

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

THESE présentée
Pour obtenir
Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
Par
MOHAMMED MECHDENE

THEME :

***Sur la régularité logarithmique des solutions
des équations de Boussinesq***

Soutenue le 26 / 09 / 2019 devant le Jury :

Djillali BOUAGADA	Président	Prof.	Univ. MOSTAGANEM
Sadek GALA	Encadreur	Prof.	ENS MOSTAGANEM
Berrabah BENDOUKHA	Examineur	Prof.	C. Univ. NAAMA
Mohand OULD ALI	Examineur	prof	Univ. MOSTAGANEM
Maria A. RAGUSA	Invitée	Prof.	Univ. CATANIA-ITALIE

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma sincère reconnaissance au professeur S. GALA de m'avoir permis de travailler sous sa direction en m'ouvrant les portes de ce très vaste domaine des équations de Boussinesq. Ces précieux conseils et remarques ont énormément contribué à l'élaboration de ce travail.

Je remercie le professeur D. BOUAGADA de l'université de Mostaganem pour l'honneur qu'il m'a fait en président le jury de soutenance.

Je remercie également les professeurs B.BENDOUKHA du Centre Universitaire de Naama et M. Ould Ali de l'Université de Mostaganem d'avoir bien voulu examiner ce travail et faire partie du jury. Leurs critiques et questions constituent assurément une bonne motivation pour aller de l'avant et tenter de trouver la réponse à certains des problèmes encore ouverts dans ce domaine.

Je ne saurais terminer sans adresser mes sincères regrets au professeur invitée Maria A. RAGUSA de l'Université de Catania (Italie) de n'avoir pas pu lui faire parvenir une lettre d'invitation dans les temps pour lui permettre d'entreprendre les démarches d'obtention du visa pour l'Algérie. Ces remarques et questions auraient été fort intéressantes à plus d'un titre.

Je tiens, enfin, à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin et de quelque manière que ce soit à la réalisation matérielle de cette thèse.

M. Mechdene

A.M.S. Classification : 35Q30, 35Q05.

Mots clés : Equation de Boussinesq ; régularité ; solution faible ; espace de Besov.

RÉSUMÉ

L'objet du travail de cette thèse est de déterminer des conditions suffisantes de régularité (les solutions doivent être suffisamment différentiables, au moins pour que l'équation ait un sens) des solutions faibles des équations de Boussinesq, qui décrivent les mouvements d'un fluide visqueux homogène incompressible soumis à une source de chaleur. Afin de rendre cette étude plus complète, nous avons décidé de travailler dans un espace de dimension trois.

L'équation de Boussinesq est l'un des sujets importants pour les recherches en sciences non linéaires [75]. Une immense littérature est consacrée à l'équation de Boussinesq (voir par exemple [48, 49, 51, 52, 54, 56, 57, 58, 72, 65, 66, 67, 81] et les références qui y figurent). Cette littérature trouve son origine dans l'article de N. Ishimura and H. Morimoto [72], où les auteurs ont introduit une classe particulière de solutions faibles qui vérifient l'inégalité d'énergie et qui ont donc un intérêt particulier d'un point de vue physique.

Dans un chapitre introductif, on rappelle les propriétés des espaces fonctionnels utilisés dans ces travaux, tels que les espaces de Besov d'indices négatifs, utilisés en particulier dans le contexte des espaces invariants par changement d'échelle pour les équations de Boussinesq. Les travaux décrits dans le premier chapitre consistent à généraliser à la Boussinesq les critères de régularité de type Serrin valables pour les équations de Navier-Stokes seules, portant sur une des dérivées de la pression π

$$\partial_3 \pi \in L^q(0, T; L^\lambda(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < \lambda \leq \infty.$$

Les résultats antérieurs concernant les conditions suffisantes de régularité des solutions faibles à la Leray des solutions de Boussinesq incompressibles et des équations de Navier-Stokes incompressibles en 3D sont très soigneusement cités. Le résultat principal obtenu par le théorème 2.4.2 contient en particulier le résultat avec $\theta = 0$. La condition suffisante obtenue est

$$\int_0^T \frac{\|\partial_3 \pi(\cdot, t)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^4})} dt < \infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < \lambda \leq \infty.$$

Dans le second chapitre, on a établi des critères de régularité des solutions faibles exprimés en termes de champ de vitesse du fluide u , en étendant les résultats antérieurs de Gala-Ragusa restreints au cas $\theta = 0$. Il s'agit précisément de montrer que les solutions faibles à la Leray de Boussinesq incompressibles sont régulières sous l'hypothèse que

$$\int_0^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}})} dt < \infty \quad \text{avec } 0 \leq r < 1$$

ou

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}(\mathbb{R}^3))} \ll 1.$$

INTRODUCTION

Nous étudions ici un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrit le mouvement d'un fluide visqueux incompressible homogène soumis à une température θ . Mais pour envisager le problème en termes mathématiques d'aujourd'hui, il fallait attendre les années quatre vingt-dix quand N. Ishimura et H. Morimoto ont publié leur célèbre mémoire [72] sur ce sujet, qui a été le point de départ des recherches sur les équations de Boussinesq dans le cadre des mathématiques actuelles. Parmi la littérature parue depuis lors sur les équations de Boussinesq, très vaste aujourd'hui, une place de premier ordre revient au travail de H. Morimoto et N. Ishimura [72] (1999). En introduisant une classe de solutions faibles pour les équations de Boussinesq, H. Morimoto et N. Ishimura ont démontré l'existence d'une solution faible des équations de Boussinesq dans l'intervalle de temps $[0, T]$ donné avec $T > 0$ quelconque. Quant au problème d'unicité, il n'est, à notre connaissance, résolu que pour les équations de Boussinesq en dimension 2 (voir [48, 50, 72]).

Une particule de fluide chauffée à la base devient plus légère du fait de sa dilatation thermique et remonte sous l'action de la poussée d'Archimède. Arrivé au sommet de la couche, le fluide échange sa chaleur, se refroidit et s'alourdit. Il redescend alors et crée un transfert retour de chaleur. Le changement de température d'un fluide influe en effet sur sa masse volumique, qui se trouve modifiée par rapport à la masse volumique du fluide environnant. De tels déplacements s'appellent des mouvements de convection. Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), géologiques (remontées de magma) par exemple.

La première approche physique a été mise en place par Henri Bénard, avec l'étude de la convection dans une couche de fluide soumise à un gradient de température vertical. Ces expériences sont connues sous le nom de cellules de Bénard. On distingue deux grands types de convection : la convection naturelle où le mouvement du fluide porteur de chaleur se met en place spontanément en raison d'anomalie de masse volumique d'origine thermique et la convection forcée où le mouvement du fluide est provoqué par un agent extérieur.

Dans cette étude, on s'est intéressé essentiellement à la régularité des solutions faibles pour les équations de Boussinesq incompressibles dans l'espace \mathbb{R}^3 tout entier, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = \theta \vec{e}_3, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + (u \cdot \nabla)\theta = 0, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

On désigne par $u = u(x, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$, le champ de vitesse au point (x, t) , par $\theta = \theta(x, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la température du fluide, par $\pi = \pi(x, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la pression hydrodynamique. $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T$. Ici, et dans la suite, le symbole " \cdot " entre deux quantités vectorielles désigne le produit scalaire, c'est-à-dire, on a, pour $a, b \in \mathbb{R}^3$:

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Ce modèle connu depuis longtemps a été très étudié par de nombreux physiciens et numériciens depuis une dizaine d'années (voir par exemple [75]).

Lorsqu'on étudie les solutions faibles de (0.0.1) (les dérivations sont alors prises au sens des distributions), on remplace le terme $(u \cdot \nabla)u$ par $\nabla \cdot (u \otimes u)$: lorsque u est une fonction régulière, on a

$$\nabla \cdot (u \otimes u) = (\nabla \cdot u)u + (u \cdot \nabla)u$$

de sorte que la condition de divergence nulle $\nabla \cdot u = 0$ assure l'égalité

$$\nabla \cdot (u \otimes u) = (u \cdot \nabla)u,$$

car si u est irrégulière il est souvent plus facile de définir $\nabla \cdot (u \otimes u)$ que $(u \cdot \nabla)u$.

Avant d'aller plus avant dans ce travail, signalons que l'équation (0.0.1)₁ représente en effet la loi de la conservation de la quantité de mouvement, (0.0.1)₂ est l'équation d'induction et (0.0.1)₃ spécifie la conservation de la masse. Ici, homogène signifie que toutes les parties du fluide ont les mêmes propriétés matérielles.

Le modèle est donc constitué des équations de Navier-Stokes auxquelles on ajoute les lois de l'électromagnétisme. On prend donc en compte l'influence de θ dans la conservation de quantité de mouvement. Pour compléter le problème, on aura besoin de se donner des conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x).$$

Malgré la simplicité apparente de ces équations, leur étude mathématique est loin d'être totalement achevée. Si en dimension 2 on dispose d'une bonne théorie d'existence et d'unicité de solutions régulières, le cas de la dimension 3 reste essentiellement ouvert, et de nombreuses choses restent à comprendre.

Outre leurs applications physiques, les équations de Boussinesq sont aussi mathématiquement importantes. Des questions mathématiques fondamentales telles que la régularité globale de leurs solutions ont généré une recherche approfondie et de nombreux résultats intéressants ont été obtenus (voir, par exemple [51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 65, 66, 67, 81] et les références qui y figurent).

Dans cette étude, on introduit des techniques d'analyse harmonique réelle permettant d'étudier de telles équations. Pour atteindre des résultats sur la régularité des solutions des équations de Boussinesq, de nouvelles techniques ont été nécessaires, ce qui constitue un lien étroit entre cette étude et la théorie mathématique bien connue en mécanique des fluides.

Avant d'entamer l'étude mathématique de ce système, discutons un instant des inconnues (vitesse, champ magnétique et pression). En prenant la divergence de la première équation dans (0.0.1), on s'aperçoit en effet sans peine que la pression est reliée au champ de vitesse et à la température du fluide par la formule :

$$-\Delta\pi = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j (u_i u_j) - \partial_3 \theta. \quad (0.0.2)$$

Cette équation peut être résolue par exemple de la manière suivante. On remarque que

$$(u \cdot \nabla) u = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

du fait de l'incompressibilité. Dès lors (0.0.2) peut s'écrire aussi

$$\begin{aligned} -\Delta \nabla \pi &= \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j \nabla (u_i u_j) - \partial_3 \nabla \theta = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j (u_i \nabla u_j + u_j \nabla u_i) - \partial_3 \nabla \theta, \\ \nabla \pi &= \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j [(u_i \nabla u_j + u_j \nabla u_i) - \mathcal{R}_3 \mathcal{R} \theta, \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_j = -i \partial_j (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ ($1 \leq j \leq 3$ et $i^2 = -1$) étant les transformations de Riesz classiques. Une fois le champ de vitesse u et la température du fluide θ obtenus, la pression se retrouvera

par l'équation (0.0.2). Du point de vue mathématique, la présence de ce terme non linéaire introduit une difficulté dans l'étude des équations (0.0.1) puisque la partie non linéaire n'est continue dans aucun un espace fonctionnel raisonnable.

Le problème montre que l'unicité et la stabilité des solutions (qui sont des propriétés importantes pour la pertinence physique du modèle) sont étroitement liées à la régularité. Une question fondamentale, proposée comme problème du millénaire par la fondation Clay, est donc de savoir s'il existe des solutions globales régulières ou si on peut au contraire trouver des solutions qui présentent des singularités en temps fini. Il n'est pas question ici de décrire de façon exhaustive la littérature consacrée à ce domaine de recherche très actif, mais juste de mentionner les différentes approches du problème, et quelques résultats marquants.

Une approche mathématique courante pour étudier (0.0.1) (ou d'autres types de problèmes aux EDP) est composée des étapes suivantes :

- a) Définition de la formulation faible ;
- b) Recherche d'une solution faible (questions de l'existence et de l'unicité) ;
- c) Etude de la régularité des solutions faibles.

On ne sait pas encore si des solutions de ce système (0.0.1) peuvent développer des singularités en temps fini même si (u_0, θ_0) est suffisamment régulière. Ce travail présente de nouveaux critères de régularité dans lesquels la régularité de la solution est préservée à tout moment.

Pour les équations de Navier-Stokes en trois dimensions ($\theta = 0$), le problème de la régularité globale a fait l'objet d'une étude approfondie et de nombreux critères de régularité importants ont été établis (voir, par exemple [2, 3, 4, 5, 70, 7, 71, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 18, 24, 27, 28, 29, 34, 35, 36]). Certains de ces critères peuvent être étendus aux équations de Boussinesq en faisant des hypothèses sur u et θ (voir, par exemple [55]). En réalisant le rôle dominant joué par le champ de vitesse dans la question de la régularité, Jia et al. [59] ont pu déduire des critères uniquement en termes de champ de vitesse u . Ils ont montré que, si u satisfait

$$u \in L^p(0, T; B_{q, \infty}^s(\mathbb{R}^3)) \quad \text{où} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1 + s, \quad \frac{3}{1+s} < p \leq \infty \quad \text{et} \quad -1 < s \leq 1 \quad \text{avec} \quad (p, s) \neq (\infty, 1).$$

alors la solution (u, θ) est régulière sur $[0, T]$.

Dans le premier chapitre, nous nous sommes concentrés sur l'étude de la régularité des solutions faibles logarithmiquement améliorée pour l'équation (0.0.1), établie en fonction de

la dérivée directionnelle de la pression. Cependant, le problème de la régularité globale des solutions faibles des équations de Boussinesq avec une donnée initiale reste toujours non résolu puisque le système (0.0.1) inclut les équations de Navier-Stokes (le cas $\theta = 0$). Par conséquent, il est intéressant de noter que la régularité d'une solution faible pour les équations de Boussinesq ou les équations de Navier-Stokes peut être obtenue sous certaines conditions supplémentaires, et au cours des dernières années, différents critères de régularité des solutions faibles ont été proposés. Quant aux équations de Navier-Stokes, les conditions bien connues de Prodi-Serrin (voir, par exemple [36, 37, 38, 40, 76] et les références qui y figurent) montrent que toute solution faible

$$u \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{où} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1, \quad 3 \leq q \leq \infty \quad \text{et} \quad 2 \leq p \leq \infty,$$

est régulière sur $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$. Beirão da Veiga [4] a établi un critère de régularité de type Serrin en imposant une condition sur le gradient du champ de vitesse, c'est-à-dire,

$$\nabla u \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{où} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 2, \quad \frac{3}{2} \leq q \leq \infty \quad \text{et} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Une autre direction a été prise par Beirão da Veiga [3], Berselli et Galdi [70], Gala [54] et Zhou [44, 45], consistant à établir des critères de régularité sur la pression π . Plus précisément, ils ont montré que si la pression π satisfait :

$$\pi \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{où} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} \leq q \leq \infty,$$

ou

$$\nabla \pi \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{où} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 3 \quad \text{et} \quad 1 < q \leq \infty,$$

alors la solution faible u des équations de Navier-Stokes est régulière sur $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$. Des résultats marquants dans cette direction ont été obtenus par Gala, et améliorés par Guo et Gala [21, 22] (voir aussi [25]). Ils ont établi un critère de régularité de type logarithmique des solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes via la pression, plus précisément, ils ont prouvé que si

$$\int_0^T \frac{\|\pi(\cdot, s)\|_{B_{\infty, \infty}}^2 \cdot^{-1}}{1 + \ln(1 + \|\pi(\cdot, s)\|_{B_{\infty, \infty}} \cdot^{-1})} ds < \infty,$$

ceci implique que la solution faible u est régulière sur $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$. Dans [10], Cao et Titi ont établi un critère de régularité pour les équations de Navier-Stokes uniquement en termes d'une dérivée directionnelle de la pression, plus précisément, ils ont prouvé que si

$$\partial_3 \pi \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < \frac{20}{7}, \quad q > \frac{21}{16} \quad \text{et} \quad p > 1,$$

alors la solution faible correspondante u est régulière jusqu'au temps T . Des critères de régularité semblables pour les équations de Boussinesq impliquant soit le champ de vitesse, soit la pression hydrodynamique ont été établis par un certain nombre de chercheurs (voir, par exemple, [77, 78, 79] et les références qui y figurent). Dans [51], Dong et al. ont établi deux critères de régularité en termes d'une dérivée directionnelle de u et d'une dérivée directionnelle de la pression, plus précisément, ils ont montré que si

$$\partial_3 u \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1 \quad \text{et} \quad q \geq 3,$$

ou

$$\partial_3 \pi \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < q \leq \infty. \quad (0.0.3)$$

alors la solution faible correspondante (u, θ) des équations de Boussinesq est régulière sur $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$. Plus récemment, Jia et al. [59], ont améliorées (0.0.3) au cas où

$$\partial_3 \pi \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} < q \leq \infty. \quad (0.0.4)$$

Dans ce premier chapitre, on a montré que, si la dérivée directionnelle $\partial_3 \pi$ de la pression satisfait à la condition logarithmique de type Serrin :

$$\int_0^T \frac{\|\partial_3 \pi(\cdot, s)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(\cdot, s)\|_{L^4})} ds < \infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < \lambda \leq \infty,$$

alors la solution (u, θ) est régulière sur $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$. La démonstration repose essentiellement sur des estimations à priori, obtenues à partir des hypothèses faites sur les conditions initiales, sur le lemme de Gronwall de type logarithmique et les inégalités d'interpolations. Comparé aux résultats des équations de Navier-Stokes ($\theta = 0$), il y a une correction logarithmique impliquant la température θ dans le dénominateur. Ceci est une extension des résultats précédents de type Serrin :

$$\partial_3 \pi \in L^q(0, T; L^\lambda(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < \lambda \leq \infty.$$

Dans le second chapitre, on a établi des critères de régularité des solutions faibles au sens de Leray basé sur la vitesse du fluide dans les espaces de Besov $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}$ homogènes (voir la définition dans le texte). Nous montrerons que la solution (u, θ) est régulière jusqu'à un temps $T > 0$, pourvu que

$$\int_0^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(t, \cdot)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}})} dt < \infty$$

pour un certain $0 \leq r < 1$ où

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^3))} \ll 1.$$

Ce résultat améliore certains travaux antérieurs. C'est une généralisation et complément au résultat établi dans [19] pour les équations de Navier-Stokes.

Ces chapitres se terminent par une section illustrant des perspectives, ainsi que quelques pistes pour des recherches futures.

Les résultats qui composent cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

1. *Logarithmical regularity criterion of the three-dimensional Boussinesq equations in terms of the pressure*, avec S. Gala, Z. Guo et M. A. Ragusa, paru dans **Z. Angew. Math. Phys.** **67**, 67-120, 2016.
2. *Logarithmically improved regularity criteria for the Boussinesq equations*, avec S. Gala et M.A. Ragusa, paru dans **AIMS Mathematics**, **2 (2) : 336-347**, 2017.

Table des matières

1	Les espaces fonctionnels et outils d'analyse harmonique réelle	13
1.1	Les espaces de Lebesgue et de Sobolev	13
1.2	Les espaces de Besov d'indices de régularité négatifs	18
2	Le critère de régularité logarithmique pour les solutions faibles de Boussinesq en termes de la dérivée directionnelle de la pression	22
2.1	Introduction	22
2.2	Conservation de l'énergie	23
2.3	Notion de Solution faible	26
2.4	Le critère de régularité de type Serrin pour les solutions faibles	29
2.5	Propriétés préliminaires	33
2.6	Preuve du théorème 2.4.2	38
3	Un critère de régularité logarithmique des solutions dans les espaces de Besov	45
3.1	Introduction	45
3.2	Preuve du théorème 3.1.1	50
3.3	Preuve du Théorème 3.1.2.	57
3.4	Remarque finale	61
	Bibliographie	64

REMARQUES SUR LES NOTATIONS

Nous utiliserons, tout au long de ce travail, les notations suivantes :

- ▶ $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$: l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact.
- ▶ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$: l'espace des distributions tempérées.
- ▶ $B(x, R)$: boule ouverte de centre x et de rayon R .
- ▶ $\partial_j^k u$: dérivée partielle $k^{\text{ième}}$ de u par rapport à x_j ,

$$\partial_j^k u = \frac{\partial^k u}{\partial x_j^k} \quad \text{et} \quad \partial_j = \partial_j^1.$$

- ▶ u_t : dérivée partielle de u par rapport à t ,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

- ▶ ∇u : gradient de u ,

$$\nabla u = (\partial_i u_j)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_1 u_2 & \partial_1 u_3 \\ \partial_2 u_1 & \partial_2 u_2 & \partial_2 u_3 \\ \partial_3 u_1 & \partial_3 u_2 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}.$$

- ▶ $\nabla \cdot u$: divergence de u ,

$$\nabla \cdot u = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3.$$

- ▶ $(u \cdot \nabla)v$: terme bilinéaire qui apparaît dans les équations de la MHD,

$$(u \cdot \nabla)v = u_1 \partial_1 v + u_2 \partial_2 v + u_3 \partial_3 v.$$

- ▶ Δu : Laplacien de u ,

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_3^2 u.$$

- ▶ $(u \otimes v)$: produit tensoriel entre $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$,

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 \end{bmatrix}.$$

- ▶ $\nabla \cdot (u \otimes v)$: divergence du produit tensoriel $u \otimes v$. On a

$$\nabla \cdot (u \otimes v) = (\nabla \cdot u)v + (u \cdot \nabla)v.$$

Par abus de langage, nous notons de la même manière la divergence d'un vecteur et celle d'un produit tensoriel.

► $e^{t\Delta}$: noyau de la chaleur.

► \widehat{u} : désigne la transformée de Fourier de u ,

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

► On définit

$$L_{loc}^2(\mathbb{R}^3) = \{u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : u|_K \in L^1(K) \text{ pour tout } K \subset \mathbb{R}^3 \text{ compact}\}$$

l'espace des fonctions de carrés localement intégrables sur \mathbb{R}^3 .

► Nous écrirons (u, θ) au lieu de $(u(x, t), \theta(x, t))$, pour alléger les notations.

► $\mathcal{R}_1 = -i \frac{\partial}{\partial x_1} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}, \dots, \mathcal{R}_3 = -i \frac{\partial}{\partial x_3} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ sont les transformations de Riesz.

► Par $E \hookrightarrow F$, nous indiquerons enfin que l'injection de E dans F est continue.

Les espaces fonctionnels et outils d'analyse harmonique réelle

L'objectif de cette partie est de mettre en place quelques outils mathématiques modernes permettant d'aborder notre problème. On sait que le domaine de l'analyse harmonique réelle a considérablement progressé ces trente dernières années avec l'importation d'outils révolutionnaires au confluent de domaines très divers des mathématiques.

Cette étude a pour vocation de présenter et d'illustrer l'efficacité de certaines de ces méthodes d'analyse non linéaire dans un contexte le moins technique possible, permettant néanmoins d'observer un large éventail de comportements qualitatifs. Nous avons choisi pour thème d'étude une équation de Boussinesq que l'on retrouve dans de nombreuses modélisations physiques.

1.1 Les espaces de Lebesgue et de Sobolev

Cette section est fondamentale pour l'étude des équations de Boussinesq car elle va nous fournir le cadre fonctionnel adéquat. Tout d'abord, définissons les espaces qui vont nous permettre d'étudier notre problème. En notant dx la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^3 , on définit pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Lebesgue L^p sur \mathbb{R}^3 par la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec la modification d'usage si $p = \infty$:

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x)| = \inf \{ \lambda \geq 0 : |f(x)| \leq \lambda, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^3 \}.$$

Une façon intéressante d'obtenir la norme de ces espaces est d'utiliser la notion de dualité. Ainsi, si q est l'exposant conjugué de p , on a pour $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} f(x)g(x)dx \right|.$$

Une remarque de grande importance par la suite mérite d'être faite : ces espaces sont homogènes puisque leurs normes vérifient, pour λ , un réel strictement positif, l'égalité

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{3}{p}} \|f\|_{L^p}. \quad (1.1.1)$$

Ces espaces sont importants dès que l'on aborde des problèmes non linéaires. Ils joueront un rôle décisif en particulier dans les démonstrations relatives aux équations de Boussinesq ou de Navier-Stokes. Le cas particulier des espaces L^1 et L^2 a été étudié dans [?]. On a le résultat suivant concernant la comparaison des espaces de Lebesgue.

Lemme 1.1.1 *Si $1 \leq p < q < r \leq \infty$, alors*

$$L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^r(\mathbb{R}^3) \subset L^q(\mathbb{R}^3).$$

Preuve. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Pour $f \in L^q(\mathbb{R}^3)$, on a par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^{\lambda q} |f(x)|^{(1-\lambda)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^p}^{\lambda q} \|f\|_{L^r}^{(1-\lambda)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p}^{\lambda} \|f\|_{L^r}^{1-\lambda}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

où

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

□

Définissons également les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}_q^s(\mathbb{R}^3)$ qui sont définis comme l'ensemble des fonctions $f \in L^r(\mathbb{R}^3)$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{s}{3}$ tel que $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \in L^q(\mathbb{R}^3)$. Cet espace est engendré par la norme

$$\|f\|_{\dot{H}_q^s} = \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f \right\|_{L^q},$$

et quand $q = 2$, on écrit $\dot{H}_2^s(\mathbb{R}^3) = \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$. Ces espaces sont différents des espaces non homogènes H_q^s . Remarquons tout d'abord que si s est positif, alors H_q^s est inclus dans \dot{H}_q^s et on a l'inégalité suivante :

$$\|f\|_{\dot{H}_q^s} \leq \|f\|_{H_q^s}, \quad f \in H_q^s(\mathbb{R}^3).$$

Mais si s est négatif, alors c'est \dot{H}_q^s est inclus dans H_q^s . Enfin, contrairement aux espaces de Sobolev non homogènes qui forment une suite décroissante, deux espaces de Sobolev homogènes d'indices différents ne sont pas comparables au sens de l'inclusion.

La fonction maximale de Hardy-Littlewood d'une fonction $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ est définie par

$$M(f)(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ sachant que $\text{supp } \varphi \subset B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) dx = 1$, on observe facilement que

$$\sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \leq C M(|f|)(x),$$

avec une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de f , où $\varphi_t(x) = t^{-3} \varphi(\frac{x}{t})$. Le théorème maximal (voir [41]) assure que $M(|f|) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, et de plus

$$\sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \in L^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Signalons aussi le résultat suivant qui nous sera fort utile [1]. En fait, nous allons montrer l'inégalité de Sobolev par le biais de la fonction maximale.

Lemme 1.1.2 (Inégalité de Sobolev) *Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, on a*

$$\|u\|_{L^6} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \tag{1.1.3}$$

En particulier, $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.

Preuve. Supposons que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et soit $\omega \in \mathbb{S}^2 = \partial B(0,1)$. En écrivant

$$u(x) = - [u(x+r\omega)]_{r=0}^{r=+\infty} = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dr} u(x+r\omega) dr,$$

puis en intégrant ce dernier sur la sphère unité $\partial B(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned} 4\pi u(x) &= \int_{\partial B(0,1)} u(x) ds(\omega) = - \int_{\partial B(0,1)} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dr} u(x+r\omega) dr ds(\omega) \\ &= - \int_{\partial B(0,1)} \int_0^{+\infty} \nabla u(x+r\omega) \cdot \omega dr ds(\omega) = - \int_0^{+\infty} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+r\omega) \cdot \omega ds(\omega) dr, \end{aligned}$$

où 4π est la surface de la sphère unité donnée par la formule

$$|\partial B(0,1)| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi d\theta = 4\pi,$$

En faisant le changement de variable $y = x + r\omega$ dans l'intégrale en $d\omega$, on obtient en utilisant $ds(y) = r^2 ds(\omega)$, $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$ et $r = |y-x|$:

$$4\pi u(x) = - \int_0^{+\infty} \int_{\partial B(0,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{|y-x|^3} ds(y) dr,$$

ce qui donne

$$u(x) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla u(y) \cdot (y-x)}{|y-x|^3} dy,$$

d'où l'en déduit

$$|u(x)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^2} dy = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^2} dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^2} dy \right].$$

D'une part, on peut majorer le premier membre de droite par

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^2} dy &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B(x,2^{-k}r) \setminus B(x,2^{-k-1}r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^2} dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B(x,2^{-k}r) \setminus B(x,2^{-k-1}r)} \frac{|\nabla u(y)|}{(2^{-k-1}r)^2} dy \\ &\leq 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B(x,2^{-k}r)} \frac{|\nabla u(y)|}{2^{-2k}r^2} dy \\ &\leq 4 \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}r \frac{1}{|B(x,2^{-k}r)|} \int_{B(x,2^{-k}r)} |\nabla u(y)| dy \\ &\leq CrM(|\nabla u|)(x) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \\ &\leq CrM(|\nabla u|)(x). \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^2} dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(x,r)} |\nabla u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(x,r)} \frac{1}{|y-x|^4} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2C\sqrt{\pi} \|\nabla u\|_{L^2} \frac{1}{\sqrt{r}}, \end{aligned}$$

où en passant en coordonnées sphériques

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(x,r)} \frac{1}{|y-x|^4} dy \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_r^{+\infty} 4\pi s^2 s^{-4} ds \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}}.$$

Choisissons

$$r = \left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}}{M(|\nabla u|)(x)} \right)^{\frac{2}{3}},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^2} dy \leq \frac{C}{4\pi} \left(r M(|\nabla u|)(x) + \frac{\|\nabla u\|_{L^2}}{\sqrt{r}} \right) \\ &\leq \frac{C}{4\pi} \left(\left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}}{M(|\nabla u|)(x)} \right)^{\frac{2}{3}} M(|\nabla u|)(x) + \left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}}{M(|\nabla u|)(x)} \right)^{\frac{-1}{3}} \|\nabla u\|_{L^2} \right) \\ &= \frac{C}{4\pi} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} (M(|\nabla u|)(x))^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

On en déduira finalement que

$$|u(x)|^6 \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^4 (M(|\nabla u|)(x))^2,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^6 dx &\leq C \|\nabla u\|_{L^2}^4 \int_{\mathbb{R}^3} (M(|\nabla u|)(x))^2 dx \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2}^4 \|M(|\nabla u|)\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2}^4 \|\nabla u\|_{L^2}^2 = C \|\nabla u\|_{L^2}^6, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\|u\|_{L^6} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Le résultat est ainsi démontré, ce qui achève la preuve du lemme 1.1.2. \square

On va rappeler la caractérisation des espaces de Lebesgue à l'aide des inégalités d'interpolation, qui sont des inégalités primordiales dans les applications.

Lemme 1.1.3 Soient $f \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$ et $\nabla f \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))$. Alors, on a

$$f \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \text{ avec } \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2} \text{ et } 2 \leq q \leq 6,$$

et aussi

$$\|f\|_{L^p(0,T;L^q(\mathbb{R}^3))} \leq C(p, q, T) \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}^{\frac{6-q}{2q}} \|\nabla f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}^{\frac{3q-6}{2q}}. \quad (1.1.4)$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(0,T;L^q(\mathbb{R}^3))} &= \left(\int_0^T \|f(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^T \|f(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\theta p} \|f(\cdot, \tau)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^{(1-\theta)p} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}^\theta \left(\int_0^T \|f(\cdot, \tau)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^{(1-\theta)p} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(p, q, T) \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}^\theta \|\nabla f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))}^{1-\theta}, \end{aligned}$$

où

$$\theta = \frac{3}{q} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \theta = \frac{2}{p}.$$

□

1.2 Les espaces de Besov d'indices de régularité négatifs

Dans l'étude qui nous intéresse, les espaces homogènes sont d'une grande importance lorsqu'il s'agit de vérifier l'invariance par rapport aux dilatations des inégalités de Sobolev. Soit $e^{t\Delta}$ désignant le semi-groupe de la chaleur en dimension 3 défini par

$$e^{t\Delta} f = K_t * f \quad \text{avec} \quad K_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^3$, où $*$ signifie la convolution de fonctions définies sur \mathbb{R}^3 .

On a le résultat suivant

Lemme 1.2.1 *Soit $1 < p \leq r \leq \infty$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^r} \leq C t^{-\frac{(\frac{3}{p}-\frac{3}{r})}{2}} \|f\|_{L^p}. \quad (1.2.1)$$

Preuve. En effet, en utilisant l'inégalité de Young avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|e^{t\Delta} f\|_{L^r} &= \|K_t * f\|_{L^r} \leq \|K_t\|_{L^q} \|f\|_{L^p} \\
&\leq (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{q|x|^2}{4t}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} \\
&\stackrel{w=\frac{x}{\sqrt{4t}}}{=} (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-q|w|^2} (4t)^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} \\
&\leq Ct^{-\frac{(3-\frac{3}{q})}{2}} \|f\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{(\frac{3}{p}-\frac{3}{r})}{2}} \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

□

Rappelons maintenant la définition et quelques propriétés des espaces de Besov homogènes avec des indices négatifs $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}$ sur \mathbb{R}^3 avec $\alpha \geq 0$. Il est bien connu que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ appartient à $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si

$$e^{t\Delta} f \in L^\infty \quad \text{pour tout } t > 0 \quad \text{et} \quad t^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \in L^\infty(0, \infty).$$

La norme de $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}$ est définie à équivalence par

$$\|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}} = \sup_{t>0} (t^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty}). \quad (1.2.2)$$

Cette définition assure la propriété d'homogénéité suivante :

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}} = \lambda^{-\alpha} \|f(\cdot)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}.$$

Pour un développement sur cette définition, nous renvoyons le lecteur au livre de H. Triebel [43] (voir aussi [6, 16, 33]). En particulier, pour $\alpha = 0$, on a l'équivalence suivante :

$$f \in \dot{B}_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R}^3) \iff \nabla f \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^3).$$

Signalons le résultat d'inclusion suivant.

Lemme 1.2.2 *Soit $\alpha \in [0, \frac{3}{2}[$. Alors, on a les inclusions suivantes :*

$$\dot{H}^{\frac{3}{2}-\alpha}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{3}{\alpha}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}(\mathbb{R}^3).$$

Preuve. La première inclusion du lemme est triviale. Montrons maintenant la seconde, c'est-à-dire : $L^{\frac{3}{\alpha}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Soit $f \in L^{\frac{3}{\alpha}}(\mathbb{R}^3)$. En utilisant l'inégalité suivante établie dans la preuve du lemme 1.2.1 :

$$\|K_t\|_q \leq C_q t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})},$$

pour tout $q \in [1, \infty]$, il vient que

$$\|e^{t\Delta} f\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^{\frac{3}{\alpha}}} \|K_t\|_q \leq C_{\alpha} t^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{L^{\frac{3}{\alpha}}},$$

avec $\frac{1}{q} + \frac{\alpha}{3} = 1$. Ainsi, nous avons démontré que

$$\|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}} = \sup_{t>0} (t^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{t\Delta} f\|_{\infty}) \leq C \|f\|_{L^{\frac{3}{\alpha}}}.$$

Ce qui achève la preuve du lemme 1.2.2. □

Comme conséquence du lemme 1.2.2, on a la relation suivante :

$$\dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{B}_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R}^3).$$

Nous démontrons maintenant quelques résultats d'interpolations sur les espaces de Besov qui vont nous permettre d'obtenir une certaine régularité en norme de Sobolev et de Lebesgue.

Lemme 1.2.3 *Soit $\alpha \in [0, \frac{3}{2}]$. Pour tout $1 < p < q < \infty$, il existe une constante $C = C(\alpha, p, q)$ telle que, pour tout $f \in \dot{H}_p^r(\mathbb{R}^3) \cap \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}(\mathbb{R}^3)$, on a*

$$\|f\|_{\dot{H}_q^s} \leq C \|f\|_{\dot{H}_p^r}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha}}^{1-\frac{p}{q}}, \tag{1.2.3}$$

avec

$$s = \frac{p}{q}r + \left(\frac{p}{q} - 1\right)\alpha \quad \text{et} \quad -\alpha < s < r. \tag{1.2.4}$$

Remarque 1.2.1 *Ce résultat avait été montré par Meyer-Gerard-Oru [63] dans le cas $s = 0$, dont le résultat se réduit à la théorie L^q . La méthode de la preuve dans [63] est basée essentiellement sur la décomposition de Littlewood-Paley. Toutefois, on peut donner une preuve élémentaire sans utiliser la décomposition de Littlewood-Paley.*

Preuve. Nous adaptons la méthode de Guo et Gala [21]. Il suffit de montrer que

$$\left\| (-\Delta)^{\frac{s-r}{2}} f \right\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-r}}^{1-\frac{p}{q}}.$$

Par souci de simplicité, en posant $\gamma = r - s > 0$, on peut écrire l'opérateur $(-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}}$ sous la forme

$$(-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{t\Delta} f(x) dt,$$

où $\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ est la fonction gamma. Pour $A > 0$ (fixé), on décompose $\int_0^\infty t^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{t\Delta} f(x) dt$ en une somme de deux termes :

$$(-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \left[\int_0^A t^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{t\Delta} f(x) dt + \int_A^\infty t^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{t\Delta} f(x) dt \right]. \quad (1.2.5)$$

Rappelons que

$$|e^{t\Delta} f(x)| \leq \sup_{t>0} |e^{t\Delta} f(x)| \leq C M(|f|)(x), \quad (1.2.6)$$

et d'après la définition de la norme dans $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}$, on a

$$|e^{t\Delta} f(x)| \leq C t^{-\frac{(\alpha+s)}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}, \quad (1.2.7)$$

Ainsi, il vient alors en utilisant les inégalités (1.2.6)-(1.2.7)

$$\left| (-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f(x) \right| \leq C_1 A^{\frac{\gamma}{2}} M(|f|)(x) + C_2 A^{\frac{\gamma-\alpha-s}{2}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}.$$

En choisissant

$$A = \left(\frac{\|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}}{M(|f|)(x)} \right)^{\frac{2}{\alpha+r}},$$

il s'ensuit

$$\left| (-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f(x) \right| \leq C (M(|f|)(x))^{1-\frac{\gamma}{\alpha+r}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}^{\frac{\gamma}{\alpha+r}}.$$

Remarquons que $\frac{\gamma}{\alpha+r} = 1 - \frac{p}{q}$, qui implique immédiatement l'inégalité suivante :

$$\left| (-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f(x) \right| \leq C (M(|f|)(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}^{1-\frac{p}{q}}.$$

D'autre part, comme les opérateurs maximaux sont bornés sur les espaces de Lebesgue L^p [41, 42], on a

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f \right\|_{L^q} &\leq C \left\| (M(|f|))^{\frac{p}{q}} \right\|_{L^q} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq C \|M(|f|)\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq C \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\alpha-s}}^{1-\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme 1.2.3. \square

Le critère de régularité logarithmique pour les solutions faibles de Boussinesq en termes de la dérivée directionnelle de la pression

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons en particulier établir un théorème de régularité et donner une majoration uniforme en temps des solutions. Plus précisément, nous allons étudier la régularité des solutions faibles des équations de Boussinesq dans le cas d'un fluide visqueux, incompressible et homogène remplissant tout l'espace en l'absence de forces extérieures :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = \theta \vec{e}_3, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + (u \cdot \nabla)\theta = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où la variable en temps t appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$, la variable d'espace x est dans \mathbb{R}^3 tout entier, les inconnues sont le vecteur vitesse du fluide $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ et la fonction scalaire $\theta = \theta(x, t)$ qui représente la température du fluide, et $\pi = \pi(x, t)$ est la pression totale. Enfin les vecteurs u_0 et θ_0 désignant les données initiales avec $\nabla \cdot u_0 = 0$ seront considérées au sens des distributions.

Noter que l'hypothèse d'homogénéité du fluide associée à celle d'incompressibilité implique que la densité du fluide étudié est constante à tout instant et en tout point de l'espace.

R. Danchin, M. Paicu dans [50] et J.R. Cannon, E. DiBenedetto dans [48] démontrent que pour toute valeur initiale donnée $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$, le problème de Cauchy (2.1.1) possède au moins une solution faible globale en temps (u, θ) dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$(u, \theta) \in L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3)), \quad \forall T > 0.$$

On ne sait pas montrer l'unicité globale de telles solutions. Grâce à l'inégalité d'interpolation (1.1.4), on voit que la solution faible (u, θ) ainsi obtenue vérifie la condition suivante d'intégrabilité en temps et en espace :

$$(u, \theta) \in L^p((0, T); L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), \quad 2 \leq q \leq 6, \quad \forall 0 < T \leq \infty.$$

Mais $(u, \theta) \in L^p((0, T); L^q(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{2}{p} = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$ et $2 \leq q \leq 6$, n'implique pas la régularité ni l'unicité de la solution.

C'est encore un problème ouvert, à l'heure actuelle, d'établir l'unicité des solutions faibles en dimension 3. Ceci est, entre autres, lié au manque de régularité du terme non-linéaire. Par contre, cette objection tombe en dimension 2. Il est donc naturel de se demander sous quelles conditions nous pouvons obtenir la régularité et l'unicité des solutions faibles de (2.1.1).

2.2 Conservation de l'énergie

L'équation de Boussinesq présente une propriété fondamentale, qui conditionne beaucoup de résultats remarquables sur cette équation. Cette propriété est celle de la conservation d'énergie dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Au moins formellement, si l'on suppose (u, θ) solution assez régulière du système (2.1.1), alors on a

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t (\|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2) d\tau = \|u_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2. \quad (2.2.1)$$

Notons que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u|^2}{2} dx = \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \partial_t u dx.$$

Le calcul est très similaire à celui qui a été fait pour les équations de Navier-Stokes. En effet, on prenant le produit scalaire $L^2(\mathbb{R}^3)$ de (2.1.1) avec (u, θ) , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta \vec{e}_3 \cdot u dx,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)\theta \cdot \theta dx.$$

On remarque ensuite que la condition de divergence nulle sur le champ (u, θ) implique en particulier

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\pi \cdot u dx &= 0 = \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)u \cdot u dx, \\ - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)\theta \cdot \theta dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) |\theta|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \cdot u) |\theta|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est clair (par intégration par partie et en supposant la décroissance à l'infini vers 0 de (u, θ)), ce qui est licite par densité des fonctions régulières à support compact dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$ que l'on a pour tout $t > 0$

$$(-\Delta u, u) = \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad (-\Delta\theta, \theta) = \|\nabla\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2.$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

ce qui conduit au résultat après intégration en temps.

Ceci signifie que l'énergie du système $(\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2)$ est une fonction décroissante du temps, contrôlée par l'énergie du système à l'état initial. Par ailleurs, il est intéressant de noter dès à présent l'effet régularisant suivant : dès qu'on choisit une donnée initiale (u_0, θ_0) dans l'espace d'énergie $L^2(\mathbb{R}^3)$, la solution découlant d'une telle donnée est alors "régularisée" au sens où son gradient appartient aussi à l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$. On voit tout de suite que ces estimations donnent des informations à priori pour des normes H^1 en espace seulement, c'est-à-dire, seules les dérivées d'ordre 1 en espace peuvent être contrôlées. Comme pour les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes ($\theta = 0$), on ne sait pas, en dimension supérieure ou égale à trois, si l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2 \quad (2.2.2)$$

est suffisante pour obtenir la régularité et l'unicité de telles solutions. Cette inégalité (2.2.2) a été utilisée par ailleurs pour l'étude de la régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, par Caffarelli, Kohn et Nirenberg ([8]), qui obtiennent les meilleurs résultats

de régularité partielle déjà connus. L'inégalité d'énergie locale semble ainsi être un outil bien utile pour étudier les équations de Navier-Stokes : elle permet de faire des estimations sur les solutions considérées, et elle implique des propriétés de régularité.

On sait que les travaux de J. Leray sur la mécanique des fluides ont largement contribué à l'essor de l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles. C'est notamment dans son célèbre article fondateur et pionnier [30], paru dans *Acta Mathematica* en 1934 que J. Leray a introduit la notion de solution faible pour les équations de Navier-Stokes incompressibles à une époque où le concept même de solution faible de Sobolev (introduite à l'origine pour des problèmes linéaires) et les distributions de L. Schwartz étaient encore inconnues.

Ensuite, de nombreux auteurs ont étudié la régularité des solutions faibles pour les équations de Boussinesq (en particulier pour $\theta = 0$) dans différents cadres de travail, (voir par exemple [52, 53, 54, 56, 57, 59, 77], ainsi les références internes). Y. Jia, X. Zhang et B. Dong, [59] ont appliqué la décomposition de Littlewood-Paley pour étudier les estimations des équations de Boussinesq en temps et en espace et ont étendu le critère de régularité des solutions faibles ainsi que le critère d'explosion des solutions régulières.

Cette courte revue de la littérature que nous venons de dresser est assurément incomplète, il y a encore bien d'autres résultats concernant les équations de Boussinesq, dont on pourra par exemple trouver les références dans les travaux que nous venons de citer.

Notons que puisque la donnée initiale (u_0, θ_0) n'appartient pas nécessairement à $L^2(\mathbb{R}^3)$, ces solutions dans $L^p([0, T]; L^q(\mathbb{R}^3))$ peuvent ne pas satisfaire l'inégalité d'énergie

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t (\|\nabla u(\cdot, s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, s)\|_{L^2}^2) ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2,$$

pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire, l'estimation quantitative la plus puissante connue pour les solutions faibles de Leray.

Le prolongement de fonctions régulières joue aussi un rôle important dans l'étude de la régularité et l'unicité de solutions faibles. C'est pour cette raison que de nombreux auteurs se sont intéressés aux critères d'explosion comme le critère de Beale-Kato-Majda [2]. Dans cette optique, des résultats sont obtenus par Fan et Zhou [52] et Ishimura et Morimoto [72], où ils ont étendu le critère de Beale-Kato-Majda au cas du système (2.1.1) en dimension 3. Plus

précisément, ils ont montré que si une solution régulière (u, θ) vérifie l'une des conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\nabla \times u &\in L^1(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^0(\mathbb{R}^3)), \\ u &\in L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)),\end{aligned}$$

alors la solution (u, θ) peut être étendue au-delà de $t = T$, c'est-à-dire, qu'il existe $\tilde{T} > T$ tel que

$$(u, \theta) \in C([0, \tilde{T}]; H^3(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, \tilde{T}]; H^2(\mathbb{R}^3)).$$

Motivé par les résultats de Kozono et al. [27], Gala [54] affine le résultat précédent. En effet, il prouve que pour une donnée initiale $(u_0, \theta_0) \in H^s(\mathbb{R}^3)$, avec $s \geq 3$, si

$$(u, \theta) \in C([0, \tilde{T}]; H^s(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, \tilde{T}]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3)).$$

est la solution régulière de (2.1.1) associée à la donnée initiale (u_0, θ_0) , et que (u, θ) satisfait les conditions suivantes :

$$\int_0^T \|\nabla \times u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \|\nabla \times \theta(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} dt < \infty,$$

alors, dans ce cas, la solution (u, θ) peut être étendue au-delà de $t = T$. En d'autres termes, si la solution explose en $t = T$, alors on a forcément :

$$\int_0^T \left(\|\nabla \times u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} + \|\nabla \times \theta(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0} \right) dt = \infty.$$

Remarque 2.2.1 *Le théorème de Serrin permet de conclure que les solutions faibles sont uniques. L'estimation (2.2.2) est invariante par le changement d'échelle de l'équation, on ne sait construire de telles solutions que localement en temps, ou globalement mais à donnée initiale petite (voir [2]).*

2.3 Notion de Solution faible

Commençons par donner la notion de solution faible. Une solution faible de (2.1.1) est une solution qui vérifie (2.1.1) dans le sens des distributions. De telles solutions sont généralement obtenues à l'aide d'estimations d'énergies et ont donc une importance d'un point de vue

physique (l'obtention d'une telle solution est déjà en soi important pour la compréhension des phénomènes physique). L'idée principale, et qui est due à J. Leray, consiste à ne prendre que des fonctions tests à divergence nulle, ce qui a pour avantage de ne pas faire apparaître la pression dans les formulations considérées.

On est donc naturellement amené à la définition suivante.

Définition 2.3.1 Soit $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ tel que $\nabla \cdot u_0 = 0$. Un couple de fonctions mesurables (u, θ) sur $\mathbb{R}^3 \times]0, T]$ est dit une solution faible de (2.1.1) sur $]0, T]$ si (u, θ) vérifie les propriétés suivantes :

1. $(u, \theta) \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$;
2. $\nabla \cdot u = 0$ au sens des distributions, c'est-à-dire,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) \phi dx dt = 0,$$

pour tout champ de vecteurs ϕ dans $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times]0, T])$ à support compact en espace.

3. (u, θ) vérifie le système (2.1.1) au sens des distributions, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) \cdot \varphi(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \partial_\tau \varphi dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \Delta \varphi dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (u \otimes u) : \nabla \varphi dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi \cdot (\theta \vec{e}_3) dx d\tau \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times]0, T])$ à support compact de divergence nulle, i.e., $\nabla \cdot \varphi = 0$ et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \theta(x, t) \cdot \psi(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \theta_0(x) \cdot \psi(x, 0) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \theta \cdot \partial_\tau \psi dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \theta \cdot \Delta \psi dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u \theta \cdot \nabla \psi dx d\tau, \end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times]0, T])$.

Il convient d'introduire aussi la notion suivante.

Définition 2.3.2 On dit qu'un couple de fonctions mesurables (u, θ) appartenant à l'espace

$$L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$$

est une solution faible au sens de Leray des équations de Boussinesq (2.1.1) associée à une donnée initiale $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ si (u, θ) est une solution faible et qu'elle vérifie en plus l'inégalité d'énergie :

$$\begin{aligned} & \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t (\|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2) d\tau \\ & \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \theta u_3 dx d\tau, \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq t \leq T$.

La définition suivante précise la notion de solution régulière pour le système (2.1.1).

Définition 2.3.3 Une solution faible (u, θ) de (2.1.1) sur un intervalle de temps I est dite régulière si $(\|u(\cdot, t)\|_{H^1} + \|\theta(\cdot, t)\|_{H^1})$ est continue sur I .

Pour pallier la non unicité des solutions faibles en dimension 3, on peut se demander s'il existe des solutions plus régulières pour lesquelles on pourrait obtenir l'unicité. La réponse à cette question est positive mais avec une restriction importante, qui est la perte de la globalité (en dimension 3). Pour établir l'existence de solutions fortes on reprend l'approximation de Galerkin et on obtient de nouvelles estimations. Bien entendu, pour espérer obtenir des solutions plus régulières, il faut prendre des données initiales (u_0, θ_0) plus régulières elles-aussi. Dans cette optique, rappelons la notion de solution forte.

Définition 2.3.4 Une solution de (2.1.1) est dite forte si la solution obtenue est continue et dérivable en temps et à valeurs dans un espace de Banach.

En d'autres termes, par solution forte, on entend une solution faible (u, θ) telle que

$$L^\infty(]0, T[; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0, T[; H^2(\mathbb{R}^3)).$$

À notre connaissance, ni l'unicité ni la régularité de ces solutions n'ont pu encore être établies.

Remarque 2.3.1 Ce résultat est fondamental à plusieurs titres. D'une part parce que c'est un résultat d'existence globale de solutions aux équations de Boussinesq, sans condition particulière sur la donnée initiale (u_0, θ_0) , si ce n'est d'être dans l'espace d'énergie $L^2(\mathbb{R}^3)$. D'autre

part, la méthode de résolution élaborée par J. Leray est novatrice et féconde car pouvant être adaptée à bon nombre de cas. Nous donnons ici les grandes lignes de la preuve : c'est une méthode par compacité, qui utilise de façon cruciale la conservation de l'énergie. Nous renvoyons le lecteur à l'article original [82, 83].

- * La première étape consiste à résoudre globalement un système approché de Boussinesq. Plus précisément, on régularise le terme convectif $(u \cdot \nabla)u$ et par convolution, de telle sorte que le système original de Boussinesq est approché par un système pour lequel on démontre facilement l'existence d'une suite de solutions régulières et globales.
- * Ensuite, on établit des estimations a priori sur la suite de solutions approchées. Des arguments de compacité viennent compléter la preuve.
- * Il s'agit alors de passer à la limite dans le système approché. Si les termes linéaires ne posent pas de problème, il n'en va pas de même pour les termes non linéaires. C'est d'ailleurs précisément ce genre de problème qui surgit dès lors qu'on a une équation aux dérivées partielles non linéaire.
- * Une fois cette difficulté surmontée, il ne reste plus qu'à montrer que la solution limite est une solution faible, satisfaisant l'inégalité d'énergie.

Remarque 2.3.2 Si la question de l'existence globale de solutions faibles au sens de Leray est résolue par Wang et Zhang, celle de l'unicité n'est pas si claire. Wang et Zhang prouvent l'unicité de solutions turbulentes en dimension 2, mais en dimension 3, cela reste à ce jour une question ouverte majeure.

2.4 Le critère de régularité de type Serrin pour les solutions faibles

Dans les articles [51, 59], les auteurs obtiennent des résultats de régularité des solutions faibles en ayant un contrôle sur la dérivée directionnelle de la pression π . Pour plus de détails au sujet de la régularité des solutions faibles, nous nous référons à [55, 81, 78, 79], ainsi les références internes.

Dong et al. [51] ont montré que pour la solution faible (u, θ) soit régulière, il suffit que la

dérivée directionnelle de la pression π vérifie la condition suivante :

$$\int_0^T \|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q ds < \infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} \leq \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} \leq \lambda \leq 4. \quad (2.4.1)$$

Ces résultats sont similaires à ceux de [9, 10, 24, 28] dans le cadre des équations de Navier-Stokes. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé vers [23]. Ici nous avons utilisé la notation $\partial_i \pi = \frac{\partial \pi}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) pour désigner la dérivée au sens des distributions.

Récemment, Jia et al [59] ont amélioré le résultat de Dong et al. [51] en montrant que si la dérivée directionnelle de la pression π vérifie la condition d'intégrabilité suivante :

$$\int_0^T \|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q ds < \infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} \leq 2, \quad 1 < q < +\infty \quad \text{et} \quad 3 \leq \lambda < +\infty, \quad (2.4.2)$$

alors la solution faible (u, θ) est régulière sur $[0, T]$.

Très récemment, certains critères de régularité logarithmiquement améliorés en termes de champ de vitesse du fluide et la pression π ont été obtenu par Gala et Ragusa dans [55] (voir aussi [58]). D'autre part, il est très intéressant de montrer un critère de régularité des solutions faibles en ayant un contrôle sur la dérivée directionnelle de la pression qui vérifie certaines conditions de croissance.

Dans cette section, nous donnons la preuve du critère de régularité de type Serrin sur les solutions faibles au sens de Leray pour les équations de Boussinesq (2.1.1). Le résultat classique sur la régularité des solutions faibles dans la classe $L^p((0, T); L^q(\mathbb{R}^3))$ a été établi par Danchin et Paicu [48] (voir aussi [50]).

Théorème 2.4.1 (Cannon-DiBenedetto) *Soient $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$ et $T > 0$. Supposons qu'il existe une solution faible au sens de Leray (u, θ) du système (2.1.1) associée à la donnée initiale (u_0, θ_0) sur $[0, T]$, qui vérifie l'une de ces conditions d'intégrabilité en temps et en espace :*

$$u \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1, \quad 3 \leq q \leq \infty, \quad (2.4.3)$$

ou

$$\nabla u \in L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 2, \quad \frac{3}{2} < q \leq \infty, \quad (2.4.4)$$

alors, la solution (u, θ) est régulière sur $]0, T]$.

Pour mieux comprendre le cadre dans lequel s'inscrit le théorème 2.4.1 et dans lequel nous allons travailler, deux remarques sont nécessaires. Tout d'abord,

1. Il est important de noter qu'il n'y a pas de restriction sur la chaleur θ . Plus précisément, dans le théorème 2.4.1, θ n'a pas besoin d'appartenir à la classe (2.4.3) ou (2.4.4).
2. La classe (2.4.3) est importante du point de vue d'invariance d'échelle pour les équations de Boussinesq. Il est clair que si (u, θ, π) est une solution du système (2.1.1), alors pour tout $\lambda > 0$, $(u_\lambda(x, t), \theta_\lambda(x, t), \pi_\lambda(x, t))$ défini par

$$u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \theta_\lambda(x, t) = \lambda^3 \theta(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{et} \quad \pi_\lambda(x, t) = \lambda^2 \pi(\lambda x, \lambda^2 t)$$

est aussi une solution de (2.1.1). L'invariance d'échelle implique

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_{L^p((0,T);L^q(\mathbb{R}^3))} &= \lambda^{1-(\frac{2}{p}+\frac{3}{q})} \|u\|_{L^p((0,T);L^q(\mathbb{R}^3))} \\ &= \|u\|_{L^p((0,T);L^q(\mathbb{R}^3))} \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \end{aligned}$$

si et seulement si $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$.

Notre objectif maintenant est de montrer le théorème suivant qui est un résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.4.2 ([62]) *Soit $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$ tel que $\nabla \cdot u_0 = 0$ dans \mathbb{R}^3 , au sens des distributions. Supposons qu'il existe une solution faible (u, θ) de (2.1.1) associée à la donnée initiale (u_0, θ_0) . Si la dérivée directionnelle $\partial_3 \pi$ de la pression vérifie la condition d'intégrabilité suivante en temps et en espace*

$$\int_0^T \frac{\|\partial_3 \pi(\cdot, s)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(\cdot, s)\|_{L^4})} ds < \infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < \lambda \leq \infty, \quad (2.4.5)$$

pour un $T > 0$, alors la solution faible (u, θ) est régulière sur $[0, T]$, c'est-à-dire, $(u, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$.

Remarque 2.4.1 *Dans le théorème 2.4.2, l'espace \mathbb{R}^3 pourrait être remplacé par \mathbb{R}^n avec $n \geq 3$ sans affecter les résultats que nous obtiendrons par la suite. Toute la théorie que nous développerons restera alors vraie dans ce cas.*

Remarque 2.4.2 *Puisque les normes de Sobolev d'ordre supérieur peuvent être contrôlées par sa norme H^1 (voir par exemple [1]), une conséquence immédiate de ce théorème est que (2.4.5) donne la régularité globale des solutions classiques. Pour démontrer notre résultat principal, on montre que (u, θ) est bornée en norme $L^4(\mathbb{R}^3)$ et la régularité découle alors des critères standard de type Serrin sur les équations de Boussinesq [51].*

Remarque 2.4.3 *Il est intéressant de comparer le théorème 2.4.2 avec des résultats déjà obtenus. Dû à l'inégalité*

$$\int_0^T \frac{\|\partial_3 \pi(\cdot, s)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(\cdot, s)\|_{L^4})} ds \leq \int_0^T \|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q ds \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < \lambda \leq \infty,$$

il est évident de déduire le critère de régularité déjà établi dans [?]. Ainsi le critère de la régularité (2.4.5) reste valable pour les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Comme conséquence du théorème 2.4.2, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.1 *Sous les hypothèses du théorème 2.4.2, si la dérivée directionnelle $\partial_3 \pi$ de la pression vérifie la condition d'intégrabilité suivante en temps et en espace*

$$\int_0^T \|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q ds < \infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad \frac{12}{7} < \lambda \leq \infty,$$

alors, la solution faible (u, θ) est régulière sur $[0, T]$, à savoir $(u, \theta) \in C([0, T]; L^4(\mathbb{R}^3)) \cap H^1(\mathbb{R}^3)$.

Remarque 2.4.4 *Il convient de souligner que la pression π joue un rôle plus important que la chaleur θ dans la théorie de la régularité des solutions aux équations de Boussinesq. Ceci implique qu'une seule direction de la dérivée de la pression π contrôle la régularité de la solution (u, θ) .*

Avec peu de modifications de nos preuves du théorème 2.4.2, nous pouvons montrer le résultat suivant.

Théorème 2.4.3 *Soit $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot \theta_0 = 0$ dans \mathbb{R}^3 , au sens des distributions. Supposons qu'il existe une solution faible (u, θ) de (2.1.1) associée à la*

donnée initiale (u_0, θ_0) . Si la dérivée directionnelle $\partial_3 \pi$ de la pression vérifie la condition d'intégrabilité suivante en temps et en espace

$$\int_0^T \frac{\|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(s)\|_{L^{\frac{3}{2}}})} ds < \infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} < \lambda \leq \infty, \quad (2.4.6)$$

pour un $T > 0$, alors la solution faible (u, θ) est régulière sur $[0, T]$.

Remarque 2.4.5 Ainsi le critère de la régularité (2.4.6) reste valable pour les équations de Navier-Stokes incompressibles.

2.5 Propriétés préliminaires

Avant de donner la preuve du Théorème 2.4.2 (resp. théorème 2.4.3), nous aurons besoin, au cours de la démonstration, des lemmes techniques essentiels suivants. Nous commençons par montrer un résultat d'interpolation sur les espaces de Lebesgue qui va nous permettre d'obtenir une certaine régularité en norme de Lebesgue [1].

Lemme 2.5.1 Soient $1 \leq \alpha, \gamma, \lambda < \infty$ tels que :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\alpha} > 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{3}{\gamma} = \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\alpha}.$$

Supposons que $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\partial_1 f, \partial_2 f \in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$ et $\partial_3 f \in L^\lambda(\mathbb{R}^3)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^\gamma(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\|f\|_{L^\gamma} \leq C \|\partial_1 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{3}} \|\partial_2 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{3}} \|\partial_3 f\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}}. \quad (2.5.1)$$

En particulier, pour $\alpha = 2$, il existe une constante $C = C(\lambda) > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^{3\lambda}} \leq C \|\partial_1 f\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\partial_2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\partial_3 f\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}}. \quad (2.5.2)$$

Preuve. Le lemme est le résultat d'un calcul élémentaire. Toutefois, on peut donner une preuve directe. En effet, sans perdre de généralité, considérons une fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Notons que

$$\partial_1 \left[f^{1+(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} \right] (x) = \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\gamma\right) [f(x)]^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} \partial_1 f(x).$$

En intégrant sur $] -\infty, x_1[$, on obtient

$$\begin{aligned} [f(x)]^{1+(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} &= \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 \left\{ [f(s, x_2, x_3)]^{1+(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} \right\} ds \\ &= \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\gamma \right] \int_{-\infty}^{x_1} [f(s, x_2, x_3)]^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} \partial_1 f(s, x_2, x_3) ds. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème fondamental du calcul, on obtient

$$\begin{aligned} |f(x)|^{1+(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} &\leq C \int_{-\infty}^{x_1} |f(s, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(s, x_2, x_3)| ds \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1. \end{aligned}$$

De façon analogue, on déduit

$$\begin{aligned} |f(x)|^{1+(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x_1, x_2, x_3)| dx_2, \\ |f(x)|^{1+(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x_1, x_2, x_3)| dx_3, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |f(x)|^\gamma &\leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x_1, x_2, x_3)| dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x_1, x_2, x_3)| dx_3 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x_1 et utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^\gamma dx_1 &\leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x_1, x_2, x_3)| dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x_1, x_2, x_3)| dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} dx_1 \right\} \\ &\leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De même, en intégrant par rapport à x_2 et x_3 , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^\gamma dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x_1, x_2, x_3)| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x_1, x_2, x_3)| dx_3 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dx_2 dx_3, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^\gamma dx &\leq C \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x_1, x_2, x_3)| dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2, x_3)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x_1, x_2, x_3)| dx_3 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^\gamma dx &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x)| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x)| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dx_3 \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^{(1-\frac{1}{\lambda})\gamma} |\partial_3 f(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_2 f(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^{(1-\frac{1}{\alpha})\gamma} |\partial_1 f(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\gamma}^\gamma &\leq C \|f\|_{L^\gamma}^{(1-\frac{1}{\alpha})\frac{\gamma}{2}} \|\partial_1 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\gamma}^{(1-\frac{1}{\alpha})\frac{\gamma}{2}} \|\partial_2 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\gamma}^{(1-\frac{1}{\lambda})\frac{\gamma}{2}} \|\partial_3 f\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|f\|_{L^\gamma}^{\gamma-\frac{3}{2}} \|\partial_1 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{2}} \|\partial_3 f\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|f\|_{L^\gamma}^{\frac{3}{2}} \leq C \|\partial_1 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 f\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{2}} \|\partial_3 f\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme 2.5.1. \square

Du lemme 2.5.1, nous allons aisément déduire le résultat suivant.

Lemme 2.5.2 *Soit $2 \leq \beta \leq 6$ et supposons que $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Alors, il existe une constante $C = C(\beta) > 0$ telle que*

$$\|f\|_{L^\beta} \leq C_\beta \|f\|_{L^2}^{\frac{6-\beta}{2\beta}} \|\partial_1 f\|_{L^2}^{\frac{\beta-2}{2\beta}} \|\partial_2 f\|_{L^2}^{\frac{\beta-2}{2\beta}} \|\partial_3 f\|_{L^2}^{\frac{\beta-2}{2\beta}}. \quad (2.5.3)$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|f\|_{L^\beta} \leq C_\beta \|f\|_{L^2}^{\frac{6-\beta}{2\beta}} \|f\|_{L^6}^{\frac{3\beta-6}{2\beta}}. \quad (2.5.4)$$

En appliquant l'inégalité (2.5.2) avec $\lambda = 2$, on a

$$\|f\|_{L^6} \leq C \|\partial_1 f\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\partial_2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\partial_3 f\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}. \quad (2.5.5)$$

En combinant (2.5.4) et (2.5.5), on obtient (2.5.3). Ce qui conclut la preuve du lemme. \square

On utilisera dans la démonstration du résultat principal le lemme suivant.

Lemme 2.5.3 (Inégalité arithmetico-géométrique) *Pour tous x, y positifs,*

$$xy \leq x^4 + y^4 + \frac{1}{8}.$$

En particulier, pour $y = 1$, on a

$$x \leq x^4 + \frac{9}{8}.$$

Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant qui nous sera utile.

Lemme 2.5.4 (lemme de Gronwall logarithmique) *Soient f, g et h trois fonctions continues sur un segment $[0, T]$ à valeurs positives et vérifiant l'inégalité :*

$$\frac{d}{dt}f(t) \leq g(t)f(t) + h(t)(1 + \ln f(t))f(t).$$

pour tout $t \in [0, T]$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$f(t) \leq f(0) \exp\left(\int_0^t h(\tau) \ln(1 + f(\tau)) d\tau\right) \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right). \quad (2.5.6)$$

Preuve. On a par hypothèse

$$\frac{d}{dt}[1 + \ln f(t)] \leq g(t) + h(t)(1 + \ln f(t)).$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle $[0, t]$, il en résulte que

$$\ln f(t) - \ln f(0) \leq \int_0^t g(\tau) d\tau + \int_0^t h(\tau)(1 + \ln f(\tau)) d\tau.$$

Ainsi, on en déduit

$$f(t) \leq f(0) \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right) \exp\left(\int_0^t h(\tau) \ln(1 + f(\tau)) d\tau\right).$$

□

Afin de compléter nos preuves, nous avons également besoin du résultat suivant dû à Giga [20] et Kato [26] dans le cadre des équations de Navier-Stokes.

Lemme 2.5.5 (i) *Pour tout couple de données initiales (u_0, θ_0) dans $L^s(\mathbb{R}^3)$ pour tout $s \geq 3$ tel que $\nabla \cdot u_0 = 0$, le système (2.1.1) admet une solution forte locale (u, θ) telle que*

$$(u, \theta) \in (L^\infty \cap C)([0, T]; L^s(\mathbb{R}^3)).$$

(ii) *Si T^* est le temps maximal d'existence de la solution (u, θ) de (2.1.1) dans la classe $C(0, T^*; L^s(\mathbb{R}^3))$ avec $s > 3$, alors pour tout $t \in (0, T^*)$, on a*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^s} \geq \frac{C}{(T^* - t)^{\frac{s-3}{2s}}} \quad \text{et} \quad \|\theta(\cdot, t)\|_{L^s} \geq \frac{C}{(T^* - t)^{\frac{s-3}{2s}}},$$

où la constante C est indépendante de T^ et s .*

(iii) *De plus, si (u, θ) est une solution faible de (2.1.1) vérifiant $(u, \theta) \in L^r((0, T); L^s(\mathbb{R}^3))$ pour $s \geq 3$ et $\frac{2}{r} + \frac{3}{s} \leq 1$, alors*

$$(u, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T)).$$

2.6 Preuve du théorème 2.4.2

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver notre résultat principal. Tout au long de la démonstration, C représente des constantes réelles positives qui peuvent varier d'une ligne à l'autre.

Preuve. Soit $T > 0$ fixé. Supposons que les données initiales $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$ dans \mathbb{R}^3 . Il est évident que, pour obtenir la régularité pour u et θ , il suffit de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (\|u(\cdot, t)\|_{L^4} + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^4}) < \infty,$$

et donc $\|u(\cdot, t)\|_{L^4}^4 + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^4}^4$ sont uniformément bornés sur $[0, T]$. Ensuite le (iii) du lemme 2.5.5 assure la majoration en temps et la régularité de la solution (u, θ) .

On établit les estimations en multipliant la seconde équation de (2.1.1)₂ par $|\theta|^{p-2}\theta$ et une intégration par parties, on obtient immédiatement

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\theta(\cdot, t)\|_{L^p}^p + \left\| \nabla(|\theta|^{\frac{p}{2}})(\cdot, t) \right\|_{L^2}^2 = 0, \quad (2.6.1)$$

où nous avons utilisé la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot u = 0$ et le fait que

$$\begin{aligned} -p \int_{\mathbb{R}^3} |\theta|^{p-2} \theta \cdot \Delta \theta dx &= p \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\theta |\theta|^{p-2}) \cdot \nabla \theta dx \\ &= p \int_{\mathbb{R}^3} |\theta|^{p-2} |\nabla \theta|^2 dx + p(p-2) \int_{\mathbb{R}^3} |\theta|^{p-2} |\nabla |\theta||^2 dx \\ &= p \int_{\mathbb{R}^3} |\theta|^{p-2} |\nabla \theta|^2 dx + \frac{4(p-2)}{p} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla |\theta|^{\frac{p}{2}} \right|^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\left| \nabla |\theta|^{\frac{p}{2}} \right| \leq \frac{p}{2} |\theta|^{\frac{p}{2}-1} |\nabla \theta|.$$

De l'identité (2.6.1), soit en intégrant en temps

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^p}^p + \frac{4(p-1)}{p^2} \int_0^t \left\| (\nabla |\theta|^{\frac{p}{2}})(\cdot, \tau) \right\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\theta_0\|_{L^p}^p \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall p \in [2, +\infty].$$

En particulier, pour $p = 2$, il vient que

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla \theta(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\theta_0\|_{L^2}^2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.6.2)$$

En multipliant la première équation (2.1.1)₁ par u et en intégrant par parties par rapport à $x \in \mathbb{R}^3$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (\theta e_3) \cdot u dx - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot u dx \\ &\leq \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} \\ &\leq \|\theta_0\|_{L^2} \|u(\cdot, t)\|_{L^2}, \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

où nous avons utilisé la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot u = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u) \cdot u dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) |u|^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \cdot u) |u|^2 dx = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot u dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} \pi \cdot (\nabla \cdot u) dx = 0. \end{aligned}$$

En utilisant (2.6.2) et l'inégalité de Hölder, il s'ensuit de (2.6.3) que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 4 \int_0^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq 4 \|\theta_0\|_{L^2}^2 T^2 + 2 \|u_0\|_{L^2}^2,$$

soit encore

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)),$$

En prenant le produit scalaire entre l'équation (2.1.1)₁ et $u|u|^2$ et une intégration par parties, il vient que

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^4}^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla u\|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\theta \vec{e}_3) \cdot |u|^2 u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx, \quad (2.6.4)$$

où nous avons utilisé le fait que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u) \cdot |u|^2 u dx &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla |u|^4 dx = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} \pi u \cdot \nabla |u|^2 u dx, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot |u|^2 u dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla u\|^2 dx. \end{aligned}$$

De la même façon, en prenant le produit scalaire entre l'équation (2.1.1)₂ et $|\theta|^2 \theta$ et une intégration par parties donne

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^4}^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \theta|^2 |\theta|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \theta\|^2 dx = 0 \quad (2.6.5)$$

où nous avons utilisé le fait que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla \theta) \cdot |\theta|^2 \theta dx &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla |\theta|^4 dx = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \theta \cdot |\theta|^2 \theta dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \theta|^2 |\theta|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \theta\|^2 dx \end{aligned}$$

En regroupant ces équations (2.6.4) et (2.6.5), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) + \| |u| |\nabla u| \|_{L^2}^2 + \| |\theta| \nabla \theta \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} (\| \nabla |u|^2 \|_{L^2}^2 + \| \nabla \theta^2 \|_{L^2}^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (\theta \vec{e}_3) \cdot |u|^2 u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

D'après l'inégalité de convexité,

$$\forall \theta \in]0, 1[, \quad ab \leq (1 - \theta)a^{\frac{1}{1-\theta}} + \theta b^{\frac{1}{\theta}},$$

on obtient facilement que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\theta \vec{e}_3) \cdot |u|^2 u dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\theta| |u|^3 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} |\theta|^4 + \frac{3}{4} |u|^4 \right) dx \leq \frac{3}{4} (\|\theta\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^4}^4). \quad (2.6.7)$$

Par conséquent, en insérant (2.6.7) dans (2.6.6), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (\|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) + 4 (\| |u| |\nabla u| \|_{L^2}^2 + \| |\theta| \nabla \theta \|_{L^2}^2) + 2 (\| \nabla |u|^2 \|_{L^2}^2 + \| \nabla \theta^2 \|_{L^2}^2) \\ &\leq \frac{3}{4} (\|\theta\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^4}^4) + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx \right|. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Afin d'estimer $\left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx \right|$, nous souhaitons maintenant donner quelques estimations a priori dans les espaces de Lebesgue pour la pression et du gradient de la pression en termes de u et θ . On prend la divergence dans la première équation (2.1.1), on obtient

$$-\Delta \pi = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j (u_i u_j) - \partial_3 \theta,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} -\Delta(\nabla \pi) &= \nabla \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) - \partial_3 \nabla \theta = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j (u_i \nabla u_j + u_j \nabla u_i) - \partial_3 \nabla \theta \\ \nabla \pi &= \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j (u_i \nabla u_j + u_j \nabla u_i) - \mathcal{R}_3 \mathcal{R} \theta, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{R}_i = \partial_i(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3) = \nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$$

est la transformation de Riesz. En appliquant la continuité des intégrales singulières sur les espaces de Lebesgue L^p ($1 < p < \infty$), nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla\pi\|_{L^p} &\leq C \|u \cdot \nabla u\|_{L^p} + \|\theta\|_{L^p} \\ &\leq C \|u \cdot \nabla u\|_{L^p} + \|\theta_0\|_{L^p} \\ &\leq C \|u \cdot \nabla u\|_{L^p} + C. \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et en employant une intégration par parties, nous estimons

$\left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \pi |u|^2 dx \right|$ comme suit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \pi |u|^2 dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \pi (u \cdot \nabla |u|^2) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\pi u| |\nabla |u|^2| dx \\ &\leq \|\pi u\|_{L^2} \|\nabla |u|^2\|_{L^2} \\ &\leq \|\pi\|_{L^4} \|u\|_{L^4} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}. \end{aligned}$$

En appliquant (2.5.1) à $\|\pi\|_{L^4}$ et en choisissant $\gamma = 4$ tel que $\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\alpha} = \frac{7}{4}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \|\pi\|_{L^4} &\leq C \|\partial_1 \pi\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{3}} \|\partial_2 \pi\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{3}} \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \|\nabla \pi\|_{L^\alpha}^{\frac{2}{3}} \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{12}{7} < \lambda \leq \infty$, on obtient alors

$$\frac{8}{7} \leq \alpha < \frac{12}{7}.$$

D'autre part, (2.6.9), l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg permettent alors d'écrire

$$\begin{aligned} \|\nabla\pi\|_{L^\alpha} &\leq C \|u \cdot \nabla u\|_{L^\alpha} + C \\ &\leq C \|u\|_{L^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}}} \|\nabla u\|_{L^2} + C \\ &= C \| |u|^2 \|_{L^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2} + C \\ &\leq C \| |u|^2 \|_{L^2}^{\frac{3}{\alpha}-\frac{7}{4}} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^{\frac{9}{4}-\frac{3}{\alpha}} \|\nabla u\|_{L^2} + C \\ &\leq C \|u\|_{L^4}^{\frac{6}{\alpha}-\frac{7}{2}} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^{\frac{9}{4}-\frac{3}{\alpha}} \|\nabla u\|_{L^2} + C. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \pi |u|^2 dx \right| \leq \left(C \|u\|_{L^4}^{\frac{4}{\alpha} - \frac{4}{3}} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^{\frac{5}{2} - \frac{2}{\alpha}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + C \right) \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}}.$$

Puis, en vertu de l'inégalité de Young ($a^\delta b^{1-\delta} \leq \delta a + (1-\delta)b \leq a + b$ avec $a, b \geq 0$ et $0 \leq \delta \leq 1$), il vient que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla \pi |u|^2 dx \right| \\ & \leq \left(\|\nabla |u|^2\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{5}{4} - \frac{1}{\alpha}} \left(C \|u\|_{L^4}^{\frac{16}{3}(\frac{3-\alpha}{4-\alpha})} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2}{3}(\frac{4\alpha}{4-\alpha})} \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}(\frac{4\alpha}{4-\alpha})} \right)^{1 - (\frac{5}{4} - \frac{1}{\alpha})} + C \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}} \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^4}^{\frac{16}{3}(\frac{3-\alpha}{4-\alpha})} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2}{3}(\frac{4\alpha}{4-\alpha})} \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}(\frac{4\alpha}{4-\alpha})} + C \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{1}{3}} \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^4}^{\frac{16}{3}(\frac{3-\alpha}{4-\alpha})} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{3}(\frac{4\alpha}{4-\alpha})} \left(\|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{4\alpha}{12-7\alpha}} \right)^{1 - \frac{1}{3}(\frac{4\alpha}{4-\alpha})} \\ & \quad + C \left(1^{\frac{12\alpha}{19\alpha-12}} \right)^{1 - \frac{12-7\alpha}{12\alpha}} \left(\|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{4\alpha}{12-7\alpha}} \right)^{\frac{12-7\alpha}{12\alpha}} \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^4}^{\frac{16}{3}(\frac{3-\alpha}{4-\alpha})} \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{4\alpha}{12-7\alpha}} \right) + C \left(1 + \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^{\frac{4\alpha}{12-7\alpha}} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^2 + C (\|u\|_{L^4}^4 + 1) (1 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q), \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

où nous avons utilisé le fait suivant :

$$\frac{16}{3} \left(\frac{3-\alpha}{4-\alpha} \right) < 4 \quad \text{et} \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{\lambda} = \frac{7}{4}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad q = \frac{4\alpha}{12-7\alpha}.$$

En insérant (2.6.10) dans (2.6.8), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) + \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^2 \\ & \leq C (\|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) (1 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q). \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) + \|\nabla |u|^2\|_{L^2}^2 \\ & \leq C (1 + \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q + \|\nabla u\|_{L^2}^2) (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) \\ & \leq C \|\partial_{x_3} \pi\|_{L^\lambda}^q (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) \\ & \quad + C (1 + \|\nabla u\|_{L^2}^2) (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4). \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

Posons

$$J = \|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4).$$

Grâce au lemme 3.3.1, on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} 1 + \ln(1 + \|\theta\|_{L^4}) &\leq 1 + \ln\left(1 + \|\theta\|_{L^4}^4 + \frac{9}{8}\right) \\ &\leq 1 + \ln(e + \|\theta\|_{L^4}^4). \end{aligned}$$

Il est clair que J peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} J &= \frac{\|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta\|_{L^4})} (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) [1 + \ln(1 + \|\theta\|_{L^4})] \\ &\leq \frac{\|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta\|_{L^4})} (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) [1 + \ln(e + \|\theta\|_{L^4}^4)] \\ &\leq \frac{\|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta\|_{L^4})} (e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4) [1 + \ln(e + \|u\|_{L^4}^4 + \|\theta\|_{L^4}^4)]. \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Par conséquent, en insérant (2.6.12) dans (2.6.11) et posons

$$F(t) = e + \|u(t)\|_{L^4}^4 + \|\theta(t)\|_{L^4}^4,$$

il s'ensuit que

$$\frac{dF}{dt} \leq C \frac{\|\partial_3 \pi\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta\|_{L^4})} (1 + \ln F) F + C(1 + \|\nabla u\|_{L^2}^2) F.$$

pour tout $t \in [0, T]$. Le lemme de Gronwall implique alors que

$$\begin{aligned} F(t) &\leq F(0) \exp\left(C \int_0^t \frac{\|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(s)\|_{L^4})} (1 + \ln F(s)) ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(C \int_0^t (1 + \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2) ds\right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que (u, θ) est une solution faible de (2.1.1), on trouve grâce à l'inégalité d'énergie que

$$\int_0^T (1 + \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2) ds \leq C(T, u_0, \theta_0),$$

et par suite

$$1 + \ln F(t) \leq CT + \ln F(0) + C \int_0^t \frac{\|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(s)\|_{L^4})} (1 + \ln F(s)) ds.$$

L'inégalité de Gronwall standard implique que

$$\ln F(t) \leq c(u_0, \theta_0, T) \exp \left(C \int_0^T \frac{\|\partial_3 \pi(s)\|_{L^\lambda}^q}{1 + \ln(1 + \|\theta(s)\|_{L^4})} ds \right),$$

et en se servant de (2.4.5), on obtient une solution (u, θ) du problème (2.1.1) vérifiant :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|u(\cdot, t)\|_{L^4} + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^4}) < \infty. \quad (2.6.13)$$

Alors, en utilisant le lemme 2.5.5 (iii), il est facile de conclure que l'estimation ci-dessus (2.6.13) implique que la solution (u, θ) est régulière sur $[0, T]$. Le théorème 2.4.2 est ainsi démontré. \square

Très récemment, Gala et Ragusa [55] ont étendu la classe de régularité pour les espaces de Morrey-Campanato. Voici le résultat.

Théorème 2.6.1 ([55]) *Soit $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$ dans \mathbb{R}^3 , au sens des distributions. Supposons qu'il existe une solution faible (u, θ) de (2.1.1) associée à la donnée initiale (u_0, θ_0) sur $[0, T]$. Si la dérivée directionnelle $\partial_3 \pi$ de la pression vérifie la condition d'intégrabilité suivante en temps et en espace*

$$\int_0^T \frac{\|\partial_3 \pi(s)\|_{\dot{\mathcal{M}}_{2, \frac{3}{r}}}^{\frac{2}{1-r}}}{1 + \ln(1 + \|\theta(s)\|_{L^4})} ds < \infty \quad \text{avec } 0 < r < 1,$$

alors la solution faible (u, θ) est régulière sur $[0, T]$.

Remarque 2.6.1 *Le cas critique $r = 0$ ou $r = 1$ reste un problème ouvert.*

Un critère de régularité logarithmique des solutions dans les espaces de Besov

3.1 Introduction

La description mathématique de l'état d'un fluide en mouvement se fait au moyen de fonctions déterminant la distribution de la vitesse du fluide u et de quelques grandeurs thermodynamiques, par exemple la pression π et la température du fluide θ .

Dans l'ensemble, les mécanismes d'explosion (c'est-à-dire de perte de régularité en temps fini) pour les EDP d'évolution non linéaires sont encore très mal compris. Le but principal de ce chapitre est de donner un nouveau critère de régularité des solutions faibles de l'équation de Boussinesq dans la classe $L^{\frac{2}{1-r}}([0, T]; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}(\mathbb{R}^3))$ pour $0 \leq r \leq 1$.

Rappelons que les équations de Boussinesq sur $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ décrivant l'évolution d'un fluide newtonien incompressible, homogène et visqueux, sont données, en l'absence de force extérieures, par le système :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla \pi = \theta \vec{e}_3, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ (u, \theta)(x, 0) = (u_0, \theta_0)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Quand $\theta = 0$, (3.1.1) se réduit aux équations de Navier-Stokes incompressibles et de nombreux résultats sont disponibles. Outre leurs applications physiques, les équations de Navier-Stokes sont également significatives sur le plan mathématique.

Cependant, comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, la question de la régularité globale des solutions faibles des équations de Boussinesq en dimension 3 reste toujours un problème ouvert et le système (3.1.1) a fait l'objet de nombreuses études. En utilisant certains outils d'analyse harmonique réelle, certains critères de régularité des solutions faibles via le champ de vitesse, dans les espaces de Lebesgue, les espaces de multiplicateurs singuliers et les espaces de Besov ont été obtenus dans [53, 72, 65, 66, 81, 69].

Plus récemment, Gala et Ragusa [55] ont montré que la solution faible devient régulière si

$$\int_0^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} + \|\theta(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{1 + \log(e + \|u(\cdot, t)\|_{H^s} + \|\theta(\cdot, t)\|_{H^s})} dt < \infty \quad \text{pour } 0 \leq r < 1 \quad \text{et } s \geq \frac{1}{2}, \quad (3.1.2)$$

où $\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}$ désigne l'espace de Besov homogène. Les définitions et les propriétés de base des espaces de Sobolev et de Besov peuvent être trouvées dans [64]. Pour la concision, nous les omettons ici.

Le but de ce chapitre vise à améliorer le critère de régularité (3.1.2) sous la condition suivante :

$$\int_0^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}})} dt < \infty \quad \text{pour } 0 \leq r < 1.$$

Dans [48], Cannon et Dibenedetto étudient des critères de régularité du problème (3.1.1) par des méthodes d'énergie. Dans cette optique, des résultats sont obtenus par Dong, Jia et Zhang dans [51], où ils ont étendu le critère de Cannon and Dibenedetto [48] au cas des espaces de Besov. Motivés par [48] et [59], Gala et Ragusa [55] affinent les résultats précédents et ont montré un résultat de régularité dans les espaces de Besov d'indice négatif.

L'un des problèmes posé par l'étude de ce système consiste en la recherche des espaces aussi grands que possible pour lesquels on pourra résoudre de manière unique localement en temps, ou bien globalement en temps si la norme dans ces espaces est suffisamment petite. La régularité de ces solutions et donc leur unicité, reste un problème ouvert de grande actualité.

Il est donc naturel de se demander sous quelles conditions nous pouvons obtenir la régularité des solutions faibles au sens de Leray pour les équations de Boussinesq. La régularité du problème (3.1.1) fait déjà l'objet de nombreux travaux (dont seulement quelques-uns sont rappelés ci-après). Le travail fondateur dans ce domaine est le travail de F. Xu et J. Yuan [82] (voir aussi [83]) où ils ont démontré que pour toute donnée initiale $(u_0, \theta_0) \in H^s(\mathbb{R}^3)$

pour $s \geq 3$, il existe un réel strictement positif $T = T(\|(u_0, \theta_0)\|_{H^s})$ tel qu'il existe une unique solution (u, θ) de l'équation de Boussinesq sur $[0, T]$ sachant que

$$u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3)), \quad \theta \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T]; H^{s+1}(\mathbb{R}^3)).$$

Une telle solution (u, θ) est réellement régulière. Rappelons que $C([0, T]; E)$ c'est l'ensemble des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans E . Il est muni de la norme

$$\|u\|_{C([0, T]; E)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_E.$$

Remarque 3.1.1 *Pour un espace vectoriel topologique E , $C^1((0, T); E)$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans E , définies et continûment dérivables sur $(0, T)$. La topologie dans $C^1((0, T); E)$ étant celle de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées.*

L'intérêt de cette étude est de savoir si la solution (u, θ) perd vraiment sa régularité à $t = T$ (voir [14]). Une autre possibilité est que (u, θ) peut être prolongée à la solution dans la même classe que dans (CL_s) au delà de T . Il peut être possible qu'il existe un nombre réel $T^* > T$ sachant que (u, θ) peut être étendu vers la solution sur $[0, T^*)$ puisque

$$u \in C([0, T^*]; H^s) \cap C^1((0, T^*); H^s) \cap C((0, T^*); H^{s+2}) = (CL_s^*).$$

D'un autre côté, Giga [20] a développé la théorie de l'opérateur de Stokes sur les espaces de Lebesgue L^α et a établi un critère sur l'extension des solutions fortes. Soit $u_0 \in H^s$ avec $s > \frac{1}{2}$. Supposons que u soit une solution de l'équation de Navier-Stokes ($\theta = 0$) sur $[0, T]$ dans la classe (CL_s) . Si

$$\int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^\alpha}^\kappa dt < +\infty, \quad \text{pour} \quad \frac{2}{\kappa} + \frac{3}{\alpha} = 1 \quad \text{avec} \quad 3 < \alpha \leq \infty$$

est satisfaite, alors il existe $T^* > T$ telle que u peut être prolongé vers la solution sur $[0, T^*)$ dans la classe (CL_s^*) .

En introduisant la classe $L^\gamma((0, T); L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, Serrin [36] a montré que si une solution faible au sens de Leray u appartient à la classe $L^\gamma((0, T); L^\alpha(\mathbb{R}^3))$ avec des exposants α et γ vérifiant $\frac{2}{\gamma} + \frac{3}{\alpha} < 1$, $2 < \gamma < \infty$, $3 < \alpha < \infty$, alors la solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$.

Dans [27], Kozono et Taniuchi ont montré qu'une solution faible u de l'équation de Navier-Stokes ($\theta = 0$) sur $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ convient pour tout $0 < \epsilon < T$ avec une solution forte dans la classe

$$u \in C([\epsilon, T]; H^s) \cap C^1((\epsilon, T); H^s) \cap C((\epsilon, T); H^{s+2}), \quad s > \frac{1}{2},$$

si

$$\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{BMO}^2 dt < +\infty.$$

Ce procédé, repris par Kozono-Ogawa-Taniuchi [27] trois ans plus tard, permet de montrer que si une solution faible au sens de Leray

$$u \in L^2((0, T); \dot{B}_{\infty, \infty}^0(\mathbb{R}^3)),$$

alors u est réellement une solution forte du système de Navier-Stokes sur $(0, T)$.

Dans [?], Sohr a étendu le critère de régularité de Serrin dans la classe plus naturelle et plus générale en introduisant l'espace de Lorentz en temps et en espace $L^{s,r}((0, T); L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{2}{s} + \frac{3}{q} = 1$. Nous allons nous attacher ici à généraliser ce type de résultat de régularité, en prenant des espaces plus grands. Nous le ferons essentiellement sur les espaces de Besov d'indice négatif et nous inspirons du résultat remarquable de Gala ([19]), qui dit que si la solution régulière u vérifie

$$\omega = \nabla \times u \in L^2((0, T); \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}(\mathbb{R}^3)),$$

alors la solution u peut être prolongée comme une solution régulière au delà de T .

La question qui se pose maintenant de manière naturelle est : peut-on étendre ce résultat de régularité des solutions faibles au sens de Leray pour les équations de Boussinesq (3.1.1) dans l'espace entier \mathbb{R}^3 au cas des espaces de Besov d'indice de régularité négatif. On sait que si une solution faible au sens de Leray u appartient à la classe

$$L^\gamma((0, T); L^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{pour certain } 0 \leq r \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{\gamma} = 1 - r, \quad (3.1.3)$$

alors u est régulière [36].

Inspirés par le résultat [19], nous montrons que les solutions faibles sont des solutions fortes si le champ de vitesse u satisfait une certaine condition. Plus précisément, nous donnons un

nouveau critère de régularité

$$\int_0^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\log(e + \|u(t, \cdot)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}})} dt < \infty$$

pour $0 \leq r < 1$ ou

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}(\mathbb{R}^3))} \ll 1.$$

pour des solutions faibles des équations de Boussinesq dans \mathbb{R}^3 . Il est donc naturel d'étendre le résultat dans l'espace plus large et améliorer les résultats précédents.

Théorème 3.1.1 *Soit (u, θ) une solution régulière de (3.1.1) dans $[0, T)$ avec la donnée initiale $(u_0, \theta_0) \in H^3(\mathbb{R}^3) \times H^3(\mathbb{R}^3)$ où $\operatorname{div} u_0 = 0$ dans \mathbb{R}^3 . Supposons que la solution (u, θ) satisfait*

$$\int_0^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}})} dt < \infty \quad \text{pour } 0 \leq r < 1. \quad (3.1.4)$$

Alors, on a

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|u(\cdot, t)\|_{H^3}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{H^3}^2) < \infty.$$

Autrement dit, la solution (u, θ) peut être continûment étendue au delà du temps $t = T$. En d'autres termes, si T_* est le temps maximum d'existence de la solution, alors

$$\int_0^{T_*} \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}})} dt < \infty.$$

D'où, la solution (u, θ) peut être continûment étendue au delà du temps $t = T$.

Remarque 3.1.2 *La condition (2.5.2) peut être considérée comme une version améliorée, sur le plan logarithmique, de l'hypothèse*

$$\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} dt < \infty \quad \text{pour } 0 \leq r < 1.$$

Pour le cas $r = 1$, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.1.2 Soit (u, θ) une solution régulière de (3.1.1) dans $[0, T)$ avec la donnée initiale $(u_0, \theta_0) \in H^3(\mathbb{R}^3) \times H^3(\mathbb{R}^3)$ où $\operatorname{div} u_0 = 0$ dans \mathbb{R}^3 . Supposons qu'il existe une constante η positive, assez petite, telle que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}(\mathbb{R}^3))} \leq \eta, \quad (3.1.5)$$

alors la solution (u, θ) peut être prolongée continûment au delà du temps $t = T$.

Remarque 3.1.3 Le théorème 3.1.2 peut être considéré comme une amélioration et un cas limite de ceux de [55]. Il convient de souligner que toutes les conditions sont valables pour les équations de Navier-Stokes. Nous nous référons à un travail récent de [55] et aux références qu'il contient.

Remarque 3.1.4 Pour le cas $r = 0$, voir [69].

On aura besoin du résultat suivant due à Kato et Ponce [60].

Lemme 3.1.1 Supposons que $1 < p < \infty$. Pour tout $f, g \in W^{m, p}(\mathbb{R}^3)$, $1 < q_1, q_2 \leq \infty$ et $1 < p_1, p_2 \leq \infty$, on a

$$\|\nabla^\alpha (fg) - f\nabla^\alpha g\|_{L^p} \leq C (\|\nabla f\|_{L^{p_1}} \|\nabla^{\alpha-1} g\|_{L^{q_1}} + \|g\|_{L^{q_2}} \|\nabla^\alpha f\|_{L^{p_2}}), \quad (3.1.6)$$

où $1 \leq \alpha \leq m$ et

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}.$$

3.2 Preuve du théorème 3.1.1

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème 3.1.1 en utilisant la méthode d'énergie.

Preuve. Soit $T > 0$ un temps donné, fixé. L'existence et l'unicité des solutions régulières peuvent être obtenues comme dans le cas des équations de Navier-Stokes. Plus précisément, on montre que si une solution régulière (u, θ) vérifie la condition (2.5.2), alors la solution (u, θ) peut être étendue au-delà de $t = T$, c'est-à-dire, pour $T < \tilde{T}$ et $s \geq 3$:

$$(u, \theta) \in C\left([0, \tilde{T}); H^s(\mathbb{R}^3)\right) \cap C^1\left([0, \tilde{T}); H^{s-1}(\mathbb{R}^3)\right).$$

Comme

$$\int_0^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}})} dt < \infty \quad \text{pour } 0 \leq r < 1,$$

on déduit que pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $T_0 = T_0(\epsilon) < T$ vérifiant

$$\int_{T_0}^T \frac{\|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-r}})} dt \leq \epsilon \ll 1. \quad (3.2.1)$$

En multipliant (3.1.1)₂ par θ et en intégrant par parties par rapport à $x \in \mathbb{R}^3$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = 0,$$

où nous avons utilisé la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot u = 0$. Par conséquent, il vient que

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)). \quad (3.2.2)$$

Ensuite, en multipliant (3.1.1)₁ par u , on obtient après une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (\theta \vec{e}_3) \cdot u dx \leq \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} \\ &\leq C \|u(\cdot, t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)), \quad (3.2.3)$$

où on a utilisé (3.2.2) et

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u) \cdot u dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) u^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \cdot u) u^2 dx = 0$$

due à la condition d'incompressibilité de u , c'est-à-dire, $\nabla \cdot u = 0$.

Maintenant, en multipliant les équations (3.1.1)₁ et (3.1.1)₂ par $(-\Delta u)$ et $(-\Delta \theta)$, après une intégration par parties et prenant en compte de la propriété de divergence nulle, on a alors

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} [(u \cdot \nabla) u] \cdot \Delta u dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\theta \vec{e}_3) \cdot \Delta u dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} [(u \cdot \nabla) \theta] \cdot \Delta \theta dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot \Delta u dx. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Notons que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} [(u \cdot \nabla) u] \cdot \Delta u dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} [(u \cdot \nabla) \theta] \cdot \Delta \theta dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

En utilisant la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot u = 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx = 0,$$

et par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} [(u \cdot \nabla) u] \cdot \Delta u dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx, \\ \int_{\mathbb{R}^3} [(u \cdot \nabla) \theta] \cdot \Delta \theta dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\theta \vec{e}_3) \cdot \Delta u dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial u_3}{\partial x_i} dx$$

En combinant ces différentes relations, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial u_3}{\partial x_i} dx \\ &= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Majorons terme à terme le membre de droite. Par les inégalités de Hölder et de Young, \mathcal{I}_1 se

majoré par

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot \Delta u dx \leq \|\nabla \cdot (u \otimes u)\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}} \|\nabla u\|_{\dot{H}^r} \|\Delta u\|_{L^2} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^{1-r} \|\Delta u\|_{L^2}^{1+r} \\
&\leq \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité d'interpolation suivante due à [63] :

$$\|u \otimes u\|_{\dot{H}^1} \leq C \|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}} \|\nabla u\|_{\dot{H}^r}$$

et l'inégalité d'interpolation standard

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{H}^s} &= \left\| |\xi|^s \widehat{f} \right\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{f}|^{2s} |\widehat{f}|^{2-2s} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_{L^2}^{1-s} \|\nabla f\|_{L^2}^s \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq 1.
\end{aligned}$$

Pour le terme \mathcal{I}_2 , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{L^4}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} \|\Delta \theta\|_{L^2} \\
&\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\theta\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \|\Delta \theta\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{2} \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \|\theta\|_{L^\infty}^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \|\theta\|_{L^\infty}^2 (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\|\nabla \theta\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}} \leq C \|\theta\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^0} \leq C \|\theta\|_{L^\infty}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir une majoration de \mathcal{I}_3 comme suit

$$\mathcal{I}_3 \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2).$$

En regroupant les termes dans (3.2.4), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \left(\frac{1}{2} + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty}^2 \right) (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

Comme $H^3(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continuellement dans $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}(\mathbb{R}^3)$, il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}} \leq C \|u\|_{H^3}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ & \leq C \left[\frac{\frac{1}{2} + \|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} + \|\theta\|_{L^\infty}^2}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}})} \right] (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) \ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}) \\ & \leq C \left[\frac{\frac{1}{2} + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty}^2}{\ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}})} \right] (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) \ln(e + \|u(\cdot, t)\|_{H^3} + \|\theta(\cdot, t)\|_{H^3}) \\ & \leq C \left[\frac{\frac{1}{2} + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}} + \|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty}^2}{\log(e + \|u(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}})} \right] (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) \ln(e + \kappa(t)) \end{aligned}$$

où $\kappa(t)$ est défini par

$$\kappa(t) = \sup_{T_0 \leq \tau \leq t} (\|u(\cdot, \tau)\|_{H^3} + \|\theta(\cdot, \tau)\|_{H^3}) \quad \text{pour tout } T_0 \leq t < T.$$

On doit mentionner que la fonction $\kappa(t)$ est croissante. En intégrant l'inégalité ci-dessus sur $[T_0, t]$ et en appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$\begin{aligned} & \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \int_{T_0}^t \|\Delta u(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\ & \leq (\|\nabla u(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2) \\ & \quad \times \exp \left(C \int_{T_0}^t \frac{\|u(\cdot, \tau)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\log(e + \|u(\cdot, \tau)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}})} \ln(e + \kappa(\tau)) d\tau \right) \\ & \leq (\|\nabla u(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2) \\ & \quad \times \exp \left(C \ln(e + \kappa(t)) \int_{T_0}^t \frac{\|u(\cdot, \tau)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}}^{\frac{2}{1-r}}}{\ln(e + \|u(\cdot, \tau)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-r}})} d\tau \right) \\ & \leq \tilde{C} \exp(C\epsilon \ln(e + \kappa(t))) = \tilde{C} (e + \kappa(t))^{C\epsilon} \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

où \tilde{C} est une constante positive dépendant de $\|\nabla u(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2$, $\|\nabla \theta(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2$, T_0 , T et θ_0 .

Ensuite, on se propose d'obtenir des estimations dans H^3 sous la condition (3.2.6). En appliquant l'opérateur $\Lambda^3 = (-\Delta)^{\frac{3}{2}}$ à la première équation de (3.1.1)₁, en prenant le produit scalaire de l'équation résultante avec $\Lambda^3 u$, une intégration par parties, on a alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Lambda^3 u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^4 u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^3 (u \cdot \nabla u) \cdot \Lambda^3 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^3 (\theta \vec{e}_3) \cdot \Lambda^3 u dx \quad (3.2.7)$$

De même, en appliquant $\Lambda^3 = (-\Delta)^{\frac{3}{2}}$ à (3.1.1)₂, en prenant le produit scalaire de l'équation résultante avec $\Lambda^3 \theta$, une intégration par parties, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Lambda^3 \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^4 \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^3 (u \cdot \nabla \theta) \cdot \Lambda^3 \theta dx, \quad (3.2.8)$$

En utilisant le fait $\nabla \cdot u = 0$, il vient que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) \Lambda^3 u \cdot \Lambda^3 u dx = \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) \Lambda^3 \theta \cdot \Lambda^3 \theta dx = 0,$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Lambda^3 u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^3 \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Lambda^4 u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^4 \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} [\Lambda^3 (u \cdot \nabla u) - u \cdot \Lambda^3 \nabla u] \cdot \Lambda^3 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^3 (\theta \vec{e}_3) \cdot \Lambda^3 u dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^3} [\Lambda^3 (u \cdot \nabla \theta) - u \cdot \Lambda^3 \nabla \theta] \cdot \Lambda^3 \theta dx \\ &= \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Pour estimer Π_1 , rappelons l'inégalité du commutateur due à [60] :

$$\|\Lambda^\alpha (fg) - f \Lambda^\alpha g\|_{L^p} \leq C (\|\Lambda^{\alpha-1} g\|_{L^{q_1}} \|\nabla f\|_{L^{p_1}} + \|\Lambda^\alpha f\|_{L^{p_2}} \|g\|_{L^{q_2}}), \quad (3.2.10)$$

pour $\alpha > 1$, et $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$. Donc Π_1 peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\leq C \|\nabla^3 (u \cdot \nabla u) - u \cdot \nabla^3 \nabla u\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\nabla^3 u\|_{L^3} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^3} \|\Lambda^3 u\|_{L^3}^2 \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|\Lambda^3 u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\Lambda^4 u\|_{L^2}^{\frac{5}{3}} \\ &\leq \frac{1}{6} \|\Lambda^4 u\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{13}{2}} \|\Lambda^3 u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

où on a utilisé (3.2.10) avec $\alpha = 3, p = \frac{3}{2}, p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 3$, et l'inégalité suivante de Gagliardo-Nirenberg

$$\begin{cases} \|\nabla u\|_{L^3} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|\Lambda^3 u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}, \\ \|\Lambda^3 u\|_{L^3} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{13}{6}} \|\Lambda^4 u\|_{L^2}^{\frac{5}{6}}. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

En utilisant (3.2.1) pour $T_0 \leq t < T$, (3.2.11) se réduit à

$$\Pi_1 \leq \frac{1}{2} \|\Lambda^4 u\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(e + \kappa(t))^{\frac{3}{2} + \frac{13}{2}C\epsilon}. \quad (3.2.13)$$

En utilisant (3.2.10) encore une fois, on obtient

$$\begin{aligned} \Pi_3 &\leq C \|\nabla^3 (u \cdot \nabla \theta) - u \cdot \nabla^3 \nabla \theta\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\nabla^3 \theta\|_{L^3} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^3} \|\nabla^3 \theta\|_{L^3}^2 + C \|\nabla \theta\|_{L^3} \|\nabla^3 u\|_{L^3} \|\nabla^3 \theta\|_{L^3} \\ &\leq C (\|\nabla u\|_{L^3} + \|\nabla \theta\|_{L^3}) (\|\nabla^3 u\|_{L^3}^2 + \|\nabla^3 \theta\|_{L^3}^2) \\ &\leq \frac{1}{6} (\|\Lambda^4 u\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^4 \theta\|_{L^2}^2) + \tilde{C}(e + \kappa(t))^{\frac{3}{2} + \frac{13}{2}C\epsilon}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy permet de majorer le terme Π_2 comme suit

$$\begin{aligned} \Pi_2 &\leq \frac{1}{2} (\|\nabla^3 u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^3 \theta\|_{L^2}^2) \\ &\leq \tilde{C}(e + \kappa(t))^2. \end{aligned}$$

En insérant toutes ses inégalités dans (3.2.9) et en simplifiant les termes dissipatifs, on trouve

$$\frac{d}{dt} (\|\Lambda^3 u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^3 \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) \leq \tilde{C}(e + \kappa(t))^{\frac{3}{2} + \frac{13}{2}C\epsilon} + \tilde{C}(e + \kappa(t))^2, \quad (3.2.14)$$

avec l'inégalité d'énergie (3.2.3), il vient

$$\frac{d}{dt} (\|u(\cdot, t)\|_{H^3}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{H^3}^2) \leq \tilde{C}(e + \kappa(t))^{\frac{3}{2} + \frac{13}{2}C\epsilon} + \tilde{C}(e + \kappa(t))^2. \quad (3.2.15)$$

En choisissant $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour garantir $\frac{13}{2}C\epsilon < \frac{1}{2}$ et en appliquant l'inégalité de Gronwall à (3.2.15), on trouve pour tout $T_0 \leq t < T$

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^3}^2 + \|\theta(\cdot, t)\|_{H^3}^2 \leq \tilde{C} < \infty, \quad (3.2.16)$$

où \tilde{C} dépend de $\|\nabla u(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2$ et $\|\nabla \theta(\cdot, T_0)\|_{L^2}^2$.

Notons que le membre de droite de (3.2.16) est indépendant de t pour $T_0 \leq t < T$. D'où $(u, \theta) \in L^\infty(0, T; H^3(\mathbb{R}^3))$. Par conséquent, (u, θ) peut être étendue au-delà de $t = T$. Ce qui conclut la preuve du théorème 3.1.1. \square

3.3 Preuve du Théorème 3.1.2.

Rappelons pour commencer le résultat suivant du théorème d'existence de solutions locales.

Lemme 3.3.1 *Supposons que $(u, \theta) \in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$, pour $\alpha \geq 3$ et $\nabla \cdot u = 0$. Alors, il existe $T_0 > 0$ et une unique solution de (3.1.1) sur $[0, T_0]$ telle que*

$$(u, \theta) \in (L^\infty \cap C)([0, T_0]; L^\alpha(\mathbb{R}^3)) \cap L^s([0, T_0]; L^r(\mathbb{R}^3)), \quad t^{\frac{1}{s}}u \in BC([0, T_0]; L^\alpha(\mathbb{R}^3)) \quad (3.3.1)$$

De plus, soit $(0, T^)$ l'intervalle maximal tel que (u, θ) soit solution de (3.1.1) dans $C((0, T^*); L^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $\alpha > 3$. Alors, pour tout $t \in (0, T^*)$*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\alpha} \geq \frac{C}{(T^* - t)^{\frac{\alpha-3}{2\alpha}}} \quad \text{et} \quad \|\theta(\cdot, t)\|_{L^\alpha} \geq \frac{C}{(T^* - t)^{\frac{\alpha-3}{2\alpha}}},$$

où la constante C est indépendante de T^ et α .*

Pour la démonstration, voir [20].

Remarque 3.3.1 *Si (u, θ) est une solution forte vérifiant*

$$(u, \theta) \in L^\alpha((0, T); L^\beta(\mathbb{R}^3)) \quad \text{pour} \quad \frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\beta} = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 3,$$

alors (u, θ) appartient à la classe $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$.

Rappelons aussi le résultat suivant :

Lemme 3.3.2 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg) *Pour tous nombres réels $p, q, r \geq 1$ et tous entiers m, k avec $m > k$, il existe des constantes $\delta : \frac{k}{m} \leq \delta \leq 1$ et $C(m, k, p, q, r) > 0$ tel que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a l'inégalité*

$$\|\nabla^k f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^q}^{1-\delta} \|\nabla^m f\|_{L^r}^\delta,$$

où

$$\frac{1}{p} - \frac{k}{3} = \delta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{3} \right) + \frac{1}{q} (1 - \delta). \quad (3.3.2)$$

Le lecteur peut consulter ([74], Theorem 2.2, p. 62) pour une démonstration (voir aussi [1]).

La condition (3.3.2) entre les indices est ici dictée par le critère d'homogénéité.

Preuve. Pour tout $T > 0$, supposons que (u, θ) est une solution régulière de (3.1.1) sur $[0, T)$ vérifie la condition (3.1.5).

En procédant de la même manière que dans la preuve du théorème 3.1.2, on va montrer que sous la condition (3.1.5), on peut obtenir des estimations dans

$$L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)) \quad (3.3.3)$$

pour la solution (u, θ) . La preuve de ce résultat (théorème 3.1.2) se fait en deux étapes.

Étape I. Estimation dans H^1 . Afin d'avoir l'estimation H^1 , on appliquera l'opérateur ∇ aux équations (3.1.1)₁ et (3.1.1)₂ et on multipliera par ∇u et $\nabla \theta$, respectivement pour avoir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(u \cdot \nabla u) \cdot \nabla u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\theta \vec{e}_3) \cdot \nabla u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(u \cdot \nabla \theta) \cdot \nabla \theta dx \\ &= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Dans la suite on va estimer $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ et \mathcal{I}_3 . Ainsi,

$$\mathcal{I}_1 \leq \|\nabla u\|_{L^3}^3 \leq C \|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-2}} \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}} \|\Delta u\|_{L^2}^2,$$

où nous avons utilisé l'inégalité d'interpolation suivante due à [63] :

$$\|w\|_{L^3} \leq C \|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|w\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-2}}^{\frac{1}{3}}.$$

En notant que $\|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \|\theta_0\|_{L^\infty}$, et en utilisant les inégalités de Hölder et de Young, le terme \mathcal{I}_3 peut être estimé par

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &\leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{L^4}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}} \|\Delta \theta\|_{L^2} \\ &\leq C \|\theta\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^0}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|\theta\|_{L^\infty}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|\theta_0\|_{L^\infty}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où nous avons encore utilisé l'inégalité d'interpolation due à [63] :

$$\|\nabla \theta\|_{L^4}^2 \leq C \|\nabla \theta\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}} \|\Delta \theta\|_{L^2}.$$

Quant au terme \mathcal{I}_2 et en utilisant l'inégalité de Cauchy, il peut être estimé par

$$\mathcal{I}_2 \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \theta\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2.$$

En injectant toutes ces estimations dans (3.3.4), il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ & \leq C \|u\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C \|\theta_0\|_{L^\infty}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse (3.1.5), on choisira η assez petit de sorte que

$$C \|u\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ & \leq C (\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport au temps et en appliquant l'inégalité de Gronwall, on déduit que

$$\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T (\|\Delta u(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2) d\tau \leq C. \quad (3.3.5)$$

Étape II. Estimation H^2 . Dans la suite, on cherchera à obtenir des estimations H^2 sous l'hypothèse (3.3.5) ci-dessus. En appliquant l'opérateur Δ à (3.1.1)₁, puis en prenant le produit scalaire dans L^2 de l'équation qui en résulte avec Δu , et en utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (u \cdot \nabla u) \cdot \Delta u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (\theta \vec{e}_3) \cdot \Delta u dx. \quad (3.3.6)$$

De manière analogue, en appliquant Δ à (3.1.1)₂, puis en prenant le produit scalaire dans L^2 de l'équation qui en résulte avec $\Delta \theta$, et en utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (u \cdot \nabla \theta) \cdot \Delta \theta dx. \quad (3.3.7)$$

En ajoutant (3.3.6) et (3.3.7), on déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta \nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ & = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (u \cdot \nabla u) \cdot \Delta u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (\theta \vec{e}_3) \cdot \Delta u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (u \cdot \nabla \theta) \cdot \Delta \theta dx \\ & = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

En utilisant les inégalités de Hölder et celle de Young, on peut estimer \mathcal{K}_1 par

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(u \otimes u) \cdot \Delta \nabla u dx \leq \|\Delta(u \otimes u)\|_{L^2} \|\Delta \nabla u\|_{L^2} \\ &\leq C \|u\|_{L^\infty} \|\Delta u\|_{L^2} \|\Lambda^3 u\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Lambda^3 u\|_{L^2}^2 + C \|u\|_{L^\infty}^2 \|\Delta u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Ici on a utilisé l'estimation bilinéaire due à Kato-Ponce [60] et Kenig-Ponce-Vega [61] :

$$\|\Lambda^\alpha(fg)\|_{L^p} \leq C (\|\Lambda^\alpha g\|_{L^{q_1}} \|f\|_{L^{p_1}} + \|\Lambda^\alpha f\|_{L^{p_2}} \|g\|_{L^{q_2}}),$$

pour $\alpha > 0$, et $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$. A partir de la condition d'incompressibilité, de l'inégalité de Hölder et de celle de Young, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(u\theta) \cdot \Delta \nabla \theta dx \leq \|\Delta(u\theta)\|_{L^2} \|\Delta \nabla \theta\|_{L^2} \\ &\leq C (\|u\|_{L^\infty} \|\Delta \theta\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^\infty} \|\Delta u\|_{L^2}) \|\Lambda^3 \theta\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Lambda^3 \theta\|_{L^2}^2 + C (\|u\|_{L^\infty}^2 + \|\theta\|_{L^\infty}^2) (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

Quant au terme \mathcal{K}_2 , on a

$$\mathcal{K}_2 \leq \frac{1}{2} (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2).$$

En insérant toutes ces inégalités dans (3.3.8) et en simplifiant les termes dissipatifs, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} (\|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) + \|\Delta \nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq C (\|u\|_{L^\infty}^2 + \|\theta\|_{L^\infty}^2) (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2).\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

Gâce à l'inégalité d'interpolation suivante

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\Delta f\|_{L^2}^{\frac{3}{4}},$$

et d'après (3.3.5), on obtient

$$\int_0^T (\|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty}^2 + \|\theta(\cdot, \tau)\|_{L^\infty}^2) d\tau \leq C < \infty.$$

Par application du lemme de Gronwall à (3.3.9), on montre que

$$\|\Delta u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T (\|\Delta \nabla u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \nabla \theta(\cdot, t)\|_{L^2}^2) dt \leq C.\tag{3.3.10}$$

Les estimations précédentes (3.3.5) et (3.3.10) ainsi que l'inégalité suivante de Gagliardo-Nirenberg

$$\|f\|_{L^6} \leq C \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}},$$

permettent sans difficultés de voir que

$$(u, \theta) \in L^4(0, T; L^6(\mathbb{R}^3)).$$

Le lemme 3.3.1 montre que (u, θ) est régulière. Ceci termine la démonstration du théorème 3.1.2. □

3.4 Remarque finale

Très récemment, Q. Liu [31] s'est inspiré de notre démarche en utilisant les espaces de Lebesgue anisotropiques dans sa démonstration afin d'établir un critère de régularité, en imposant plus de régularité sur la condition initiale. Il prouve le résultat suivant.

Théorème 3.4.1 ([31]) *Soit $T > 0$ fixé. Soit $(u_0, \theta_0) \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$ et supposons qu'il existe une solution faible (u, θ) associée à la donnée initiale (u_0, θ_0) qui vérifie la condition d'intégrabilité suivante en temps et en espace :*

$$\int_0^T \frac{\left\| \|\partial_3 \pi(\cdot, t)\|_{L_{x_3}^\gamma} \right\|_{L_{x_1 x_2}^\alpha}^\beta dt < \infty,$$

où

$$\frac{2}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\alpha} = \lambda \in [2, 3) \quad \text{et} \quad \frac{3}{\lambda} \leq \gamma \leq \alpha < \frac{1}{\lambda - 2}.$$

Alors (u, θ) est une solution régulière sur $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$, c'est-à-dire $(u, \theta) \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$.

Nous en renvoyons au document original pour la démonstration.

PERSPECTIVES

- (a) Il est un problème difficile à prouver la régularité des solutions faibles pour les équations de Boussinesq en ajoutant la condition $\lambda = \frac{12}{7}$ ou $\lambda = \frac{3}{2}$ dans (2.4.5). Nous espérons pouvoir surmonter ce problème dans un proche avenir.
- (b) Nous ne savons pas si les critères de régularité sur la pression peuvent être étendus aux espaces de Besov avec indice négatif; c'est-à-dire, si nos résultats sont toujours valables lorsque la condition de croissance critique (2.4.5) est limitée à $\partial_3\pi$. Comparée aux résultats précédents, la principale difficulté réside dans le manque d'inégalités anisotropes de Sobolev dans le cadre des espaces de Besov. Nous nous concentrerons sur ce problème difficile à l'avenir.
- (c) Un problème très intéressant concernant les équations de Boussinesq, est celui de trouver des solutions globales en temps pour des données initiales arbitraires dans un certain espace fonctionnel.
- (d) Que se passe-t-il si l'on considère le problème de régularité $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, pour des solutions de Boussinesq sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$?

CITATIONS DE NOS TRAVAUX

1. Qiao Liu, The 3D Boussinesq Equations with Regularity in One Directional Derivative of the Pressure, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 41, Issue 1, (2018), 29-47. <https://doi.org/10.1007/s40840-018-0645-6>.
2. Longshen Liu and Meng Bai, Remarks on pressure regularity criterion for the 3D Boussinesq equations, Computers & Mathematics with Applications, 76, Issue 7, (2018), 1661-1668. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.07.017>.
3. Zhaoyang Shang, Osgood type blow-up criterion for the 3D Boussinesq equations with partial viscosity, AIMS Mathematics, 2018, 3(1) : 1-11. doi : 10.3934/Math.2018.1.1.
4. Xiaona Cui, The regularity criterion for weak solutions to the n-dimensional Boussinesq system, Boundary Value Problems (2017) 2017 : 44. <https://doi.org/10.1186/s13661-017-0778-9>.

Bibliographie

- [1] R.A. Adams and J.F. Fournier, Sobolev Spaces, 2nd Edition Academic Press, New York (2003).
- [2] J. Beale, T. Kato and A. Majda, Remarks on breakdown of smooth solutions for the three-dimensional Euler equations, *Commun. Math. Phys.* 94 (1984), 61-66.
- [3] H. Beirão da Veiga, A sufficient condition on the pressure for the regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations, *J. Math. Fluid Mech.* 2 (2000), 99-106.
- [4] H. Beirão da Veiga, On the smoothness of a class of weak solutions to the Navier-Stokes equations, *J. Math. Fluid Mech.* 2 (2000), 315-323.
- [5] S. Benbernou, A note on the regularity criterion in terms of pressure for the Navier-Stokes equations, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009), 1438-1443.
- [6] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces, An introduction, Springer Verlag, 1976.
- [7] D. Bo-Qing, S. Gala and C. Zhi-Min, On the regularity criteria of the 3D Navier-Stokes equations in critical spaces, *Acta Math. Scientia* 31 (2011), 591-600.
- [8] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solution of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982), 771-837.
- [9] C. Cao, J. Qi and E. Titi, Regularity criterion for solutions of three-dimensional turbulent channel flows, *Comm. Partial Differential Equations* 33 (2008), 419-428.
- [10] C. Cao and E. Titi, Regularity criteria for the three-dimensional Navier-Stokes equations, *Indiana Univ. Math. J.* 57 (2008), 2643-2661.

-
- [11] D. Chae, On the regularity conditions for the Navier-Stokes and related equations, *Rev. Mat. Iberoamericana.* 23 (2007), 371-384.
- [12] D. Chae and J. Lee, Regularity criterion in terms of pressure for the Navier-Stokes equations, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 46 (2001), 727-735.
- [13] D. Chae and H.J. Choe, Regularity of solutions to the Navier–Stokes equations, *Electron. J. Differential Equations* 5 (1999), 1-7.
- [14] P. Constantin, Remarks on the Navier-Stokes equations, *New Perspectives in Turbulence*, 229-261, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [15] J. Fan, S. Jiang and G. Ni, On regularity criteria for the n-dimensional Navier-Stokes equations in terms of the pressure, *J. Differential Equations* 244 (2008), 2963-2979.
- [16] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss, Littlewood-Paley theory and the study of function spaces, volume 79 de Monograph in the CBM-AMS, Regional Conference Series in Mathematics. AMS, 1991.
- [17] S. Gala, Remarks on regularity criterion for weak solutions to the Navier-Stokes equations in terms of the gradient of the pressure, *Appl. Anal.* 92 (2013), 96-103.
- [18] S. Gala, Remark on a regularity criterion in terms of pressure for the Navier-Stokes equations, *Quart. Appl. Math.* 69 (2011), 147-155.
- [19] S. Gala, A remark on the blow-up criterion of strong solutions to the Navier-Stokes equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2011), 9488-9491.
- [20] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system, *J. Differential Equations* 62 (1986), 182-212.
- [21] Z. Guo and S. Gala, Remarks on logarithmical regularity criteria for the Navier-Stokes equations, *J. Math. Phys.* 52 (2011), 063503.
- [22] Z. Guo and S. Gala, A note on the regularity criteria for the Navier–Stokes equations, *Appl. Math. Lett.* 25 (2012), 305-309.
- [23] C. He, On partial regularity for weak solutions to the Navier-Stokes equations, *J. Funct. Anal.* 211 (2004), 153-162.
- [24] C. He, New sufficient conditions for regularity of solutions to the Navier-Stokes equations, *Adv. Math. Sci. Appl.* 12 (2002), 535-548.

- [25] X. He and S. Gala, Regularity criterion for weak solutions to the Navier-Stokes equations in terms of the pressure in the class $L^2((0, T]; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}(\mathbb{R}^3))$, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 12 (2011), 3602-3607.
- [26] T. Kato, Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n , with applications to weak solutions, *Mat. Z.* 187 (1984), 471-480.
- [27] H. Kozono, T. Ogawa and Y. Taniuchi, The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semilinear evolution equations, *Math. Z.* 242 (2002), 251-278.
- [28] I. Kukavica and M. Ziane, One component regularity for the Navier-Stokes equations, *Nonlinearity* 19 (2006), 453-469.
- [29] I. Kukavica and M. Ziane, Regularity of the Navier-Stokes equation in a thin periodic domain with large data, *Discrete Contin. Dyn. Syst. A* 16 (2006), 67-86.
- [30] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta. Math.* 63 (1934), 183-248.
- [31] Q. Liu, The 3D Boussinesq Equations with Regularity in One Directional Derivative of the Pressure, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 41, Issue 1, (2018), 29-47.
- [32] S. Machihara and T. Ozawa, Interpolation inequalities in Besov spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (2003), 1553-1556.
- [33] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Duke Univ. Math. Series. Duke University, 1976.
- [34] P. Penel and M. Pokorný, Some new regularity criteria for the Navier-Stokes equations containing gradient of the velocity, *Appl. Math.* 49 (2004), 483-493.
- [35] M. Pokorný, On the result of He concerning the smoothness of solutions to the Navier-Stokes equations, *Electron. J. Differential Equations* 10 (2003), 1-8.
- [36] J. Serrin, On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 9 (1962), 187-195.
- [37] J. Serrin, Local behavior of solutions of quasi-linear equations, *Acta Math.* 111 (1964), 247-302.

- [38] J. Serrin, The initial value problem for the Navier-Stokes equations, 1963 Nonlinear Problems (Proc. Sympos., Madison, Wis. pp. 69–98 Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis).
- [39] G. Seregin and V. Šverák, Navier-Stokes equations with lower bounds on the pressure, Arch. Rational Mech. Anal. 163 (2002), 65-86.
- [40] H. Sohr, A generalization of Serrin’s regularity criterion for the Navier–Stokes equations, Quaderni di Matematica 10 (2002), 321-347.
- [41] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Mathematical Series, vol. 30, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
- [42] E. M. Stein, Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- [43] H. Triebel, Theory of function Spaces II, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [44] Y. Zhou, On the regularity criteria in terms of pressure for the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 , Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 149-156.
- [45] Y. Zhou, On a regularity criterion in terms of the gradient of pressure for the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 , Z. Angew. Math. Phys. 57 (2006), 384-392.
- [46] Y. Zhou and S. Gala, Regularity criteria in terms of the pressure for the Navier-Stokes equations in the critical Morrey-Campanato space, Z. Anal. Anwend. 30 (2011), 83-93.
- [47] Y. Zhou and S. Gala, Logarithmically improved regularity criteria for the Navier–Stokes equations in multiplier spaces, J. Math. Anal. Appl. 356 (2009), 498-501.
- [48] J. R. Cannon and E. Dibenedetto, The initial problem for the Boussinesq equation with data in L^p , Lecture Notes in Mathematics, vol. 771, Springer, Berlin, 1980, 129-144.
- [49] D. Chae and H.-S. Nam, Local existence and blow-up criterion for the Boussinesq equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 127 (1997), 935-946.
- [50] R. Danchin et M. Paicu Le théorème de Leray et le théorème de Fujita-Kato pour le système de Boussinesq partiellement visqueux, Bull. Soc. Math. France, 136, N.2 (2008).
- [51] B. Q. Dong, J. Song and W. Zhang, Blow-up criterion via pressure of three-dimensional Boussinesq equations with partial viscosity (in Chinese), Sci. Sin. Math. 40 (2010), 1225-1236.

- [52] J. Fan and Y. Zhou, A note on regularity criterion for the 3D Boussinesq system with partial viscosity, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009), 802-805.
- [53] J. Fan and T. Ozawa, Regularity criteria for the 3D density-dependent Boussinesq equations, *Nonlinearity* 22 (2009), 553-568.
- [54] S. Gala, On the regularity criterion of strong solutions to the 3D Boussinesq equations, *Applicable Analysis* 90 (2011), 1829-1835.
- [55] S. Gala and M.A. Ragusa, Logarithmically improved regularity criterion for the Boussinesq equations in Besov spaces with negative indices, *Applicable Analysis* 95 (2016), 1271-1279.
- [56] S. Gala, Z. Guo and M. A. Ragusa, A remark on the regularity criterion of Boussinesq equations with zero heat conductivity, *Appl. Math. Lett.* 27 (2014), 70-73.
- [57] Z. Guo and S. Gala, Regularity criterion of the Newton-Boussinesq equations in \mathbb{R}^3 , *Commun. Pure Appl. Anal.* 11 (2012), 443-451.
- [58] J. Geng and J. Fan, A note on regularity criterion for the 3D Boussinesq system with zero thermal conductivity. *Appl. Math. Lett.* 25 (2012), 63-66.
- [59] Y. Jia, X. Zhang and B. Dong, Remarks on the blow-up criterion for smooth solutions of the Boussinesq equations with zero diffusion, *C.P.A.A.* 12 (2013), 923-937.
- [60] T. Kato and G. Ponce, Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations, *Commun. Pure Appl. Math.* 41 (1988), 891-907.
- [61] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de-Vries equation, *J. Amer. Math. Soc.* 4 (1991), 323-347.
- [62] M. Mechdene, S. Gala, Z. Guo and M.A. Ragusa, Logarithmical regularity criterion of the three-dimensional Boussinesq equations in terms of the pressure. *Z. Angew. Math. Phys.* 67 (2016), 67-120.
- [63] Y. Meyer, P. Gerard and F. Oru, Inégalités de Sobolev précisées, *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles (Polytechnique)*, 1996-1997, Exp. No. 4, p. 8.
- [64] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

- [65] H. Qiu, Y. Du and Z. Yao, Blow-up criteria for 3D Boussinesq equations in the multiplier space, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16 (2011), 1820-1824.
- [66] H. Qiu, Y. Du and Z. Yao, A blow-up criterion for 3D Boussinesq equations in Besov spaces, *Nonlinear Analysis TMA*, 73 (2010), 806-815.
- [67] Z. Xiang, The regularity criterion of the weak solution to the 3D viscous Boussinesq equations in Besov spaces, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 34 (2011), 360-372.
- [68] F. Xu, Q. Zhang and X. Zheng, Regularity Criteria of the 3D Boussinesq Equations in the Morrey-Campanato Space, *Acta Appl. Math.* 121 (2012), 231-240.
- [69] Z. Ye, A Logarithmically improved regularity criterion of smooth solutions for the 3D Boussinesq equations, *Osaka J. Math.* 53 (2016), 417-423.
- [70] L. C. Berselli and G. P. Galdi, Regularity criteria involving the pressure for the weak solutions to the Navier-Stokes equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002), 3585-3595.
- [71] C. Cao, Sufficient conditions for the regularity to the 3D Navier-Stokes equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 26 (2010), 1141-1151.
- [72] N. Ishimura and H. Morimoto, Remarks on the blow-up criterion for the 3-D Boussinesq equations, *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* 9 (1999), 1323-1332.
- [73] Y. Jia, X. Zhang and B. Dong, Remarks on the blow-up criterion for smooth solutions of the Boussinesq equations with zero diffusion, *Comm. Pure Appl. Anal.* 12 (2013), 923-937.
- [74] O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1985.
- [75] A. Majda, *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*, Courant Lecture Notes in Mathematics, no. 9, AMS/CIMS, (2003).
- [76] M. Struwe, On partial regularity results for the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 41 (1988), 437-58.

-
- [77] Z. Zhang, Some Regularity Criteria for the 3D Boussinesq Equations in the Class $L^2(0, T; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1})$, ISRN Applied Mathematics 2014, Article ID 564758, 4 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/564758>.
- [78] Z. Zhang, A logarithmically improved regularity criterion for the 3D Boussinesq equations via the pressure, *Acta Appl. Math.* 131 (2014), 213-219.
- [79] Z. Zhang, A Remark on the Regularity Criterion for the 3D Boussinesq Equations Involving the Pressure Gradient, *Abstract and Applied Analysis* Volume 2014, Article ID 510924, 4 pages.
- [80] Y. Zhou and S. Gala, Logarithmically improved regularity criteria for the Navier-Stokes equations in multiplier spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 356 (2009), 498-501.
- [81] F. Xu, Q. Zhang and X. Zheng, Regularity Criteria of the 3D Boussinesq equations in the Morrey-Campanato Space, *Acta Appl. Math.* 121 (2012), 231-240.
- [82] F. Xu and J. Yuan, Global well-posedness for a fluid system with the linear Soret effect, submitted.
- [83] C.Wang and Z. Zhang, Global well-posedness for the 2-D Boussinesq system with the temperaturedependent viscosity and thermal diffusivity, *Advances in Mathematics* 228 (2011), 43-62.