

### **III.1. Introduction**

La réalisation d'un modèle mécanique nécessite au préalable la connaissance de la géométrie de la structure étudiée.

En général, au niveau du rachis cervical, les caractéristiques géométriques introduites dans les modèles mécaniques correspondent aux positions dans l'espace des centres de gravité des vertèbres. Des insertions ligamentaires ou musculaires ou des centres de rotation.

Nous avons prévu de consacrer ce présent chapitre à la modélisation mécanique 3D par éléments finis à l'unité vertébrale fonctionnelle C5/C6. Une fois le travail entamé, nous nous sommes aperçu que la modélisation géométrique des vertèbres cervicales à elle seule est très laborieuse. Par conséquent, Il nous a paru utile de réserver cette partie de notre thèse à la représentation 3D des vertèbres C5/C6.

Devant la complexité évidente de la reproduction des formes naturelles de ces pièces formant la colonne vertébrale et cervicale en particulier, nous avons voulu faire le point au niveau bibliographique, sur la manière de procéder des chercheurs dans ce domaine.

La cible principale dans cette partie du présent chapitre donc, est de trouver les moyens et méthodes ainsi que les outils logiciels afin de reproduire en 3D aussi fidèlement que possible les vertèbres cervicales. Ceci nous permettra de les exporter vers un code de calcul (ANSYS) afin de réaliser la modélisation numérique.

### **III.2. Analyse bibliographique**

Avant de réaliser le modèle géométrique paramétré, nous avons été amené à étudier les travaux antérieurs concernant la détermination de la géométrie des vertèbres cervicales C5/C6.

Francis C.C [66] a étudié 109 vertèbres sèches provenant d'hommes blancs, 135 vertèbres provenant d'hommes noirs, 27 vertèbres provenant de femmes blanches et

57 provenant de femmes noires à l'aide d'un pied à coulisse. Il a mesuré les longueurs antéropostérieure et transversales des facettes articulaires.

Mestdagh [9] a étudié les vertèbres de 32 rachis cervicaux sur des radiographies et les vertèbres sèches de 31 rachis cervicaux à l'aide d'un pied à coulisse. Sur pièces sèches il a mesuré la longueur antéropostérieure du plateau inférieur du corps vertébrale et des facettes articulaires postérieures supérieures, l'angle d'inclinaison de cette facette par rapport au plateau supérieur du corps vertébral. Sur radiographies, il a mesuré la longueur antéropostérieure des facettes articulaires inférieures, l'angle d'inclinaison des facettes supérieures et inférieures, la dénivellation du plateau supérieur du corps vertébral par rapport à la facette supérieure, la longueur de l'apophyse épineuse ainsi que son inclinaison par rapport au plateau supérieur du corps vertébral.

MINNE et al. [67] ont fait des mesures sur 60 rachis cervicaux secs. Ils ont mesuré les longueurs antéropostérieure et transversale du canal médullaire.

Katz et Coll [68] ont fait des mesure sur radios latérales qui concernant 30 rachis cervicaux masculins et 31 rachis cervicaux féminins. Ils ont mesuré les longueurs antéropostérieure et transversale ainsi que les hauteurs antérieure et postérieure du corps vertébral.

DELMAS [69] ont étudié les vertèbres de 117 rachis. La méthode de mesure n'est pas précisée. Ils ont mesuré l'angle d'inclinaison du bord supérieur de l'apophyse épineuse avec le plateau supérieur du corps vertébral.

GILAD [70] ont étudié les radios latérales de 141 rachis cervicaux. Ils ont mesuré les longueurs antéropostérieures supérieure et inférieure du corps vertébral ainsi que ses hauteurs antérieure et postérieure.

MUTSUURA [71] ont réalisé des mesures à partir de scanner de 100 sujets sains et de 42 sujets présentant des lésions traumatiques de la moelle épinière. Ils ont déterminé les longueurs antéropostérieure et transversale du canal médullaire ainsi que sa section.

MILNE [72] a étudié 61 rachis cervicaux secs (40 masculins et 21 féminins). Les mesures sont faites à l'aide d'un comparateur spécialement conçu pour cette étude et de calibres. Il définit les longueurs antéropostérieure et transversale des facettes articulaires, du plateau supérieur du corps vertébral, la hauteur maximale des apophyses unciformes par rapport au plateau supérieur du corps vertébral, l'angle d'inclinaison que font les facettes articulaires postérieures dans un plan sagittal par rapport au plateau supérieur, ainsi que l'angle qu'ont les deux facettes entre elles dans un plan horizontal.

Panjabi M. M. et Coll [73] ont fait une étude tridimensionnelle de vertèbres cervicales sèches. Ils étudient ainsi 72 vertèbres cervicales de C2 à C7, provenant de 8 hommes et 4 femmes, à l'aide d'un morphométrie. Cet appareil possède 1 capteur linéaire et 2 capteurs rotatifs qui fournissent des coordonnées sphériques des différents répartis sur la surface des vertèbres. Un référentiel fixé aux pièces anatomiques est défini à partir de la mesure de quatre points positionnés sur le mur postérieur du corps vertébral. L'origine correspond au centre du plateau supérieur du corps vertébral. Ils mesurent alors les longueurs antéropostérieure et transversal du corps vertébral et du canal médullaire, la superficie du canal médullaire et des plateaux vertébraux (apophyses unciformes exclues), la hauteur postérieure du corps vertébral, la hauteur, la largeur, la section pédiculaire et les angles d'inclinaison des plateaux vertébraux par rapport au plan horizontal et sagittal des pédicules, l'angle d'inclinaison des plateaux vertébraux par rapport au plan horizontal de référence, les angles d'inclinaison dans les plans frontal et sagittal des apophyses unciformes ainsi que leur superficie, la longueur de l'apophyse épineuse et enfin la largeur transversal postérieure des apophyses transverses.

Dans ces différents travaux, les auteurs font en général des études partielles de la géométrie des vertèbres cervicales. De plus, lorsqu'ils font des études sur pièces sèches, ils n'utilisent la plupart du temps que les pieds à coulisse, des réglets, des calibres, ou des comparateurs qui ne leur permettent pas d'établir un référentiel précis et reproductible d'une vertèbre à l'autre. Seuls Panjabi et Coll, établissent un référentiel précis et s'intéressent à un grand nombre de surfaces anatomiques, les facettes articulaires postérieures n'étant néanmoins pas décrites.

### **III.3. Matériel et méthode**

Ces travaux sont insuffisants pour nous permettre de définir un paramétrage tridimensionnel complet de la géométrie des vertèbres cervicales inférieures.

Dans un premier temps, nous nous sommes donc intéressés à mesurer des vertèbres cervicales. Nous pouvons constater que les vertèbres cervicales sont de faibles dimensions et présente des discontinuités de forme importante. Aussi, pour accéder à leur géométrie, il nous a été pratiquement impossible d'arriver à notre but par les moyens dont nous disposons.

Nous avons choisi de déterminer la position de l'espace de points répartis sur la surface des vertèbres. La connaissance de la localisation de ces différents points nous permettra de calculer les courbes et surfaces mathématiques simples qui décrivent au mieux ces pièces et nous pourrons ainsi établir le paramétrage de la géométrie des vertèbres cervicales ; mais cela aussi était très difficile à faire à cause toujours de moyens spécifiques tels que la machine à mesurer tridimensionnel (MMT), cette machine est assez utilisée dans les laboratoires de métrologie.

Dans un troisième temps, afin de pouvoir reconstruire la géométrie des vertèbres cervicales rapidement, pour analyser la géométrie des vertèbres soumises à des expérimentations in-vitro ou pour analyser des rachis cervicaux de sujets vivants, nous avons essayé de définir les différents paramètres 3D calculés précédemment à partir de radiographie, scanner. En effet, c'est avec le concours d'un médecin radiologue et avec l'autorisation d'un patient venant pratiqué un examen tomodensitométrie cérébral (Accident Vasculaire Cérébral) qui nous a permis de réaliser des clichés sur la vertèbre C5 de son rachis cervical à des coupes de 1 mm.

L'exploitation de ce résultat a été impossible car la qualité des images sur le cliché (très sombres) ne nous a permis de les numériser.

Autre tentative, c'est d'avoir pris attache avec le Dr Mathieu de SEZE du laboratoire d'anatomie médico-chirurgical (l'université Victor Segalen, Bordeaux 2, France), afin qu'il nous fournisse des vertèbres cadavériques à condition de les utiliser localement c'est-à-dire au niveau du laboratoire. Cette collaboration a été

faite dans l'optique d'utiliser un scanner 3D au laboratoire de biologie et du tissu osseux dirigé par le Professeur Laurence VICO (Saint Etienne, France). Malheureusement cette dernière a exigé une rémunération assez conséquente hors de notre portée ce qui fait que nous avons abandonné cette piste.

Un contact personnel et direct au niveau du Laboratoire de Biomécanique de l'école national supérieur des arts et métiers de Paris. En effet, une discussion avec les professeurs François LAVASTE, Wafaa SKALI, et David MITTON à propos de cette représentation, malheureusement aucun résultat probant n'a jailli sur la résolution du problème auquel j'étais confronté dans le cadre de mon travail.

Enfin l'exploitation des sites web spécialisés dans les représentations des différentes parties osseuses de l'être humain en général. Cette issue nous a permis d'avoir une représentation de la vertèbre C5, et ce avec l'aide de quelques logiciels tel que (3ds max et GID). Malheureusement cette représentation n'a pas les spécificités tant géométriques que dimensionnelles de la vertèbre naturelle. L'exploitation de cette représentation va nous fournir des résultats erronés car la forme générale extérieure est composée d'une multitude d'intersections de plans.

Une première solution qui nous est apparue réalisable est de procéder à des intersections entre des plans verticaux et la représentation de la vertèbre C5, nous avons obtenu des formes géométriques quelconques qui après lissage et l'union de toutes ces formes ne nous a pas permis d'avancer non plus.

Devant cet état de fait nous sommes obligés de procéder à une simplification de l'unité vertébrale fonctionnelle en ne considérant que les charges réparties au niveau du disque suivant les différents mouvements naturels de la tête.

Cette simulation va être réalisée par la méthode des éléments finis car elle est intéressante à plus d'un titre :

Elle permet d'étudier des structures complexes, non homogènes et prendre en compte les différentes régions d'un segment cervical (os cortical, os spongieux, disque intravertébral, structure ligamentaire et musculaire).

Elle permet également d'envisager l'introduction des lésions osseuses ou discoligamentaires ainsi que du matériel d'ostéosynthèse. Il sera alors possible de comparer le comportement mécanique d'un segment cervical lésé et instrumenté par différentes techniques. L'intérêt d'un modèle par éléments finis est également de s'affranchir des disparités mécaniques au niveau des différentes structures anatomiques qui peuvent être observées. En effet, la comparaison des matériels d'ostéosynthèse en expérimentation ne peut se faire en général que sur des pièces anatomiques différentes, ce qui introduit des erreurs dues à ces disparités mécaniques.

Le modèle par éléments finis permet également d'atteindre des résultats en contraintes et en déformation difficilement, voir actuellement impossible à atteindre, lors des expérimentations.

Il est toutefois utile de souligner les limites du modèle par éléments finis. Celui-ci pourra servir d'outil de comparaison mais ne pourra pas donner que le comportement d'un segment cervical. En effet, plusieurs hypothèses sont introduites, notamment au niveau des caractéristiques des matériaux. De plus le modèle est étudié en statique. Les structures musculaires ne sont actuellement pas représentées afin de pouvoir comparer, dans un premier temps, les résultats du modèle à ceux issus des expérimentations in vitro où les structures musculaires sont supprimées.

Dans la partie qui suivra, nous rappelons succinctement la méthode des éléments finis.

#### **III.4. Méthode des éléments finis**

La mécanique de la rupture est basée sur les facteurs d'intensité de contraintes. Il est donc important d'élaborer un modèle numérique capable de déterminer  $K_I$ ,  $K_{II}$  pour différentes géométries et différentes conditions aux limites.

Dans de nombreuses étapes pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, on a donc besoin de connaître la répartition des contraintes et des déformations dans un milieu continu élastique. Les cas d'applications peuvent

s'étendre depuis des problèmes bidimensionnels, tels que les problèmes de contraintes ou déformations planes, de solides de révolutions, de flexions de plaques, de coques, jusqu'aux problèmes complètement tridimensionnels. Le milieu continu est subdivisé en un certain nombre d'éléments finis séparés par des lignes ou des surfaces imaginaires (maillage). Ces éléments sont interconnectés en un nombre fini de points nodaux situés sur leur frontière, dont leurs déplacements seront les inconnues de base du problème. Le choix d'un ensemble de fonctions permettra de définir de façon unique le déplacement en tout point interne à l'élément en fonction des déplacements nodaux. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre les problèmes.

### III.4.2. Les modèles éléments finis

La méthode des éléments finis est basée sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et sur les méthodes d'approximation. Cette méthode consiste à approcher la structure réelle par un modèle formé d'éléments finis interconnectés en des points remarquables appelés noeuds. Chaque élément vérifie les conditions de compatibilité et d'équilibre aux noeuds avec les éléments adjacents. Ce concept permet d'unifier le traitement du problème des milieux continus par une discrétisation : on définit un ensemble de points discrets repérés par leurs coordonnées, appartenant au milieu continu.

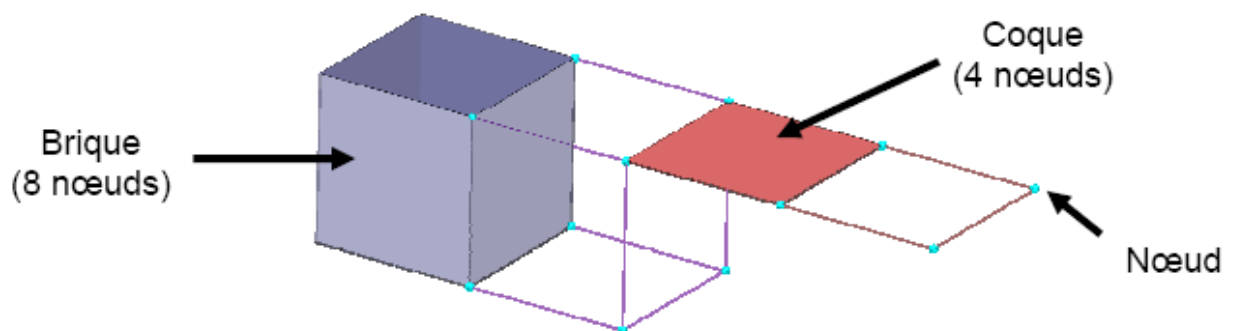


Figure III.1. Représentation des éléments et des noeuds en EF.

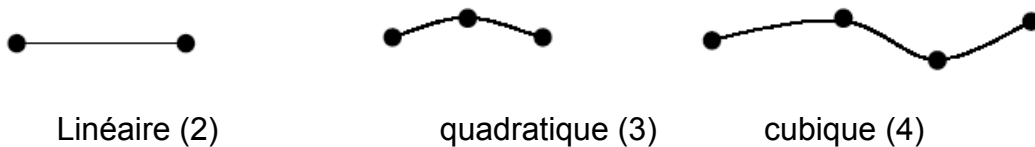
La simulation numérique pour un chargement donné permet finalement d'obtenir une estimation réaliste du déplacement, des contraintes et de l'énergie de déformation pour tout élément du modèle. Les résultats des simulations peuvent

alors être comparés à des limites de tolérance et le but final étant la prédiction des principales lésions. C'est pour cette raison que les modèles éléments finis ont été largement utilisés, et le sont encore, afin d'optimiser des systèmes de protection et d'établir des normes dans l'industrie en général et dans l'industrie automobile en particulier.

**III.4.1. Formes d'éléments classiques**

Nous présentons les formes de quelques éléments classiques correspondant à des domaines à une et à deux dimensions. Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de courbe ou de surface qui en forme la frontière. De plus, nous donnons le nombre de noeuds géométriques nécessaires pour définir l'élément.

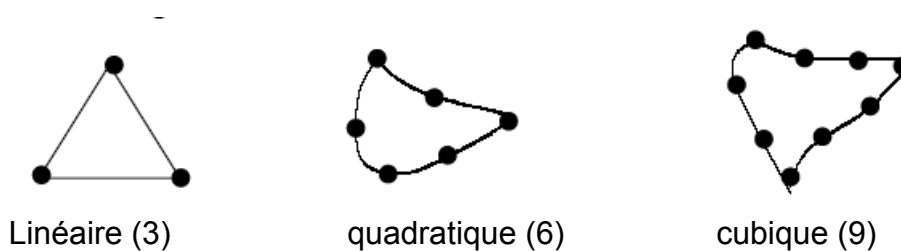
**III.4.1.a. Eléments à une dimension**



**Figure III.2.** Eléments unidimensionnels

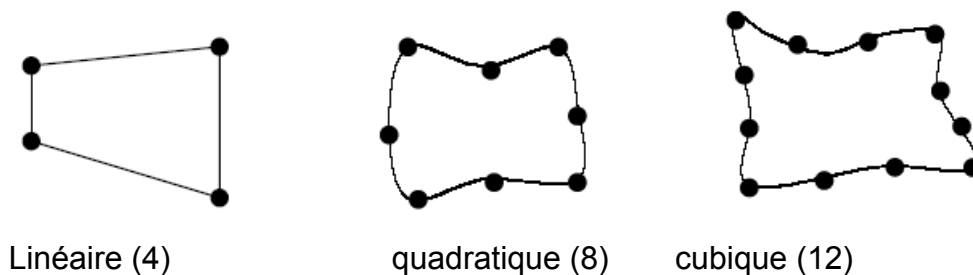
**III.4.1.b. Eléments à deux dimensions :**

Ce sont des triangles ou quadrilatères



**Figure III.3.** Eléments triangulaires

**Éléments quadrilatéraux :**



**Figure III.4.** Eléments quadrilatéraux

**III.4.2. Eléments de références**

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence : Un élément de référence est un élément de forme simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel.

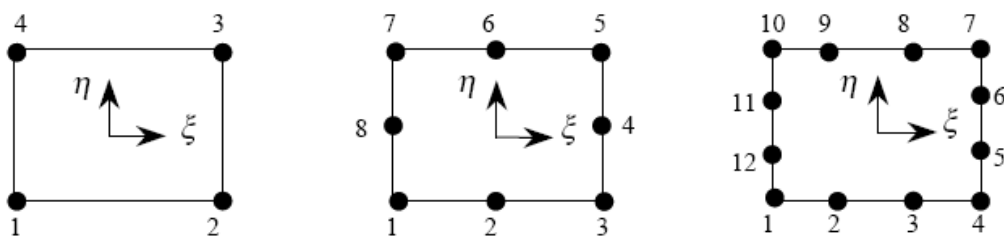
La transformation définit les coordonnées cartésiennes de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées du point correspondant de l'élément de référence. Les éléments uni, bi ou tridimensionnels seront transformés de coordonnées cartésiennes en éléments curvilignes c'est-à-dire que les relations de transformation peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \tag{III-1}$$

Une fois de telles relations entre coordonnées déterminées, les fonctions de forme sont écrites dans un système de coordonnées locales, puis par transformation adéquate, les propriétés de l'élément sont établies dans le système de référence global.

**III.4.2.a. Eléments rectangulaires**

Considérons par exemple les éléments de la figure III.5 pour chacun d'entre eux, un nombre égal et croissant de noeuds est placé sur les côtés de l'élément



(a) linéaire

(b) quadratique

(c) cubique

**Figure III.5.** Eléments rectangulaires

Pour obtenir les fonctions de forme du premier élément, remarquons qu'un produit de la forme [74]:

$$\frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \tag{III-2}$$

Vaut 1, au sommet en haut à droite où  $\xi = \eta = 1$  et vaut zéro par contre en tous les autres sommets.

**Elément linéaire :** 
$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \tag{III-3}$$

Les valeurs de  $\xi$  et  $\xi \eta$  sont données au tableau (III.1) pour chaque noeud.

| Numéro du nœud | 4.N               | $\xi$ | $\eta$ |
|----------------|-------------------|-------|--------|
| 1              | $(1-\xi)(1-\eta)$ | -1    | -1     |
| 2              | $(1+\xi)(1-\eta)$ | 1     | -1     |
| 3              | $(1+\xi)(1+\eta)$ | 1     | 1      |
| 4              | $(1-\xi)(1+\eta)$ | -1    | 1      |

**Tableau III.1. Valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  pour un élément quadratique isoparamétrique à 4 noeuds [76].**

**Elément quadratique à 8 noeuds.**

Pour les noeuds aux sommets: 
$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \tag{III-4}$$

Noeuds au milieu des côtés: 
$$\begin{cases} \xi_i = 0 \dots \dots \dots N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \\ \xi_i = 0 \dots \dots \dots N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta^2) \end{cases} \tag{III-5}$$

Les valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  pour l'élément à 8 noeuds sont données par le tableau (III.2) pour chaque noeud.

| Numéro du nœud | N                                | $\xi$ | $\eta$ |
|----------------|----------------------------------|-------|--------|
| 1              | $-(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)/4$ | -1    | -1     |
| 2              | $(1-\xi)(1-\eta)/2$              | 0     | -1     |
| 3              | $-(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)/4$ | 1     | -1     |
| 4              | $(1+\xi)(1-\eta^2)/2$            | 1     | 0      |
| 5              | $-(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)/4$ | 1     | 1      |
| 6              | $(1-\xi^2)(1+\eta)/2$            | 0     | 1      |
| 7              | $-(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)/4$ | -1    | 1      |
| 8              | $(1-\xi)(1-\eta^2)/2$            | -1    | 0      |

**Tableau III.2: Valeur de  $\xi$  et  $\eta$  pour l'élément à 8 noeuds [76-78].**

**Elément cubique**

Pour les noeuds aux sommets:  $N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(9(\xi^2 + \eta^2) - 10)$  (III-6)

Noeuds au milieu des côtés:  $\begin{cases} \xi_i = \pm 1 \dots \dots \dots \eta_i = \pm \frac{1}{3} \\ N_i = \frac{9}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta^2)(1 + 9\eta\eta_i) \end{cases}$  (III-7)

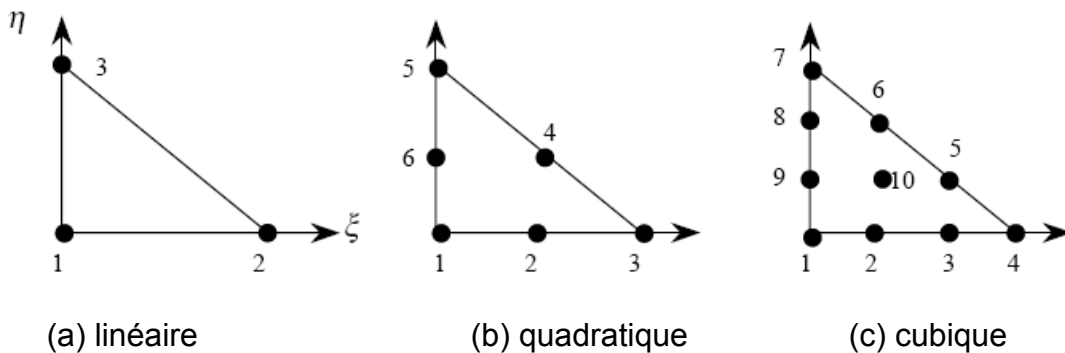
Les valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  pour l'élément à 12 noeuds sont données par le tableau (III-3) pour chaque noeud.

| Numéro du noeud | N                                  | $\xi$ | $\eta$ |
|-----------------|------------------------------------|-------|--------|
| 1               | $(1 - \xi)(1 - \eta)\lambda$       | -1    | -1     |
| 2               | $(1 - 3\xi)(1 - \xi^2)(1 - \eta)$  | -1/3  | -1     |
| 3               | $(1 + 3\xi)(1 - \xi^2)(1 - \eta)$  | 1/3   | -1     |
| 4               | $(1 + \xi)(1 - \eta)\lambda$       | 1     | -1     |
| 5               | $(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta)$ | 1     | -1/6   |
| 6               | $(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta)$ | 1     | 1/6    |
| 7               | $(1 + \xi)(1 + \eta)\lambda$       | 1     | 1      |
| 8               | $(1 + 3\xi)(1 - \xi^2)(1 + \eta)$  | 1/6   | 1      |
| 9               | $(1 - 3\xi)(1 - \xi^2)(1 + \eta)$  | -1/6  | 1      |
| 10              | $(1 - \xi)(1 + \eta)\lambda$       | -1    | 1      |
| 11              | $(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta)$ | -1    | 1/6    |
| 12              | $(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta)$ | -1    | -1/6   |

**Tableau III.3:** Valeur de  $\xi$  et  $\eta$  pour l'élément à 12 noeuds [76-78].

**III.4.2.b. Eléments triangulaires**

Considérons par exemple les éléments de la figure (III.6) pour chacun d'entre eux, un nombre égal et croissant de noeuds est placé sur les côtés de l'élément.



**Figure III.6.** Eléments triangulaires.

**Elément linéaire**

Pour cet élément les fonctions de formes ainsi que les valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  sont données par le tableau (III.4).

| Numéro du nœud | N            | $\xi$ | $\eta$ |
|----------------|--------------|-------|--------|
| 1              | $1-\xi-\eta$ | -1    | -1     |
| 2              | $\xi$        | 1     | 0      |
| 3              | $\eta$       | 0     | 1      |

**Tableau III.4.** Fonctions de formes et valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  pour l'élément triangulaire à 3 nœuds [78].

**Élément triangulaire à 6 nœuds**

Pour cet élément les fonctions de formes ainsi que les valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  sont données par le tableau (III.5).

| Numéro du nœud       | N                      | $\xi$         | $\eta$        |
|----------------------|------------------------|---------------|---------------|
| 1                    | $-\lambda(1-2\lambda)$ | 0             | 0             |
| 2                    | $4\xi\lambda$          | $\frac{1}{2}$ | 0             |
| 3                    | $-\xi(1-2\xi)$         | 1             | 0             |
| 4                    | $4\xi\eta$             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 5                    | $-\eta(1-2\eta)$       | 0             | 1             |
| 6                    | $4\eta\lambda$         | 0             | $\frac{1}{2}$ |
| $\lambda=1-\xi-\eta$ |                        |               |               |

**Tableau III.5.** Fonctions de formes et valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  pour l'élément triangulaire à 6 nœuds [76,78].

**Élément cubique**

Pour cet élément les fonctions de formes ainsi que les valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  sont données par le tableau (III.6).

| Numéro du nœud       | N                                    | $\xi$         | $\eta$        |
|----------------------|--------------------------------------|---------------|---------------|
| 1                    | $\lambda(-1+3\lambda) (-2+3\lambda)$ | 0             | 0             |
| 2                    | $9\lambda\xi(-1+3\lambda)$           | $\frac{1}{3}$ | 0             |
| 3                    | $9\lambda\xi(-1+3\xi)$               | $\frac{2}{3}$ | 0             |
| 4                    | $\xi(-1+3\xi) (-2+3\xi)$             | 1             | 0             |
| 5                    | $9\xi\eta(-1+3\xi)$                  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 6                    | $9\xi\eta(-1+3\eta)$                 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 7                    | $\eta(-1+3\eta)(-2+3\eta)$           | 0             | 1             |
| 8                    | $9\lambda\eta(-1+3\eta)$             | 0             | $\frac{2}{3}$ |
| 9                    | $9\lambda\eta(-1+3\eta)$             | 0             | $\frac{1}{3}$ |
| 10                   | $54\xi\eta\lambda$                   | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $\lambda=1-\xi-\eta$ |                                      |               |               |

**Tableau III.6.** Fonctions de formes et valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  pour l'élément triangulaire à 10 nœuds [78].

### III.5. Méthode des éléments finis en élasticité

Notre objectif sera d'obtenir pour un élément, une expression de la forme suivante :

$$\{F\}=[K]\{u\} \quad (\text{III-8})$$

qui relie les forces  $\{F\}$  et les déplacements  $\{u\}$  aux noeuds par l'intermédiaire de la matrice de rigidité  $[K]$ .

Les déplacements inconnus  $\{u\}$  sont représentés par une combinaison linéaire de fonction de base :

$$\{u\}=[f]\{\alpha\} \quad (\text{III-9})$$

Où :

$\{\alpha\}$  est un vecteur de coefficient constant et  $[f(x, y, z)]$  est une matrice.

Pour formuler un système d'équation exprimant les composantes de déplacement en chaque noeud en fonction des coordonnées nodales du noeud particulier considéré, on utilise l'équation (III-9) pour donner la forme suivante :

$$\{u^e\}=[A]\{\alpha\} \quad (\text{III-10})$$

Où :

$[A]$  est une matrice carrée de coordonnées nodales.

$$\text{L'équation (III-10) nous donne : } \{\alpha\}=[A]^{-1}\{u^e\} \quad (\text{III-11})$$

Si l'expression (III-11) est substituée dans (III-9) on obtient :

$$\{u\}=[f][A]^{-1}\{u^e\} \quad (\text{III-12})$$

Le produit  $[f][A]^{-1}$  nous donne les fonctions de forme  $[N]$ , qui sont données par les coordonnées locales  $N = N(\xi, \eta, \zeta)$ .

L'équation (III-12) s'écrit :

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i \equiv Nu \text{ et } \delta u = \sum_{i=1}^n N_i \delta u_i \quad (\text{III-13})$$

où la transformation est définie en fonction des coordonnées des nœuds selon :

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \text{ et } z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \quad (\text{III-14})$$

avec:  $\sum N_i = 1$

Où: n est le nombre de noeuds par élément,

$u_i$  : vecteur des déplacements nodaux pour un élément particulier,

$N_i$  : fonction de formes définies pour chaque élément de telle sorte que nous obtenions les bons déplacements nodaux.

A partir des équations (III-9) et (III-12) on peut déterminer la distribution des déformations à travers l'élément sachant que ces composantes sont les dérivées des composantes de déplacement.

D'où :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\alpha\} \quad (\text{III-15})$$

ou :

$$\{\varepsilon\} = [B][A]^{-1} \{u^e\} \quad (\text{III-16})$$

avec :  $B=SN$  où S est un opérateur linéaire.

Pour un problème plan d'élasticité, la matrice B est donnée par :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III-17})$$

Les composantes des contraintes dans l'élément sont reliées à celles des déformations par l'expression suivante :

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \quad (\text{III-18})$$

$\{\sigma\}$  est le vecteur des composantes de contraintes et  $[D]$  une matrice de coefficients constants qui dépend du matériau considéré.

Si l'expression (III-16) est substituée dans (III-18) la relation suivante est obtenue :

$$\{\sigma\}= [D][B][A]^{-1} \{u^e\} \quad (\text{III-19})$$

Ainsi la matrice de rigidité  $[K_e]$  de l'élément peut être obtenue en égalisant le travail externe  $W_{ext}$  de forces  $\{F\}$  appliquées aux noeuds au travail interne  $W_{int}$  dû à un déplacement virtuel  $\{du\}$ .

$$\text{Soit } W_{ext}=\{du\}^T \{F\} \quad (\text{III-20})$$

Le travail interne est le travail des composantes de contraintes dû à un chargement de déformation  $\{d\varepsilon\}$  qui est le résultat d'un déplacement virtuel :

$$W_{int} = \int_V \{d\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (\text{III-21})$$

Si les expressions (III-16) et (III-19) sont substituées dans (III-21) , on obtient l'équation suivante :

$$W_{int} = \int_V \{d\varepsilon\}^T \{[B][A]^{-1}\} [D][B][A]^{-1} \{u\} dv \quad (\text{III-22})$$

Or  $W_{ext} = W_{int}$

D'où :

$$\{F\} = [A]^{-T} \int_V \{[B]^T [D][B][A]^{-1}\} \{u\} dv \quad (\text{III-23})$$

En comparant les équations (III-23) et (III-8), la matrice de rigidité  $[K]$  devient comme suit :

$$[K] = \int_V \{[B]^T [D][B]\} dv \quad (\text{III-24})$$

Quant la matrice de rigidité  $[K]$  est déterminée pour un élément, les équations pour tous les éléments doivent être assemblées pour la matrice de rigidité globale.

Dans les problèmes d'élasticité, la matrice  $[B]^T [D][B]$  est donc fonction des dérivées premières de  $N$ . pour calculer ces matrices, deux transformations sont nécessaires : Premièrement comme  $N_i$  est exprimée en fonction des coordonnées locales, nous devons déterminer les dérivées globales analogues à celles de l'équation (III-17), en fonction des dérivées locales.

Deuxièmement, l'élément de volume (ou surface) sur lequel l'intégration s'effectue, doit être exprimée en fonction des coordonnées locales, en modifiant de manière appropriée les bornes d'intégration. Considérons, le triplet de coordonnées locales  $\xi, \eta, \zeta$  et le triplet correspondant de coordonnées globales  $x, y, z$ . Selon les règles de calcul des dérivées partielles nous écrivons [74]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{(III-25)}$$

Où  $[J]$  est la matrice Jacobienne.

Afin d'effectuer la transformation des variables et du domaine d'intégration, l'élément de volume ou de surface s'écrit comme suit :

$$dv = dx dy dz = \det J d\xi d\eta d\zeta$$

$$ds = dx dy = \det J d\xi d\eta$$

Pour une épaisseur ( $e$ ) bien définie l'élément de volume sera :

$$dv = e dx dy = e \det J d\xi d\eta$$

Le calcul des propriétés de l'élément d'équation (III-24) se ramène au calcul de l'intégrale suivante :

### **III.6. Modèles biomécaniques**

La modélisation consiste à créer un modèle géométrique et mécanique du comportement cinématique et dynamique des vertèbres cervicales. Les modèles nécessitent donc trois informations complémentaires: la géométrie, les propriétés mécaniques et les conditions aux limites et de chargement. Par ailleurs les modèles peuvent être personnalisés. Dans le chapitre comportant la partie de modélisation, nous ferons un modèle de corps déformables par éléments finis.

En engineering, le comportement des matériaux est souvent caractérisé par des équations différentielles que ce soit partielles ou ordinaires qui sont transformées en matrices. La solution à l'équation différentielle partielle (P.D.E.) est connue comme solution « de forme forte ». Une équation de forme forte, exige que la fonction de solution satisfait tous les points de l'équation différentielle. L'analyse par éléments finis divise le domaine de solution en plus petites sections nommées des éléments et de rapprocher le domaine en utilisant certaines fonctions formes (linéaires ou non). Plus le nombre d'éléments utilisés dans la fonction est grand, plus l'exactitude de la solution numérique est importante.

### **III.7. Type des éléments à considérer dans notre simulation**

On est important de signaler que le nombre des éléments utilisés dans un domaine est critique ; cependant, le type des éléments utilisés est également important en caractérisant la géométrie de notre modèle qui est complexe. En modélisant les structures tridimensionnelles, il y existe plusieurs différents types des éléments : tétraédrique (éléments de 4 nœuds) ou hexaèdre (éléments de 8 nœuds). Tandis que ces deux types d'élément sont capables de modéliser la géométrie irrégulière mais ils sont limités parce que les frontières des éléments entre les nœuds sont droites et ne peuvent pas être plié. Ceci limite leur application en structures biologiques tel que l'os. Par conséquent des éléments tétraédriques (10 nœuds) ou hexaèdres (20 nœuds) sont créés en plaçant au milieu des éléments permettant leur courbature et puis une meilleure représentation de la géométrie complexe. Plus de détaille sera aborder dans le chapitre de la modélisation de la vertèbre.