q}(T)\rho(T)dx = 0 \Rightarrow \overline{q}(T) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Enfin, on a

$$\int_{\Omega} \overline{q}(0)\rho(0)dx = 0 \Rightarrow \overline{q}(0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Par conséquent le couple $(\overline{v}, \overline{q})$ est solution du problème (4.3.4)-(4.3.5), ce qui justifie que le domaine B est non vide.

Montrons les estimations (4.5.11) : Pour cela, on pose $\rho = \overline{\rho}$ dans l'équation (4.5.8). On trouve :

$$a(\overline{\rho}, \overline{\rho}) = \int_{Q} |L\overline{\rho}|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} |\overline{\rho}|^2 \, dxdt = \int_{Q} h_o \chi_{\mathcal{O}} \overline{\rho} dxdt.$$

Par définition de $\|.\|_V$ et l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient :

$$\|\overline{\rho}\|_V^2 = \int_{Q} h_o \chi_{\mathcal{O}} \overline{\rho} dxdt \leq \|h_o \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} \left\| \frac{1}{\theta} \overline{\rho} \right\|_{L^2(Q)} \tag{4.5.17}$$

De plus l'inégalité d'observabilité donne :

$$\left\| \frac{1}{\theta} \overline{\rho} \right\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{C} \, \|\overline{\rho}\|_V . \tag{4.5.18}$$

Utilisant (4.5.18) dans (4.5.17), il vient :

$$\|\overline{\rho}\|_V^2 = \int_{Q} |L\overline{\rho}|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} |\overline{\rho}|^2 \, dxdt \leq \sqrt{C} \, \|h_o \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} \|\overline{\rho}\|_V . \tag{4.5.19}$$

Par suite, on a

$$\|\overline{\rho}\|_V \leq \sqrt{C} \, \|h_o \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} . \tag{4.5.20}$$

Ce qui donne la première estimation de (4.5.11).

Comme $(\overline{v}, \overline{q})$ vérifie (4.5.9)-(4.5.10) alors l'estimation (4.5.19) s'écrit :

$$\int_{Q} |\overline{q}|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} |-v\chi_\omega|^2 \, dxdt \leq \sqrt{C} \, \|h_o \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} \|\overline{\rho}\|_V .$$

Donc :

$$\|\overline{q}\|^2_{L^2(Q)} + \|\overline{v}\|^2_{L^2(Q_w)} \leq \sqrt{C}\,\|h_o\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)}\,\|\overline{\rho}\|_V\,.$$

On utilise maintenant (4.5.20) on obtient :

$$\|\overline{q}\|^2_{L^2(Q)} + \|\overline{v}\|^2_{L^2(Q_w)} \leq C\,\|h_o\chi_{\mathcal{O}}\|^2_{L^2(Q)}\,.$$

Alors on a,

$$\begin{cases} \|\overline{q}\|_{L^2(Q)} \leq C\,\|h_o\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)}\,, \\ \|\overline{v}\|_{L^2(Q_w)} \leq C\,\|h_o\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)}\,, \end{cases}$$

la constante C n'étant pas la même. D'où la preuve de (4.5.11) complétée.

$\square$

4.6 Construction de la sentinelle

Ayant montré l'existence d'une sentinelle, notre but maintenant est de construire cette sentinelle pour le modèle épidémiologique SIR.

Dans un premier temps, nous avons pu établir l'existence de cette sentinelle ce qui justifie l'existence du contrôle optimal :

4.6.1 Existence du contrôle optimal

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \min_{(v,q)\in B} \frac{1}{2}\,\|v\|^2\,.$$

$$B = \left\{ (v,q) \middle/ \begin{cases} -\partial_t q - \delta\,\Delta q &= h_0\chi_O + v\chi_\omega \quad \text{dans} \quad Q \\ q(0) = q\,(T) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ q &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \end{cases} \right\}.$$

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème 4.6.1 *Il existe un couple unique $(\widehat{v},\widehat{q})$ solution du problème (P).*

Preuve. Sous les hypothèses de la section précédente, le domaine B est non vide. De plus, il est fermé. D'autre part, l'application $v \to \|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))}$ est continue, coercive et strictement convexe, alors on déduit qu'il existe une unique solution pour le problème (P) qu'on note $(\widehat{v}, \widehat{q}) \in B$, et qui vérifie : $\quad \|\widehat{v}\|_{L^2(\omega\times(0,T)} \leq \|v\|_{L^2(\omega\times(0,T)}\ ,\ \forall\ (v,q) \in B.$

□

4.7 Méthode de pénalisation

Pour caractériser le couple $(\widehat{v}, \widehat{q})$, on utilise la méthode classique de pénalisation pour obtenir les systèmes d'optimalités pour $(\widehat{v}, \widehat{q})$. Plus précisément pour $\varepsilon > 0$, on introduit la fonction coût pénalisée :

$$J_\varepsilon(v,z) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(Q_\omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|L^* z - h_0\chi_O - v\chi_\omega\|^2_{L^2(Q)} .$$

On considère le problème (P_ε) suivant :

$$(P_\varepsilon)\left\{\begin{array}{c} \min J_\varepsilon(v,z)_{L^2(\omega\times(0,T))} \\ (v,z) \in U \end{array}\right.$$

avec

$$U = \left\{\begin{array}{ll} (v,z) \text{ tel que } L^* z \in L^2(Q) & \\ z(0) = z(T) = 0 \text{ dans } \Omega, & \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right.$$

La proposition suivante donne l'existence de la solution pour le (P_ε).

Proposition 4.7.1 *On suppose que les hypothèses de la section précédente sont satisfaites. Alors, il existe un couple $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$, comme unique solution du problème (P_ε).*

Preuve. Il est clair que $B \subset U$, de plus B est non vide. Par conséquent U est non vide, aussi il est fermé.

De plus l'application J_ε est continue, coercive et strictement convexe. Alors le problème (P_ε) admet une unique solution qu'on note $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$.

□

Maintenant on étudie la convergence de couple $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela on a le résultat suivant :

Proposition 4.7.2 *Soit $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$ l'unique solution du problème (P_ε). Alors :*

$$\begin{array}{l} v_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{v} \text{ faiblement dans } L^2 \ (\omega \times (0,T)) \\ z_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{q} \text{ faiblement dans } H^{2,1}(Q). \end{array}$$

Preuve. Comme $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$ est solution de (P_ε) alors :

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v, z) \quad \forall (v, z) \in U, \tag{4.7.1}$$

en particulier pour $(\widehat{v}, \widehat{q}) \in B \subset U$. L'inégalité (4.7.1) s'écrit :

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\widehat{v}, \widehat{q}) = \frac{1}{2} \|\widehat{v}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T)}.$$

C'est à dire

$$\frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + \frac{1}{2\varepsilon} \|L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O - v\chi_\omega\|^2_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{2} \|\widehat{v}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T)} = C.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\omega\times(0,T))} &\leq C \quad \text{et} \\ \|L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O - v\chi_\omega\|_{L^2(Q)} &\leq C\sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

De la première inégalité de (4.7.2), on conclut que v_ε est bornée dans $L^2(\omega \times (0,T))$. Donc

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v_0 \text{ dans } L^2(\omega \times (0,T)).$$

D'autre part, du fait qu'on a $(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in U$ et d'après la deuxième inégalité de (4.7.2), on a :

$$\begin{cases} L^* z_\varepsilon = h_0\chi_O + v\chi_\omega + h_\varepsilon \\ z_\varepsilon(0) = z_\varepsilon(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ z_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.7.3}$$

avec,

$$h_\varepsilon = L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O - v\chi_\omega.$$

Etant donnée z_ε solution de l'équation de la chaleur (4.7.3), alors $z_\varepsilon \in H^{2,1}(Q)$. De plus, on a :

$$\|z_\varepsilon\|_{H^{2,1}(Q)} \leq C_1 \|h_0\chi_O + v\chi_\omega + h_\varepsilon\|_{L^2(Q)}.$$

Or, $\|h_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$, donc,

$$\|z_\varepsilon\|_{H^{2,1}(Q)} \leq C.$$

où C est une constante. Par conséquent, il existe une sous-suite notée $(z_\varepsilon)_\varepsilon$, telle que $z_\varepsilon \rightharpoonup z_0$ dans $H^{2,1}(Q)$. Comme l'injection de $H^{2,1}(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compacte, et par passage à la limite, on trouve finalement :

$$\begin{cases} L^* z_0 = h_0\chi_O + v_0\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ z_0(T) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ z_0 = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{4.7.4}$$

D'autre part, J_ε est convexe et continue alors :

$$\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2(\omega\times(0,T)} = J_\varepsilon(v_0, z_0) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon). \tag{4.7.5}$$

Utilisant dans (4.7.5) l'estimation :

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\widehat{v}, \widehat{q}) = \frac{1}{2}\|\widehat{v}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T)},$$

on obtient

$$\|v_0\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq \|\widehat{v}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}.$$

Enfin, comme $(\widehat{v}, \widehat{q})$ est l'unique solution du problème (P), alors $v_0 = \widehat{v}$.

D'autre part, z_0 est solution de (4.7.4) et par unicité de la solution pour l'équation de la chaleur, on déduit que $z_0 = \widehat{q}$.

□

La proposition suivante donne le système d'optimalité pour le couple optimal $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$.

Proposition 4.7.3 *Le problème (P_ε) admet une solution optimal $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$ si et seulement si, il existe une unique fonction $\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$ telle que $\{v_\varepsilon, z_\varepsilon, \rho_\varepsilon\}$ est solution du système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} L^* z_\varepsilon &= h_0\chi_O + v_\varepsilon\chi_\omega + \varepsilon\rho_\varepsilon & \textit{dans } Q, \\ z_\varepsilon(T) &= 0 & \textit{dans } \Omega, \\ z_\varepsilon &= 0 & \textit{sur } \Sigma, \end{cases}$$

avec,

$$z_\varepsilon(0) = 0 \ \textit{dans } \Omega,$$

et avec,

$$v_\varepsilon = -\rho_\varepsilon \chi_\omega$$

$$\begin{cases} L\rho_\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \Sigma\ , \\ \rho_\varepsilon\,(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Preuve. Comme $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$ est l'unique solution de (P_ε) alors, par application des conditions optimalité d'Euler-Lagrange, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda v, z_\varepsilon)_{\lambda=0} = 0,\ \forall v \in L^2(\omega \times (0,T))$$

ou bien :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda} J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon + \lambda z)_{\lambda=0} = 0,\ \forall z \in C^\infty\left(\overline{Q}\right) \text{ tel que} \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma,\ z(T) = z(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.7.6}$$

De la définition de la fonctionnelle J_ε et la linéarité de l'opérateur L^*, $J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda v, z_\varepsilon)$ s'écrit :

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda v, z_\varepsilon) = \frac{1}{2}\left\|v_\varepsilon + \lambda v\right\|^2_{L^2(Q_\omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|L^* z - h_0\chi_O - (v_\varepsilon + \lambda v)\chi_\omega\right\|^2_{L^2(Q)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda v, z_\varepsilon) - J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \quad = \quad & \frac{1}{2}\lambda^2\left\|v\right\|^2_{L^2(Q_\omega)} + \lambda\langle v_\varepsilon, v\rangle_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\varepsilon}\lambda^2\left\|v\chi_\omega\right\|^2_{L^2(Q)} \\ & + \frac{\lambda}{\varepsilon}\langle v_\varepsilon\chi_\omega, v\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)} - \frac{1}{\varepsilon}\langle L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O, v_\varepsilon\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)} \\ & - \frac{\lambda}{\varepsilon}\langle L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O, v\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)} - \frac{1}{2\varepsilon}\left\|v\chi_\omega\right\|^2_{L^2(Q)} \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\langle L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O, v_\varepsilon\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Il reste :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda v, z_\varepsilon) - J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \quad = \quad & \frac{\lambda^2}{2}\left(\left\|v\right\|^2_{L^2(Q_\omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|v\chi_\omega\right\|^2_{L^2(Q)}\right) \\ & + \lambda\Big[\langle v_\varepsilon, v\rangle_{L^2(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\langle v_\varepsilon\chi_\omega, v\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)} \\ & - \frac{1}{\varepsilon}\langle L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O, v\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)}\Big]. \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient :

$$\lim_{\lambda \to 0}\left(\frac{J_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda v, z_\varepsilon) - J_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon)}{\lambda}\right) = 0.$$

Donc :

$$\langle v_\varepsilon, v\rangle_{L^2(Q)} - \frac{1}{\varepsilon}\langle L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O - v_\varepsilon\chi_\omega, v\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)} = 0,\ \forall v \in L^2(Q_\omega) \tag{4.7.7}$$

Un calcul analogue à celui qui précède dans l'équation (4.7.6), donne :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q L^* z\left(L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O - v_\varepsilon\chi_\omega\right)dxdt = 0 \\ \forall z \in C^\infty\left(\overline{Q}\right) \text{ tel que } z = 0 \text{ sur } \Sigma,\ z(T) = z(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.7.8}$$

On introduit l'état adjoint défini par :

$$\rho_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(L^* z_\varepsilon - h_0\chi_O - v_\varepsilon\chi_\omega).$$

Donc (4.7.7) et (4.7.8) deviennent respectivement :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q \rho_\varepsilon L^* z dxdt = 0 \\ \forall z \in C^\infty\left(\overline{Q}\right) \text{ tel que } z = 0 \text{ sur } \Sigma,\ z(T) = z(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

et,

$$\langle v_\varepsilon, v\rangle_{L^2(Q)} - \frac{1}{\varepsilon}\langle \rho_\varepsilon, v\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)} = 0,\ \forall v \in L^2\left(\omega \times (0,T)\right).$$

On déduit

$$\langle \rho_\varepsilon, v\chi_\omega\rangle_{L^2(Q)} = -\langle v_\varepsilon, v\rangle_{L^2(Q)}.$$

D'où :

$$v_\varepsilon = -\rho_\varepsilon\chi_\omega \qquad \text{dans} \quad Q.$$

Ainsi, pour z dans $D(Q)$, on déduit que :

$$L\rho_\varepsilon = 0 \text{ dans } Q. \tag{4.7.9}$$

D'autre part, $\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$ avec $L\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$, donc par application du thèoréme de Lions-Magenes, les fonctions trace existent.

On multiple (4.7.9) par $z \in C^\infty\left(\overline{Q}\right)$ et on intègre par parties sur Q, on obtient

$$0 = \int\limits_Q L\rho_\varepsilon z dxdt = \int\limits_Q \rho_\varepsilon L^* z dxdt - \int\limits_\Omega \rho_\varepsilon(0) z(0) dx + \int\limits_\Omega \rho_\varepsilon(T) z(T) dx \tag{4.7.10}$$

$$+\delta\int\limits_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\rho_\varepsilon d\Sigma - \delta\int\limits_\Sigma \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \upsilon} z d\Sigma. \tag{4.7.11}$$

En particulier pour $z \in C^{\infty}\left(\overline{Q}\right)$ tel que $z = 0$ sur Σ, $z(T) = z(0) = 0$ dans Ω, et du fait qu'on a (4.7.8), alors (4.7.10) devient :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial z}{\partial v} \rho_{\varepsilon} d\Sigma = 0.$$

Enfin

$$\rho_{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et

$$\rho_{\varepsilon}(0) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

□

4.8 Système d'optimalité singulier

Dans cette partie, on va énoncer un résultat important qui donne le système d'optimalité pour le problème (P), caractérisant le contrôle optimal, ce qui implique aussi la construction de la sentinelle.

Théorème 4.8.1 *Le couple $(\widehat{v}, \widehat{q})$ est l'unique solution de (P), si et seulement si, il existe une fonction $\widehat{\rho}$ telle que le triplet $\{\widehat{v}, \widehat{q}, \widehat{\rho}\}$ soit solution du système d'optimalité suivant :*

$$\widehat{v} \in L^2(Q_{\omega}),\ \widehat{q} \in H^{2,1}(Q), \widehat{\rho} \in V$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \widehat{q}}{\partial t} - \delta \Delta \widehat{q} & = & h_0 \chi_O + \widehat{v} \chi_{\omega} & \textit{dans } Q, \\ \widehat{q}(T) & = & 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \widehat{q} & = & 0 & \textit{sur } \Sigma, \end{array}\right.$$

$$\widehat{q}(0) = 0 \quad \textit{dans } \Omega,$$

et de :

$$\left\{\begin{array}{rcll} L\widehat{\rho} & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ \widehat{\rho} & = & 0 & \textit{sur } \Sigma\ , \\ \widehat{\rho}(0) & = & 0 & \textit{dans } \Omega, \end{array}\right.$$

$$\widehat{v} = -\widehat{\rho} \chi_{\omega}.$$

Preuve. De l'égalité suivante :

$$v_\varepsilon = -\rho_\varepsilon \chi_\omega,$$

et du fait v_ε satisfait la première inégalité de (4.7.2) il vient,

$$\|\rho_\varepsilon \chi_\omega\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C, \tag{4.8.1}$$

et comme,

$$L\rho_\varepsilon = 0 \text{ dans } Q,$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon\|_V^2 &= \|L\rho_\varepsilon\|_{L^2(Q)}^2 + \|\rho_\varepsilon\|_{L^2(Q_\omega)}^2 && (4.8.2) \\ &= \|\rho_\varepsilon \chi_\omega\|_{L^2(Q_\omega)}^2 . && (4.8.3) \end{aligned}$$

D'après (4.8.1) et (4.8.2), on conclut que $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans V. Par conséquent, il existe une sous suite $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ et une fonction $\widehat{\rho}$ dans V telles que :

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{\rho} \quad \text{faiblement dans } V.$$

Ainsi,

$$\rho_\varepsilon \chi_\omega \rightharpoonup \widehat{\rho} \qquad \text{faiblement dans } \; L^2(Q_\omega).$$

D'autre part, de la proposition précédente on a :

$$v_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{v} \text{ faiblement dans } L^2(\omega \times (0,T)).$$

Par unicité de la limite, on déduit enfin que :

$$\widehat{v} = -\widehat{\rho}\chi_\omega.$$

□

Chapitre 5

Stabilité du modèle SIR

Les systèmes dynamiques, naturels on créer par l'homme, fonctionnent généralement dans un certain mode spécifié. Les modes de fonctionnement les plus courants sont les points de fonctionnement, cela se révèle souvent être des équilibres. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons principalement au comportement qualitatif des équilibres. La plupart du temps, nous nous intéresserons à la stabilité asymptotique de l'équilibre (point de fonctionnement, ce qui signifie que l'état d'un système donné est déplacé (perturbé) de son fonctionnement souhaité (point d'équilibre), on s'attend dans ce cas à ce que l'état finisse par retourner à son équilibre.

Les systèmes dynamiques dépendant de paramètres sont communément, utilisés pour modéliser l'évolution des maladies infectieuses.

Couramment les modèles obtenus ont un équilibre sans maladie. L' une des questions fondamentales est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres pour que l'équilibre sans maladie soit asymptotiquement stable. Un modèle épidémiologique possède une quantité seuil, appelée le taux de reproduction de base noté R_0, telle que l'équilibre sans maladie est asymptotiquement stable quand $R_0 < 1$ et instable quand $R_0 > 1$. Biologiquement parlant R_0 est le nombre moyen d'infectés quand un individu infectieux typique est introduit dans une population complètement susceptible. Le modèle de Kermack et McKendrick est sans démographie, i.e. sans dynamique vitale.

5.1 Position du problème

Les modèles SIR classiques sont aussi importants comme modèles conceptuels (similaires aux modèles proie-prédateur et espéces compétitives en écologie). Dans cette partie on étudie la stabilité du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{S} &=& \mu N(t) - \beta S(t)I(t) - \mu S \\ \dot{I} &=& \beta S(t)I(t) - (\gamma+\mu)I(t) \\ \dot{R} &=& \gamma I(t) - \mu R(t) \end{array}\right. \tag{5.1.1}$$

Nous présenterons dans ce cas quelques résultat importants en se basant de [11].

Théorème 5.1.1 *Soit* $\Omega = \left\{(S,I,R) \in R_+^3 \ \big/ S+I+R \leq N,\ S(0) \dot{>} 0,\quad I(0) \dot{>} 0\ ,\ R(0) \dot{>} 0\ \right\}$, *alors les solutions* $\{S(t),\ I(t), R(t)\}$ *du système (5.1.1) sont positives pour* $t \geq 0$.

Preuve. $\dot{S} = \mu N - \beta SI - \mu S \dot{>} 0$ donc $S(t)$ croissante $\forall t$ donc $S(t) \geq S(0) \rangle 0 \quad ,\forall t \geq 0$
De même pour
$\dot{I} = \beta SI - (\gamma+\mu)I \dot{>} 0$ donc $I(t)$ croissante $\forall t$ donc $I(t) \geq I(0) \dot{>} 0 \quad ,\forall t \geq 0$
$\dot{R} = \gamma I - \mu R \ \rangle 0 > 0$ $R(t)$ croissante $\forall t$ donc $R(t) \geq R(0) \dot{>} 0 \quad ,\forall t \geq 0$ □

Remarque 5.1.1 *On suppose que le taux de natalité est égal au taux de mortalité .*

5.2 Détermination des équilibre :

La recherche de points d'équilibres est très importantes, car dans tout les cas les trajectoires (ensemble de compartiments $\{S(t),\ I(t), R(t), t > 0\}$du système vont tendre asymptotiquement vers l′un des points d′équilibres, quand $t \to +\infty$ et celui-ci sera dit asymptotiquement stable. Ces points sont obtenus en posant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{S} &=& 0 \\ \dot{I} &=& 0 \\ \dot{R} &=& 0 \end{array}\right. \tag{5.2.1}$$

$$\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$$

Donc la taille de la population est constante , nous pouvons alors mettre l'équation des guéris. Le système réduit est donc,

$$\begin{cases} \dot{S} &= \mu N - \beta SI - \mu S \\ \dot{I} &= \beta SI - (\gamma + \mu) I \end{cases} \tag{5.2.2}$$

$$\begin{cases} \dot{S} &= 0 \\ \dot{I} &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_e &= N \\ I_e &= 0 \end{cases}$$

par suite, le point d'équilibre sera $(N, 0)$

5.3 Calcul de $\mathbf{R}_0$

Pour calculer la valeur de R_0 , nous allons utiliser les techniques de Van den Driessche et Watmough [29]

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \mu N \\ \beta SI \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_i^- = \begin{pmatrix} \beta SI + \mu S \\ (\gamma + \mu) I \end{pmatrix}$$

Puisque les fonctions $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{V}_i^-$ réalisent les hypothèses $(A_1)...(A_3)$ donc on a :

$$\begin{aligned} F &= D\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta I & \beta S \end{pmatrix}, \quad V = D\mathcal{V}_i^- = \begin{pmatrix} \beta I + \mu & \beta S \\ 0 & \gamma + \mu \end{pmatrix}, \\ D &: \quad \text{on dérive par rapport à (S,I,R)} \end{aligned}$$

F est non négative, V est non singulière.

On écrit les matrices Jacobienne F et V au point $(S_e, 0)$ sans maladie

$$V_{(S_e,0)} = \begin{pmatrix} \mu & \beta N \\ 0 & \gamma + \mu \end{pmatrix}$$

$$\det V_{(S_e,0,0)} = \mu(\gamma + \mu) \geq 0$$

Soit donc V est inversible.

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V_{(S_e,0)}} {}^t(comV_{(S_e,0)})$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & \frac{\beta N}{\mu(\gamma+\mu)} \\ 0 & \frac{1}{\gamma+\mu} \end{pmatrix}$$

$$F_{(S_e,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta N \end{pmatrix},$$

Afin d'obtenir la matrice de prochaine génération :

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta N}{\gamma+\mu} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} \det(FV^{-1} - \alpha I) & = & 0 \\ \begin{vmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \frac{\beta N}{\gamma+\mu} - \alpha \end{vmatrix} & = & 0 \Longleftrightarrow \alpha(\dfrac{\beta N}{\gamma + \mu} - \alpha) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\beta N}{\gamma+\mu} \end{array} \right. \end{array}$$

Le nombre de reproduction de base R_0 est donné par :

$R_0 = \rho(-FV^{-1})$ est le rayon spéctral de la matrice de la prochaine génération

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} R_0 & = & \max\left\{0, \dfrac{\beta N}{\gamma + \mu}\right\} \\ R_0 & = & \dfrac{\beta N}{\gamma + \mu} \end{array}$$

Nous résumons enfin suite à [29], que le DFE du modèle SIR est localement asymptotiquement stable si $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma+\mu} < 1$ et instable si $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma+\mu} > 1$.

Le système a un équilibre sans maladie DFE qui est donné par $(N, 0)$.

5.4 Stabilité globale du modèle SIR

Notons que les systèmes dynamiques sont très répandus en modélisation biologique, et en particulier en épidémiologie. Dans beaucoup de modèles épidémiologiques l'équilibre sans maladie est stable lorsqu'une quantité seuil, en l'occurrence le taux de reproduction de base, est inférieure à 1. Lorsque cette même quantité dépasse 1 l'équilibre sans maladie perd sa stabilité au profit d'un équilibre endémique.

De façon générale la stabilité globale de l équilibre endémique lorsque $R_0 > 1$ des modèles $SEIR$ a été longtemps conjoncturée et a été prouvée en 1995 par Li et Muldowney dans son ouvrage. La preuve repose sur la nature compétitive du système.

Théorème 5.4.1 *Si $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma+\mu} \leq 1$ alors le DFE est globalement asymptotiquement stable sur Ω.*

Preuve. On considère la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V(S,I) &= I \\
\dot{V} &= \dot{I} \\
\dot{V} &= \beta SI - (\gamma+\mu)I. \\
\dot{V} &= (\beta S - (\gamma+\mu))I, \text{ en remplaçe } \beta = \frac{R_0}{N}(\gamma+\mu) \\
\dot{V} &= \left[\frac{R_0}{N}(\gamma+\mu)S - (\gamma+\mu)\right] I \\
\dot{V} &= I(\frac{R_0}{N}S - 1)(\gamma+\mu) \leq 0
\end{aligned}$$

$$\dot{V} = 0 \text{ si } \left\{ \begin{array}{c} I = 0 \\ S = N \text{ et } R_0 = 1 \end{array} \right.$$

Donc le plus grand ensemble invariant contenu dans cet ensemble est

$$L = \left\{ (S,I) \in \Omega \Big/ \frac{dV}{dt} = 0 \right\}$$

qui est réduit au DFE. Puisque nous somme dans un compact positivement, par le principe d'invariance de la Salle, le DFE est globalement asymtotiquement stable dans Ω. □

Remarque 5.4.1 *Contrairement aux théorèmes de Lyapunov, le principe d'invariance de LaSalle ne requièrt pas que la fonction $V(x(t))$ soit définie positive. Si le plus grand ensemble invariant M, contenu dans l'ensemble E des points où V est nulle, est réduit au point d'équilibre, i.e. si $M = \{x_0\}$, le principe d'invariance de LaSalle [32] permet de conclure que l'équilibre est attractif. Mais l'inconvenient du principe de Lasalle, est qu'il prouve seulement l'attractivité du point d'équilibre.*

Il est bien connu que dans les cas non linéaires, l'attractivité n'implique pas la stabilité. Mais quand la fonction $V(x(t))$ n'est pas définie positive, la stabilité de Lyapunov peut être prouvée. C'est pourquoi le principe de LaSalle est souvent maladroitement cité. Des conditions additionnelles permettent, avec le principe de LaSalle, de vérifier la stabilité asymptotique. Pour obtenir la stabilité du principe de LaSalle, un travail supplémentaire est nécessaire. Le résultatle plus complet, dans le but de l'utilisation du principe de LaSalle pour prouver la stabilité asymptotique, a été obtenue par LaSalle lui-même voir [31]. .

5.4.1 Stabilité globale de l'équilibre endémique

On considère dans cette sous section le système suivant,

$$\begin{cases} \dot{S} &= \mu N - \beta SI - \mu S....(1) \\ \dot{I} &= \beta SI - (\gamma + \mu)I....(2) \end{cases} \tag{5.4.1}$$

alors, un équilibre pour ce système différent de $DFE = (N, 0)$ est donné par $\left(\overline{S}, \overline{I}\right)$,

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \frac{\gamma + \mu}{\beta} \\ &= \frac{\overline{N}}{R_0} \end{aligned}$$

En remplaçant $\overline{S}$ dans l'équation (1)

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \frac{\mu}{\beta}\frac{\overline{N}}{\overline{S}} - \frac{\mu}{\beta} \\ \overline{I} &= \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1) \end{aligned}$$

Donc $\left(\overline{S}, \overline{I}\right)$ ce point d'équilibre est dans le simplexe c'est à dire $0 \leq \overline{S}, 0 \leq \overline{I}$ et $\overline{S} + \overline{I} \leq N$ si et seulement si $R_0 > 1$, clairement $0 \leq \overline{I} \Longleftrightarrow R_0 \geq 1$

Quand $R_0 = 1$, cet équilibre coincide avec le DFE , alors il existe un unique équilibre dans l'intérieur du simplexe si et seulement si $R_0 > 1$.

Théorème 5.4.2 *Si* $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma + \mu} > 1$ *alors le point endémique* $\left(\overline{S}, \overline{I}\right)$ *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. On pose la fonction candidat de Lyapunov telle que,

$$V(S,I) = (S - \overline{S}\ln S) + (I - \overline{I}\ln I)$$

qui vérifie les conditions imposées :1-

$$V(S,I) \geq 0$$

2-

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{S-\overline{S}}{S}\right)\frac{dS}{dt} + \left(\frac{I-\overline{I}}{I}\right)\frac{dI}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \left(\frac{S-\overline{S}}{S}\right)(\mu N - \beta SI - \mu S) + \left(\frac{I-\overline{I}}{I}\right)(\beta SI - (\gamma+\mu)I). \\
\frac{dV}{dt} &= P - Q
\end{aligned}$$

Où

$$P = \mu N + \overline{S}\beta I + \overline{S}\mu + \beta SI + \overline{I}(\gamma+\mu)$$

$$Q = \beta SI + \mu S + \frac{\overline{S}}{S}\mu N + I(\gamma+\mu) + \beta S\overline{I}$$

On conclut que, si $P < Q$ alors $\frac{dV}{dt} \leq 0$ et $\frac{dV}{dt} = 0$ si $S = \overline{S}$, $I = \overline{I}$.donc le plus grand ensemble invariant contenu dans

$$L = \left\{(S,I) \in \Omega \Big/ \frac{dV}{dt} = 0\right\}$$

est réduit à l'équilibre endémique ainsi d'après le principe d'invarant La salle $\left(\overline{S},\overline{I}\right)$ le point endémique est globalement asymptotiquement stable dans Ω si $P < Q$. □

5.5 Stabilité de modèle SIR avec mortalité différentes

Dans cette section, nous proposons un modèle plus réaliste avec une population constante. Nous supposons lequel est plus ou mois est obervable, que la natalité compense la mortalité. Notre modèle traite le cas où les mortalités sont différentes, donc la dynamique de ce modèle est donc donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{S} & = & \mu_1 S + \mu_2 I + \mu_3 R - \beta SI - \mu_1 S \\ \dot{I} & = & \beta SI - (\gamma + \mu_2) I \\ \dot{R} & = & \gamma I - \mu_3 R\end{array}\right. \tag{5.5.1}$$

Qui se réduit à

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{S} & = & \mu_2 I + \mu_3 R - \beta SI \\ \dot{I} & = & \beta SI - (\gamma + \mu_2) I \\ \dot{R} & = & \gamma I - \mu_3 R\end{array}\right.$$

La taille de la population est constante, Nous pouvons donc omettre l'équation des guéris. Nous obtenons alors le système plan :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{S} & = & \mu_2 I + \mu_3 (N - I - S) - \beta SI \\ \dot{I} & = & \beta SI - (\gamma + \mu_2) I\end{array}\right.$$

5.6 Les points d'équilibres :

On s'intèresse au calcul de points d'équilibre pour le cas les mortalités sont différentes,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{S} & = & 0 \\ \dot{I} & = & 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mu_2 I + \mu_3 (N - I - S) - \beta SI & = & 0...(1) \\ \beta SI - (\gamma + \mu_2) I & = & 0...(2)\end{array}\right.$$

$$. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}S_e = N \\ \text{et} \\ I_e = 0\end{array}\right.$$

Donc le point d'équilibre est $(N, 0)$

Remarque 5.6.1 - *Le point d'équilibre $(S_e, 0)$ est bien une solution du système .*

5.7 Calcul de $\mathbf{R}_0$

On utilise la même techniques de Van den Driessche et Watmough [29] pour calculer R_0,

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \mu_3 N + \mu_2 I \\ \beta SI \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}_i^- = \begin{pmatrix} \mu_3 I + \mu_3 S + \beta SI \\ (\gamma + \mu_2) I \end{pmatrix}$$

Soit alors,

Puisque les fonctions $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{V}_i^-$ réalisent les hypothèses $(A_1)...(A_3)$ il s'ensuit :

$$F = D\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \\ \beta I & \beta S \end{pmatrix}, \quad V = D\mathcal{V}_i^- = \begin{pmatrix} \beta I + \mu_3 & \beta S + \mu_3 \\ 0 & \gamma + \mu_2 \end{pmatrix}$$

F est non négative, V est non singulière.

On calacule V au point $(S_e, 0)$

$$V_{(S_e,0)} = \begin{pmatrix} \mu_3 & \beta N + \mu_3 \\ 0 & \gamma + \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\det V_{(S_e,0)} = \mu_3(\gamma + \mu_2) \geq 0$$

Donc V est inversible, et

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V_{(S_e,0,0)}} {}^t(comV_{(S_e,0,0)})$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_3} & \beta \frac{N}{\mu_3((\gamma+\mu_2)} \\ 0 & \frac{1}{\gamma+\mu_2} \end{pmatrix}$$

$$F_{(S_e,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta N \end{pmatrix},$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(FV^{-1} - \alpha I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2} - \alpha \end{vmatrix} &= 0 \Longleftrightarrow \alpha(-\frac{\beta N}{\gamma + \mu_2} + \alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{ou} \\ \alpha = \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2} \end{cases} \end{aligned}$$

Et,

$$sp(FV^{-1}) = \left\{0, \frac{\beta N}{\gamma + \mu_2}\right\}$$

donc

$$\begin{aligned} R_0 &= \max\left\{0, \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2}\right\} \\ R_0 &= \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2} \end{aligned}$$

De la même manière et en se basant de [29] , on constate que le DFE du modèle SIR est localement asymptotiquement stable si $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2} < 1$ et instable si $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2} > 1$.

5.8 Stabilité globale du modèle SIR

Pour les systèmes de dimension quelconque, une des méthodes les plus élégantes est celle de Lyapunov. Cette méthode est devenue populaire récemment en écologie et épidémiologie mathématiques. En 1977, Goh l'utilisait pour la stabilité globale dans un système où plusieurs espèces sont en compétition.

Théorème 5.8.1 *Si $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma+\mu_2} \leq 1$ alors le DFE est globalement asymptotiquement stable sur Ω.*

Preuve. On considère la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} V(S,I) &= I \\ \dot{V} &= \dot{I} \\ \dot{V} &= \beta SI - (\gamma+\mu_2)I. \\ \dot{V} &= (\beta S - (\gamma+\mu_2))I, \text{ en remplaçe } \beta = \frac{R_0}{N}(\gamma+\mu_2) \\ \dot{V} &= \left[\frac{R_0}{N}(\gamma+\mu_2)S - (\gamma+\mu_2)\right] I \\ \dot{V} &= I(\frac{R_0}{N}S - 1)(\gamma+\mu_2) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\dot{V} = 0 \text{ si } \left\{ \begin{array}{c} I = 0 \\ S = N \text{ et } R_0 = 1 \end{array} \right.$$

Donc le plus grand ensemble invariant contenu dans cet ensemble est

$$L = \left\{(S,I) \in \Omega \Big/ \frac{dV}{dt} = 0\right\}$$

qui se réduit au DFE. puisque nous somme dans un compact positivement, par le principe d'invariance de la Salle, le DFE est globalement asymtotiquementstable dans Ω. $\square$

5.8.1 Stabilité globale de l'équilibre endémique

$$\left\{\begin{array}{lll}\dot{S} & = & \mu N - \beta SI - \mu S....(1) \\ \dot{I} & = & \beta SI - (\gamma+\mu)I....(2)\end{array}\right. \tag{5.8.1}$$

Un équilibre pour ce système different de $DFE = (N, 0)$ est donné par $\left(\overline{S}, \overline{I}\right)$ ou

$$\overline{S} = \frac{\gamma + \mu_2}{\beta} = \frac{\overline{N}}{R_0}$$

on remplace $\overline{S}$ dans l'équation (1)

$$\begin{array}{lll}\overline{I} & = & (\mu_2 - \mu_3)\overline{I} + \mu_3\overline{N} - \mu_3\overline{S} \\ \overline{I} & = & (\mu_2 - \mu_3)\overline{I} + \mu_3\overline{N}(1 - \dfrac{1}{R_0})\end{array}$$

Donc $\left(\overline{S}, \overline{I}\right)$ est une point d'équilibre qui repose est dans le simplexe, c'est à dire $0 \leq \overline{S}, 0 \leq \overline{I}$ et $\overline{S} + \overline{I} \leq N$ si et seulement si $R_0 > 1$, clairement $0 \leq \overline{I} \Longleftrightarrow R_0 \geq 1$

Quand $R_0 = 1$, cet équilibre coincide avec le DFE, il existe alors un unique équilibre à l'intérieur du simplexe si et seulement $R_0 > 1$.

Une autre caractérisation testant la stabilité est donnée par le théorème suivant,

Théorème 5.8.2 *Si $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma + \mu_2} > 1$ alors le point endémique $\left(\overline{S}, \overline{I}\right)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. On pose dans ce cas la fonction candidate de Lyapunov telle que,

$$V(S, I) = (S - \overline{S} \ln S) + (I - \overline{I} \ln I)$$

$$V(S, I) \geq 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{S - \overline{S}}{S}\right)\frac{dS}{dt} + \left(\frac{I - \overline{I}}{I}\right)\frac{dI}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \left(\frac{S-\overline{S}}{S}\right)(\mu_2 I + \mu_3(N-I-S) - \beta SI) + \left(\frac{I-\overline{I}}{I}\right)(\beta SI - (\gamma+\mu_2)I). \\
\frac{dV}{dt} &= P - Q
\end{aligned}$$

avec

$$P = \mu_3 N + \overline{S}\beta I + \overline{S}\mu_3 + \beta SI + \overline{I}(\gamma+\mu_2)$$
$$Q = \beta SI + \mu S + \frac{\overline{S}}{S}\mu N + I(\gamma+\mu_3) + \beta S\overline{I}$$

Si $P < Q$ alors $\frac{dV}{dt} \leq 0$ et $\frac{dV}{dt} = 0$ si $S = \overline{S}$, $I = \overline{I}$., donc le plus grand ensemble invariant contenu dans

$$L = \left\{(S,I) \in \Omega \Big/ \frac{dV}{dt} = 0\right\}$$

est réduit à l'équilibre endémique et d'après le principe d'invarant La salle $\left(\overline{S},\overline{I}\right)$ le point endémique est globalement asymptotiquement stable dans Ω si $P < Q$. $\square$

5.9 Analyse et contrôle optimal

Nous appliquons la méthode de contrôle optimal, en utilisant le principe maximum de Pontryagins afin de déterminer les conditions nécessaires pour, la recherche d'un contrôle optimal de la maladie . Nous intégrons des contrôles en fonction du temps dans le modèle (5.1.1), pour déterminer la stratégie optimale de contrôle de la maladie. Nous récrivons le modèle comme

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{dS}{dt} &=& (1-u_1)\,\mu N(t) - \beta S(t)I(t) - \mu S \\
\frac{dI}{dt} &=& \beta S(t)I(t) - (\gamma+\mu)I - u_2(t)I \\
\frac{dR}{dt} &=& u_1(t)\mu N(t) + \gamma I - \mu R + u_2(t)I
\end{array}\right. \tag{5.9.1}$$

D'abord on calcule les solutions endémique du système,

Calcul des points d'équilibres endémiques

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{S} &=& (1-u_1)\,\mu N(t) - \beta S(t)I(t) - \mu S. \\
\dot{I} &=& \beta S(t)I(t) - (\gamma+\mu)I - u_2(t)I \\
\dot{R} &=& u_1(t)\mu N(t) + \gamma I - \mu R + u_2(t)I
\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}
\dot{S} &=& 0...(1). \\
\dot{I} &=& 0..(2).. \\
\dot{R} &=& 0.....(3)
\end{array}\right.$$

$$(1) \Rightarrow \mu N = \beta\overline{S}I - \mu\overline{S} = (\beta I - \mu)\overline{S} \Rightarrow \overline{S} = \frac{(1-u_1)\,\mu\overline{N}}{\beta\overline{I} - \mu}, \text{telle que} \overline{N} = \overline{S} + \overline{I} + \overline{R}$$

On remplace dans l'équation (2) on obtient,

$$\overline{I} = 0, \quad \overline{R} = \frac{u_1(t)\mu N(t)}{\mu}$$

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T \left(A_1 S + A_2 I + \frac{B_1 u_1^2}{2} + \frac{B_2 u_2^2}{2} \right) dt \tag{5.9.2}$$

Les constantes A_1, A_2, B_1, B_2 sont des constantes de pondération qui aident à équilibrer chaque terme de l'intégrale.
Donc le problème est de trouver fonctions optimale $u_1(t), u_2(t)$ tel que

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min \{J(u_{1,} u_2) | u_1, u_2 \in U\} \tag{5.9.3}$$

Où

$$U = \{(u_{1,} u_2), \ 0 \leq u_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq u_2 \leq 1 \text{ pour } t \in [0, T]\} \ .$$

Sous réserve du système (5.9.1) et des conditions initiales appropriées [13], nous utilisons le principe de maximum de Pontryagin pour résoudre ce problème de contrôle optimal.
Nous prouvons l'existence de contrôle optimal pour le système (5.1.1), donc notre objectif est de maximiser la fonctionnelle objectif en minimisant le groupe infecté aussi le groupe vacciné.

Nous exposons le résultat suivant

Théorème 5.9.1 *iL existe deux contrôles optimals $u_1^*(t), u_2^*(t)$ correspendant aux solutions $(\overline{S}, \overline{I}, \overline{R})$ qui minimisent $J(u_1, u_2)$ dans U.*

Preuve. la fonction objectif définie par intégrale est une fonction convexe de u_1, u_2 et le système d'état (5.1.1) satisfait la propriété de Lipshitz, et puisque les variables d'état sont bornées donc il existe contrôles optimals $u_1^*(t), u_2^*(t)$ voir [33]. □

Afin de trouver une solution optimal, nous devons trouver le Lagrangien et l'hamiltonien pour le problème (5.1.1)-(5.9.2), le Lagrangien du problème de contrôle est donné par :

$$L(S, I, u_1, u_2) = A_1 S + A_2 I + \frac{B_1 u_1^2}{2} + \frac{B_2 u_2^2}{2}$$

et l'Hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= L(S, I, u_1, u_2) + \lambda_1 \left[(1 - u_1)\, \mu N(t) - \beta S(t) I(t) - \mu S \right] \\ &\quad + \lambda_2 \left[\beta S(t) I(t) - (\gamma + \mu) I - u_2(t) I \right] + \lambda_3 \left[u_1(t) \mu N(t) + \gamma I - \mu R + u_2(t) I \right] \end{aligned} \tag{5.9.4}$$

Nous dérivons les conditions nécessaires, en utilisant le principe de maximum de Pontryagin voir [20] , les fonctions de contrôles optimal et les états correspondants doivent satisfaire

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial H}{\partial S} & = & A_1 + \lambda_1((1 - u_1)\, \mu - \beta I - \mu) + \lambda_2(\beta I) + \lambda_3(u_1 \mu) \\ \frac{\partial H}{\partial I} & = & \begin{array}{c} A_2 + \lambda_1((1 - u_1)\mu - \beta S) + \lambda_2(\beta S - (\gamma + \mu) - u_2) \\ + \lambda_3(u_1 \mu + \gamma + u_2) \end{array} \\ \frac{\partial H}{\partial R} & = & \lambda_1((1 - u_1)\mu + \lambda_3(u_1 \mu - R) \end{array} \right.$$

La proposition suivante donne une caractérisation de contrôle.

Proposition 5.9.1 *Pour les contrôles* (u_1^*, u_2^*) *minimisant* $J(u_1, u_2)$ *sur* U*, il existe des variables adjointes* λ_1*,* λ_2*,* λ_3 *satisfaisant :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} & = & -\frac{\partial H}{\partial S} \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} & = & -\frac{\partial H}{\partial I} \\ \frac{d\lambda_3(t)}{dt} & = & -\frac{\partial H}{\partial R} \end{array} \right.$$

Avec des conditions de tranversalité $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3\ (T) = 0$ *le contrôle optimal est donné par :*

$$\begin{aligned} u_1^* &= \max \left\{ 0, \min \left(1, \frac{\lambda_1 \mu N(t) - \lambda_3 \mu N(t)}{B_1} \right) \right\} \\ u_2^* &= \max \left\{ 0, \min \left(1, \frac{\lambda_2 I - \lambda_3 I}{B_2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{5.9.5}$$

Preuve. Afin de déterminer les conditions de transversalité et les équations adjoints, on utilise l'hamiltonien (5.9.4) le système adjoint résulte du maximum de Pontryagin, donc on résoudre les équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_1 u_1 - \lambda_1 \mu N + \lambda_3 \mu N & = 0 \\ B_2 u_2 - \lambda_2 I + \lambda_3 I & = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\lambda_1 \mu N(t) - \lambda_3 \mu N(t)}{B_1} \\ u_2 &= \frac{\lambda_2 I - \lambda_3 I}{B_2} \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de l'espace de contrôle U,on peut obtenir la caractérisation (5.9.5),

$$\begin{aligned} u_1^* &= \max\left\{0, \min\left(1, \frac{\lambda_1 \mu N(t) - \lambda_3 \mu N(t)}{B_1}\right)\right\} \\ u_2^* &= \max\left\{0, \min\left(1, \frac{\lambda_2 I - \lambda_3 I}{B_2}\right)\right\} \end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Exemple de Modélisation de la propagation d'un virus la grippe

Nous proposons dans ce chapitre un exemple d'application issu de [24]. Il s'agit d'un exemple qui a été étudié par M.Jénôme You, la simulation a été réalisé par logiciel scilab, notre objectif est de comprendre et de donner les méthodes mathématiques pour ce modèle traduisant la propagation d'un virus de grippe. La grippe est un virus, un virus est une particule de dimension très faible où notons que les moyens de transmission de la grippe est :

- Soit par voie aérienne.
- Soit par un contacte rapproché d'une personne infectée.
- Où par contacte avec les objets touchés par une personne contaminée.

IL est important de savoir que la grippe devienne contagieuse le jour avant et le restent durant sept jours, la vitesse de propagation croit rapidement avec une très forte concentration de population (métro,écoles,.....). Les personnes les plus sensibles aux virus de la grippe sont les jeunes, les personnes agées, et les malades souffrant de maladies graves.

6.1 Présentation du modèle :

A partir du modèle de base suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{S} &=& -\beta SI \\ \dot{I} &=& \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} &=& \gamma I \end{array}\right. \tag{6.1.1}$$

Nous imaginons une vaccination fictive et nous observons les changements sur la propagation du virus, en partant alors du modèle, nous avons tenté d'améliorer les équations afin qu'elle correspondent de mieux à la réalité. En effet de nombreux paramètres rentrent en jeu lors de la propagation d'un virus et ne sont pas pris en compte dans le modèle de base. Nous avons donc modifié les équations en rajoutant certains paramètres. le nombre de morts, la vaccination, la durée limitée de l'immunité....On introduit un nouveau facteur v, ce paramètre prend en compte la durée limitée de l'immunité puisque l'efficacité d'un vaccin n'est pas illimitée dans le temps. Un certain nombre d'individus immunisés redeviennent donc sains, sans défenses immunitaires, les équations sont donc modifiées

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI + vR \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I - vR \end{cases}$$

Nous introduisons ensuite une nouvelles catégorie de population $M(t)$ les morts liés à la maladie pour cela, il faut également introduire un nouveaux facteur μ taux de mortalité des maladies, plus ce coefficient est grand, plus la maladie est mortelle.

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI + vR \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \dot{R} &= \gamma I - vR \\ \dot{M} &= \mu I \end{cases} \tag{6.1.2}$$

Enfin on introduit le paramètre de vaccination aux équations, la vaccination se traduit par le fait que certaines personnes passent du statut individu sain S au statut individu immunisé R sans être malade. Soit ρ le pourcentage de vaccinés on obtient donc,

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI - \rho S + vR \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \dot{R} &= \gamma I + \rho S - vR \\ \dot{M} &= \mu I \end{cases} \tag{6.1.3}$$

Pour exploiter le problème, nous avons étudié la grippe comme une maladie fictive sur une période trop courte pour que la durée de l'immunité soit prise en compte.

Détermination des équilibre :

Puisque

$$\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} + \dot{M} = 0$$

par suite,

$$N(t) = \text{ constante}$$

de plus, les trois premières équations du système ne dépendent pas de M, alors nous allons étudié la stabilité du modèle SIR

6.2 Position du problème :

On considèle le modèle SIR suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{S} & = & -\beta SI - \rho S + vR \\ \dot{I} & = & \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \dot{R} & = & \gamma I + \rho S - vR \end{array}\right. \tag{6.2.1}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{S} & = & 0 \\ \dot{I} & = & 0 \\ \dot{R} & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -\beta SI - \rho S + vR & = & 0 \\ \beta SI - \gamma I - \mu I & = & 0 \\ \gamma I + \rho S - vR & = & 0 \end{array}\right.$$

et on a

$$M = N - S - I - R \tag{6.2.2}$$

Donc le point d'équilibre est le point $(0,0,0)$

Remarque 6.2.1 - *Le point d'équilibre* $(0,0,0)$ *est bien une solution du système (6.2.1) .*

Calcul de $\mathbf{R}_0$

Soit

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \nu R \\ \beta SI \\ \gamma I + \rho S \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_i^- = \begin{pmatrix} \beta SI + \rho S \\ (\gamma + \mu) I \\ vR \end{pmatrix}$$

Puisque les fonctions $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{V}_i^-$ réalisent les hypothèses $(A_1)...(A_3)$ donc on a :

$$F = D_{(S,I,R)}\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ \beta I & \beta S & 0 \\ \rho & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad V = D_{\prime(S,I,R)}\mathcal{V}_i^- = \begin{pmatrix} \beta I + \rho & \beta S & 0 \\ 0 & \gamma + \mu & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

F est non négative, V est non singulière.

On calacule V au point $(S_e, 0, 0)$

$$V_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \gamma+\mu & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

$$\det V_{(S_e,0,0)} = \rho(\gamma+\mu)v \geq 0$$

V étant inversible.

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V_{(S_e,0,0)}} {}^t(comV_{(S_e,0,0)})$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma+\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\gamma}{\gamma+\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(FV^{-1} - \alpha I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 1 & \frac{\gamma}{\gamma+\mu} & -\alpha \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$R_0 = \rho(-FV^{-1}) \text{ le rayon spéctral de la matrice de la prochaine génération}$$

et,

$$sp(FV^{-1}) = \{0, -1, 1\}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} R_0 &= \max\{0,-1,1\} \\ R_0 &= 1 \end{aligned}$$

D'après théorème 5.4.1 chapitre 5, le point d'équilibre $(0,0,0)$ est globalement asymptotiquement stable .

6.2.1 Méthode des sentinelles :

Si on ajoute de la diffusion spaciale $\delta\Delta$ et le terme de pollution λ, le terme manquant τ le système s'écrira,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \partial_t S - \delta\Delta S &=& -\beta SI - \rho S + vR & \text{dans } Q, \\ \partial_t I - \delta\Delta I &=& \beta SI - (\gamma+\mu)I + \lambda\widehat{I} & \text{dans } Q, \\ \partial_t R - \delta\Delta R &=& \gamma I + \rho S - vR & \text{dans } Q, \\ \\ S(0) &=& S^0 + \tau\widehat{S^0} & \text{dans } \Omega, \\ I(0) &=& I^0 & \text{dans } \Omega, \\ R(0) &=& R^0 & \text{dans } \Omega, \\ \\ S &=& 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I &=& 0 & \text{sur } \Sigma, \\ R &=& 0 & \text{sur } \Sigma \end{array}\right. \tag{6.2.3}$$

Pour simplifier ce système, nous additionons les trois premières équations nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{cccc} \frac{\partial N}{\partial t} - \delta\Delta N &=& \lambda\widehat{I} - \mu I & \text{dans } Q, \\ N(0) &=& N^0 + \tau\widehat{S}^0 & \text{dans } \Omega, \\ N &=& 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{6.2.4}$$

Soit l'état $N(t,x;\lambda,\tau) := N(\lambda,\tau)$ correspandant à une population infectée $\lambda\widehat{I}$ et à un terme manquant $\tau\widehat{S^0}$. Pendant un temps T on choisit h_0 tel que $h_0 \in L^2(O\times(0,T))$.

Soit ω (domaine du contrôle) un sous-ensemble ouvert non vide de Ω ($\omega \subset \Omega$, $\omega \neq O$). Étant donné une fonction de contrôle $v \in L^2(\omega\times(0,T))$, on pose :

$$\mathcal{S}(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_O h_0\, N(\lambda,\tau)\, dxdt + \int_0^T \int_\omega vN(\lambda,\tau)\, dxdt. \tag{6.2.5}$$

Nous considérons :

$$v \subset\subset O. \tag{6.2.6}$$

Equivalence à un problème de contrôlabilité à zéro

Lemme 6.2.1 *L'insensibilité de la sentinelle par rapport aux termes manquants est équivalente à*

$$\int_0^T \int_O h_0 \, N_\tau(\lambda, \tau) \, dxdt + \int_0^T \int_\omega v \, N_\tau(\lambda, \tau) \, dxdt = 0 \tag{6.2.7}$$

Avec :

$$N_\tau = \frac{\partial N}{\partial \tau}(0,0) = \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{N(0,\tau) - N(0,0)}{\tau} \right).$$

$N_\tau = S_\tau + I_\tau + R_\tau$ *est la solution du système :*

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \frac{\partial N_\tau}{\partial t} - \delta \Delta N_\tau & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ N_\tau\,(0) & = & \widehat{S}^0 & \textit{dans } \Omega, \\ N_\tau & = & 0 & \textit{sur } \Sigma. \end{array} \right. \tag{6.2.8}$$

Preuve. en utilisant la définition

$$N_\tau = \frac{\partial N}{\partial \tau}(0,0) = \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{N(0,\tau) - N(0,0)}{\tau} \right)$$

dans le système (6.2.4), donc

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \frac{\partial}{\partial t} N(0,\tau) - \delta \Delta N(0,\tau) & = & -\mu I & \text{dans } Q, \\ N(0,\tau)\,(0) & = & N^0 + \tau \widehat{S}^0 & \text{dans } \Omega, \\ N(0,\tau) & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \frac{\partial}{\partial t} N(0,0) - \delta \Delta N(0,0) & = & -\mu I & \text{dans } Q, \\ N(0,0)\,(0) & = & N^0 & \text{dans } \Omega, \\ N(0,0) & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \frac{\partial}{\partial t} \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{N(0,\tau) - N(0,0)}{\tau} \right) - \delta \Delta \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{N(0,\tau) - N(0,0)}{\tau} \right) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{N(0,\tau) - N(0,0)}{\tau} \right)(0) & = & \widehat{S}^0 & \text{dans } \Omega, \\ \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{N(0,\tau) - N(0,0)}{\tau} \right) & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

□

nous introduisons l'état adjoint $q = q(t,x)$ solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{cccll} -\partial_t q - \delta\, \Delta q & = & h_0 \chi_O + v \chi_\omega & \text{dans} & Q, \\ q\,(T) & = & 0 & \text{dans} & \Omega, \\ q & = & 0 & \text{sur} & \Sigma. \end{array} \right. \tag{6.2.9}$$

Proposition 6.2.1 *Soit q la solution du problème adjoint (6.2.9), alors le problème de l'existence d'une sentinelle insensible au terme manquant est équivalente à trouver v de norme minimale tel que si q est solution de (6.2.9) , on ait :*

$$q(0) = 0 \quad dans\, \Omega. \tag{6.2.10}$$

Preuve. un raisonement analogue de chapitre 4. □

Information fournie par les sentinelles

Par raisonnement analogue du Lemme précèdente en utilisant la définition suivante

$$N_\lambda = \frac{\partial N}{\partial \lambda}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{N(\lambda, 0) - N(0,0)}{\lambda} \right)$$

On trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial N_\lambda}{\partial t} - \delta \Delta N_\lambda &= \widehat{I} & \text{dans } Q, \\ N_\lambda(0) &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ N_\lambda &= 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{6.2.11}$$

Donc d'après les calculs on a

$$\langle q, \lambda \widehat{I} \rangle_{L^2(Q)} = \int_Q (h_0 \chi_O + v \chi_\omega)(m_0 - S_0) dx dt$$

La connaissance du contrôle v fournie des informations sur la population infectée $\lambda \widehat{I}$.

Conclution Générale

La dynamique des maladies infectieuses représente l'un des plus anciens et des plus riches domaines de la biologie mathématique. De l'œuvre classique de Hamer (1906)
et Ross (1911) à la vague de développements plus modernes associés à Anderson et May, Dietz, Hethcote, Castillo-Chavez et d'autres. Le sujet a considérablement augmenté en volume et en importance. Vu le rythme du développement, le sujet est devenu de plus en plus difficile, et la nécessité de fournir un cadre pour organiser la diversité des approches mathématiques est devenu claire.

L'étude que nous avons menée est organisée en deux grandes parties, d'une part, nous avons traité le problème de la contrôlabilité et d'autre part le problème de stabilité. Nous avons tout d'abord étudié la théorie générale de modélisation de modèles SIR avec contrôle, qui permettent entre autre, de caractériser des résultats extensifs au cas de modèle avec diffusion spatiale . Nous avons aussi développé la théorie de stabilité, aussi bien en l'appliquant au cas de certaines épidémie telle que le cas de la grippe.

Les systèmes dynamiques dépendant de paramètres sont communément utilisés pour modéliser l'évolution des maladies infectieuses. Couramment les modèles obtenus ont un équilibre sans maladie et une des questions fondamentales est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres pour que l'équilibre sans maladie soit asymptotiquement stable. Couramment un modèle épidémiologique possède une quantité seuil, appelée le taux de reproduction de base et noté R_0, telle que l'équilibre sans maladie est asymptotiquement stable quand $R_0 < 1$ et instable quand $R_0 > 1$. Biologiquement parlant, R_0 est le nombre moyen d'infectés quand un individu infectieux typique est introduit dans une population complètement susceptible. Le nombre de reproduction de base est identifié comme étant le rayon spectral d'une matrice obtenue à partir du modèle. Mais il n'est pas tout à fait facile de calculer le rayon spectral d'une matrice carrée dont les coefficients dépendent de paramètres. Dans cette thèse, nous avons étudié la construction de sentinelles ainsi que la stabilité globale de quelques modèles épidémiologiques de type SIR. L'étude est basée sur la contrôlabilité à zéro du problème SIR posé, puisque nous avons montré que la recherche d'une sentinelle est en effet équivalente à l'étude de contrôlabilité. La contrôlabilité à zéro est assurée par une inégalité d'observabilité obtenue à travers des estimations de type Carleman.

La stabilité a également été étudiée. Dans une dernière partie, on s'est intéressé à un problème de propagation de la grippe, où la théorie des sentinelles semble là aussi, bien adaptée.

Perspectives

D'autres prolongements à des modèles épidémiologiques ont aussi été établis. Nous avons de même développé des conditions de stabilité et de contrôlabilité. Malgré ces développements, certains axes méritent des réflexions plus approfondies et les perspectives demeurent nombreuses.

Les questionnements et perspectives des travaux issus de cette thèse sont nombreux. Par exemple, on s'intérêsse à comment obtenir :

- Des informations sur chacune des populations S, I et R à partir des résultats obtenus sur $N = S + I + R$;
- Une sentinelle pour d'autres modèles SIR particuliers : avec des termes de naissance et mortalité dûs à d'autres facteurs en plus de la mortalité naturelle ..
- La stabilité du modèle SIR avec population non constante.
- Des résultats par la théorie de bifurcation pour les modèles SIR. Il y a par ailleurs l'intérêt grâce aux simulations numériques, d'améliorer les résultats obtenus afin de les rendre accessibles par les spécialistes du domaine d'épidémiologie et de santé publique en général.

Bibliographie

[1] Abramson, G., *Mathematical modeling of the spread of infectious diseases.* Lectures, PANDA, UNM (2001).

[2] Ainseba, B.-E., Kernevez, J.-P., Luce, R., *Identification de paramètres dans des problèmes non linéaires à données incomplètes.* M2AN Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 28, 3, pp 313-328 (1994).

[3] Korobeinikov A, Maini P., *Lyapunov functions and global properties for SEIR and SEIS models*, Math. Med. Biol., 21, pp 75-83 (2004).

[4] Korobeinikov A., Wake G., *Lyapunov functions and global stability for SIR, SIRS, and SIS epidemiological models.*, Appl. Math. Lett.,15, pp 955-960 (2002).

[5] Ainseba B., Exact and approximate controllability of age and space population dynamics structured model.J.Math.Anal .App, Vol.276, 2,pp 562-574 (2002).

[6] Bodart O., Demeestere P., *Sentinels for the identification of an unknown boundary.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol.7, 6, pp 871-885 (1997).

[7] Brauer F., Castillo-Chávez C., *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* NY : Springer (2001).

[8] Capasso V., *The Mathematical Structure of Epidemic Systems.* Springer Verlag (1993).

[9] Carleman T., *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.* Ark. Mat. Astr. Phys., Vol. 26 B, 17, pp 1-9, (1939).

[10] Trélat E., *Contrôle optimal, théorie et applications.* Vuibert (2008).

[11] E. N. WIAH1,O. D.MAKINDE, I. A. ADETUNDE,Optimal control of hepatitis B virus disease in a population with infected immigrants, eng. Math. Let. (2015).

[12] Fursikov A. V., Yu. Imanuvilov O., *Controllability of evolution equations.* Lecture Notes, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Korea (1996).

[13] G. Zaman, Y.H. Kang, I.H. Jung, Optimal treatment of an SIR epidemic model with time delay, BioSystems. 98 (2009) 43-50.

[14] Hethcote H.W., Qualitative analyses of communicable disease models., Math.Biosci., 28, pp 335-356 (1976).

[15] Kermack W. O., McKendrick A. G., *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics.* Proc. Roy. Soc. Lond. A, 115, pp 700-721 (1927).

[16] Lions J.-L., *Sentinelles pour les systèmes distribués.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I t. 307, pp 819-823 (1988).

[17] Lions J.-L., *Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes.* Masson Paris (1992).

[18] Lions J.-L., Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Paris, Dunod, Vol. 1 (1968).

[19] Jakob L., *Optimal trajectory tracking of nonlinear dynamical systems.* Springer (2017).

[20] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, The mathematical theory of optimal processes. Wiley (1962), New Jersey

[21] Miloudi Y., Nakoulima O., Omrane A., *On the instantaneous sentinels in pollution problems of incomplete data.* Inverse Problems in Science and Engineering, Vol. 17, 4, pp 451-459 (2009).

[22] MURRAY J. D., *Mathematical Biology I and II.* Third Edition, Springer-Verlag, New-York (2002).

[23] LI M. Y., MULDOWNEY J. S., *Global stability for the SEIR model in epidemiology.* Math. Biosci., 125, pp 155-164 (1995).

[24] YON J. *Modélisation de la propagation d'un virus.* Projet P6-3, INSA de Rouen, Françe (2010).

[25] OMRANE A., *Some aspects of the sentinel method for pollution problems.* INTECH Publications, Chap. 9, pp 185-204 (2012).

[26] DIEKMANN O., *A beginner's guide to adaptive dynamics*, in Mathematical modelling of population dynamics. Vol. 63, Banach Center Publ., Polish Acad. Sci., Warsaw, pp 47-86 (2004).

[27] DIEKMANN O., HEESTERBEEK J. A. P., METZ J. A., *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in hete (rogeneous population.* J. Math. Biol, 28, pp 365-382 (1990).

[28] NAKOULIMA O., *Optimal control for distributed systems subject to null-controllability. Application to discriminating sentinels.* ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 13, 4, pp 623-638 (2007).

[29] VAN DEN DRIESSCHE P., WATMOUGH J., *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission.* Math. Biosci., pp 121-142 (2002).

[30] PUEL J.-P., Application of global Carleman inequalities to controllability and inverse problems, Cours de DEA (2000).

[31] S.BUSENBERG S., VAN DEN DRIESSCHE P., *A method for prouving the nonexistence of limit cycles.* J. Math. Analysis App., 172, pp 463-479 (1993).

[32] SALLE J., *Stability theory for ordinary differential equations. stability theory for ordinary differential equations.* J. Differ. Equations, 41, pp 57-65 (1968).

[33] W. H. Fleming, R. W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer Verlag (1975), New York.