REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM

ABD EL HAMID IBN BADIS

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Spécialité : Analyse Harmonique et EDP

Par

TAZROUT Fatiha

THÈME

Unexemple de Constructiond'une base orthonormée à partir de l'ondelette de Shannon

Soutenu publiquement, le 19/06/2013 devant le jury composé de :

Mr.	Sidi Mohamed Bahri	MCA	Université de Mostaganem	.Examinateur
Mr.	Mohand Ould Ali	MCA	Université de Mostaganem	Président
Mr.	Sadek Gala	Pr	Université de Mostaganem	Encadreur

L'étude des fonctions ψ qui engendrent des analyses multi-résolutions a été faite par de nombreux auteurs, en particulier I. Daubechies et J. Lagarias, [2] et A. Cohen [1].

On montre qu'il existe une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ qui engendre une base orthonormée d'ondelette sur V_j. Nous présentons ici une base d'ondelette $L^2(\mathbb{R})$, constituée à partir d'une fonction de Shannon tout en définissant la fonction ψ par sa tronsformée de Fourier:

$$\widehat{\psi}(w) = \chi_{[-2\pi,-\pi]}(w) + \chi_{[\pi,2\pi]}(w),$$

qui vaut 1 sur les intervalles $[-2\pi, -\pi]$ et $[\pi, 2\pi]$ et 0 ailleurs.

La fonction ψ est parfois appeleé ondelette de Shannon par référence au théoréme de Shannon-Nyquist qui caractérise le pas d'échantillonnage permettant de reconstruire les fonctions à supports limités en fréquence au moyen d'une base orthonormée.

L'utilisation des bases orthonormées d'ondelettes permettra de retrouver trés simplement les résultats concernant les bases inconditionnelles des espaces fonctionnels classiques.

Il vient donc le résultat suivant.

Théorème 0.0.1 *On définit $I = [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ et ψ définie par*

$$\widehat{\psi}(w) = \chi_I(w).$$

Alors, la collection des fonctions$\left(2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)\right)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 0.0.1 *Les fonctions $2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$,$j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont appelées les ondelettes (engendrées par la "mére" ψ).*

Remarque 0.0.2 *Une base d'ondelettes est une base hilbertienne (orthonormée) de $L^2(\mathbb{R})$*

$\left(\psi_{j,k}\right)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ engendrée par des translations et des dilatations dyadiques à partir d'une seule fonction ψ

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k),\ j,k \in \mathbb{Z}.$$

avec ψ une fonction à carré intégrable à valeurs réelles.

La transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par

$$f \longrightarrow \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle, \ j,k \in \mathbb{Z}$$

avec la formule de reconstruction

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle \psi_{j,k}$$

et la formule de Plancherel:

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle \right|^2.$$

Avant de démontrer ce résultat, nous rappelons les propriétés principales des analyses multi-résolutions que nous utiliserons par la suite.

La notion d'analyse multi-résolution a été introduite en 1986 par S. Mallat [3] et est décrite de manière approfondie dans le livre d'Y. Meyer [4].

Définition 0.0.1 *Une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ telle que*

- $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$, et
- V_0 a une base de Riesz de la forme $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 0.0.3 *A toute analyse multi-résolution, on peut associer une base d'ondelettes $\left(\psi_{j,k}\right)$ telle que V_j soit le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les $\psi_{l,m}$, $l < j, k \in \mathbb{Z}$. La fonction φ est appelée fonction pére de la base d'ondelettes.*

Remarque 0.0.4 *Si $f(x)$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$, ou plus généralement, est une distribution tempérée, les coefficients*

$$C_k(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi_{j,k}(x)dx = \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle.$$

s'appelleront les coefficients d'ondelette.

Une conséquence facile du Théorème (0.0.1) est que l'on aura toujours la formule d'inversion:

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} C_k(f)\psi_{j,k}(x),$$

au sens suivant: pour toute fonction test $\upsilon \in S(\mathbb{R})$ dont tous les moments sont nuls, on a:

$$\langle f, \upsilon\rangle = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} C_k(f) \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x)\upsilon(x)dx.$$

Preuve. (Théorème 1.0.1)

Pour $j \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$, on pose:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k).$$

On vérifie facilement que la transformée de Fourier de $\psi_{j,k}$ est donnée par

$$\widehat{\psi}_{j,k}(w) = 2^{-\frac{j}{2}}\widehat{\psi}(2^{-j}w)\exp(-i2^{-j}kw). \tag{0.0.1}$$

Cette transformée de Fourier est donc supportée par $\left[-2\pi.2^j, -\pi 2^j\right] \cup \left[\pi.2^j, 2\pi 2^j\right]$.

Pour $j \neq l$, les supports de $\widehat{\psi}_{j,k}$ et de $\widehat{\psi}_{l,m}$ sont disjoints, ceci montre que:

$$\left|\sup p\left(\widehat{\psi}_{j,k}\right) \cap \sup p\left(\widehat{\psi}_{l,m}\right)\right| = 0.$$

Par conséquent, il vient que

$$\left\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m}\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{\psi}_{j,k}, \widehat{\psi}_{l,m}\right\rangle = 0 \ \text{ pour } j \neq l.$$

Si $j = l$, on a alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m}\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}2^{-j}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi}(2^{-j}w)\right|^2 \exp\left[i2^{-j}(m-k)w\right] \ dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-2\pi}^{-\pi} \exp\left[i(m-k)\eta\right] \ d\eta + \int_{\pi}^{2\pi} \exp\left[i(m-k)\eta\right] \ d\eta\right\} \\
&= \delta_{k,m.}
\end{aligned}$$

Donc, la famille $\left\{\psi_{j,k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

Pour montrer que le système est une base, on utilise le fait que:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|C_k(f)\right|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec $C_k(f) = \left\langle f, \psi_{j,k}\right\rangle$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

A l'aide d'un changement de variable et du théoréme de Plancherel, il vient:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \psi_{j,k}\right\rangle\right|^2 &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \frac{2^{-j}}{4\pi^2}\left|\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(w)\overline{\widehat{\psi}(2^{-j}w)}\ e^{i2^{-j}kw}dw\right|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^j}{2\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_I \widehat{f}(2^j\eta)\ \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2\pi}}d\eta\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise le fait que le système $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\eta},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ est une base orthonormale dans $L^2(I)$, on écrit:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle f, \psi_{j,k}\right\rangle\right|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^j}{2\pi}\int_I \left|\widehat{f}(2^j\eta)\right|^2 d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \chi_I(2^{-j}w)\left|\widehat{f}(w)\right|^2 dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_I(2^{-j}w) = 1,\ \forall w\in\mathbb{R}.$$

Ceci montre que ψ est une ondelette orthonormale dans $L^2(\mathbb{R})$. ■

Le lien entre les fonctions ψ et les analyses multi-résolutions est décrite par le corollaire suivant (démontré dans [3])

Corollaire 0.0.1 *Soit V_j, $j\in\mathbb{Z}$ une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$. Il existe alors deux constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ telles que l'on ait, pour presque tout $w\in\mathbb{R}$,*

$$c_1 \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\varphi(w+2k\pi)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_2.$$

on définit ensuite $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$\widehat{\psi}(w) = \widehat{\varphi}(w). \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w + 2k\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Alors, $\psi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de V_0.

Soit enfin g une fonction de V_0 telle que la suite $g(x - k), k \in \mathbb{Z}$, soit orthogonale.

Alors cette suite est une base orthonormée de V_0 et l'on a

$$\widehat{g}(w) = \theta(w).\widehat{\psi}(w),$$

où $\theta(w) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $|\theta(w)| = 1$ presque-partout et $\theta(w + 2k\pi) = \theta(w)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

De plus la famille $\left\{\psi_{j,k}\right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Bibliographie

[1] **Cohen, A. ,** *Ondelettes, analyses multi-résolutions et traitement numérique du signal*, Thèse, Université Paris IX, 1990.

[2] **Daubechies, I., Lagarias, J.,** *Two-scale difference equations, SIAM J.Math.*, Analysis 22 (1992), 1388-1410.

[3] **Mallat, S.**, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Edition de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2000.

[4] **Meyer, Y.,** *Ondelettes et operateurs, tome* I, Paris, Hermann, 1990 **.**