

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Djihad BOUTLIDJA

**Opérateurs Intégraux de Carleman Générées par des Noyaux
Multi-échelles.**

Soutenu publiquement le 14 Juin 2018 devant le jury composé de :

Président :	A. AMIR	Pr	U. MOSTAGANEM.
Examineur :	A. FERAOUN	MCB	U. MOSTAGANEM.
Encadreur :	S.M. BAHRI	Pr	U. MOSTAGANEM.

Année Universitaire : 2017 / 2018

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

*A ma chère mère grâce à son encouragement,
sa confiance et son soutien moral et matériel.*

*A mon cher père qui est le plus bon père dans ce monde pour toute
la confiance qu'il m'accorde.*

A mon cher neveu Youcef.

A mon cher frère Mohamed et à mes sœurs Zineb et Khadija.

A mes amies et mes camarades.

Sans oublier tous les enseignants de mon cursus.

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon encadreur Monsieur le Professeur S.M.BAHRI. Il m'a fait l'honneur d'accepter de diriger mon mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire spécialement à Melle ABASSA Nadira. Je remercie les membres de jury, Mr S.MESSIRDI et Mem A.FERAOUN, d'accepter d'examiner mon travail.

Mes remerciements vont particulièrement à Monsieur le chef de département de mathématiques A.GHAZAR, à Monsieur LATREUCHE et à le doyen.

Sans oublier mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Index des notations	iv
Introduction	1
1 Préliminaires	2
1 Quelques rudiments de la théorie de Hilbert	2
2 Opérateurs intégraux	4
3 Opérateurs intégraux de Carleman	6
2 Opérateurs de Carleman et ondelettes	8
1 Les types d'opérateurs de Carleman	8
2 Cas pratique :	10
3 Ondelettes	11
3 Noyaux d'ondelettes de Carleman	14
1 Ondelettes de Carleman	14
2 Cas pratique	15
3 Noyaux multi-échelles	18
Conclusion	20
Bibliographie	21

Index des notations

\mathbb{R}	:	corps des nombres réels.
\mathbb{C}	:	corps des nombres.
H	:	espace de Hilbert.
$L_2(X, \mu)$:	espace de Hilbert de fonctions définie sur X à carrés intégrables.
$K(x, y)$:	noyau de l'opérateur intégrable.
$\chi(\lambda)$:	fonction caractéristique de A .
$p.p$:	presque par tout.
A^*	:	auto-adjoint.
ψ_m	:	fonction de Carleman.
$\Psi_{j,k}$:	ondelettes de Carleman.

Introduction

Il y a beaucoup de raisons pour lesquelles on étudie les opérateurs intégraux. Nous citons deux. Premièrement : les opérateurs intégraux apparaissent naturellement dans de nombreuses applications physiques, un problème de valeur initiale est souvent exprimé sous la forme d'une équation intégrale équivalente, la solution du problème de valeur initiale est alors obtenue avec l'équation différentielle. Deuxièmement : Il est généralement difficile d'obtenir des exemples concrets pour de nombreuses analyses théoriques et fonctionnelles. Les opérateurs intégraux fournissent une riche source d'exemples concrets [1].

Dans ce mémoire, nous présentons une nouvelle classe d'opérateur de Carleman générés par des noyaux multi-échelle. Nous donnerons un exemple concret avec des illustrations numériques .

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons des définitions et des théorèmes d'arrière-plan de l'analyse réelle et la théorie de l'espace de Hilbert nécessaire dans ce mémoire .

Dans le second chapitre, nous définissons l'opérateur intégral et, en particulier, l'opérateur Carleman.

Dans le dernier chapitre, nous présentons les ondelettes et les noyaux de Carleman et puis on applique notre étude théorique.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions élémentaires de mathématiques nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

1 Quelques rudiments de la théorie de Hilbert

Définition 1.1 *X un espace vectoriel Le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera un produit scalaire dans X, Tel que pour tout $x, y, z \in X$ et $a, b \in \mathbb{K}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie les propriétés suivantes :*

i) $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$.

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$.

iv) $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Définition 1.2 *(La norme induite)*

La norme $\|\cdot\|$ dans l'espace X sera induit par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, c'est à dire :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.3 *(Espace de Hilbert)*

Un Espace de Hilbert H est un espace de Banach dans lequel la norme dans H est induit par le produit scalaire sur H.

Définition 1.4 *(Orthogonalité)*

Deux vecteurs x, y dans H sont dit orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition 1.5 *(Normalité)*

Un vecteur x dans H est dit normé si $\|x\| = 1$.

Définition 1.6 *(L'espace $L^1(X)$)*

L'espace L^1 est l'espace des fonction intégrable,

$$f \in L^1 : \int_X |f(x)| dx < \infty, \forall x$$

Définition 1.7 *(L'espace $L^2(X, \mu)$)*

Soient X un ensemble quelconque, μ une mesure σ -finie sur X (μ est définie sur une σ -algèbre A de sous-ensembles de X, nous n'indiquons pas cette σ -algèbre).

Nous écrivons (X, μ) et nous appelons ce couple espace mesure. Au lieu d'écrire " μ -mesurable", " μ -presque partout" et " $\mu(dx)$ " nous écrivons "mesurable", "presque partout ou p.p." et " dx ".

Soit (X, μ) un espace mesuré σ -fini. Nous disons qu'une fonction mesurable f (relativement à la σ -algèbre A), définie p.p dans X , appartient à $L^2(X, \mu)$ (plus précisément $L^2(X, A, \mu)$) si l'intégrale

$$\|f\| := \int_X |f(x)|^2 dx \quad (1.1)$$

est finie. Nous identifions les fonctions qui coïncident presque partout (i.e. $f = g$ p.p. si $\|f - g\| = 0$ p.p.) et nous considérons la structure linéaire naturelle dans L^2 . Le produit scalaire est défini par

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (1.2)$$

Muni de ces structures, l'espace $L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert. Il est clair que la norme (1.1) est compatible avec le produit scalaire (1.2). Comme notion spécifique à cet espace, nous citons la convergence en moyenne, dite aussi convergence forte. Nous disons que la suite $\{f_n\}$ converge en moyenne vers f lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Quant à la convergence faible dans l'espace, on dira que la suite f_n converge faiblement vers f , si pour tout g de $L^2(X, \mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g) = (f, g).$$

Définition 1.8 (Noyau) Un noyau K est une fonction mesurable à valeurs complexes sur $(X \times X)$ avec la mesure produit.

Le domaine $D(K)$ de K est l'ensemble de toute fonction g dans $L^2(X)$ pour les quelles les conditions suivantes sont vérifiées :

- $K(x, \cdot) xg \in L^1(X)$ presque pour tout x dans X .
- Si $f(x) = \int_X K(x, y) g(y) dy$, alors $f \in L^2(X)$.

Définition 1.9 (Noyau de Carleman)

K est dit noyau de Carleman si $K(x, \cdot) \in L^2(X)$, pour presque tout x dans X , c'est à dire : $\int_X |K(x, y)|^2 dy < \infty$ pour presque tout x dans X .

Définition 1.10 On appelle espace mesuré, un triple (X, A, μ) où X est un ensemble, A une tribu sur X et μ une mesure sur A .

Définition 1.11 (Espace mesurable)

On dit espace mesurable un couple (X, A) où X un ensemble et A est un tribu sur X , les élément de A sont alors appelés des ensembles mesurables de X .

Définition 1.12 (Fonction mesurable)

soit E et F des espaces mesurables munis de leurs tribus respectivement A, B : une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite mesurable si l'image réciproque par f de la tribu B est inclus dans A , c'est à dire :

$$\forall C \in B, f^{-1}(C) \in A$$

Définition 1.13 (Presque pour tout)

Soient g une fonction et (E, A, μ) un espace mesuré, on dit que g est dans $L^1(X)$ presque pour tout x dans X s'il existe $C \in A$ tel que : $\mu(C) = 0$ et pour tout $x \in C^c$, $g \in L^1(X)$.

2 Opérateurs intégraux

2.1 Fonctionnelles linéaires

Le vrai aspect de convergence faible se verra mieux en introduisant la notion de fonctionnelle linéaire. On appelle fonctionnelle dans $L^2(X, \mu)$ une fonction définie sur un sous ensemble D de $L^2(X, \mu)$ à valeurs dans \mathbb{C} ,

$$\phi : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \phi(f).$$

La fonctionnelle ϕ est dite linéaire si elle est homogène et additive, i.e. D est une variété linéaire et

$$\phi(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \phi(f_1) + \beta \phi(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in L^2(X, \mu) \quad \text{et} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (1.3)$$

La fonctionnelle ϕ est dite bornée si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\sup_{f \in D, \|f\| \leq 1} |\phi(f)| < \infty. \quad (1.4)$$

On voit immédiatement que la fonctionnelle $\phi(f) = (f, g)$ vérifie les conditions (1.3) et (1.4). Mais ce qui est encore plus important, c'est l'inverse, que voici :

Théorème 1.1 [?] *Toute fonctionnelle ϕ linéaire et bornée dans l'espace $L^2(X, \mu)$ peut être mise sous la forme*

$$\phi(f) = (f, g),$$

la fonction génératrice $g(x)$ étant déterminée par la fonctionnelle ϕ d'une manière unique.

Dans tout ce qui suit l'espace mesuré (X, μ) est tel que l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$ soit séparable, c'est à dire qu'il existe un ensemble dénombrable de fonctions $\{\psi_n\}$ tels que toute fonction f de $L^2(X, \mu)$ peut être approchée indéfiniment en moyenne par ces ψ_n ou leurs combinaisons linéaires $\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_n \psi_n$.

Lemme 1.1 [2] *Soit (X, μ) un espace mesuré σ -fini. Alors il existe une suite $\{X_n\}_1^\infty$ de sous ensembles mesurables de l'ensemble X possédant les propriétés suivantes :*

- $X_n \subset X_{n+1}$;
- $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$;
- $0 < \mu(X_n) < \mu(X_{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$

De plus, il existe une suite exhaustive $\{Y_n\}_1^\infty$ de sous ensembles mesurables de X tels que

(i) $Y_m \cap Y_n = \emptyset$, $m \neq n$;

(ii) $X = \bigcup_{n=1}^\infty Y_n$;

(iii) $\mu(Y_n) > 0$, $n = 1, 2, \dots$;

(iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_2(Y_n, \mu)$ est de dimension infinie.

2.2 Systèmes orthonormaux

Un système infini $\{\psi_n\}$ d'éléments de $L^2(X, \mu)$ est dit système orthonormal, si l'on a

$$(\psi_m, \psi_n) = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

et

$$(\psi_n, \psi_n) = \|\psi_n\|^2 = 1.$$

Un ensemble d'éléments de $L^2(X, \mu)$ est dit complet dans $L^2(X, \mu)$, s'il est dense dans $L^2(X, \mu)$, c'est à dire si tout élément de l'espace peut être approché indéfiniment, en moyenne, par les éléments de cet ensemble, ou par leurs combinaisons linéaires.

Théorème 1.2 [4]

Étant donnée dans $L^2(X, \mu)$ une suite $\{\psi_n\}$ orthonormale complète, tout élément f de l'espace $L^2(X, \mu)$ admet le développement, convergent en moyenne

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n) \psi_n.$$

Plus généralement, on a le

Théorème 1.3 [4] Étant donné dans $L^2(X, \mu)$ une suite orthonormale $\{\psi_n\}$ (complète ou non), ainsi qu'une suite quelconque $\{a_n\}$ de nombres telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

converge, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$$

converge en moyenne vers un élément g de $L^2(X, \mu)$ et l'on aura

$$(g, \psi_n) = a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2.3 Sous-espaces de $L^2(X, \mu)$

Théorème de décomposition [4]

Un sous-ensemble E de $L^2(X, \mu)$ s'appelle un ensemble linéaire (ou une variété linéaire), s'il contient aussi les combinaisons linéaires de ses éléments. Lorsque cet ensemble E est aussi fermé par rapport à la convergence en moyenne, on l'appelle un sous-espace de $L^2(X, \mu)$. On a le théorème suivant, de grande importance par ses applications :

Théorème 1.4 [4] E étant un sous-espace de $L^2(X, \mu)$, tout élément h de $L^2(X, \mu)$ peut être décomposé, et d'une seule façon, en somme d'un élément f appartenant à E et d'un élément g qui est orthogonal à E (c'est à dire orthogonal à tous les éléments de E).

2.4 Les opérateurs intégraux

Un **opérateur intégral** A est un opérateur ayant la forme intégrale suivante :

$$Af(x) = \int_X K(x, y) f(y) dy. \quad (1.5)$$

Chaque opérateur correspond à un choix différent de la fonction K , qui s'appelle le noyau de l'opérateur A .

On doit regarder les opérateurs intégraux non pas comme une classe d'opérateurs comme celle des opérateurs différentiels ou celle des opérateurs de substitution, etc., mais plutôt comme un chemin standard de représentation des opérateurs. Dans la littérature ils existent plusieurs approches pour définir les opérateurs intégraux, nous choisirons ici trois des plus répandus.

Remarque 1.1 *Il est évident qu'un opérateur intégral est linéaire, mais réciproquement les opérateurs linéaires ne sont pas tous des opérateurs intégraux; en effet certains des opérateurs les plus simples ne le sont pas, par exemple l'opérateur d'identité.*

La théorie des opérateurs intégraux est intéressante en partie parce qu'elle lie les propriétés de l'opérateur A (1.5) aux propriétés du noyau K , une fonction de deux variables. N'importe quelle propriété de l'opérateur doit être de façon ou d'autre renvoyée en une propriété du noyau et vice-versa.

3 Opérateurs intégraux de Carleman

3.1 Opérateurs intégraux de Carleman induits par une fonction

Définition 1.14 *Pour définir les opérateurs intégraux de Carleman, nous sélectionnons l'approche d'une famille à un paramètre de fonctionnelles linéaires qui peut être justifiée par l'argument que la qualité du "produit scalaire" paraît le trait essentiel dans le traitement de ces opérateurs.*

*Un opérateur A d'un espace de Hilbert H dans $L^2(X, \mu)$ est dit opérateur de **Carleman** s'il existe une fonction*

$$k : X \rightarrow H$$

tel que pour tout $f \in D(A)$

$$Af(x) = (k(x), f) \quad \text{p.p dans } X. \tag{1.6}$$

Une fonction $k : X \rightarrow H$ est dite mesurable si la fonction

$$(k(\cdot), f) : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto (k(x), f)$$

est mesurable pour tout $f \in H$.

*Si A est un opérateur de Carleman et k est une fonction **induisante** de A (dans le sens de la formule (1.6)), alors la fonction $(k(\cdot), f)$ est mesurable pour tout $f \in D(A)$. Il est évident que cela est vrai pour tout $f \in \overline{D(A)}$.*

Si P dénote la projection orthogonale sur $\overline{D(A)}$, alors

$$(Pk(\cdot), f) = (k(\cdot), Pf)$$

est aussi mesurable pour tout $f \in H$, i.e., $Pk(\cdot)$ est mesurable, et pour tout $f \in D(A)$

$$Af(x) = (Pk(x), f) \quad \text{p.p dans } X.$$

Par conséquent, il n'y a aucune perte de la généralité en supposant k mesurable. Ainsi si $k : X \rightarrow H$ est mesurable, les égalités suivantes

$$D(A_k) = \{f \in H : (k(x), f) \in L^2(X, \mu)\} \quad A_k f(x) = (k(x), f) \quad \text{p.p dans } X, \quad f \in D(A_k) \tag{1.7}$$

*définissent un opérateur A_k de H dans $L^2(X, \mu)$. L'opérateur A_k est dit opérateur de **Carleman maximal** induit par k .*

Il résulte donc qu'un opérateur est de Carleman si et seulement si, il est restriction d'un opérateur de Carleman maximal.

3.2 Opérateurs de Carleman et convergences

La théorie d'opérateurs de Carleman s'avère être liée à la question de la convergence presque partout de la série

$$\sum_n a_n |\psi_n|^2$$

où $a_n \geq 0$ et $\{\psi_n\}$ est une suite orthonormée dans $L^2(X, \mu)$.

Théorème 1.5 [4]

Soit A un opérateur dense ment défini dans $L^2(X, \mu)$ tel que

$$Af(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (f, \psi_k) \psi_k(x) \tag{1.8}$$

avec

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(X, \mu), \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 |(f, \psi_k)|^2 < \infty \right\}$$

où $\{a_k\}_1^{\infty}$ est une suite de nombres et $\{\psi_k\}_1^{\infty}$ une suite orthonormée dans $L^2(X, \mu)$; et la série (1.8) converge vers Af pour la norme de $L^2(X, \mu)$. Alors l'opérateur A est de Carleman si et seulement si, pour presque tout $x \in X$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 |\psi_k(x)|^2 < \infty.$$

Voici un autre type de convergence lié à la notion d'opérateur de Carleman.

Théorème 1.6 [4] Un opérateur A d'un espace de Hilbert séparable H dans $L^2(X, \mu)$ est un opérateur de Carleman si, et seulement si,

$$A f_n \rightarrow 0 \quad p.p,$$

pour toute suite $f_n \rightarrow 0$ dans $D(A)$.

3.3 Opérateur de Carleman induit par un noyau

Théorème 1.7 citeBa Un opérateur A de $L^2(X, \mu)$ dans $L^2(X, \mu)$ est un opérateur de Carleman si, et seulement si, il existe une fonction mesurable

$$K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que

$$K(x, \cdot) \in L^2(X, \mu) \quad p.p \tag{1.9}$$

et

$$Af(x) = \int_X K(x, y) f(y) dy \quad p.p, f \in D(A). \tag{1.10}$$

Un tel noyau est dit **noyau de Carleman**.

Chapitre 2

Opérateurs de Carleman et ondelettes

1 Les types d'opérateurs de Carleman

1.1 Opérateurs de Carleman du premier type

Définition 2.1 Nous dirons que l'opérateur A est un opérateur de Carleman de type 1 s'il est autoadjoint ($A = A^*$).

Dans le cas contraire l'opérateur A sera dit opérateur de Carleman de type 2.

Carleman a considéré [[5]] les opérateurs intégraux induits, entre autres, par les noyaux :

- de Gauss

$$K(x, y) = e^{-|x-y|}; \quad (2.1)$$

- dépendants de la somme et la différence des arguments

$$K_1(|x-y|) + K_2(x+y), \quad (2.2)$$

où $K_1(|u|)$ et $K_2(u)$ sont des fonctions à valeurs réelles.

1.2 Une classe d'opérateurs de Carleman de second type

Considérons, dans l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$, l'opérateur intégral :

$$Af(x) = \int_X K(x, y) f(y) dy \quad p.p, f \in D(A) \quad (2.3)$$

induit par le noyau

$$K(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \psi_p(x) \overline{\psi_p(y)} \quad (2.4)$$

où $\{a_p\}_{p=0}^{\infty}$ est suite de nombres réels et $\{\psi_p(x)\}_{p=0}^{\infty}$ une suite orthonormée de fonctions de $L^2(X, \mu)$ telles que pour presque tout $x \in X$

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 |\psi_p(x)|^2 < \infty, \quad \sum_{p=0}^{\infty} |\psi_p(x)|^2 < \infty \quad (2.5)$$

Alors, A est un opérateur de Carleman symétrique.

Remarquons que d'après la condition (2.5), de la convergence de la série $\sum_{p=0}^{\infty} \beta_p \psi_p(x)$ dans

l'espace $L^2(X, \mu)$, découle la convergence presque partout (voir théorème 1.6).

L'opérateur A à noyau de Carleman (2.4) est donc la fermeture de l'opérateur donné par :

$$A_0 f(x) = \int_X K(x, y) f(y) dy \quad \text{p.p.}$$

de domaine

$$D(A_0) = \left\{ f \in L^2(X, \mu) : \int_X |K(x, y) f(y)| dx < \infty \right\},$$

Il est connu que $D(A_0)$ est dense dans $L^2(X, \mu)$. Le domaine de définition de l'opérateur A^* adjoint de l'opérateur A est

$$D(A^*) = \left\{ f \in L^2(X, \mu) : \int_X K(x, y) f(x) dx \in L^2(X, \mu) \right\}. \quad (2.6)$$

Le noyau (2.4) vérifiant la condition (2.5) est un noyau de Hilbert-Schmid si, et seulement si, $\sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 < \infty$. Dans ce travail nous considérons le cas $\sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 = \infty$.

1.3 Suite de Carleman

Commençons par introduire le principe d'exhaustion suivant :

Lemme 2.1 [5] Soit (X, μ) un espace mesuré.

Alors il existe une suite $\{Y_n\}_1^{\infty}$ de sous ensembles mesurables de l'ensemble X tels que

- (i) $Y_m \cap Y_n = \emptyset, m \neq n$;
- (ii) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$;
- (iii) $\mu(Y_n) > 0, n = 1, 2, \dots$;
- (iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_2(Y_n, \mu)$ est de dimension infinie.

Nous choisissons une fonction $\varphi(x) \in L_2(X, \mu)$ vérifiant :

- $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in X$;
- $\varphi_n(x) = \mathbf{1}_{Y_n}(x)\varphi(x), n \in \mathbb{N}^*$, avec

$$\|\varphi_n\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2^n},$$

où $\mathbf{1}_{Y_n}(x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble Y_n et $\{Y_n\}_1^{\infty}$ une suite de sous ensembles mesurables de l'ensemble X vérifiant les conditions (i) – (iv) du lemme (2.1).

Maintenant, construisons une suite de fonctions.

On posons :

$$\psi_0 = \varphi(x) \quad x \in X \quad (2.7)$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} -\varphi(x) & \text{si } x \in Y_1 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in \bigcup_{k=2}^{\infty} Y_k \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} \varphi(x) & \text{si } x \in \bigcup_{k=n+1}^{\infty} Y_k \\ -2^{\frac{n-1}{2}} \varphi(x) & \text{si } x \in Y_n \\ 0 & \text{si } x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} Y_k \end{cases} \quad (2.9)$$

2. CAS PRATIQUE :

Cette suite ainsi définie est dite suite de Carleman.

Nous pouvons montrer facilement que la suite $\psi_p(x)_{p=0}^\infty$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\|\psi_n\|_{L^2}^2 = 1, n \in \mathbb{N};$
2. $(\psi_m, \psi_n) = 0, m \neq n;$
3. $\sum_{p=0}^\infty |\psi_p(x)|^2 < \infty$ p.p dans X.

Donc $\psi_p_{p=0}^\infty$ est une suite orthonormée de $L^2(X, \mu)$.

Comme pour presque tout $x \in X$, il existe p_x tel que

$$\psi_p(x) = 0 \quad \forall p \geq p_x$$

alors les séries $\sum_{p=0}^\infty c_p \psi_p(x)$,

overset $\sum_{p=0}^\infty c_p |\psi_p(x)|^2$ sont absolument convergentes presque partout dans X, quels que soient les coefficients c_p .

En particulier, nous avons les conditions (2.5) vérifiées presque par tout dans X. Ce qui implique que l'opérateur de Carleman induit par le noyau (2.4) avec $\{\psi_p(x)\}_{p=0}^\infty$ ainsi définie est un opérateur de Carleman de seconde classe.

2 Cas pratique :

Dans tout ce qui suit, on prend $X = [0, 1[$ et la fonction caractéristique $\varphi = \chi_{[0,1[}$
 Dans ce cas :

$$Y_n = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right[$$

Alors :

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

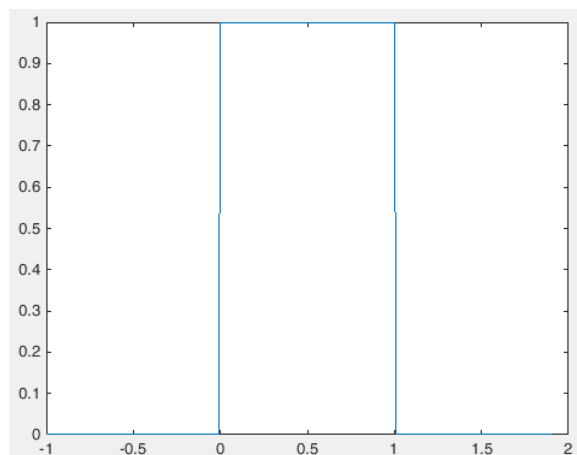


Fig1

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.11)$$

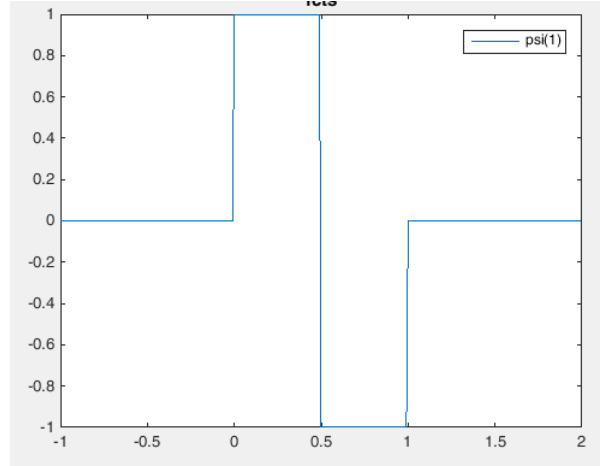


Fig2

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} \chi_{[0,1[} & \text{si } x \in \bigcup_{k=n-1}^{\infty} [\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}[\\ -2^{\frac{n-1}{2}} \chi_{[0,1[} & \text{si } x \in [\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}[\\ 0 & \text{si } x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} [\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}[\end{cases} \quad (2.12)$$

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2^n} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans ce cas, l'opérateur intégral A induit par le noyau (2.4) est un opérateur de Carleman de second type dans $L_2([0, 1])$.

3 Ondelettes

Définition 2.2 Les ondelettes constituent une famille de fonctions générées par translation et par dilatation d'une seule fonction appelée "Ondelette-Mère". (voir [9] et [11])

Quand le paramètre de dilatation a et celui de translation b varient continûment, l'expression générale de ces ondelettes, générées par l'ondelette-mère ψ est :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

où a et b sont des réels tel que $a \neq 0$.

Si $|a| < 1$, alors on dit que l'ondelette est contractée, c'est à dire qu'elle s'adapte aux discontinuités du signal (phénomènes de petites tailles) et donc aux hautes fréquences.

Si $|a| > 1$, l'ondelette est dilatée, elle analyse les grandes échelles donc les petites fréquences. Ceci étant pour le cas continu, on va maintenant passer au cas discret [12] on discrétise les valeurs de a et b telles que : $a = a_0^{-j}$, $b = kb_0 a_0^{-j}$ avec $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ et n et k des entiers

naturels définis pour la discrétisation de l'intervalle considéré, nous obtenons la famille des ondelettes discrètes suivante

$$\psi_{jk}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \psi(a_0^j(t - kb_0))$$

L'ensemble de ces ondelettes forme une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$.

En particulier,

si $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$, alors les ψ_{jk} forment une base orthonormale ; c'est-à-dire :

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{l,n} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{kn}$$

tel que δ représente le symbole de Kronecker.

3.1 Condition d'admissibilité

Le choix de la fonction mère $\psi(x)$ n'est ni unique ni arbitraire.

Elle doit répondre à certaines conditions.

La condition nécessaire pour que $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ puisse être utilisée comme ondelette analysante est qu'elle vérifie une condition d'admissibilité :

$$0 < C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (2.14)$$

Où $\hat{\psi}(\xi)$ désigne la transformée de Fourier de $\psi(x)$.

Ainsi elle a soit un support compact ou une décroissance suffisamment rapide pour être bien localisée dans l'espace, et sa moyenne nulle :

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (2.15)$$

Si ψ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, la condition (2.15) est suffisante.

On peut aussi imposer des conditions de régularité telles que la décroissance et la convergence vers 0, à l'infini.

3.2 Exemples d'ondelettes :

· Chapeau Mexicain

$$\psi(t) = (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

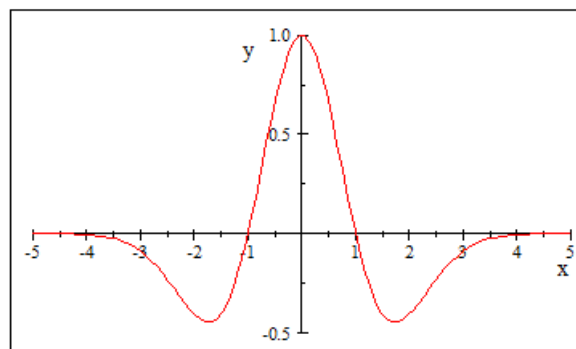


Fig3

3. ONDELETTES

· Ondelette de Morlet

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

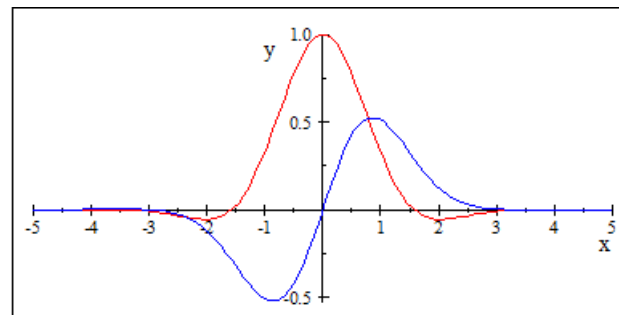


Fig4

· Ondelette de HAAR

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

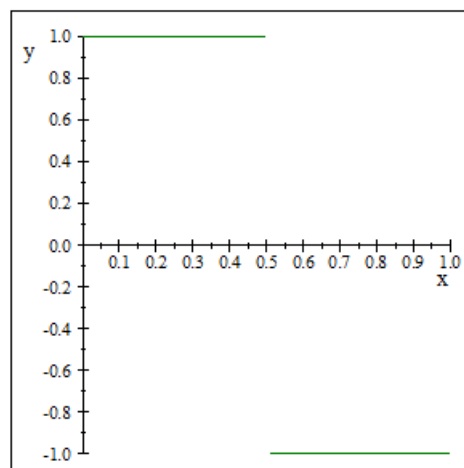


Fig5

Chapitre 3

Noyaux d'ondelettes de Carleman

Les noyaux multi-échelles sont relativement une nouvelle approche pour combiner la technique des espaces de Hilbert à noyaux reproduisant avec les méthodes d'analyse multirésolution dérivant de la théorie des ondelettes.

L'intérêt de cette section, est d'étudier les opérateurs de Carleman engendrés par ces noyaux.

1 Ondelettes de Carleman

Soit la famille de fonction de de Carleman $\{\psi_m\}_{m \geq 0}$ définie dans (2.9) on appelle ondelettes de Carleman les fonctions translatées et dilatées de ψ :

$$\Psi_{j,k}^m(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_m(2^j x - k). \quad k = 0, \dots, 2^j - 1. \quad (3.1)$$

Ainsi, ψ est dite ondelette mère et $\Psi_{j,k}$ ondelette fille

D'après (2.9)

Après les calculs, on obtient :

$$\Psi_{j,k}^0(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k), & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{1+k}{2^j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Psi_{j,k}^1(x) = \begin{cases} -2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{\frac{1}{2}+k}{2^j} \\ 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) & \text{si } \frac{\frac{1}{2}+k}{2^j} \leq x < \frac{1+k}{2^j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\Psi_{j,k}^m(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m+j-1}{2}} \varphi(2^j x - k) & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq x < \frac{1+k2^m}{2^{m+j}} \\ 2^{\frac{m+j-1}{2}} \varphi(2^j x - k) & \text{si } \frac{1+k2^m}{2^{m-j}} \leq x < \frac{1+k2^{m-1}}{2^{m+j+1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

où : $j \in \mathbb{N}$ est le niveau de décomposition, $j = 0, \dots, J$.

$J + 1$ est le nombre de niveau de composition.

$k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$; le paramètre de translation.

$m \in \mathbb{N}$, $m = 2, \dots, M$, le nombre des fonctions de Carleman.

Le coefficient $2^{\frac{j}{2}}$ assure la normalisation.

L'ensemble des ondelettes de Carleman forme une base orthonormale de $L^2([0, 1])$.

2 Cas pratique

Pour illustrer la décomposition d'une fonction $L_2([0, 1])$ en ondelettes de Carleman donnée dans le paragraphe précédent, on prend comme cas particulier la fonction l'échelon unité, $\varphi = \chi_{[0,1]}$, $J = 1$, $M = 1$ Pour calculer : (3.1)

$j = 0, 1, \dots, J$ donc $j = 0$ ou 1

$k = 0, \dots, 2^j - 1$ donc $k = 0$ ou 1 $m = 0, 1, \dots, M$ donc $m = 0$ ou 1

D'où les $\psi_{j,k}$ sont :

$\psi_{0,0}^0, \psi_{1,1}^0, \psi_{1,0}^1$ et $\psi_{1,1}^1$.

Calculons les :

$$\psi_{0,0}^0(x) = \psi_0(x).$$

$$\psi_{0,0}^0(x) = \chi_{[0,1]}.$$

$$\psi_{0,0}^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

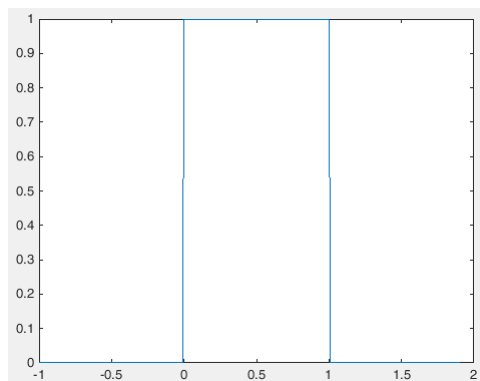


Fig6

$$\psi_{1,0}^0(x) = 2^{\frac{1}{2}} \psi_0(2x). \quad (3.6)$$

$$\psi_{1,0}^0(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

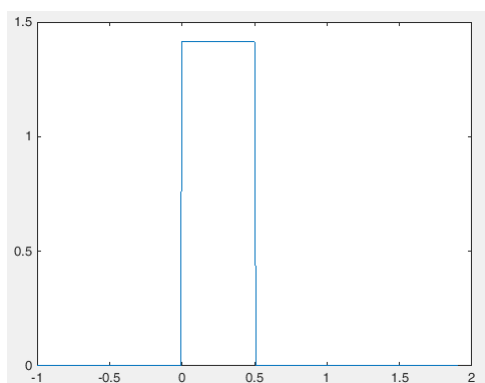


Fig7

$$\Psi_{1,1}^0(x) = 2^{\frac{1}{2}} \Psi_0(2x - 1). \quad (3.8)$$

$$\Psi_{1,1}^0(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.9)$$

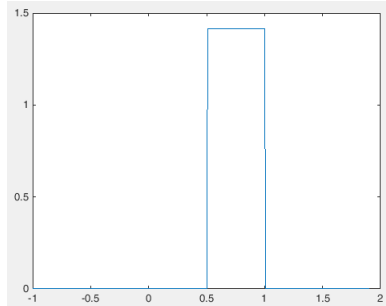


Fig8

$$\Psi_{1,0}^1(x) = 2^{\frac{1}{2}} \Psi_1(2x). \quad (3.10)$$

$$\Psi_{1,0}^1(x) = \begin{cases} -2^{\frac{1}{2}} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2^{\frac{1}{2}} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.11)$$

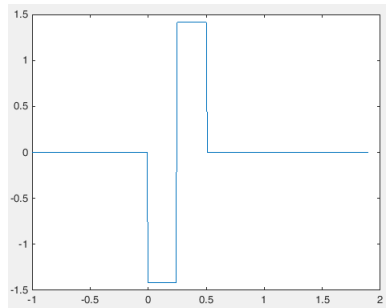


Fig9

$$\Psi_{1,1}^1(x) = 2^{\frac{1}{2}} \Psi_1(2x - 1). \quad (3.12)$$

$$\Psi_{1,1}^1(x) = \begin{cases} -2^{\frac{1}{2}} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 2^{\frac{1}{2}} & \text{si } \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

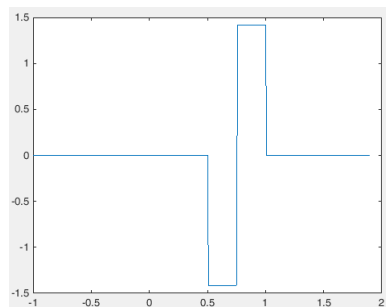


Fig10

Fonction d'approximation

Le principe de la transformée en ondelettes consiste à projeter toute fonction $f \in L^2([0, 1])$ sur la famille d'ondelettes analysantes de Carleman de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{j,k}^m \Psi_{j,k}^m(x) \quad (3.14)$$

Où

$$C_{j,k} = \langle f(x), \Psi_{j,k} \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{\Psi_{j,k}(x)} dx \quad (3.15)$$

L'équation (3.15) permet le calcul des coefficients d'ondelettes. Ces coefficients contiennent toutes les informations dont on a besoin pour conduire une analyse multi-échelle.

Exemple

On considère $f(x) = x$, $M=2$, $J=1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{m=0}^2 C_{j,k}^m \Psi_{j,k}^m(x) \\ &= \sum_{k=0}^0 \sum_{m=0}^2 C_{0,k}^m \Psi_{0,k}^m(x) + \sum_{k=0}^1 \sum_{m=0}^2 C_{1,k}^m \Psi_{1,k}^m(x) \\ &= C_{0,0}^0 \Psi_{0,0}^0(x) + C_{0,0}^1 \Psi_{0,0}^1(x) + C_{0,0}^2 \Psi_{0,0}^2(x) + C_{1,0}^0 \Psi_{1,0}^0(x) + C_{1,0}^1 \Psi_{1,0}^1(x) + C_{1,0}^2 \Psi_{1,0}^2(x) \\ &\quad + C_{1,1}^0 \Psi_{1,1}^0(x) + C_{1,1}^1 \Psi_{1,1}^1(x) + C_{1,1}^2 \Psi_{1,1}^2(x) \end{aligned}$$

$$\Psi_{0,0}^0(x) = 2^0 = 1, \text{ pour } 0 \leq x < 1$$

$$C_{0,0}^0 = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2}$$

$$\Psi_{0,0}^1(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$C_{1,0}^0 = \int_0^1 \Psi_{0,0}^1(x) \cdot x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = \frac{3}{4}$$

$$\Psi_{0,0}^2(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} & \text{pour } 0 \leq x < \frac{1}{2^2} \\ -2^{\frac{1}{2}} & \text{pour } \frac{1}{2^2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2} & \text{pour } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ -\sqrt{2} & \text{pour } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{0,0}^2 = \int_0^1 \Psi_{0,0}^2(x) \cdot x dx = \int_0^{\frac{1}{4}} -\sqrt{2} x dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} x dx = \frac{-\sqrt{2}}{16}$$

$$\Psi_{1,0}^0(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{1,0}^0 = \int_0^1 \Psi_{1,0}^0(x).xdx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}xdx = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\Psi_{1,0}^1(x) = \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{pour } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ \sqrt{2} & \text{pour } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{1,0}^1 = \int_0^1 \Psi_{1,0}^1(x).xdx = \int_0^{\frac{1}{4}} -\sqrt{2}xdx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}xdx = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\Psi_{1,0}^2(x) = \begin{cases} 2 & \text{pour } 0 \leq x < \frac{1}{8} \\ -2 & \text{pour } \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{1,0}^2 = \int_0^1 \Psi_{1,0}^2(x).xdx = \int_0^{\frac{1}{8}} 2xdx - \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} -xdx = \frac{-1}{32}$$

$$\Psi_{1,1}^0(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{1,1}^0 = \int_0^1 \Psi_{1,1}^0(x).xdx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2}xdx = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$\Psi_{1,1}^1(x) = \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ \sqrt{2} & \text{pour } \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{1,1}^1 = \int_0^1 \Psi_{1,1}^1(x).xdx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} -\sqrt{2}xdx + \int_{\frac{3}{4}}^1 \sqrt{2}xdx = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\Psi_{1,1}^2(x) = \begin{cases} 2 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{8} \\ -2 & \text{pour } \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$C_{1,1}^2 = \int_0^1 \Psi_{1,1}^2(x).xdx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{8}} 2xdx - \int_{\frac{5}{8}}^{\frac{3}{4}} 2xdx = \frac{\sqrt{-1}}{32}$$

3 Noyaux multi-échelles

Définition 3.1 Soit l un entier et $\{\lambda_j\}_{j=l}^{\infty}$ une suite sommable de nombres réels positifs. Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à support compact et bornée. La foncton $K_l : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ définit par :

$$K_l(x, y) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\Psi_{j,k}(x)} \Psi_{j,k}(y) \quad (3.16)$$

tel que :

$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k), x \in X, j \geq l, k \in \mathbb{N}, \quad (3.17)$$

est appelé un noyau multi-échelle associé à la fonction ψ .

Définition 3.2 On définit le noyau d'ondelettes multi-échelles par la formule suivante :

$$K_{l,m}(x, y) = \sum_{p=0}^l \sum_{j=0}^{2^{m-1}} \psi_{pj}^m(x) \psi_{pj}^m(y).$$

Propriété 3.1 [7] Le noyau multi-échelles K_l est continu.

Propriété 3.2 [7] Soit (X, M) un espace mesurable et ψ une fonction mesurable. Si il existe une constante positive M tel-que

$$\int_X |K_l(x, y)| d(y) \leq M x \in X \quad (3.18)$$

et

$$\int_X |K_l(x, y)| d(x) \leq M y \in X \quad (3.19)$$

alors

$$A(f)(y) = \int_X |K_l(x, y)| |f(x)| d(x) y \in X \quad (3.20)$$

définit un opérateur borné sur $L_2(X)$.

Le nombre M est une limite supérieure pour la norme de l'opérateur A .

Maintenant définissons les noyaux multi-échelles finis :

$$\psi_{l,m}(x, y) = \sum_{j=l}^m \lambda_j \sum_{k \in X} \overline{\psi_{j,k}(x)} \psi_{j,k}(y), x, y \in X, m > l. \quad (3.21)$$

Ces noyaux génèrent :

$$A_{l,m}(f) = \sum_{j=l}^m \lambda_j \sum_{k \in X} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, f \in L^2(X), m > l \quad (3.22)$$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié les opérateurs intégraux de Carleman : leurs définition et quelques propriétés. Puis, on donne les types de ces opérateurs. On a introduit les noyaux de Carleman et les fonctions de Carleman. Ces dernières fonctions forment une base orthonormée de l'espace L^2 . Nous sommes intéressés dans ce travail par les ondelettes qui sont engendrées par les fonctions de Carleman, où elles sont utilisées pour l'approximation des fonctions comme exemple d'application. Nous avons également construit les noyaux multi-échelles de Carleman. Parmi les perspectives, nous proposons d'utiliser les noyaux de Carleman dans différents domaines d'application comme par exemple les problèmes de classification et apprentissage statistique.

Bibliographie

- [1] A. Hayan, The Carleman operator, Master thesis, Tennessee State University (1990). [1](#)
- [2] D.H. Fremlin, Measure Theory, Torres Fremlin, (2002). Accessible en ligne à <http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/mt.htm>. [4](#)
- [3] J. Weidman, Carleman Operators, Manuscripts Math., No. 2, 1-38, (1970).
- [4] M. Stone, Linear transformations in Hilbert space, New-York, (1932). [5](#), [7](#)
- [5] S.M. Bahri, On the extension of a certain class of Carleman operators, EMS, ZAA, Vol 26, No. 1, pp. 57-64 (2007). [8](#), [9](#)
- [6] T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala Almqvist Wiksells Boktryckeri, (1923).
- [7] T. Jordão, V.A. Menegatto, Integral operators generated by multi-scale kernels , J. of complexity, 187–199 (2010) New-York Heidelberg Berlin, (1980). [19](#)
- [8] V. B. Korotkov, Integral operators with Carleman kernels (in Russian), Nauka, Novosibirsk, (1983).

Opérateurs intégraux de Carleman générées par des noyaux multi-échelles.

Résumé : Ce travail étudie essentiellement une nouvelle famille d'ondelettes générée par la suite de fonctions de Carleman.

Par leur construction, ces ondelettes permettent la décomposition d'une certaine classe d'opérateurs intégraux ainsi qu'une meilleure approximation de fonctions.

Mots-Clés. Opérateur de Carleman, Noyaux, Ondelettes, multi-échelles.

Carleman integral operator generated by multi-scales kernels

Abstract : This work essentially studies a new family of wavelets generated by Carleman's sequence of functions.

By their construction, these wavelets allow the decomposition of a certain class of integrals operators as well as a better approximation of functions.

Key Words. Carleman operator, kernels, wavelets, multi-scales.

