

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD

OPTION : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par

Melle Kellel Soreya

Soutenu le 22 Mai 2017

Intitulé

Résolution Numérique de l'Equation des
Ondes Non Linéaire

Devant le Jury

Hocine ABLAOUI	Président	MAA	U. MOSTAGANEM
Hamid BOUZIT	Examineur	MCA	U. MOSTAGANEM
Naima ABLAOUI	Encadreur	MAA	U. MOSTAGANEM

Année universitaire 2016/ 2017

Dédicaces

Tout d'abord, je veux rendre grâce à Dieu, le Clément et le Très Miséricordieux pour son amour éternel. C'est ainsi que je dédie ce mémoire à :
ma mère pour sa tendresse et mon père pour sa patience et encouragement,
mes très chers frères et soeurs.

Expert PDF Evaluation

Remerciements

Je remercie ALLAH de m'avoir donné la volonté et le courage qui m'ont permis de réaliser ce travail. Veuille t-Il me guider dans le droit chemin.

J'aimerai spécialement remercier Mme ABLAOUI-LAHMAR Naïma qui m'a proposé ce sujet et pour sa grande disponibilité pendant toute la durée de ce travail, pour m'avoir toujours encouragé face à la difficulté, mais aussi pour sa gentillesse .

Je remercie aussi les membres de jury, Mer BOUZIT Hamid et Mer ABLAOUI Hocine pour avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie toute personne ayant participé de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

Finalement, je tiens à exprimer tous mes remerciements et ma profonde gratitude à toute ma famille.

Résumé

Dans ce mémoire, et après un rappel de quelques résultats sur l'équation des ondes linéaire, on a présenté une méthode de résolution de l'équation des ondes non linéaire, qui est une combinaison de la méthode des différences finies et d'une technique de linéarisation numérique.

Expert PDF Evaluation

Table des matières

1	Introduction	6
2	Notions fondamentales	7
2.1	Rappels sur les distributions	7
2.1.1	Dérivation d'une distribution	7
2.1.2	Convolution de deux distributions	8
2.2	Rappels sur la transformée de Fourier	8
2.3	Valeur propre et Fonction propre	9
2.4	Espace de Sobolev	10
2.5	Rappels sur les probabilités	11
2.6	Classification des E.D.P. d'ordre 2	12
3	Equation des ondes	13
3.1	Equation des ondes linéaire	13
3.1.1	Position du problème	13
3.1.2	Equation des ondes dans \mathbb{R}	14
3.2	Equation des ondes non linéaire	18
4	Résolution numérique de l'équation des ondes non linéaires	20
4.1	Principe de la méthode des différences finies	20
4.1.1	Les différents schémas pour approcher la 1 ^{er} dérivée	20
4.1.2	Les différents schémas pour approcher la dérivée seconde	21
4.1.3	Stabilité et consistance du système discret	23
4.2	Application à l'équation des ondes :	24
4.2.1	Schéma implicite :	24
4.2.2	Schéma explicite :	27
4.2.3	Conclusion	29
5	Conclusion	30
	Bibliographie	31

Chapitre 1

Introduction

Dans la plupart des phénomènes physiques, chimiques et même dans d'autre domaine, on doit formuler les problème par des modèles mathématiques. Ces modèles génèrent souvent des équations aux dérivées partielles notées en abrégé EDP.

La formulation a vue le jour au cours du 17^{ème} siècle lors de la naissance de mécanique (Newton, Leibnez,...), et s'est élargi à d'autres sciences, en particulier en physique.

Les EDP les plus fréquentes en physique sont celles du second ordre. Leur étude est donc d'un grand intérêt pratique, en particulier l'équation des ondes est un modèle pour étudier les vibrations ou la propagation d'onde.

On s'intéresse, dans ce mémoire, à la résolution numérique de l'équation des ondes non linéaire qui est citée dans l'article [2] et qui est du type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^3 = 0 .$$

L'objectif de l'article cité est de trouver une solution locale forte avec des données initiales dans l'espace de Sobolev.

et on introduire quelque résultats obtenus sur l'équation des ondes linéaire par "D'Alembert" et "Fourier".

Ce mémoire est structuré en 3 chapitres.

Dans le 1^{ier} chapitre, on rappelle brièvement quelque notions et résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures.

Dans le 2^{ème} chapitre, on résoud l'équation des ondes linéaire par deux méthodes, la méthode de D'Alembert et celle de Fourier, et en ce qui concerne l'équation non linéaire on cite le résultat principal de l'article.

Le dernier et 3^{ème} chapitre est consacré à la résolution numérique de l'équation des ondes non linéaire par la méthode de différences finies après avoir présenté celle-ci.

Chapitre 2

Notions fondamentales

Cette partie est consacrée aux rappels de quelques notions mathématiques nécessaires pour la compréhension de la suite de notre travail.

2.1 Rappels sur les distributions

Pour cette partie voir [4]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité

On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω ($\text{supp}\varphi \subset \Omega$).

Définition 2.1 Soient $\varphi \in D(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $m = |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. On définit la dérivée d'ordre m de la fonction φ par

$$D^m \varphi(x) = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \text{ pour } x \in \Omega$$

Définition 2.2 On dit que T est une distribution sur Ω si et seulement si T une forme linéaire et continue sur $D(\Omega)$.

On note $D'(\Omega)$ l'espace des distributions.

Définition 2.3 *distribution de Dirac*

Si $a \in \Omega$, on définit la distribution, notée δ_a , de Dirac en a par

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

2.1.1 Dérivation d'une distribution

Soit T une distribution sur Ω , si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la distribution dérivée d'ordre α de T , notée $\partial^{|\alpha|}T$, par

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \langle \partial^{|\alpha|}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^{|\alpha|}\varphi \rangle,$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Support de distribution

Définition 2.4 Soit $T \in D'(\Omega)$, on appelle ouvert d'annulation de T tout ouvert u de Ω telle que T est nulle sur u .

Définition 2.5 On appelle support de T et on note, $\text{supp } T$, le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert d'annulation de T .

Exemple :

$$\Omega \in \mathbb{R}^n \quad a \in \Omega \quad \text{alors} \quad \text{supp } \delta_a = \{a\}.$$

2.1.2 Convolution de deux distributions

Définition 2.6 une fonction f est localement intégrable sur Ω si elle est intégrable sur tout compact de Ω .

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur Ω dont l'une au moins est a support compact, leur convolution est définie par

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy. \end{aligned}$$

2.2 Rappels sur la transformée de Fourier

Définition 2.7 On désigne par $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, à décroissance rapide (espace de Schwartz) c'est-à-dire des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^{|\alpha|} D^{|\beta|} \varphi(x)| = 0,$$

$$\text{où } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), x^{|\alpha|} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Définition 2.8 On dira q'une suite de fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $S(\mathbb{R}^n)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{|\alpha|} (D^{|\beta|} u_n(x) - D^{|\beta|} u(x))| = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$$

Le dual topologique de $S(\mathbb{R}^n)$ est $S'(\mathbb{R}^n)$, l'espace des distributions tempérées.

Définition 2.9 Pour toute fonction $f \in S(\mathbb{R}^n)$, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\tilde{f} = \mathcal{F}(f)(\zeta) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \zeta} dx \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n$$

La transformée de Fourier vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour toute fonction $f \in S(\mathbb{R}^n)$ on a $\mathcal{F}(f) \in S(\mathbb{R}^n)$.
2. La transformée de Fourier inverse de \mathcal{F} , noté $\overline{\mathcal{F}}$ est définie par :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta) e^{ix \cdot \zeta} d\zeta \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Pour toute $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a les propriétés suivantes :

$$\mathcal{F}(D^{|\alpha|} f)(\zeta) = i^{|\alpha|} \zeta^{|\alpha|} \mathcal{F}(f)(\zeta)$$

$$\mathcal{F}(x^{|\alpha|} f)(\zeta) = i^{|\alpha|} D^{|\alpha|} \tilde{f}(\zeta).$$

Définition 2.10 On définit la transformée de Fourier de toute distribution tempérée $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ par la formule :

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_{S'(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n)} := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle_{S'(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

De même pour la transformée de Fourier inverse :

$$\langle \overline{\mathcal{F}}(T), \varphi \rangle_{S'(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n)} := \langle T, \overline{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle_{S'(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

et l'on a encore

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(T)) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(T) = T \quad \text{pour tout } T \in S'(\mathbb{R}^n).$$

2.3 Valeur propre et Fonction propre

Valeur propre

Définition 2.11 Un scalaire λ est une valeur propre de la fonction u s'il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Les valeurs propres de u sont donc les scalaires λ tels que $u - \lambda I$ n'est pas injectif (autrement dit son noyau n'est pas réduit au vecteur nul).

Fonction propre

Définition 2.12 Une fonction propre f d'un opérateur linéaire A sur un espace fonctionnel est un vecteur propre de l'opérateur linéaire. En d'autre terme, une fonction propre d'un opérateur linéaire A est toute f non identiquement nulle sur cet espace qui satisfait la relation

$$Af = \lambda f$$

2.4 Espace de Sobolev

Pour cette partie voir [1]

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien S.Lvovitch Sobolev.

Définition 2.13 L'ensemble $L^2(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles ou complexes, telle que $|f|^2$ est intégrable sur Ω , c'est à dire

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty \right\}$$

Définition 2.14 L'espace $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables intégrables sur Ω . On note

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

De manière générale, on définit pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace :

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad |f|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ Définition : on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif par :

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega); \quad D^{|\alpha|} u \in L^2(\Omega), \alpha \in N^n, |\alpha| \leq m \right\}.$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{|\alpha|} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ (s réel) On s'intéresse d'abord ici au cas $\Omega = \mathbb{R}^n$

Dans ce cas, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, peut être défini grâce à la transformée de Fourier \widehat{u} :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^s |\widehat{u}(\zeta)|^2 d\zeta < +\infty \right. \right\}$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace muni la norme :

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^s |\widehat{u}(\zeta)|^2 d\zeta.$$

2.5 Rappels sur les probabilités

Ensemble fondamental d'une expérience aléatoire : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat. L'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. Cet ensemble est en général noté Ω . Il peut être fini, dénombrable, ou infini non dénombrable. Un point $\omega \in \Omega$ est une réalisation de l'expérience.

Ensemble $P(\Omega)$ des parties de Ω : Ensemble constitué de tous les sous-ensembles (parties) de Ω .

Tribu d'un ensemble de parties de Ω

Définition 2.15 On appelle tribu sur Ω toute famille A de parties de Ω satisfaisant

- i) $\emptyset \in A$ et $\Omega \in A$
- ii) $B \in A \Rightarrow B^c \in A$
- iii) Si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite de A alors $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in A$.

Exemple 2.1 $\Omega = \{a, b, c, d\}$,
 $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\} \subset P(\Omega)$.

Espace probabilisé :

Définition 2.16 Soit (Ω, A) un espace probabilisable. Une probabilité sur (Ω, A) est une application $p : A \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant les 3 axiomes suivants :

1. $p(\Omega) = 1$
2. $p(\cup_{i \in \mathbb{N}} V_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(V_i)$, $\forall (V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ensemble des familles dénombrables d'évènements disjoints deux à deux.

Dès lors que p est définie, le triplet (Ω, A, p) s'appelle un espace probabilisé.

Variable aléatoire :

Définition 2.17 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle X est une application mesurable de Ω discrète ou continue, dont la valeur est fonction mesurable du résultat de l'expérience :

$$\begin{aligned} X &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) = x \end{aligned}$$

2.6 Classification des E.D.P. d'ordre 2

Définition 2.18 Une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire d'ordre 2 est du type

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

Définition 2.19 On pose $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$

Si $\Delta(x, y) > 0$ sur un domaine D , l'E.D.P est dite hyperbolique. C'est le cas de l'équation des ondes.

Si $\Delta(x, y) < 0$ sur un domaine D , l'E.D.P est dite elliptique. C'est le cas de l'équation de Poisson.

Si $\Delta(x, y) = 0$ sur un domaine D , l'E.D.P est dite parabolique. C'est le cas de l'équation de la chaleur.

Chapitre 3

Equation des ondes

L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration, par exemple elle est un modèle pour étudier les vibrations longitudinales d'une colonne gazeuse ou d'une corde de guitare. En dimension 2 d'espace, elle est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue (comme la peau d'un tambour).

Beaucoup de travaux ont été consacrés au traitement de l'équation des ondes linéaire du type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f,$$

où Δ est l'opérateur Laplacien défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Dans ce cas, on peut résoudre l'équation des ondes par la méthode de Fourier ou celle D'Alembert.

Par contre pour l'équation des ondes non linéaire, très peu de travaux ont été réalisés. Cependant, on dispose de quelques résultats autour de ces deux types de non linéarité [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^3 = f$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^\alpha |u| = f,$$

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats obtenus pour l'équation des ondes.

3.1 Equation des ondes linéaire

3.1.1 Position du problème

Pour f , u_0 et u_1 des fonctions ou des distributions données, il s'agit de trouver une fonction ou une distribution $u = u(t, x)$, vérifiant le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f & x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad t > 0 \\ u(t=0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

c est la vitesse de propagation de l'onde. (on la prendra égale à 1)

Le problème (3.1) est appelé le problème de Cauchy pour l'équation des ondes.

3.1.2 Equation des ondes dans \mathbb{R}

Problème de Cauchy homogène :

le problème est de trouver $u(t, x)$ de classe C^2 vérifiant l'équation homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

où u_0 et u_1 sont deux fonctions données respectivement de classe C^2 et C^1 .

Remarque 3.1 Une telle solution est appelée classique ou forte.

Résolution de l'équation des ondes par la méthode de D'Alembert **Théorème**
(Formule D'Alembert) la solution du problème (3.2) est donnée par la formule

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\sigma) d\sigma$$

Preuve

On considère le changement de variables (ζ, η) définies, voir (??) par :

$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{2}(x+t) \\ \eta = \frac{1}{2}(x-t) \end{cases} \quad (3.3)$$

On posera $u(t, x) = \nu(\zeta, \eta)$, alors des calculs simples entraînent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2}$$

L'équation (3.2) devient :

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta \partial \eta} = 0,$$

les solutions de cette dernière sont de la forme

$$\nu(\zeta, \eta) = \varphi(\zeta) + \Psi(\eta) \quad (3.4)$$

où φ et Ψ sont des fonctions arbitraires de classe C^2 .

On en déduit que la solution prend l'expression

$$u(t, x) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \Psi\left(\frac{x-t}{2}\right). \quad (3.5)$$

Les conditions dans (3.2) impliquent

$$u(0, x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \Psi\left(\frac{x}{2}\right) = u_0(x) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\Psi'\left(\frac{x}{2}\right) = u_1(x) \quad (3.7)$$

De (3.7) on déduit (a étant une constante quelconque dans \mathbb{R}) :

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right) = \int_a^x u_1(\sigma) d\sigma. \quad (3.8)$$

de (3.6) et (3.8), on a

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + \int_a^x u_1(\sigma) d\sigma \right] \\ \Psi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) - \int_a^x u_1(\sigma) d\sigma \right] \end{cases} \quad (3.9)$$

Ainsi la solution est donnée par :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\sigma) d\sigma \quad (3.10)$$

La formule (3.10) est connue sous le nom de " formule de D'Alembert

Remarque 3.2 De la formule (3.10), on obtient :

1. La valeur de $u(t, x)$ au point (t_0, x_0) , (pour $t_0 > 0$), ne dépend que des valeurs de $u_0(x)$ et de $u_1(x)$ dans l'ensemble $\sum(t_0, x_0)$ qui est l'intersection de $t = 0$ avec le cône $C(t_0, x_0)$ d'équation

$$(t - t_0)^2 \geq (x - x_0)^2$$

2. Les lignes $x + t = cte$, $x - t = cte$ sont dites les lignes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du problème (3.2)

3. Le cône $C(t_0, x_0)$ s'appelle le cône caractéristiques de sommet (t_0, x_0)

4. Si u_0, u_1 sont seulement continues, la formule (3.10) a encore un sens. On dit qu'elle définit alors une solution généralisée de (3.2), c'est-à-dire une solution au sens des distributions dans $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+ = Q^+$.

En effet, si $\varphi \in D(Q^+)$, u donnée par (3.10) vérifie

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle \\ & = \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\rangle - \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle \\ & = \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle \\ & = \int \int_{Q^+} u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dt dx \end{aligned}$$

d'où

$$\int \int_{Q^+} u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dt dx = 0$$

Problème de Cauchy non homogène :

On considère le problème consistant à trouver u , vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

C'est le problème de Cauchy non homogène avec conditions de Cauchy homogènes (dans le problème de Cauchy non homogène général $u_0, u_1 \neq 0$).

On suppose que f est nulle pour $t < 0$ et de classe C^1 en (t, x) pour $t \geq 0$.

En reprenant les coordonnées (ζ, η) définies par (3.3) et en posant

$$f(t, x) = g(\zeta, \eta)$$

et

$$u(t, x) = \nu(\zeta, \eta),$$

l'équation du problème (3.11) devient

$$-\frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta \partial \eta} = g(\zeta, \eta)$$

d'où

$$\nu(\zeta, \eta) = - \int_{-\infty}^{\eta} \int_{-\infty}^{\zeta} g(\zeta', \eta') d\zeta' d\eta'.$$

En revenant aux coordonnées (t, x) , on obtient (puisque f est nulle pour $t < 0$) :

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int \int_{\Delta(t, x)} f(t', x') dt' dx' \quad (3.12)$$

où $\Delta(t, x)$ représente l'ensemble :

$$\Delta(t, x) = \{(t', x') \in C(t, x), \quad t \geq t' \geq 0\}$$

Remarque 3.3 Si f est seulement de classe C^0 , la formule (3.12) définit une solution de (3.11) au sens des distributions dans $D'(Q^+)$ ou dans $D'(Q)$.

On a en effet, pour toute $\varphi \in D(Q^+)$

$$\int \int_{Q^+} u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dt dx = \int \int_{Q^+} f \varphi dt dx$$

Résolution de l'équation des ondes par la méthode de la transformation de Fourier $\widehat{f}(t, y) = \mathcal{F}(f(t, x))$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable spatiale x d'une distribution tempérée f .

$\mathcal{F}_y^{-1}(f)$ désigne la transformée de Fourier inverse

On reprend le problème (3.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \end{cases}$$

On suppose pour l'instant que $u_0 \in S'(\mathbb{R})$, $u_1 \in S'(\mathbb{R})$ et on cherche $u(t) \in S'(\mathbb{R})$ vérifiant (3.2).

Théorème 3.1 la solution du problème (3.2) est donnée par la formule

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\delta(t) + \delta(-t)) * u_0 + \frac{1}{2}\chi_{[-t, +t]} * u_1 \quad (3.13)$$

Preuve

Par transformation de Fourier partielle en x , le problème (3.2) se ramène à

$$\begin{cases} i) \frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} + y^2 \widehat{u} = 0 \\ \widehat{u}(0) = \widehat{u}_0 \\ \frac{d\widehat{u}}{dt}(0) = \widehat{u}_1 \end{cases} \quad (3.14)$$

On associe à l'équation (3.14) i) l'équation différentielle ordinaire dépendant du paramètre $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2 \nu}{dt^2} + y^2 \nu = 0, \quad (3.15)$$

dont la solution générale est donnée par :

$$\nu(y, t) = C_0 \cos(|y| t) + C_1 \sin(|y| t) \quad (3.16)$$

où C_0 et C_1 sont des fonctions (ou des distributions) en la variable y .

Par substitution dans (3.14), on obtient (selon la méthode dite de la variation des constantes) la solution unique dans $D'(\mathbb{R}_y)$, donnée par

$$\widehat{u}(t) = \cos(|y| t) \widehat{u}_0 + \frac{\sin(|y| t)}{|y|} \widehat{u}_1 \quad (3.17)$$

On note que les fonctions $\cos(|y|t)$ et $\frac{\sin(|y|t)}{|y|}$ sont dans $O_M(\mathbb{R})$ et que les produits dans (3.17) sont bien définis quel que soit t positif ou négatif.

Pour revenir à la variable x , on applique la transformée de Fourier inverse, on obtient la solution dans $S'(\mathbb{R})$ du problème (3.2), donnée par

$$u(t) = \mathcal{F}_y^{-1}(\cos yt) * u_0 + \mathcal{F}_y^{-1}\left(\frac{\sin yt}{y}\right) * u_1 \quad (3.18)$$

Les fonctions $y \rightarrow \cos yt, y \rightarrow \frac{\sin yt}{y}$ sont, pour t fixé, des fonctions holomorphes entières de type exponentiel, donc d'après le théorème de Paley-Wiener, leur transformée de Fourier (directe ou inverse) est à support compact et données par

$$\begin{cases} \mathcal{F}_y^{-1}(\cos yt) = \frac{1}{2}[\delta(t) + \delta(-t)] \\ \mathcal{F}_y^{-1}\left(\frac{\sin yt}{y}\right) = \frac{1}{2}\chi_{[-t, +t]} \end{cases}$$

$\chi_{[-t, +t]}$ est fonction caractéristique du compact $[-t, +t]$ de sorte que (3.18) s'écrit :

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\delta(t) + \delta(-t)) * u_0 + \frac{1}{2}\chi_{[-t, +t]} * u_1$$

Remarque 3.4 La solution du problème de Cauchy général est (selon le principe de la superposition) la somme des solutions données par (3.12) et (3.13).

3.2 Equation des ondes non linéaire

Dans [2], les auteurs s'intéressent à l'étude du problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} - \Delta u + u^3 = 0; \text{ sur }]0, T] \times M \\ (u, \partial_t u)_{t=0} = (f_1, f_2) \end{cases} \quad (3.19)$$

avec $(f_1, f_2) = f \in H^s(M) \times H^{s-1}(M) = \hat{H}^s(M)$, et M un compact de \mathbb{R}^3 .

Un résultat sur l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.19) est établi. Avant de citer ce théorème, on va introduire quelques définitions.

Définition 3.1 soit $(e_n) \in C^\infty(M)$, $n = 1, 2, \dots$ une base orthonormée de $L^2(M)$ construite à partir de fonctions propres réelles de l'opérateur $-\Delta$ associées aux valeurs propres λ_n^2 . Soit $(h_n(w), l_n(w))_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions indépendantes à variable aléatoire réelle de l'espace de probabilité (Ω, A, p) tel que

$$\exists c > 0, \forall n \geq 1 \quad \int_{\Omega} (|h_n(w)|^4 + |l_n(w)|^4) dp(w) < c$$

Pour $f = (f_1, f_2) \in \hat{H}^s(M)$, on considère la décomposition donnée par

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n(x) \quad ; \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n(x) \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$$

et on considère l'application

$$w \rightarrow f^w = (f_1^w(x), f_2^w(x))$$

où

$$\begin{cases} f_1^w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_n(w) e_n(x) \\ f_2^w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n l_n(w) e_n(x). \end{cases}$$

L'application $f^w \in L^2(\Omega, \hat{H}^s(M))$ est appelée la fonction aléatoire associée à (f_1, f_2) .

Théorème 3.2 *On suppose que $\partial M \neq \emptyset$, $s \geq \frac{1}{4}$ et $f = (f_1, f_2) \in \hat{H}^s(M)$. Soit $f^w \in L^2(\Omega, \hat{H}^s(M))$ la fonction aléatoire associée à la donnée du problème f , alors il existe $\sigma > \frac{1}{2}$ tel que pour chaque $w \in \Omega$ il existe $T_w > 0$ et une unique solution de (3.19) avec des données initial f^w , dans l'espace*

$$X_w = (\cos(t\sqrt{-\Delta}) f_1^w + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} f_2^w) + C([-T_w, T_w]; H^\sigma(M)).$$

Plus précisément, il existe $c > 0$, $\delta \geq 0$ ($\delta \geq 0$ si $s > \frac{1}{4}$) et pour chaque $0 < T \leq 1$, et un évènement Ω_T tel que

$$p(\Omega_T) \geq 1 - cT^{1+\delta}$$

de sorte que pour chaque $w \in \Omega_T$, il existe une solution unique u de (3.19).

Remarque 3.5 *Des estimations sont établies (dans des espaces convenables) pour démontrer la continuité de la solution par rapport à la donnée f .*

Chapitre 4

Résolution numérique de l'équation des ondes non linéaires

Le recours au calcul numérique sur ordinateur est parfois nécessaire pour estimer qualitativement et quantitativement, les solutions de différents modèles. Il existe de nombreuses méthodes de résolution numérique de l'équation des ondes, qui consistent à obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est à dire en un nombre fini de points) qui approchent la solution exacte. Dans ce chapitre, nous présentons une des plus anciennes et des plus simples, appelée méthode des différences finies.

4.1 Principe de la méthode des différences finies

Cette méthode consiste à approcher la dérivée de la fonction inconnue u (d'un problème donné) en un point par une somme finie des valeurs de l'inconnue u en un certain nombre de points. Ces points apparaissent lors du maillage du domaine Ω dans lequel le problème est vérifié. Cette approximation est basée sur la définition de la dérivée et éventuellement sur le développement limité de la fonction inconnue.

4.1.1 Les différents schémas pour approcher la 1^{er} dérivée

Par la définition de la limite, on a pour $x_0 \in \Omega$ un ouvert de

$$u'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$$

donc si h est petit, on peut avoir l'approximation suivante

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}. \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) est appelé schéma aux différences décentré à droite (ou progressif). En appliquant un développement limité à l'ordre 1 de $u(x_0 - h)$ on obtient

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + h \xi_1(h) \quad (4.2)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi_1(h) = 0.$$

Pour h assez petit, on a

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} \quad (4.3)$$

L'équation (4.3) est appelé schéma aux différences décentré à gauche (ou régressif).

On peut avoir un autre schéma numérique pour approcher la première dérivée, appelé le schémas centré. Pour cela, nous effectuons un développement limité de u à l'ordre 1 au voisinage du point x_0

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + h\xi_2(h) \quad (4.4)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi_2(h) = 0.$$

En faisant la somme de (4.2) et de (4.4), on peut obtenir le schéma centré

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} \quad (4.5)$$

Pour une fonction $u = u(t, x)$ qui dépend de deux variables, on peut adapter les trois schémas (4.1)- (4.5) comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t_0, x_0) &\simeq \frac{u(t_0, x_0) - u(t_0, x_0 - h)}{h} \text{ (régressif \% à l'espace)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) &\simeq \frac{u(t_0 + k, x_0) - u(t_0, x_0)}{k} \text{ (progressif \% au temps)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) &\simeq \frac{u(t_0 + k, x_0) - u(t_0 - k, x_0)}{2k} \text{ (centré \% au temps)} \end{aligned}$$

4.1.2 Les différents schémas pour approcher la dérivée seconde

Sachant que $u''(x_0) = (u')'(x_0)$, on applique deux fois le schéma (4.1), on obtient

$$u''(x_0) \simeq \frac{u'(x_0 + h) - u'(x_0)}{h}$$

avec

$$u'(x_0 + h) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - u(x_0 + h)}{h}$$

et

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$$

donc

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + 2h) - 2u(x_0 + h) + u(x_0)}{h^2} \quad (4.6)$$

De la même manière, en appliquant deux fois de suite le schéma (4.3) on obtient

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0) - 2u(x_0 - h) + u(x_0 - 2h)}{h^2} \quad (4.7)$$

Pour obtenir le schéma centré, on fait un développement limité à l'ordre 4 de $u(x_0 + h)$ et $u(x_0 - h)$, ainsi

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4\xi_1(h) \quad (4.8)$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4\xi_2(h) \quad (4.9)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \xi_2(h) = 0.$$

En sommant $u(x_0 + h)$ et $u(x_0 - h)$, on obtient

$$u(x_0 + h) + u(x_0 - h) = 2u(x_0) + h^2 u''(x_0) + 2\frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_0) + h^4(\xi_1(h) + \xi_2(h))$$

d'où

$$u''(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} + h^2\left(-\frac{1}{12}u^{(4)}(x_0) - \xi(h)\right)$$

Le passage à la limite sur h , donne l'approximation

$$u''(x_0) \simeq \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} \quad (4.10)$$

Pour une fonction $u = u(t, x)$, les deux schémas (4.6) et (4.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_0, x_0) &\simeq \frac{u(t_0 + 2k, x_0) - 2u(t_0, x_0) + u(t_0 - k, x_0)}{k^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0) &\simeq \frac{u(t_0, x_0 + h) - 2u(t_0, x_0) + u(t_0, x_0 - h)}{h^2} \end{aligned}$$

Remarque 4.1 L'application des schémas aux différences finis, ramène la résolution d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles à un système algébrique discret.

Définition 4.1 On dit qu'un problème discret est à k pas de temps s'il prend la forme suivante

$$u^{(n+1)} = F(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \dots, u^{(n-k+1)})$$

4.1.3 Stabilité et consistance du système discret

Il est crucial lorsqu'on souhaite mettre en oeuvre un schéma aux différences finies de vérifier, ou plus exactement de trouver une condition assurant la stabilité du système discret,

De manière générale, pour une fonction donnée f , on cherche u solution du problème continu

$$\begin{cases} Lu = f & \text{sur } \Omega \\ + \text{ conditions} \end{cases} \quad (4.11)$$

où L est un opérateur différentiel. Après un choix de discrétisation du domaine Ω (choix du pas de discrétisation h et des points x_i), on approche le problème (4.11) par un problème discret

$$\begin{cases} L_h^k u_h^k = f & \text{aux points } t_n, x_i. \\ + \text{ conditions} \end{cases} \quad (4.12)$$

où u_h^k est la solution approchée de la solution exacte u .

Définition 4.2 On appelle *erreur de consistance* le vecteur ξ^h défini par :

$$\xi_h^k(t_n, x_i) = Lu(t_n, x_i) - L_h^k u_h^k(t_n, x_i), \quad \forall n, i$$

Définition 4.3 On dit que le problème (4.12) est

1. consistant si

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} |\xi_h^k(t_n, x_i)| = 0, \quad \forall n, i$$

2. consistant d'ordre m en espace et d'ordre p en temps, s'il existe deux constantes c_1, c_2 indépendantes de h et de k telles que

$$\sup_{n, i} |\xi_h^k(t_n, x_i)| \leq c_1 k^p + c_2 h^m.$$

Définition 4.4 Le système discret est dit *stable en norme* s'il existe une constante positive c telle que

$$\|u^{(n)}\| \leq c \|u^{(n-1)}\|.$$

où $u^{(n)} = (u_i^n)_i$

Cela revient à dire qu'il existe une constante positive c telle que

$$\|u^{(n)}\| \leq c \|u^{(0)}\|.$$

Théorème 4.1 "de convergence de Lax-Friedrichs" On suppose que $u \in C^4(\Omega)$. Si l'opérateur L est linéaire et si le problème (4.12) est stable et consistant, alors il existe deux constantes c_1, c_2 indépendantes de h et de k telles que

$$\max_{n, i} |u(t_n, x_i) - u_h^k(t_n, x_i)| \leq c_1 k^p + c_2 h^m.$$

Pour la preuve voir [3]

Remarque 4.2 Dans le cas non linéaire, aucun résultat n'est établi quant à la convergence des schémas numériques.

4.2 Application à l'équation des ondes :

On va appliquer la méthode des différences finies à l'équation des ondes introduite dans [2], pour les données suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3(t, x) = f(t, x), & \text{sur }]0, T[\times]a, b[\\ u(t, a) = u(t, b) = 0, & \text{sur }]0, T[\\ u(0, x) = w(x), & \text{sur }]a, b[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 & \text{sur }]a, b[\end{cases} \quad (4.13)$$

On distingue deux cas :

1. En appliquant un schéma régressif par rapport au temps et un schéma centré par rapport à l'espace .

2. En appliquant un schéma centré par rapport au temps et un schéma centré par rapport à l'espace .

Mais avant l'application de ces schémas numériques, on commence par linéariser "numériquement" l'équation donnée et ceci en décomposant le terme non linéaire $u^3(t, x)$ en $u^2(t, x) \times u(t, x)$. On construit le schéma itératif où le nouveau terme non linéaire $u^2(t, x)$ est considéré, lors du calcul, à l'itération (k) , alors que le terme linéaire $u(t, x)$ est pris à l'itération $(k + 1)$. C'est à dire pour $u^{(0)}$ choisi, on est amené à résoudre, à chaque itération k , l'équation,

$$\frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial t^2}(t, x) + c^2 \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial x^2}(t, x) + (u^2)^{(k)}(t, x) \times u^{(k+1)}(t, x) = f(t, x), \quad (4.14)$$

par les deux schémas suscités. On s'arrête dès que la différence entre deux itérations successives, est inférieure en norme, à une tolérance donnée.

Cette technique de linéarisation numérique a été utilisée pour la première fois en 1965 par Bellman et Kalaba, pour résoudre les systèmes algébriques non linéaires [5].

Pour N et N_T deux entiers non nuls donnés, on considère la discrétisation du domaine $]0, T[\times]a, b[$ par les points (t_n, x_j) définis part

$$\begin{aligned} t_n &= n\Delta t, \quad n = 0, \dots, N_T \text{ où } \Delta t = \frac{T}{N_T} \\ x_j &= a + j\Delta x, \quad j = 0, \dots, N, \text{ avec } \Delta x = \frac{b - a}{N} \end{aligned}$$

On adopte la notation

$$u(t_n, x_j) := u_j^n; \quad n = 0, \dots, N_T \text{ et } j = 0, \dots, N$$

4.2.1 Schéma implicite :

En appliquant un schéma régressif par rapport au temps et un schéma centré par rapport à l'espace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_{n-2}, x_j) - 2u(t_{n-1}, x_j) + u(t_n, x_j)}{\Delta t^2} \simeq \frac{u_j^{n-2} - 2u_j^{n-1} - u_j^n}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{\Delta x^2} \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

L'équation linéarisée (4.14) du problème continu est approchée par (où l'indice k de l'itération a été omis pour simplifier l'écriture)

$$\frac{u_j^{n-2} - 2u_j^{n-1} - u_j^n}{\Delta t^2} + c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + (u_j^n)^2 \times u_j^n = f_j^n. \quad \forall 1 \leq j \leq N-1 \text{ et } 2 \leq n \leq N_T$$

qui est équivalente à

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{j-1}^n + (1 - 2 \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + \Delta t^2 (u_j^n)^2) u_j^n + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{j+1}^n = 2u_j^{n-1} - u_j^{n-2} + \Delta t^2 f_j^n$$

qui devient, en posant $R = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$:

$$Ru_{j-1}^n + (1 - 2R + \Delta t^2 u_j^2) u_j^n + Ru_{j+1}^n = 2u_j^{n-1} - u_j^{n-2} + \Delta t^2 f_j^n. \quad (4.15)$$

La discrétisation des conditions est donnée par

$$u(t_n, a) = u_0^n = 0 \quad (4.16)$$

$$u(t_n, b) = u_N^n = 0 \quad (4.17)$$

$$u(0, x_j) = u_j^0 = w(x_j) = w_j^0. \quad (4.18)$$

En appliquant un schéma aux différences finies progressif pour la dernière condition du problème (4.13), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_j) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_j) \simeq \frac{u(t_0 + \Delta t, x_j) - u(t_0, x_j)}{\Delta t} = 0,$$

ce qui nous donne

$$u(\Delta t, x_j) = u(0, x_j),$$

c'est à dire

$$u_j^1 = u_j^0. \quad (4.19)$$

Le système linéarisé discret à résoudre est

$$\left\{ \begin{array}{l} Ru_{j-1}^n + (1 - 2R + \Delta t^2 u_j^2) u_j^n + Ru_{j+1}^n = 2u_j^{n-1} - u_j^{n-2} + \Delta t^2 f_j^n \\ u(t_n, a) = u_0^n = 0 \\ u(t_n, b) = u_N^n = 0 \\ u(0, x_j) = u_j^0 = w(x_j) = w_j^0 \\ u_j^1 = u_j^0 \end{array} \right. ; j = 1, \dots, N$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle en réécrivant l'équation discrète pour chaque indice j .

$$\text{pour } j = 1 : \quad Ru_0^n + (1 - 2R + \Delta t^2 u_1^2)u_1^n + Ru_2^n = 2u_1^{n-1} - u_1^{n-2} + \Delta t^2 f_1^n$$

$$\text{pour } j = 2 : \quad Ru_1^n + (1 - 2R + \Delta t^2 u_2^2)u_2^n + Ru_3^n = 2u_2^{n-1} - u_2^{n-2} + \Delta t^2 f_2^n$$

\vdots
 \vdots

$$\text{pour } j = N - 1 : \quad Ru_{N-2}^n + (1 - 2R + \Delta t^2 u_{N-1}^2)u_{N-1}^n + Ru_N^n = 2u_{N-1}^{n-1} - u_{N-1}^{n-2} + \Delta t^2 f_{N-1}^n$$

Cette forme matricielle est donc

$$\begin{cases} Au^{(n)} = 2u^{(n-1)} - u^{(n-2)} + F^{(n)} \\ u^{(0)} = (w_j) \quad 1 \leq j \leq N - 1, \\ u^{(1)} = u^{(0)}. \end{cases} \quad (4.20)$$

où $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{N-1}^{(n)})$, $F^{(n)} = (\Delta t^2 f_1^n, \Delta t^2 f_2^n, \dots, \Delta t^2 f_{N-1}^n)^t$ et

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & R & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ R & D_2 & R & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & D_3 & R & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R & D_{N-2} & R \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & R & D_{N-1} \end{pmatrix}$$

avec $D_i = 1 - 2R + \Delta t^2 (u_i^n)^2$

Remarque 4.3 1- Le problème (4.20) associé au problème des ondes est un schéma à 2 pas de temps.

2- Le schéma (4.20) est dit implicite, car l'obtention de $u^{(n)}$, connaissant $u^{(n-1)}$ et $u^{(n-2)}$ n'est directe mais nécessite la résolution d'un système linéaire.

Exemple 4.1 Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3(t, x) = f(t, x), \quad \text{sur }]0, 1[\times]0, 2\pi[\\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0, \quad \text{sur }]0, 1[\\ u(0, x) = \sin(x), \quad \text{sur }]0, 2\pi[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \quad \text{sur }]0, 2\pi[. \end{cases} \quad (4.21)$$

Le second membre $f(t, x)$ est pris tel que la solution exacte du problème est

$$u(t, x) = \cos(t) \sin(x).$$

Le système (4.20) (associé à (4.21)) est résolu après une décomposition LU de la matrice A .

Pour un nombre de points $N_t = 1000$ et pour différentes valeurs de N , les résultats numériques sont présentés dans le tableau et la figure suivants :

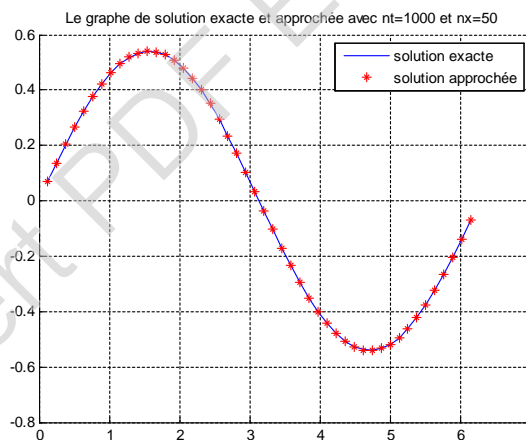
N	erreur	$c \frac{\Delta t}{\Delta x}$
20	0.010447797556910	0.003026970889636
30	0.004240117149182	0.004620113463128
40	0.001531982337273	0.006213256036621
50	$1.892446550429715e - 004$	0.007806398610113

Remarque 4.4 Pour l'équation des ondes linéaire, il existe une condition suffisante pour la convergence du système discret associé, qui est connue sous le nom de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Elle se traduit par une relation que doit vérifier le pas de temps et celui de l'espace. Cette relation est donnée par $0 < c \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2}$.

On remarque "numériquement" pour l'équation des ondes non linéaire, que si la quantité $c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ n'est pas très petite, la convergence n'est plus assurée.

Les résultats numériques pour un nombre de points par rapport à l'espace $N = 50$ et différentes valeurs de N_T , sont donnés exposés dans le tableau

N_T	erreur	$c \frac{\Delta t}{\Delta x}$
500	0.003056420098973	0.015628441305617
600	0.002051563895355	0.013019352606850
800	$8.065549268189542e - 004$	0.00976044081539
900	$4.104189880903955e - 004$	0.008674741058401
1000	$1.892446550429715e - 004$	0.007806398610113



4.2.2 Schéma explicite :

En appliquant un schéma centré par rapport au temps et l'espace, c'est à dire, pour

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_{n+1}, x_j) - 2u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j))}{\Delta t^2} \simeq \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{\Delta x^2} \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

l'équation du problème continu est approchée par

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + (u_j^n)^3 = f_j^n ; \forall 1 \leq j \leq N-1 \text{ et } 1 \leq n \leq N_T - 1$$

qui est équivalente à

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{j-1}^n + (2 + 2 \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} - \Delta t^2 (u_j^n)^2) u_j^n - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{j+1}^n + \Delta t^2 f_j^n$$

et qui prend la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - Ru_{j-1}^n + (2 + 2R - \Delta t^2 (u_j^n)^2) u_j^n - Ru_{j+1}^n + \Delta t^2 f_j^n \quad (4.22)$$

où $R = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$

Le système linéarisé discret associé à (4.14) à résoudre est

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - Ru_{j-1}^n + (2 + 2R - \Delta t^2 (u_j^n)^2) u_j^n - Ru_{j+1}^n + \Delta t^2 f_j^n \\ u(t_n, a) = u_0^n = 0 \\ u(t_n, b) = u_N^n = 0 \\ u(0, x_j) = u_j^0 = w(x_j) = w_j^0 \\ u_j^1 = u_j^0 \end{cases} ; j = 1, \dots, N$$

Pour retrouver la forme matricielle de ce problème discret, on explicite l'équation discrète pour chaque indice j , ce qui donne

$$\text{pour } j = 1 : u_1^{n+1} = u_1^{n-1} - Ru_0^n + (2 + 2R - \Delta t^2 (u_1^n)^2) u_1^n - Ru_2^n + \Delta t^2 f_1^n$$

$$\text{pour } j = 2 : u_2^{n+1} = u_2^{n-1} - Ru_1^n + (2 + 2R - \Delta t^2 (u_2^n)^2) u_2^n - Ru_3^n + \Delta t^2 f_2^n$$

⋮
⋮

$$\text{pour } j = N-1 : u_{N-1}^{n+1} = u_{N-1}^{n-1} - Ru_{N-2}^n + (2 + 2R - \Delta t^2 (u_{N-1}^n)^2) u_{N-1}^n - Ru_N^n + \Delta t^2 f_{N-1}^n$$

La forme matricielle retrouvée est

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^{(n-1)} + Au^n + F^n \\ u^{(0)} = (w_j) \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ u^{(1)} = u^{(0)} \end{cases} \quad (4.23)$$

ou $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{N-1}^{(n)})$, $F^{(n)} = (\Delta t^2 f_1^n, \Delta t^2 f_2^n, \dots, \Delta t^2 f_{N-1}^n)^t$ et

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & R & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ R & D_2 & R & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & D_3 & R & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & R & D_{N-3} & R & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & R & D_{N-2} & R \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & R & D_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $K_i = 2 + 2R - \Delta t^2 (u_i^n)^2$

Remarque 4.5 1-Le schéma (4.23) est à deux pas de temps.

2-Il est dit explicite, car connaissant $u^{(n)}$ et $u^{(n-1)}$, $u^{(n+1)}$ est déterminé par un calcul direct.

Exemple :

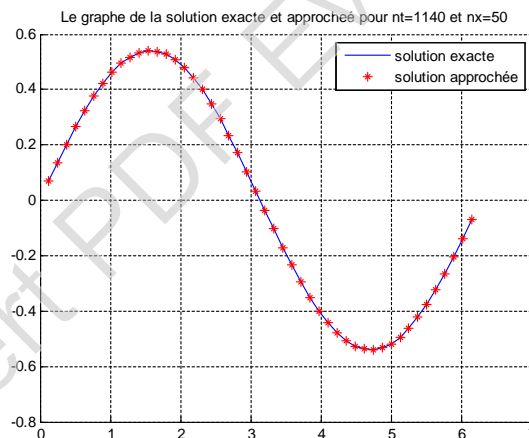
On reprend le même exemple pris dans le cas du schéma implicite

Pour $N_T = 1000$

N	erreur	$c \frac{\Delta t}{\Delta x}$
10	0.035791838543569	0.001433828316143
20	0.010229602017191	0.003026970889636
30	0.003975694384291	0.004620113463128
48	$4.144674442737772e - 004$	0.007487770095414

pour $N = 50$

N_T	erreur	$c \frac{\Delta t}{\Delta x}$
500	0.003835806498257	0.015628441305617
600	0.002709614277897	0.013019352606850
800	0.001320171863182	0.009760440815398
900	$8.759087317875042e - 004$	0.008674741058401
1000	$5.539611374096838e - 004$	0.007806398610113



4.2.3 Conclusion

On peut, à partir des résultats numériques obtenus, conclure que les deux schémas aux différences finies l'implicite comme l'explicite fournissent des résultats acceptables, pour l'approximation de la solution de l'équation des ondes non linéaire.

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté une méthode de résolution de l'équation des ondes non linéaire, qui est une combinaison de la méthode des différences finies et de la technique de linéarisation numérique. Cette combinaison a donné de bons résultats.

Expert PDF Evaluation

Bibliographie

- [1] R. DAUTRAY-J. L. LIONS : Analyse mathématique et calcul numérique, Volume 7, Masson 1988.
- [2] N. Burq-N. Tzvetkov : Random data Cauchy theory for supercritical wave equation (local theory), *Inventiones mathematicae*, 173, 449-475 (2008).
- [3] G. ALLAIRE : Analyse numérique et optimisation, deuxième édition, Ellipse 2012.
- [4] A.LESFARI : Distributions, analyse de FOURIER et transformation de LAPLACE, Ellipse 2012.
- [5] R.E. BELLMAN-R.E. KALABA : Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems, Elsevier, New York, NY, USA, 1965.