

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS MOSTAGANEM
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

THESE

Pour l'obtention du Diplôme Docteur en Sciences
Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

=====o ○ o=====

*CROISSANCE ET POINTS FIXES DES SOLUTIONS MEROMORPHES
DE CERTAINES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES*

=====o ○ o=====

Présentée par : ANDASMAS MAAMAR.

Soutenue le : _____, devant le jury composé de :

Président : Dr MEDEGHRI Ahmed (Professeur à l'université de Mostaganem).

Examineurs :

Dr TERBECHE Mekki (Professeur à l'université d'Oran Es-Sénia).

Dr BENCHOHRA Mouffak (Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès).

Dr BENBACHIR Maamar (Maître de Conférences A à l'université de Khemis Méliana).

Dr AZIZ HAMANI Karima (Maître de Conférences A à l'université de Mostaganem).

Encadreur : Dr BELAÏDI Benharrat (Professeur à l'université de Mostaganem).

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux.

Je tiens en premier lieu, à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon professeur et directeur de cette thèse Monsieur Belaïdi Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et ses encouragements durant ces années m'ont beaucoup aidé à progresser. Je le remercie aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de cette thèse.

Je tiens également à exprimer mes plus vifs remerciements à mon professeur Monsieur Medeghri Ahmed, Professeur à l'université de Mostaganem, qui m'a honoré en acceptant d'être président du jury. Je lui suis aussi très reconnaissant pour tous ses conseils pertinents pendant ma formation.

J'exprime ma très profonde reconnaissance aux examinateurs Messieurs : Terbeche Mekki (Professeur à l'université d'Oran Es-sénia), Benchohra Mouffak (Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès), Benbachir Maamar (Maître de Conférences A à l'université de Khemis Méliana), Aziz Hamani Karima (Maître de Conférences A à l'université de Mostaganem), qui me font l'honneur d'examiner et de juger ce travail.

J'ai trouvé des conditions de travail très agréables au département de mathématiques à l'université de Mostaganem, notamment une équipe pédagogique qui m'a donné de nombreux conseils au cours de mon initiation à l'enseignement. Je tiens à exprimer ma gratitude, envers toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près à l'accomplissement de cette thèse de Doctorat, pendant toutes ces années.

Table des matières

Introduction	iii
0.1 Historique sur la théorie de Nevanlinna.	iii
0.2 Motivation.	viii
1 La théorie de R. Nevanlinna.	1
1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna.	1
1.1.1 La formule de Jensen.	1
1.1.2 Reformulation de la formule de Jensen.	3
1.1.3 La fonction caractéristique de R. Nevanlinna.	6
1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna.	8
1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe.	13
1.3.1 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction	13
1.3.2 L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros et des points fixes.	15
1.3.3 La mesure linéaire et la mesure logarithmique.	16
1.3.4 l'indice central d'une fonction entière.	17
2 L'ordre de croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur	19
2.1 Introduction et résultats	19
2.2 Lemmes préliminaires	21
2.3 Preuve du Théorème 2.1.1.	24
2.4 Preuve du Théorème 2.1.2.	28
2.5 Preuve du Théorème 2.1.3.	29
3 Sur l'ordre et l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieure	31
3.1 Introduction et résultats	31
3.2 Lemmes préliminaires	35
3.3 Preuve du Théorème 3.1.1.	39
3.4 Preuve du Théorème 3.1.2.	41
3.5 Preuve du Théorème 3.1.3.	43

3.6	Preuve du Théorème 3.1.4.	45
4	Sur la croissance et les points fixes des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes du second degré avec des coefficients méromorphes	51
4.1	Introduction et résultats	51
4.2	Lemmes préliminaires	53
4.3	Preuve du Théorème 4.1.1.	57
4.4	Preuve du Théorème 4.1.2.	63
4.5	Preuve du Théorème 4.1.3.	65
5	Sur la croissance et les points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires non homogènes du second degré	69
5.1	Introduction et résultats	69
5.2	Lemmes préliminaires	71
5.3	Preuve du Théorème 5.1.1.	73
5.4	Preuve du Théorème 5.1.2.	81
5.5	Preuve du Théorème 5.1.3.	82
6	Hyper-ordre et points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur	88
6.1	Introduction et résultats	88
6.2	Lemmes préliminaires	89
6.3	Preuve du Théorème 6.1.1.	94
6.4	Preuve du Théorème 6.1.2.	99
7	L'ordre, l'hyper-ordre et les point fixes des solutions méromorphes des équations différentielles d'ordre supérieur	106
7.1	Introduction et résultats	106
7.2	Lemmes préliminaires	108
7.3	Preuve du Théorème 7.1.1.	110
7.4	Preuve du Théorème 7.1.2.	116
8	Sur la croissance et les zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur	122
8.1	Introduction et résultats	122
8.2	Lemmes préliminaires	125
8.3	Preuve du Théorème 8.1.1.	129
8.4	Preuve du Théorème 8.1.2.	130
8.5	Preuve du Corollaire 8.1.1.	133
8.6	Preuve du Corollaire 8.1.2.	134
9	Sur la croissance et les zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes du second degré	136
9.1	Introduction et résultats	136
9.2	Lemmes préliminaires	138

9.3	Preuve du Théorème 9.1.1.	139
9.4	Preuve du Théorème 9.1.2.	142
9.5	Preuve du Corollaire 9.1.1.	144
	Bibliographie	144

Introduction

Une des plus grandes branches dans l'analyse mathématique est la « théorie des fonctions ». Cette branche des mathématiques avait été illustrée par Emile Picard, Jacques Hadamard, Emile Borel,... . Puis la théorie des fonctions entières ou méromorphes d'une variable complexe avait été affinée par Gaston Julia, Georges Valiron,... . Le livre de R. Nevanlinna [53], parut en 1929 sous le titre « Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes », fait date dans l'histoire de la théorie des fonctions méromorphes, dans lequel il introduit la fonction caractéristique $T(r)$ « fonction de croissance » d'une fonction méromorphe. Cette nouvelle notion nous apprend que la théorie des fonctions entières peut s'étendre aux fonctions méromorphes, une remarquable extension pour des fonctions ayant des pôles.

La fonction caractéristique joue un rôle décisif dans la théorie des fonctions où l'intérêt se concentra sur les problèmes de la distribution des valeurs des fonctions. Depuis quatre décennies, cette théorie est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, en particulier la croissance et l'oscillation des solutions.

Notre travail dans cette thèse est consacré sur l'étude de la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires dans le plan complexe. Des nouveaux résultats porteront sur l'ordre de croissance, l'hyper ordre, l'exposant de convergence des zéros et les points fixes des solutions.

Afin que le lecteur puisse comprendre notre recherche, nous proposons ce point historique sur la théorie de Nevanlinna et notre motivation de recherche.

0.1 Historique sur la théorie de Nevanlinna.

Il est particulièrement important d'étudier le nombre $n(r, a, f)$ des racines de l'équation $f(z) = a$ et de leur distribution dans un disque $|z| \leq r$ ($r > 0$), chaque racine étant comptée avec sa multiplicité appropriée. Les fonctions entières les plus simples sont les polynômes

complexes, un polynôme $f(z)$ s'exprime simplement, en connaissant ses zéros : a_1, a_2, \dots, a_n , il s'écrit sous la forme

$$f(z) = c(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n).$$

Considérons le théorème fondamental de l'algèbre (FTA) (1799) : si f est un polynôme complexe de degré $n > 0$, alors f a n zéros dans \mathbb{C} . Si $a \in \mathbb{C}$ est une constante, nous notons que le polynôme complexe $f - a$ aussi a n zéros dans \mathbb{C} , ainsi f atteint la valeur a dans \mathbb{C} , n fois. La distribution des valeurs des polynômes est simple, puisque deux polynômes complexes quelconques avec les mêmes racines peuvent différer seulement par une multiplication d'une constante. Par le principe du module maximum, nous savons que le maximum de f dans le disque $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ est atteint sur le bord ∂D . Pour les fonctions f et g , nous employons la notation $f(z) = O(g(z))$ où $r \rightarrow +\infty$ si et seulement si, il existe une constante positive $C > 0$ telle que $|f(z)| \leq C|g(z)|$. Ainsi pour les polynômes, le principe de maximum nous indique que $\sup_{|z| \leq r} |f(z)| = O(r^n)$ pour $r \rightarrow +\infty$. Donc nous avons obtenu un rapport au sujet de la croissance du polynôme f . En particulier le théorème fondamental de l'algèbre peut être redit comme suit [24] : l'ordre de croissance du module maximum d'un polynôme complexe non-constant f dans le disque D_r où $r \rightarrow +\infty$, détermine le nombre de fois que f assume chaque valeur finie dans \mathbb{C} (comptant la multiplicité).

Nous constatons, trois concepts distincts : la distribution des zéros d'une fonction, la croissance de telle fonction, et dans quelle mesure la fonction peut se déterminer par ses zéros.

Dans la théorie des fonctions entières transcendentes, il s'agit de trouver les analogies de ces résultats. Le départ est avec le théorème de Weierstrass (1876) qui exprime une fonction entière à partir de ses zéros, ce qui assume une forme semblable au théorème fondamental de l'algèbre. Le théorème de Weierstrass dit : soient $\{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ une séquence infinie des nombres complexes différents de zéro telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty$. Alors, chaque fonction entière qui s'annule exactement à chaque a_n et a un zéro d'ordre $m \geq 0$ (m un entier) à l'origine, est de la forme

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{+\infty} E_n \left(\frac{z}{a_n} \right) \quad (0.1.1)$$

où g est une fonction entière et E_n est le facteur canonique défini par

$$E_k(z) = (1 - z) e^{z + z^2/2 + \dots + z^k/k}.$$

Weierstrass [1, Théorème 7 p. 195] a prouvé que deux fonctions entières avec le même ensemble de zéros $\{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ peuvent différer par un facteur constant ou exponentiel. Il reste l'étude de la croissance de telles fonctions par rapport à la distribution des zéros. On remarque que le facteur exponentiel affecte le taux de croissance de f sans qu'il ne présente aucun zéro additionnel. Le théorème de Liouville donne un état minimal de croissance pour des fonctions

entières. Ce théorème indique que chaque fonction entière bornée est une constante. Le fameux théorème de Picard (1879) affirme que toute fonction entière non-constante ne peut omettre qu'une valeur finie au plus et elle prend chaque autre valeur complexe un nombre infini de fois. Maintenant regardons l'exemple spécifique $f(z) = e^z$; f est une fonction entière, et elle ne prend jamais la valeur zéro. Par conséquent, par le théorème de Picard, f doit atteindre chaque autre valeur complexe infiniment de fois. Ce qui prouve que quelques fonctions entières peuvent ne pas avoir de zéros (Clairement une généralisation directe du FTA n'est pas vraie), d'où nous voulons étudier les relations de la densité des zéros et la croissance maximale du module, donc plus de problèmes.

La définition de l'ordre d'une fonction entière n'était pas explicite, soit f une fonction entière alors l'ordre de croissance de f est donné par $\rho_f = \inf \{ \rho > 0 : |f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho} \}$, où $A, B > 0$ sont des constantes. Hadamard a prouvé que pour une fonction d'ordre ρ , le degré du polynôme g dans l'exposant de la factorisation (0.1.1) est inférieur à l'ordre ρ . Plus tard, E. Borel a annoncé qu'on devrait étudier plus généralement les a -points, c'est à dire les points où la fonction prend une valeur arbitraire donnée a , plutôt qu'on s'intéresse seulement aux zéros. E. Borel, a présenté le concept de l'ordre d'une fonction entière et il a donné au théorème de Picard une formulation plus précise; une fonction entière f d'ordre ρ ($0 < \rho < +\infty$) satisfait

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log n(r, a, f)}{\log r} = \rho = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r} \quad (0.1.2)$$

pour chaque valeur complexe finie a , à une exception d'une valeur, où $M(r, f)$ est le module maximum de f sur le disque $|z| \leq r$. Alors, la fonction entière d'ordre fini a sa distribution des valeurs déterminée fondamentalement par son ordre. Ce théorème a été la source de beaucoup d'accomplissements de la recherche sur la classe des fonctions entières et le maximum du module.

Pour les fonctions méromorphes transcendantales, le maximum du module n'a pas pu être l'outil approprié pour étudier leur croissance puisqu'une fonction méromorphe peut atteindre la valeur $+\infty$ sur un disque d'un rayon fini, en raison de la présence des pôles. Cependant, le théorème de Picard se généralise : soit f une fonction méromorphe qui omet une valeur finie a . Alors, $\frac{1}{f-a}$ est une fonction entière, qui par le théorème de Picard peut omettre au plus une valeur. Par conséquent, n'importe quelle fonction méromorphe peut omettre au plus deux valeurs finies. L'idée de Borel qu'on peut écrire n'importe quelle fonction méromorphe comme quotient de deux fonctions entières, il a mesuré la croissance de f en étudiant la croissance du numérateur et du dénominateur séparément; Il est parvenu à généraliser certains premiers résultats aux fonctions méromorphes en définissant l'ordre d'une telle fonction f est le maximum des ordres du dénominateur et du numérateur. Ce procédé a des inconvénients évidents. Il était temps pour R. Nevanlinna de révolutionner l'étude des fonctions méromorphes.

Nevanlinna a donné une définition plus générale de l'ordre par une série de publications en 1922-1925. Son idée principale était d'employer la formule de Jensen avec une légère modification, pour construire trois fonctions à valeurs réelles à fin de mesurer le comportement de f , $m(r, f)$ (voir la Définition 1.1.2) la fonction (moyenne) de proximité qui mesure essentiellement la grandeur de f sur le cercle $|z| = r$, $N(r, f)$ (voir la Définition 1.1.3) la fonction de comptage de Nevanlinna, elle compte clairement la moyenne logarithmique du nombre des pôles de f à l'intérieur du disque $|z| < r$. Nevanlinna a rendu compte que ceci lui permettait de mesurer effectivement la croissance de f . Enfin, il a défini la fonction caractéristique (de Nevanlinna)

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f). \quad (0.1.3)$$

La fonction T est parfois - à l'origine par Nevanlinna - désignée sous le nom de l'affinité de f vers $+\infty$, ou en d'autres termes « une mesure : combien f aime $+\infty$ », alors le rôle de $T(r, f)$ aux fonctions méromorphes est comme le rôle de degré aux polynômes.

Nevanlinna parvient à réécrire la formule de Poisson-Jensen sous une forme symétrique, en termes des fonctions de proximité et de comptage de la fonction méromorphe f et de la fonction méromorphe $\frac{1}{f}$. Pour $f(0) \neq 0$, on a

$$\log |f(0)| = m(r, f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right), \quad (0.1.4)$$

où $m\left(r, \frac{1}{f}\right)$ mesurant à quel point f s'approche moyennement de 0 sur le cercle $|z| = r$ et $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ compte la moyenne logarithmique du nombre des zéros de f à l'intérieur du disque $|z| < r$. Nevanlinna a découvert que l'affinité totale d'une fonction méromorphe vers chaque valeur a est constante, indépendante de a . Si f prend une valeur moins souvent que la moyenne, il y a toujours une compensation, cela donne naissance au premier théorème fondamental de Nevanlinna (FMT) :

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1), \quad (0.1.5)$$

pour une constante a , nous employons également la notation

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + O(1). \quad (0.1.6)$$

Ce fameux théorème nous dit : Si f est méromorphe, nous voyons qu'elle atteint la valeur à $+\infty$ autant que la valeur 0. En effet, nous pouvons dire la même chose pour toute constante a de \mathbb{C} . Si le taux auquel f atteint un zéro est haut, $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ grandit rapidement et f doit diverger de 0 puisque $m\left(r, \frac{1}{f}\right)$ doit être petit pour compenser. On donne cet exemple : considérons $f(z) = e^z$, f est entière et n'atteint jamais 0 ou $+\infty$, notons que $N(r, f) =$

$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = 0$ pour tout $r > 0$, et $m(r, f) = \frac{r}{\pi} = m\left(r, \frac{1}{f}\right)$ pour tout $r > 0$, d'où le résultat ci-dessus est affirmé, i. e., $T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right)$. On se rappelle la représentation graphique de la fonction exponentielle réelle car $e^x = |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, on note qu'elle est très proche de 0 à la gauche de l'axe des ordonnées autant qu'elle se développe très rapidement vers $+\infty$ sur l'autre côté. Dans ce cas-ci, le FMT nous indique, dans un sens f s'approche de 0 sur la moitié gauche du plan et s'approche de $+\infty$ sur la moitié droite du plan avec la même allure. Nous pouvons également considérer le cas où $f(z) = R(z)$ pour R une fonction rationnelle et prouver que $T(r, f) = O(\log r)$ (voir l'ex. 1.1.4). L'inverse est vrai, n'importe quelle fonction méromorphe f avec $T(r, f) = O(\log r)$ est rationnelle (voir [59]). Par conséquent les fonctions rationnelles sont des fonctions méromorphes avec une croissance logarithmique (dans le sens de la fonction caractéristique de Nevanlinna).

Nevanlinna a examiné plus étroitement sa fonction caractéristique. Il pose la question de la taille relative des deux composantes dans la définition de la fonction caractéristique T . Il a voulu comprendre la relation entre les limites des fonctions m et N . Il a montré que généralement m est beaucoup plus petit que N et il donne une réponse sous la forme d'une inégalité qu'il appela le second théorème principal (SMT). Ce théorème annonce que pour trois nombres a, b, c distincts finis ou non finis et pour toute fonction méromorphe f , on a

$$T(r, f) \leq N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-c}\right) + TPC.,$$

où $TPC. = \text{Termes de petite croissance} = o(T(r, f))$.

Ce résultat donne une preuve courte et directe au théorème de Picard pour les fonctions méromorphes ; nous supposons que f est une fonction méromorphe qui omet les trois valeurs a, b, c , alors

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-c}\right) = 0,$$

par SMT nous avons $T(r, f) \leq o(T(r, f))$, c'est une contradiction pour $r \rightarrow +\infty$, d'où toute fonction méromorphe non constante f sur \mathbb{C} omet au plus deux valeurs.

Nevanlinna nous a offert le livre " Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes " parut dans la " collection de Borel " en 1929, où il présente les deux théorèmes de Nevanlinna qui permettent de traiter un grand nombre de problèmes avec précision et simplicité.

Ce travail qui lance la théorie de la distribution des valeurs dépasse largement son domaine classique et devient une puissance si on regarde la multitude de ses applications. On mentionne quelques unes qui demeurent des sujets de recherche, à savoir : sur l'approximation diophantienne [59], sur les fonctions qui partagent quelques valeurs ([27], [37]), sur la dynamique complexe [25], sur la factorisation des fonctions méromorphes [32] et sur les équations différentielles complexes qui sont notre intérêt dans cette thèse.

Après R. Nevanlinna [55] qui a travaillé sur l'équation différentielle $Y'' + A(z)Y = 0$ avec $A(z)$ un polynôme. K. Yoshida [69] en 1933 a prouvé le théorème célèbre de Malmquist en appliquant la théorie de Nevanlinna. Il est important de citer le travail de A. Gol'dberg [31] traitant une classe des équations différentielles algébriques d'ordre un, où il indique que si une fonction méromorphe dans le plan satisfait une telle équation différentielle algébrique, alors elle est d'ordre fini.

Laine dans [47] affirme que le premier qui a fait des études systématiques de l'application de la théorie de Nevanlinna sur les équations différentielles complexes était H. Wittich et il a cité 20 citations dû à Wittich dès 1946. Après, la recherche active dans ce domaine a été lancée.

Pendant les quatre dernières décennies, plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans des pays différents ont joué un rôle remarquable dans ce domaine. Des résultats importants ont été établis. Nous mettons en surbrillance une destination spécifique de ces résultats qui servent directement nos travaux dans cette thèse.

0.2 Motivation.

On débute par l'équation différentielle de deuxième ordre

$$f'' + P(z)f' + Q(z)f = 0, \quad (0.2.1)$$

où $P(z)$ et $Q(z) \not\equiv 0$ sont deux fonctions entières. Toute solution de l'équation (0.2.1) est une fonction entière [58], [57, tom III. p. 354], [40]. En outre, Valiron [58, p. 108] a mentionné que si les coefficients de l'équation (0.2.1) sont des polynômes, alors toute solution de (0.2.1) est d'ordre fini. Dans [65], d'un travail sur les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, Wittich affirme que toute solution de l'équation (0.2.1) est d'ordre fini si et seulement si tous les coefficients $P(z)$ et $Q(z)$ de l'équation différentielle (0.2.1) sont des polynômes. La question qui se pose maintenant est quel est l'ordre de croissance de la solution si l'un des coefficients de l'équation (0.2.1) est une fonction entière transcendante. Frei [28, Corollaire 1 dans §2] a prouvé que si $P(z)$ est un polynôme et $Q(z)$ est une fonction entière transcendante, alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (0.2.1) est d'ordre infini. Pour l'équation différentielle de deuxième ordre

$$f'' + e^{-z}f' + Cf = 0, \quad (0.2.2)$$

où $C \neq 0$ est une constante, Frei [29] a démontré que si (0.2.2) possède une solution f d'ordre fini, alors $C = -k^2$ où k est un nombre entier positif. Réciproquement pour chaque nombre entier positif k , l'équation (0.2.2) avec $C = -k^2$ possède une solution f qui est un polynôme en e^z du degré k . Ozawa [56] donne une réponse à la question : Quand l'équation

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0, \quad (0.2.3)$$

admet des solutions d'ordre infini ? Où $A(z)$ est une fonction transcendante et $B(z) \not\equiv 0$ un polynôme, en donnant le théorème : Chaque solution entière de (0.2.3) est d'ordre infini, si $A(z)$ est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. En outre, si $A(z), B(z) \not\equiv 0$ sont deux fonctions entières telles que $A(z)$ est transcendante et si f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (0.2.3), alors il y a au moins une des solutions f_1, f_2 qui doit être d'ordre infini (voir [40, p. 167], [28] et [26, Lemme 3]). Hille [40, Théorème 5.4.3] a prouvé que si $A(z)$ ou $B(z) \not\equiv 0$ est une fonction transcendante entière tandis que l'autre est un polynôme, alors chaque solution transcendante de (0.2.3) est une fonction entière d'ordre infini. Egalement, Langley [49, p. 432-433] a prouvé que toute solution non triviale de (0.2.3) est d'ordre infini, pour n'importe quelle constante c différente de zéro, avec $A(z) = ce^{-z}$ et $B(z)$ un polynôme non constant. Gundersen a traité le cas où les deux coefficients sont des fonctions transcendantes, pour l'équation différentielle

$$f'' + e^z f' + B(z) f = 0, \quad (0.2.4)$$

où $B(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière transcendante. Il a prouvé dans [36, Théorème 1] que si $B(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre $\rho(B(z)) \neq 1$, alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (0.2.4) est d'ordre infini. Gundersen [35, Résultat du Théorème 7 p. 419] a généralisé le résultat [36, Théorème 1] pour les solutions de l'équation

$$f'' + h(z) e^{Q(z)} f' + B(z) f = 0, \quad (0.2.5)$$

où $Q(z)$ un polynôme non constant, $h(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière telle que $\rho(h(z)) < \deg Q(z)$ et $B(z)$ une fonction entière transcendante. Il a prouvé que si $\rho(B(z)) \neq \deg Q(z)$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (0.2.5) est d'ordre infini. On remarque que la fonction $f(z) = e^z$ est une solution d'ordre fini de l'équation (0.2.4) où $B(z) = -(1 + e^z)$, ce qui nous révèle que dans le cas où $\rho(B(z)) = 1$, l'équation (0.2.4) peut avoir des solutions d'ordre fini. Ce résultat pousse les recherches vers la question : Quelle condition sur $B(z)$ telle que $\rho(B(z)) = 1$ (ou généralement $\rho(B(z)) = \deg Q(z)$) garantira que chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (0.2.4) est d'ordre infini ? Kwon [45, Théorème 2] a étudié les solutions de l'équation différentielle

$$f'' + h_1(z) e^{P(z)} f' + h_2(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (0.2.6)$$

dans le cas où $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ sont deux polynômes non constants, tels que $a_n b_n \neq 0$ et $h_1(z), h_2(z) \not\equiv 0$ sont deux fonctions entières telles que $\rho(h_1) < \deg P(z)$, $\rho(h_2) < \deg Q(z)$. Il a montré que toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (0.2.6) est d'ordre infini sous l'une des hypothèses :

- i) $\arg a_n \neq \arg b_n$ ou $a_n = c b_n$ ($0 < c < 1$) avec l'estimation $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq n$.
- ii) $c = 1$, $\deg(P - Q) = m \geq 1$, $\rho(h_1) < m$, $\rho(h_2) < m$ avec l'estimation $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq m$.

iii) $c > 1$, $\deg(P - cQ) = m \geq 1$, $\rho(h_1) < m$, $0 < \rho(h_2) < \frac{1}{2}$ avec l'estimation $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq m$.

iv) $c \geq 1$, $\deg(P - Q) = \text{constante}$, $\rho(h_1) < \rho(h_2) < \frac{1}{2}$ avec l'estimation $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq \rho(h_2)$.

L'ordre infini des solutions a donné à Kwon [45, Théorème 2] une idée d'étudier l'hyper-ordre des solutions

$$\rho_2(f(z)) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}$$

(voir [67]) afin de bien estimer le taux de croissance. Chen [18, p. 291] a étudié le même problème sur l'équation différentielle linéaire de deuxième ordre

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = 0, \quad (0.2.7)$$

où $a \neq b$ et $A_j(z) \not\equiv 0$ ($j = 0, 1$) sont deux fonctions entières, telles que $\rho(A_j(z)) < 1$ ($j = 0, 1$). Il a montré que chaque solution $f \not\equiv 0$ de (0.2.7) est d'ordre infini si $a = cb$ ($c > 1$). Egalement il a montré que chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f'' + (A_1(z) e^{az} + D_1(z)) f' + (A_0(z) e^{bz} + D_0(z)) f = 0, \quad (0.2.8)$$

est d'ordre infini si $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$) où $\rho(D_j(z)) < 1$ ($j = 0, 1$). Chen après ces deux théorèmes [18, Théorème 3] a donné une estimation précise sur l'hyper ordre des solutions de l'équation

$$f'' + e^{az} f' + Q(z) f = 0, \quad (0.2.9)$$

où $Q(z)$ est un polynôme ou $Q(z) = h(z) e^{bz}$ avec $h(z)$ un polynôme non nul. Il a prouvé que chaque solution est d'ordre infini et satisfait $\rho_2(f(z)) = 1$. Belaïdi [6] a amélioré les résultats de Kwon [46, Théorème 3] et de Chen - Yang [23, Théorème 3], en travaillant sur l'équation différentielle d'ordre supérieur

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \quad (0.2.10)$$

où $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) sont des fonctions entières. Sous des conditions sur le module de $A_0(z)$ et de $A_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$), il a prouvé que toute solution de (0.2.10) est d'ordre infini, en ajoutant quelque estimations sur l'hyper-ordre des solutions. Dans [13] Belaïdi et Hamani ont généralisé et complété les résultats de Gundersen [35] et de Kwon [46, Théorème 3] aux équations différentielles linéaires homogènes d'ordre supérieur. Dans [22] Chen et Shon ont prouvé le même résultat de Chen [18] aux solutions de l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = 0, \quad (0.2.11)$$

en améliorant la condition sur les coefficients, où $A_1(z)$, $A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes, telles que $\rho(A_i) < 1$ ($i = 1, 2$) et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Ils ont ajouté une étude sur les points fixes des solutions et de leurs dérivées f' et f'' .

En 2006, Liu et Yuan [51, Théorème 1] ont généralisé le résultat dans [18], pour une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. Ils ont obtenu le résultat suivant : toute solution méromorphe transcendante $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + h_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + e^{az}f^{(s)} + \dots + h_1f' + h_0e^{bz}f = 0, \quad (0.2.12)$$

est d'ordre infini, où h_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($h_0 \not\equiv 0$) sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, telles que $\sigma = \max\{\rho(h_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < 1$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$).

La recherche sur les points fixes des solutions des équations différentielles en générales est récente, l'autre but principal de cette thèse est d'étudier les exposants de convergence des points fixes des solutions et de leurs 1ère, 2ième dérivées.

En 2000, Chen [17] a étudié l'exposant de convergence des points fixes des solutions de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0, \quad (0.2.13)$$

où $A(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre fini, il a prouvé que l'exposant de convergence des points fixes des solutions de l'équation (0.2.13) est infini. Après cette étude, Wang et Yi [63], Laine et Reippo [48], Chen et Shon [21] ont étudié le problème des points fixes des solutions et de leurs dérivées sur les équations différentielles linéaires de deuxième ordre avec des coefficients fonctions méromorphes. Dans [44], Xu et Yi ont généralisé quelques résultats dans [21] sur les points fixes, aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients fonctions méromorphes d'ordre de croissance $\rho = 1$.

En s'inspirant de ces travaux, dans notre thèse nous avons étudié la croissance et les points fixes des solutions méromorphes de quelques équations différentielles linéaires dans le plan complexe.

Le deuxième chapitre de cette thèse donne les résultats de l'article [5] où nous avons travaillé sur l'ordre de croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + \dots + A_s e^{P_s(z)}f^{(s)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)}f' + A_0 e^{P_0(z)}f = 0, \quad (0.2.14)$$

où $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des polynômes non constants, tels que $\deg P_j = n \geq 1$ et $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que $\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$. Nous avons étudié également l'hyper-ordre et l'exposant de convergence des zéros de la fonction $f - \tau$, où τ est une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini.

Le troisième chapitre est consacré aux résultats obtenus dans l'article [4], où nous avons étudié l'ordre de croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} (h_j e^{P_j(z)} + d_j) f^{(j)} = 0, \quad (0.2.15)$$

où $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des polynômes non constants tels que $\deg P_j = n \geq 1$ et $h_j(z), d_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($h_0 \not\equiv 0$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que $\max\{\rho(h_j), \rho(d_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$. Nous montrons que chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation ci-dessus est d'ordre infini. Egalement, nous employons l'exposant de la convergence des zéros de la solution ou l'exposant de la convergence des pôles pour obtenir une évaluation précise de l'hyper-ordre des solutions.

Les résultats de l'article [3] sont les données du chapitre 4, où nous avons étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes du second degré

$$f'' + h_1(z) e^{P(z)} f' + h_0(z) e^{Q(z)} f = F(z), \quad (0.2.16)$$

où $P(z), Q(z)$ sont des polynômes non constants, tels que $\deg(P) = \deg(Q) = n \geq 1$ et $h_j(z), F(z)$ ($j = 0, 1$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles telles que $\rho(h_j) < n$ ($j = 0, 1$), $\rho(F) < n$. Nous avons prouvé que toutes les solutions $f \not\equiv 0$ sont d'ordre infini, et nous avons donné quelques évaluations précises de leurs hyper-ordre. A la fin de ce chapitre, nous avons donné une évaluation de l'exposant de convergence des points fixes des solutions et de leurs 1^{ère}, 2^{èmes} dérivées.

Les autres chapitres sont les résultats des articles soumis.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes du second degré

$$f'' + h_1(z) e^{P(z)} f' + h_0(z) e^{Q(z)} f = F(z), \quad (0.2.17)$$

où $P(z), Q(z)$ sont des polynômes non constants, tels que $\deg(P) \neq \deg(Q)$. $h_j(z) \not\equiv 0$ ($j = 0, 1$), $F(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles telles que $\rho(h_0) < \deg(Q)$, $\rho(h_1) < \deg(P)$ et $\rho(F) < \max\{\deg(Q), \deg(P)\}$. Nous avons montré que toute solution méromorphe transcendante f est d'ordre infini et nous avons donné quelques évaluations précises de son hyper-ordre. A la fin de ce chapitre, nous donnons une évaluation pour l'exposant de la convergence des points fixes des solutions et de leurs 1^{ères}, 2^{èmes} dérivées.

Les résultats du chapitre 6 (respectivement le chapitre 7) sont une généralisation des résultats trouvés dans le chapitre 5 (respectivement le chapitre 4) pour les solutions de l'équa-

tion différentielle linéaire non homogène d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} h_j e^{P_j(z)} f^{(j)} = F. \quad (0.2.18)$$

où $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des polynômes avec $\deg P_j = n_j \geq 1$ et $h_j(z) \not\equiv 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), F sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles telles que $\max\{\rho(F), \rho(h_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$.

Le chapitre 8 est une étude sur la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = 0 \quad (k \geq 2), \quad (0.2.19)$$

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = A_k \quad (k \geq 2), \quad (0.2.20)$$

où $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) ($A_k \not\equiv 0$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Sous certaines conditions sur les coefficients, nous avons prouvé que toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ des équations ci-dessus sont d'ordre infini. En outre, nous avons donné quelques évaluations sur leurs hyper-ordre, exposant et hyper-exposant de la convergence des zéros distincts.

Dans le chapitre 9, nous avons étudié la possibilité de permuter les conditions entre les coefficients $A(z)$ et $B(z)$. Notre objectif est d'étudier la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires du second degré homogène et non homogène

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = F(z), \quad (0.2.21)$$

où $A(z)$, $B(z)$ et $F(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. S'il existe des constantes positives $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que $|A(z)| \geq e^{\alpha|z|^\sigma}$ pour $|z| \rightarrow +\infty$, $z \in H$ où $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in H\} > 0$ et $\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \sigma$. Alors, nous avons montré que toute solution méromorphe transcendante f est d'ordre infini, et nous avons donné quelques évaluations de l'hyper-ordre, l'exposant et l'hyper-exposant de la convergence des zéros distincts.

Nous débutons notre travail avec le premier chapitre, afin de mettre le lecteur au courant de certaines définitions, propriétés et quelques notations de la théorie de Nevalinna sur la distribution des valeurs des fonctions.

La théorie de R. Nevanlinna.

Notre objectif dans ce chapitre est de donner les définitions de base de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes, et de rappeler quelques propriétés sur la croissance des fonctions méromorphes.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

1.1.1 La formule de Jensen.

Théorème 1.1.1 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, +\infty$ et soient a_j ($j = 1, 2, \dots, m$) (respectivement b_k ($k = 1, 2, \dots, n$)) les zéros (respectivement les pôles) de $f(z)$ dans le disque $|z| < R$ ($0 < R < +\infty$), chaque zéro et pôle est pris selon sa multiplicité. Alors,*

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{j=1}^m \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^n \log \frac{|b_k|}{R}. \quad (1.1.1)$$

On donne la preuve pour le cas où f n'a aucun zéro ou pôle sur le cercle $|z| = R$, (Si les zéros ou les pôles de la fonction f apparaissent sur le cercle $|z| = R$, on se réfère à [38, p. 2 deuxième cas.], [42, p. 43-47]).

Preuve. On pose

$$F(z) = f(z) \frac{\prod_{k=1}^n \frac{R(z-b_k)}{R^2-b_k z}}{\prod_{j=1}^m \frac{R(z-a_j)}{R^2-a_j z}}. \quad (1.1.2)$$

La fonction F n'admet pas de zéros et de pôles dans $|z| \leq R$, donc $\log F(z)$ est analytique dans $|z| \leq R$. Alors, par le théorème de la valeur moyenne des fonctions analytiques [1, p. 165], nous obtenons

$$\log F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log F(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Prenant les parties réelles, en utilisant $\operatorname{Re}(\log F(z)) = \log |F(z)|$, nous obtenons

$$\log |F(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(R e^{i\varphi})| d\varphi. \quad (1.1.3)$$

De (1.1.2), on trouve

$$F(0) = f(0) \frac{\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{R}}{\prod_{j=1}^m \frac{a_j}{R}}. \quad (1.1.4)$$

Pour tout $z = R e^{i\varphi}$ et pour tout $j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$, on a

$$\left| \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \right| = \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| = 1. \quad (1.1.5)$$

De (1.1.2) et (1.1.5), on trouve

$$|F(R e^{i\varphi})| = |f(R e^{i\varphi})|. \quad (1.1.6)$$

En combinant (1.1.6) avec (1.1.3) et (1.1.4), nous obtenons l'affirmation

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{j=1}^m \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^n \log \frac{|b_k|}{R}. \quad (1.1.7)$$

L'équation (1.1.7) est appelée formule de Jensen, elle donne une idée sur le lien entre les zéros et les pôles situés à l'intérieur d'un disque $|z| < R$ avec la valeur moyenne de $\log |f(z)|$ sur la frontière $|z| = R$. \square

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

à l'origine. Alors,

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{j=1}^m \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^n \log \frac{|b_k|}{R} - m \log R. \quad (1.1.8)$$

où les a_j ($j = 1, 2, \dots, m$) (respectivement b_k ($k = 1, 2, \dots, n$)) sont les zéros (respectivement les pôles) de $f(z)$ dans le disque $|z| < R$.

Preuve. On définit la fonction méromorphe h par

$$h(z) = z^{-m} f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

On a $h(0) = C_m \neq 0, +\infty$. Les fonctions h et f ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq R$. En appliquant la formule de Jensen (1.1.1), on trouve

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |R^{-m} f(R e^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{j=1}^m \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^n \log \frac{|b_k|}{R}$$

d'où

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{j=1}^m \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^n \log \frac{|b_k|}{R} - m \log R. \quad \square$$

1.1.2 Reformulation de la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 Pour tout nombre réel $x > 0$, on définit $\log^+ x$ par

$$\log^+ x = \max \{0, \log x\}. \quad (1.1.9)$$

Lemme 1.1.1

- (1) $\log x \leq \log^+ x$. (2) $\log^+ x \leq \log^+ y$ pour $x \leq y$.
 (3) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$. (4) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.
 (5) $\log^+ (\prod_{k=1}^n x_k) \leq \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$. (6) $\log^+ (\sum_{k=1}^n x_k) \leq \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$.

Preuve. (1), (2), (3) et (4) sont des conséquences immédiates de la définition 1.1.1 et la monotonie de la fonction logarithme ordinaire.

(5) Si $\prod_{k=1}^n x_k \leq 1$, alors l'affirmation est triviale. D'autre part, si $\prod_{k=1}^n x_k > 1$, alors

$$\log^+ \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) = \log \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) = \sum_{k=1}^n \log x_k \leq \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

(6) Par (2) et (5) ci-dessus, on a

$$\log^+ \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \leq \log^+ \left(n \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \right) \leq \log n + \log^+ \left(\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \right) \leq \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

□

Définition 1.1.2 Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = +\infty$. Alors, on définit $m(r, a, f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad \text{si } a \neq +\infty \quad (1.1.10)$$

et par

$$m(r, +\infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \quad \text{si } a = +\infty. \quad (1.1.11)$$

Corollaire 1.1.1 Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = m(r, f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right). \quad (1.1.12)$$

Preuve. En utilisant la troisième propriété du \log^+ , on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta,$$

par les définitions (1.1.10), (1.1.11), nous constatons que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}).$$

□

Définition 1.1.3 Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = +\infty$. On définit $N(r, a, f)$ (respectivement $\bar{N}(r, a, f)$) la fonction a -points (respectivement a -points distincts) de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$ par

$$N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r \quad \text{si } a \neq +\infty, \quad (1.1.13)$$

$$N(r, +\infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} dt + n(0, +\infty, f) \log r \quad \text{si } a = +\infty \quad (1.1.14)$$

et

$$\bar{N}(r, a, f) = \bar{N}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, a, f) - \bar{n}(0, a, f)}{t} dt + \bar{n}(0, a, f) \log r \quad \text{si } a \neq +\infty, \quad (1.1.15)$$

$$\bar{N}(r, +\infty, f) = \bar{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, +\infty, f) - \bar{n}(0, +\infty, f)}{t} dt + \bar{n}(0, +\infty, f) \log r \quad \text{si } a = +\infty, \quad (1.1.16)$$

où

$n(t, a, f)$ (a un nombre complexe) désigne le nombre des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

$n(t, +\infty, f)$ désigne le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité.

$\bar{n}(t, a, f)$ (a un nombre complexe) désigne le nombre des zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$.

$\bar{n}(t, +\infty, f)$ désigne le nombre des pôles distincts de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leq t$.

Lemme 1.1.2 Soit f une fonction méromorphe avec les a -points a_j ($j = 1, 2, \dots, n$) dans le disque $|z| \leq R$ telle que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq R$, chacune est comptée selon sa multiplicité. Alors,

$$\int_0^R \log \frac{n(t, a, f)}{t} dt = \int_0^R \log \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt = \sum_{j=1}^n \log \frac{R}{|a_j|}. \quad (1.1.17)$$

Preuve. En dénotant $r_j = |a_j|$, $j = 1, 2, \dots, n$, on obtient

$$\sum_{j=1}^n \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^n \log \frac{R}{r_j} = \log \frac{R^n}{r_1 r_2 \dots r_n} = n \log R - \sum_{j=1}^n \log r_j,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^n \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n-1} j (\log r_{j+1} - \log r_j) + n (\log R - \log r_n),$$

donc

$$\sum_{j=1}^n \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n-1} j \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dt}{t} + n \int_{r_n}^R \frac{dt}{t} = \int_0^R \frac{n(t, a, f)}{t} dt.$$

□

Corollaire 1.1.2 Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors,

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + N(R, f) - N\left(R, \frac{1}{f}\right). \quad (1.1.18)$$

Preuve. En combinant entre (1.1.8) et (1.1.17), on trouve

$$\begin{aligned} \log |C_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt \\ &\quad + \int_0^R \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} dt - m \log R, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \log |C_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt \\ &\quad + \int_0^R \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} dt - (n(0, 0, f) - n(0, +\infty, f)) \log R. \end{aligned}$$

D'après les définitions (1.1.13) et (1.1.14), on obtient

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi + N(R, f) - N\left(R, \frac{1}{f}\right).$$

□

Corollaire 1.1.3 Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

à l'origine. Alors,

$$\log |C_m| = m(r, f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(R, f) - N\left(R, \frac{1}{f}\right). \quad (1.1.19)$$

Preuve. On obtient (1.1.19) directement en combinant entre (1.1.12) et (1.1.18). □

1.1.3 La fonction caractéristique de R. Nevanlinna.

Définition 1.1.4 Soit f une fonction méromorphe non constante. On définit la fonction caractéristique $T(r, f)$ de la fonction f par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f). \quad (1.1.20)$$

Exemple 1.1.1 Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t, +\infty, f) = 0$ car f n'admet pas de pôles, par conséquent $N(r, f) = 0$.

De plus on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{re^{i\theta}}| d\theta,$$

d'où

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{r \cos \theta}| d\theta.$$

Donc

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r \cos \theta) d\theta \right),$$

alors

$$m(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

Par conséquent

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}. \quad (1.1.21)$$

Exemple 1.1.2 (Voir [38, p. 7]) Soit $f(z) = \exp(e^z)$. Alors, on a

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.1.22)$$

Exemple 1.1.3 Soit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme non constant de degré $n \geq 1$ tel que a_j ($j = 0, 1, \dots, n$) sont des nombres complexes avec $a_n \neq 0$, et soit $f(z) = e^{P(z)}$. On veut calculer $T(r, e^{P(z)})$.

D'abord on calcule $T(r, f)$ lorsque $P(z) = a_n z^n$. Soient $a_n = |a_n| e^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$. Alors,

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)}.$$

Par conséquent

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)} d\theta.$$

Par changement de variable, on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2n\pi} \int_{\varphi}^{2n\pi + \varphi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau.$$

Puisque $2n\pi$ est une période de la fonction \cos , alors

$$m(r, f) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau,$$

d'où

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau = \frac{|a_n| r^n}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\tau) d\tau = \frac{|a_n| r^n}{\pi}.$$

Comme f est entière, donc

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{|a_n| r^n}{\pi}. \quad (1.1.23)$$

Généralement, pour $f(z) = e^{P(z)}$ et $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ on a

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)(1+o(1))} \text{ pour } r \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, pour r suffisamment grand on obtient

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)(1+o(1))} d\theta = \frac{|a_n| r^n}{\pi} (1 + o(1)).$$

D'où

$$T(r, f) = m(r, f) \sim \frac{|a_n| r^n}{\pi} \text{ } r \rightarrow +\infty. \quad (1.1.24)$$

Exemple 1.1.4 Soit f une fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0},$$

telle que les a_j ($j = 0, 1, \dots, n$), b_i ($i = 0, 1, \dots, m$) sont des nombres complexes avec $a_n b_m \neq 0$ et $m \geq n$. On a $\deg(Q(z)) = m$. Il existe donc un nombre réel positif $r_0 \geq 0$ tel que $n(r, +\infty, f) = m$ pour tout $r \geq r_0$. Alors,

$$N(r, f) = \int_0^{r_0} \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} dt + \int_{r_0}^r \frac{m - n(0, +\infty, f)}{t} dt + n(0, +\infty, f) \log r,$$

d'où

$$N(r, f) = O(1) + (m - n(0, +\infty, f))(\log r - \log r_0) + n(0, +\infty, f) \log r.$$

Par conséquent

$$N(r, f) = m \log r + O(1). \quad (1.1.25)$$

Par les propriétés des polynômes complexes (voir [47, Lemme 1.3.1 p. 9]). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $|z| = r > r_1$, on a

$$|P(z)| = |a_n| r^n (1 + o(1)) \quad \text{et} \quad |Q(z)| = |b_m| r^m (1 + o(1)).$$

Par conséquent

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left(\frac{|a_n|}{|b_m|} r^{n-m} (1 + o(1)) \right) d\theta,$$

d'où

$$m(r, f) = O(1). \quad (1.1.26)$$

En combinant entre (1.1.25) et (1.1.26), on obtient

$$T(r, f) = m \log r + O(1) = O(\log r).$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna.

Théorème 1.2.1 Soit f une fonction méromorphe non constante et soit

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{+\infty} C_i z^i, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

la série de Laurent de $(f - a)$ à l'origine. Alors, pour tout nombre complexe a , on a

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \log |C_m| + \varphi(r, a), \quad (1.2.1)$$

où $|\varphi(r, a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|$.

Preuve. Premièrement, on suppose que $a = 0$. Par le Corollaire 1.1.3 et la Définition 1.1.4, on obtient

$$\log |C_m| = T(r, f) - T\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Par conséquent

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) - \log |C_m|,$$

c'est une affirmation avec $\varphi(r, 0) \equiv 0$.

On traite maintenant le cas général où $a \neq 0$. Soit $h(z) = f(z) - a$. Alors,

$$N(r, h) = N(r, f), \quad N\left(r, \frac{1}{h}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \quad (1.2.2)$$

et

$$m\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right). \quad (1.2.3)$$

Comme

$$\log^+ |h| = \log^+ |f - a| \leq \log^+ |f| + \log^+ |a| + \log 2$$

et

$$\log^+ |f| = \log^+ |f - a + a| \leq \log^+ |f - a| + \log^+ |a| + \log 2.$$

L'intégration de ces inégalités donne

$$m(r, h) \leq m(r, f) + \log^+ |a| + \log 2$$

et

$$m(r, f) \leq m(r, h) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Posons

$$\varphi(r, a) = m(r, h) - m(r, f). \quad (1.2.4)$$

Alors, $\varphi(r, a)$ satisfait

$$|\varphi(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

Maintenant, appliquons la formule (1.1.19) à la fonction h , nous obtenons

$$\log |C_m| = m(r, h) - m\left(r, \frac{1}{h}\right) + N(R, h) - N\left(R, \frac{1}{h}\right),$$

d'où

$$m\left(r, \frac{1}{h}\right) + N\left(R, \frac{1}{h}\right) = m(r, h) + N(R, h) - \log |C_m|.$$

De (1.2.2) et (1.2.4), on trouve

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{h}\right) &= m(r, f) + N(r, f) - \log |C_m| + \varphi(r, a) \\ &= T(r, f) - \log |C_m| + \varphi(r, a). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.1 *Le premier théorème principal peut être exprimé sous la forme :*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1) \quad (1.2.5)$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$. On note que le terme d'erreur $O(1)$ dépend de a .

Exemple 1.2.1 Dans l'exemple précédent, on a calculé la fonction $T(r, f)$ pour la fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0},$$

telle que les a_j ($j = 0, 1, \dots, n$), b_i ($i = 0, 1, \dots, m$) sont des nombres complexes où $a_n b_m \neq 0$ et $m \geq n$. Maintenant on va calculer le $T(r, f)$ de la fonction f mais pour le cas $m < n$.

On a la fonction $\frac{1}{f}$ est une fonction rationnelle qui vérifie les conditions de l'exemple précédent.

En appliquant le premier théorème fondamental (1.2.5), on obtient

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1),$$

nous pouvons appliquer la même méthode de l'exemple précédent pour obtenir

$$T(r, f) = n \log r + O(1) = O(\log r).$$

Remarque 1.2.2 Nous constatons que la fonction caractéristique d'une fonction rationnelle est toujours donnée par

$$T(r, f) = O(\log r). \quad (1.2.6)$$

En outre, l'inverse de cet assertion est vrai. Autrement dit, si f est une fonction méromorphe avec $T(r, f) = O(\log r)$, alors f est une fonction rationnelle (voir [47, Théorème 2.2.3 p. 26]).

Proposition 1.2.1 Soient f, f_1, \dots, f_n des fonctions méromorphes et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Alors

$$(a) \quad T(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k), \quad n \geq 1,$$

$$(b) \quad T(r, f^n) = nT(r, f), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(c) \quad T \left(r, \sum_{i=1}^n f_i \right) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \log n, \quad n \geq 1,$$

$$(d) \quad T \left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta} \right) = T(r, f) + O(1), \text{ en supposant que } f \not\equiv -\delta/\gamma.$$

Preuve. (a) et (c), en utilisant les propriétés (5) et (6) de \log^+ on peut facilement déduire que si f_k ($k = 1, \dots, n$) sont des fonctions méromorphes, alors

$$m(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n m(r, f_k) \quad (1.2.7)$$

et

$$m(r, \sum_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n m(r, f_k) + \log n. \quad (1.2.8)$$

En outre, puisque l'ordre du pôle de $\sum_{k=1}^n f_k$ en z_0 ne dépasse pas la somme des ordres des pôles des f_k ($k = 1, 2, \dots, n$) en z_0 , alors

$$N(r, \sum_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n N(r, f_k). \quad (1.2.9)$$

De même, on a

$$N(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n N(r, f_k). \quad (1.2.10)$$

En combinant (1.2.9) (resp. (1.2.10)) avec (1.2.8) (resp. (1.2.7)), on trouve

$$T(r, \sum_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k) + \log n$$

et

$$T(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k).$$

(b) Il suffit d'observer que $|f^n| = |f|^n \leq 1$ si et seulement si $|f| \leq 1$.

(d) On suppose que $\gamma \neq 0$. On pose $f_1 = f + \delta/\gamma$, $f_2 = \gamma f_1$, $f_3 = 1/f_2$, $f_4 = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)f_3}{\gamma}$, alors $\frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta} = f_4 + \alpha/\gamma$.

Maintenant, en utilisant les inégalités (a) et (c) dans la proposition précédente, nous trouvons

$$\begin{aligned} T \left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta} \right) &= T(r, f_4) + O(1) \\ &= T(r, f_3) + O(1) \\ &= T(r, f_2) + O(1) \\ &= T(r, f_1) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Le cas où $\gamma = 0$ ($\delta \neq 0$). On pose $f_1 = f + \frac{\beta}{\alpha}$ (avec $\alpha \neq 0$) donc $\frac{\alpha f + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} f_1$. Alors,

$$\begin{aligned} T \left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\delta} \right) &= T \left(r, \frac{\alpha}{\delta} f_1 \right) + O(1) \\ &= T(r, f_1) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.2 Soit f une fonction méromorphe. Alors, pour tout $R > 0$, on a

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta + \log^+ |f(0)| \quad \text{avec } 0 < r < R. \quad (1.2.11)$$

·) $T(r, f)$ est une fonction croissante de r .

Preuve. En appliquant la formule de Jensen (1.1.1) avec $R = 1$ à la fonction $g(z) = a - z$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\phi}| d\phi = \begin{cases} \log |a|, & \text{si } |a| \geq 1 \\ \log |a| - \log |a| = 0 & \text{si } |a| < 1 \end{cases},$$

donc pour tout $a \in \mathbb{C}$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\phi}| d\phi = \log^+ |a|. \quad (1.2.12)$$

Soit $0 < r < R$. En appliquant la formule de Jensen à la fonction $f(z) - e^{i\theta}$, nous trouvons

$$\log |f(0) - e^{i\theta}| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}| d\phi - N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) + N(r, f).$$

L'intégration par rapport à θ de 0 à 2π donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(0) - e^{i\theta}| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}| d\phi \right] d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, f) d\theta, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(0) - e^{i\theta}| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}| d\theta \right] d\phi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, f) d\theta. \quad (1.2.13) \end{aligned}$$

En utilisant (1.2.12) avec $a = f(re^{i\phi})$, nous constatons que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}| d\theta = \log^+ |f(re^{i\phi})|. \quad (1.2.14)$$

En utilisant (1.2.12) avec $a = f(0)$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(0) - e^{i\theta}| d\theta = \log^+ |f(0)|. \quad (1.2.15)$$

La substitution de (1.2.14), (1.2.15) dans (1.2.13), donne

$$\log^+ |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\phi})| d\phi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + N(r, f),$$

d'où

$$\log^+ |f(0)| = m(r, f) + N(r, f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta,$$

donc

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \log^+ |f(0)|.$$

□

Remarque 1.2.3 *i) L'équation (1.2.11) est appelée l'Identité de Henri Cartan, c'est une autre représentation de $T(r, f)$. Puisque $N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right)$ est une fonction croissante de r . À l'aide de cette identité (1.2.11), on peut dire que la fonction $T(r, f)$ est une fonction croissante de r .*

ii) Généralement $m(r, f)$ n'est pas monotone. Par exemple, pour la fonction f telle que

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2}.$$

On a $|f(z)| < 1$ pour $|z| < \frac{1}{2}$ ou $|z| > 2$. Cela implique que $m(r, f) = 0$ pour $r \leq \frac{1}{2}$ ou $r \geq 2$.

1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe.

1.3.1 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.3.1 *Soit f une fonction méromorphe. $\rho(f)$, $\mu(f)$ dénotent respectivement à l'ordre et l'ordre inférieur de f tels que*

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \quad \mu(f) = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$

et on définit l'hyper ordre $\rho_2(f)$ de la fonction f par

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Remarque 1.3.1 *Toute fonction f d'ordre fini satisfait $\rho_2(f) = 0$.*

Exemple 1.3.1 Soit f une fonction rationnelle non constante

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0},$$

telle que les a_j ($j = 0, 1, \dots, n$), b_i ($i = 0, 1, \dots, m$) sont des nombres complexes avec $a_n b_m \neq 0$ et n, m sont des entiers positifs. Alors, de (1.2.6) on a

$$T(r, f) = O(\log r),$$

d'où

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log O(\log r)}{\log r} = 0, \quad \mu(f) = 0.$$

Exemple 1.3.2 Soit $f(z) = e^z$. De (1.1.21) on a

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(e^z) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{r}{\pi}}{\log r} = 1, \quad \mu(f) = 1.$$

Exemple 1.3.3 Soit $f(z) = e^{z^2}$. D'après (1.1.23), on obtient

$$T(r, f) = \frac{r^2}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(e^{z^2}) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{r^2}{\pi}}{\log r} = 2, \quad \mu(f) = 2.$$

Exemple 1.3.4 Soit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme non constant de degré n (n entier positif), tel que a_j ($j = 0, 1, \dots, n$) sont des nombres complexes avec $a_n \neq 0$, et soit $f(z) = e^{P(z)}$. Alors, d'après (1.1.24), on a

$$T(r, f) \sim \frac{|a_n| r^n}{\pi}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

d'où

$$\rho(e^{P(z)}) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{|a_n| r^n}{\pi}}{\log r} = n = \deg(P(z)).$$

On peut constater ces deux résultats

$$\rho(e^{z^3}) = 3, \quad \rho(e^{z^5+3z^2-2}) = 5, \quad \rho_2(e^{z^3}) = 0, \quad \rho_2(e^{z^5+3z^2-2}) = 0.$$

Exemple 1.3.5 (Voir [38, p. 7]) Soit $f(z) = \exp(e^z)$. Alors,

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

d'où

$$\rho(\exp(e^z)) = +\infty = \mu(f), \quad \rho_2(\exp(e^z)) = 1.$$

1.3.2 L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros et des points fixes.

Définition 1.3.2 Soit f une fonction méromorphe. Alors, l'exposant (respectivement hyper exposant) de convergence des zéros de la fonction f est noté par $\lambda(f)$ (respectivement $\lambda_2(f)$) tel que

$$\lambda(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} \quad \text{et} \quad \lambda_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

On note respectivement par

$$\bar{\lambda}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} \quad \text{et par} \quad \bar{\lambda}_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

à l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f .

Exemple 1.3.6 (i) Comme la fonction $f(z) = \exp(e^z)$ n'a pas de zéros, alors

$$\lambda(\exp(e^z)) = 0 = \bar{\lambda}(\exp(e^z)).$$

(ii) Pour la fonction $f(z) = e^z - 12$. Nous avons les zéros de f sont

$$z_k = \log 12 + 2k\pi i, \quad k \text{ un entier.}$$

Soit $t > 0$, tel qu'on trouve $2|k| + 1$ zéros de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$ (voir la Figure 01). Alors,

$$t^2 = (2\pi k)^2 + \log^2 12 \quad \text{d'où} \quad k^2 = \frac{t^2 - \log^2 12}{4\pi^2}.$$

Donc pour t suffisamment grand on a

$$n\left(t, \frac{1}{f}\right) = 2|k| + 1 = 2\sqrt{\frac{t^2 - \log^2 12}{4\pi^2}} + 1 \sim \frac{t}{\pi} \quad (t \rightarrow +\infty),$$

d'où

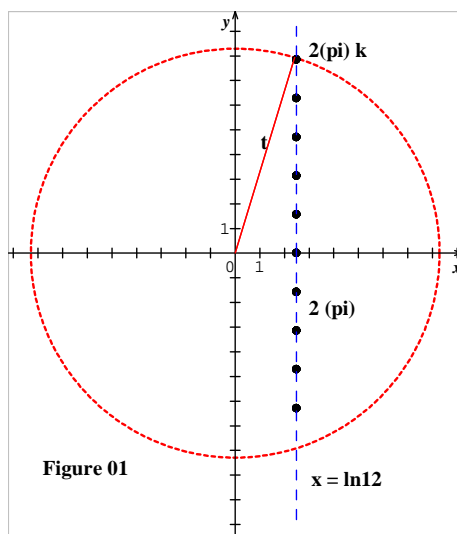
$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r \sim \int_0^r \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} r \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Par conséquent $\lambda(f) = 1$. Comme tous les zéros de la fonction f sont simples, alors

$$\lambda(f) = 1 = \bar{\lambda}(f).$$

De plus, on a

$$\lambda_2(f) = 0 = \bar{\lambda}_2(f).$$



Définition 1.3.3 Soit f une fonction méromorphe. Alors, $\bar{\tau}(f)$ l'exposant de convergence des points fixes distincts de f est défini par

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\lambda}(f - z) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.3.7 Pour la fonction $f(z) = ze^z - 11z$, les points fixes de la fonction f sont les zéros de la fonction

$$f(z) - z = ze^z - 12z = z(e^z - 12),$$

d'où

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(z(e^z - 12)) = 1.$$

1.3.3 La mesure linéaire et la mesure logarithmique.

Définition 1.3.4 On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E .

La densité supérieure d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ est définie par

$$\overline{\text{dens}}E = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

La densité logarithmique supérieure d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{lm(F \cap [1, r])}{\log r}.$$

Exemple 1.3.8 1) La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 5] \cup [6, 8] \subset [0, +\infty)$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt = \int_1^5 dt + \int_6^8 dt = 6.$$

2) La mesure linéaire de chaque ensemble dénombrable est nulle; $m(\mathbb{N}) = 0$.

3) La mesure linéaire d'un ensemble fini E est nulle.

4) La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [1, e] \subset [1, +\infty)$ est

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

5) La densité supérieure de l'ensemble $E = [1, +\infty)$ est

$$\overline{dens}H = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r} = 1.$$

6) La densité logarithmique supérieure de l'ensemble $F = [e, +\infty)$ est

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{lm([e, +\infty) \cap [1, r])}{\log r} = 1.$$

1.3.4 l'indice central d'une fonction entière.

Définition 1.3.5 Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière, le terme maximal de f est défini par

$$\mu(r) = \max \{|a_n| r^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

et l'indice central de f est défini par

$$\nu_f(r) = \max \{m : \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Exemple 1.3.9 Pour le polynôme $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0 z^0$, $a_n \neq 0$, pour r suffisamment grand, on a $\mu(r) = |a_n| r^n$ et $\nu_P(r) = n$.

Exemple 1.3.10 Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. On a

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \max_{n \geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $u_n = \frac{1}{n!} r^n$ et étudions la monotonie de la suite (u_n) . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1},$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, & \text{si } n < r - 1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, & \text{si } n > r - 1 \end{cases}.$$

Par conséquent

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_{[r]-2} < u_{[r]-1} \leq u_{[r]} > u_{[r]+1} > u_{[r]+2} > \cdots .$$

Alors, pour $r > 0$ on a

$$\mu(r) = u_{[r]} = \frac{1}{[r]!} r^{[r]} \quad \text{et} \quad \nu_f(r) = [r].$$

Remarque 1.3.2 [47] Pour toute fonction entière transcendante f , on a

- 1) $\mu(r)$ est strictement croissante pour r suffisamment grand, et tend vers $+\infty$ pour $r \rightarrow +\infty$.
- 2) $\nu_f(r)$ est croissante et tend vers $+\infty$ pour $r \rightarrow +\infty$.

L'ordre de croissance des solutions mériomorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

2.1 Introduction et résultats

Considérons l'équation différentielle de deuxième ordre

$$f'' + e^{-z} f' + A(z) f = 0, \quad (2.1.1)$$

où $A(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, il est bien connu que chaque solution f de l'équation (2.1.1) est une fonction entière. D'ailleurs, si f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.1.1), alors il y a au moins une solution f_1 ou f_2 d'ordre infini. Par conséquent, la plupart des solutions de (2.1.1) sont d'ordre infini.

Une question naturelle : Quelle condition sur $A(z)$ garantira que chaque solution $f \neq 0$ soit d'ordre infini ? Plusieurs auteurs, Belaïdi [12], Frei [29], Ozawa [56], Gundersen [36], Langley [49], Amemiya et Ozawa [2] ont étudié ce problème. Gundersen a montré [35, p.419] que si $\deg P(z) \neq \deg Q(z)$, alors chaque solution non constante de l'équation

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (2.1.2)$$

est d'ordre infini, où $P(z), Q(z)$ sont des polynômes non constants, $A_1(z), A_0(z) \neq 0$ sont des fonctions entières telles que $\rho(A_1) < \deg P(z)$, $\rho(A_0) < \deg Q(z)$. Mais l'équation (2.1.1) avec $A_1(z) = \frac{1}{2} = -A_2(z)$ et $P(z) = Q(z) = z$, possède une solution $f(z) = e^z + 2$ d'ordre fini. Donc, si $\deg P(z) = \deg Q(z)$, l'équation (2.1.1) peut avoir des solutions non constantes

d'ordre fini. Chen [18], Kwon [45] ont étudié le cas où $\deg P(z) = \deg Q(z)$. Plus tard, Chen et Shon [22] ont généralisé le résultat dans [18] pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. Après ce travail Xiao et Chen [66] ont amélioré le résultat dans [22] à une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème A. Soient $A_j(z)$ des fonctions entières avec $\rho(A_j) < 1$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), a_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des nombres complexes (si $A_i \equiv 0$ nous définissons $a_i = 0$, autrement $a_i \neq 0$). On suppose qu'il existe $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\} \subset \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ tel que $\arg a_{i_j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) sont distincts entre eux deux à deux et pour chaque a_l ($a_l \neq 0$) $\in \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\} - \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$, il existe un certain $a_{i_j} \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$ tel que $a_l = c_l^{(i_j)} a_{i_j}$, où $0 < c_l^{(i_j)} < 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Alors, chaque solution transcendante de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}e^{a_{k-1}z}f^{(k-1)} + \dots + A_0e^{a_0z}f = 0 \quad (2.1.3)$$

est d'ordre infini. En outre, si $a_{i_{j_0}} = a_0$ ou $a_0 = c_0^{(i_{j_0})} a_{i_{j_0}}$ et $0 < c_0^{(i_{j_0})} \neq c_s^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, avec $a_{i_{j_0}} \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$, alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.3) est d'ordre infini.

Le but principal de ce chapitre est de généraliser le résultat du Théorème A à quelques équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, en prouvant les résultats suivants.

Théorème 2.1.1 [5] Soient $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles et $\rho = \max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$. Soient $P_i(z) = a_{n,i}z^n + a_{n-1,i}z^{n-1} + \dots + a_{1,i}z + a_{0,i}$ des polynômes, où $a_{n,i}$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$), $a_{j,i}$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$; $j = 0, 1, \dots, n-1$) sont des nombres complexes (si $A_i = 0$ nous définissons $P_i(z) = 0$, autrement $a_{n,i} \neq 0$). On suppose qu'il existe $\{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, \dots, a_{n,i_m}\} \subset \{a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,k-1}\}$ tel que $\arg a_{n,i_j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) sont distincts entre eux deux à deux et pour chaque $a_{n,l} \in \{a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,k-1}\} - \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, \dots, a_{n,i_m}\}$ et $a_{n,l} \neq 0$ il existe un certain $a_{n,i_j} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, \dots, a_{n,i_m}\}$ tel que $a_{n,l} = c_{n,l}^{(i_j)} a_{n,i_j}$ avec $0 < c_{n,l}^{(i_j)} < 1$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Alors, chaque solution méromorphe transcendante de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + \dots + A_s e^{P_s(z)}f^{(s)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)}f' + A_0 e^{P_0(z)}f = 0 \quad (2.1.4)$$

est d'ordre infini. En outre, si $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0}$ ou $a_{n,0} = c_{n,0}^{(i_{j_0})} a_{n,i_{j_0}}$ et $0 < c_{n,0}^{(i_{j_0})} \neq c_{n,s}^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in$

$\{1, 2, \dots, k-1\}$, avec $a_{n, i_{j_0}} \in \{a_{n, i_1}, a_{n, i_2}, \dots, a_{n, i_m}\}$, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.1.4) est d'ordre infini.

Théorème 2.1.2 [5] *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.1.1, on a les assertions suivantes*

- (i) *Chaque solution méromorphe transcendante f de (2.1.4) satisfait $\lambda(f) \geq n$ ou $\rho_2(f) = n$.*
- (ii) *En outre, si $a_{n, i_{j_0}} = a_{n, 0}$ ou $a_{n, 0} = c_{n, 0}^{(i_{j_0})} a_{n, i_{j_0}}$ et $0 < c_{n, 0}^{(i_{j_0})} \neq c_{n, s}^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, avec $a_{n, i_{j_0}} \in \{a_{n, i_1}, a_{n, i_2}, \dots, a_{n, i_m}\}$, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.1.4) satisfait $\lambda(f) \geq n$ ou $\rho_2(f) = n$.*

Théorème 2.1.3 [5] *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.1.1, de plus on suppose que $\tau \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles et $\rho(\tau) < +\infty$, nous avons*

- (i) *Si τ est transcendante, alors chaque solution méromorphe transcendante f de (2.1.4) satisfait $\lambda(f - \tau) = +\infty$.*
- (ii) *En outre, si $a_{n, i_{j_0}} = a_{n, 0}$ ou $a_{n, 0} = c_{n, 0}^{(i_{j_0})} a_{n, i_{j_0}}$ et $0 < c_{n, 0}^{(i_{j_0})} \neq c_{n, s}^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, avec $a_{n, i_{j_0}} \in \{a_{n, i_1}, a_{n, i_2}, \dots, a_{n, i_m}\}$, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (2.1.4) satisfait $\lambda(f - \tau) = +\infty$.*

Exemple 2.1.1 *Pour l'équation différentielle*

$$f^{(5)} + \frac{2}{z-1} e^{4z^3} f^{(4)} + \frac{z^2}{z^2-1} e^{z^3} f^{(3)} - \frac{1}{z} e^{2iz^3} f'' - 2e^{iz^3+1} f' + 6e^{z^3-i} f = 0. \quad (2.1.5)$$

On prend $\{2i, 4\}$ l'ensemble des coefficients a_{n, i_j} où les arguments sont distincts et de modules supérieurs. Puisque $a_{n, 0} = 1$, ($|a_{n, 0}| = 1 < |a_{n, 4}| = 4$), donc d'après le Théorème 2.1.1, 2.1.2 et le Théorème 2.1.3, toute solution méromorphe transcendante $f(z)$ de l'équation (2.1.5) est d'ordre infini et satisfait

$$\rho_2(f(z)) = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda(f(z)) \geq 3.$$

En outre, pour $\tau = e^z$ fonction transcendante ($\rho(e^z) = 1 < +\infty$) et pour toute solution méromorphe transcendante $f(z)$ de l'équation (2.1.5), on a

$$\lambda(f - e^z) = +\infty.$$

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, et supposons que $|f^{(k)}(z)|$ est non borné sur un rayon $\arg(z) = \theta$, alors il existe une séquence $z_n = r_n e^{i\theta}$ qui tend vers l'infini telle que $f^{(k)}(z_n) \rightarrow +\infty$ et*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(k-j)!} |z_n|^{k-j} (1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (2.2.1)$$

Preuve. Soit $r_0 > 0$ tel que tous les pôles de f sont situés dans $\{z : |z| < r_0\}$ et soit $M(r, \theta, f^{(k)}) = \max \{|f^{(k)}(z)| : r_0 \leq |z| \leq r, \arg z = \theta\}$. Clairement, il existe un nombre infini des points $z_n = r_n e^{i\theta}$, $r_n \geq r_0$, $r_n \rightarrow +\infty$ tels que pour tout n , nous avons $M(r_n, \theta, f^{(k)}) = |f^{(k)}(z_n)| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par $(k-j)$ -intégrations répétées sur le long du chemin $L_1 : z = r e^{i\theta}$, $r_0 \leq r \leq |z_n|$, nous obtenons

$$f^{(j)}(z_n) = f^{(j)}(r_0 e^{i\theta}) + f^{(j+1)}(r_0 e^{i\theta}) \frac{(z_n - r_0 e^{i\theta})}{1!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(k-j-1)!} f^{(k-1)}(r_0 e^{i\theta}) (z_n - r_0 e^{i\theta})^{k-j-1} + \int_{r_0 e^{i\theta}}^{z_n} \dots \int_{r_0 e^{i\theta}}^{\tau} \int_{r_0 e^{i\theta}}^{\psi} f^{(k)}(t) dt d\psi d\tau \dots du.$$

Par conséquent, par une évaluation élémentaire d'inégalité et par $|f^{(k)}(z)| \leq |f^{(k)}(z_n)|$ sur le chemin L_1 , nous avons

$$|f^{(j)}(z_n)| \leq |f^{(j)}(r_0 e^{i\theta})| + |f^{(j+1)}(r_0 e^{i\theta})| \frac{|z_n - r_0 e^{i\theta}|}{1!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(k-j-1)!} |f^{(k-1)}(r_0 e^{i\theta})| |z_n - r_0 e^{i\theta}|^{k-j-1} + \frac{1}{(k-j)!} |f^{(k)}(z_n)| |z_n - r_0 e^{i\theta}|^{k-j}. \quad (2.2.2)$$

De (2.2.2) et pour $z_n \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(k-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{k-j} \quad (j = 0, \dots, k-1).$$

□

Lemme 2.2.2 [34, p.89] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\rho(f) = \rho < +\infty$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \psi_0$, $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (2.2.3)$$

Lemme 2.2.3 [10] Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, ($a_n = \alpha + i\beta \neq 0$) un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe avec $\rho(A) < n$. Soit $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = r e^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3)$, où $E_3 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, et pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons

(i) Si $\delta(P, \theta) > 0$, alors

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}, \quad (2.2.4)$$

(ii) Si $\delta(P, \theta) < 0$, alors

$$\exp \{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}. \quad (2.2.5)$$

Lemme 2.2.4 [22] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E_4 \subset [0; 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout rayon $\arg(z) = \theta_0 \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, $|f(re^{i\theta_0})| \leq Mr^k$ avec $M = M(\theta_0) > 0$ est une constante et $k > 0$ est une constante indépendante de θ_0 . Alors, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg(f) \leq k$.

Lemme 2.2.5 [30, p. 30] Soient P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 1$) des polynômes non constants de degrés respectivement d_1, d_2, \dots, d_n . Supposons que si $i \neq j$, alors $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$. Soit $A(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) e^{P_j(z)}$, où $B_j(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes satisfaisant $\rho(B_j(z)) < d_j$. Alors,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \{d_j\}. \quad (2.2.6)$$

Lemme 2.2.6 [20] Soient A_j, F ($F \not\equiv 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F.$$

Alors, f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \sigma(f) = +\infty. \quad (2.2.7)$$

Lemme 2.2.7 [51] Supposons que $k \geq 2$ et $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles. Soit

$$\rho = \max \{\rho(A_j), j = 0, 1, \dots, k-1\},$$

et soit $f(z)$ une solution méromorphe transcendante de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = 0.$$

Alors, $\rho_2(f) \leq \rho$.

Lemme 2.2.8 [42, Théorème 12.4] Soit f une fonction entière avec $\rho(f) = +\infty$. Alors, f peut être représentée sous la forme $f(z) = g(z) e^{h(z)}$, où $g(z)$ et $h(z)$ sont deux fonctions entières telles que

$$\rho_2(f) = \max \{\rho_2(g), \rho_2(e^h)\}, \quad (2.2.8)$$

$$\rho_2(g) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{g}\right)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}. \quad (2.2.9)$$

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1.

Nous affirmons que toute solution transcendante de l'équation (2.1.4) est d'ordre infini. Supposons que f est une solution transcendante de l'équation (2.1.4) satisfaisant $\rho(f) = \alpha < +\infty$. Par le Lemme 2.2.2, il existe un sous-ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| \geq R_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{k\alpha}, \quad 0 \leq i < j \leq k. \quad (2.3.1)$$

Notons

$$E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = 0, j = 0, 1, \dots, k-1\} \cup \\ \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_{i_j}, \theta) = \delta(P_{i_d}, \theta), 1 \leq d < j \leq m\}.$$

Donc E_2 est un ensemble fini. Par le Lemme 2.2.3, il existe des ensembles exceptionnels $H_j \subset [0, 2\pi)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), chacun d'eux a une mesure linéaire nulle, tels que pour tout $z = re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ ($E_3 = \bigcup_{j=0}^{k-1} H_j$ est un ensemble de mesure linéaire nulle) $\delta(P_j, \theta) \neq 0, j = 0, 1, \dots, k-1$ et $\delta(P_{i_j}, \theta) \neq \delta(P_{i_d}, \theta), 1 \leq d < j \leq m$. Soit

$$\delta_t = \delta(P_{i_t}, \theta) = \max\{\delta(P_{i_j}, \theta), j = 1, 2, \dots, m\},$$

puisque $\delta_t \neq 0$, alors $\delta_t > 0$ ou $\delta_t < 0$. Nous considérons deux cas

1ier Cas : $\delta_t > 0$. Par le Lemme 2.2.3, pour tout $\varepsilon_1 (0 < \varepsilon_1)$, quand $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$e^{(1-\varepsilon_1)r^n \delta_t} \leq |A_{i_t}(z) e^{P_{i_t}(z)}|. \quad (2.3.2)$$

Pour $A_l e^{P_l(z)}$ ($l \neq i_t$), on pose

$$\delta = \max\{0, \delta(P_{i_j}, \theta) / j \in \{1, 2, \dots, m\} - \{t\}\},$$

alors $0 < \delta < \delta_t$. En conséquence, il existe une constante c' telle que

$$0 < c' < 1 \quad \text{et} \quad \delta = c' \delta_t.$$

Nous avons

$$a_{n,l} = c_{n,l}^{(i_t)} a_{n,i_t} \quad (0 < c_{n,l}^{(i_t)} < 1) \quad \text{ou} \\ a_{n,l} = a_{n,i_j} \quad (j \neq t) \quad \text{ou} \quad a_{n,l} = c_{n,l}^{(i_j)} a_{i_j} \quad (j \neq t) \quad (0 < c_{n,l}^{(i_j)} < 1).$$

Donc

$$\delta(P_l, \theta) = c_{n,l}^{(i_t)} \delta(P_{i_t}, \theta) = c_{n,l}^{(i_t)} \delta_t \quad \text{ou}$$

$$\delta(P_l, \theta) = \delta(P_{i_j}, \theta) \leq \delta \quad \text{ou} \quad \delta(P_l, \theta) = c_{n,l}^{(i_j)} \delta(P_{i_j}, \theta) \leq c_{n,l}^{(i_j)} \delta.$$

Soit $c = \max \left\{ c_{n,l}^{(i_t)}, c', c_{n,l}^{(i_j)} c' \right\}$, alors $0 < c < 1$. Par le Lemme 2.2.3, quand $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|A_l e^{P_l(z)}| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n c_{n,l}^{(i_t)} \delta_t} \quad \text{ou} \quad |A_l e^{P_l(z)}| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n \delta} \quad \text{ou} \quad |A_l e^{P_l(z)}| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n c_{n,l}^{(i_t)} \delta},$$

ainsi

$$|A_l e^{P_l(z)}| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r^n c \delta_t}, \quad l \in \{0, 1, \dots, k-1\} - \{t\}. \quad (2.3.3)$$

Maintenant, nous affirmons que $|f^{(i_t)}(z)|$ est borné sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $|f^{(i_t)}(z)|$ est non borné sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le Lemme 2.2.1, il existe un nombre infini des points $z_x = r_x e^{i\theta}$ tels que quand $x \rightarrow +\infty$, nous avons $r_x \rightarrow +\infty$, $|f^{(i_t)}(z_x)| \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)} \right| \leq \frac{1}{(i_t - j)!} |z_x|^{i_t - j} (1 + o(1)) \quad (j = 0, 1, \dots, i_t). \quad (2.3.4)$$

Puisque $f^{(i_t)}(z) \neq 0$, par (2.1.4), (2.3.1), (2.3.3) et (2.3.4) quand $z_x \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\begin{aligned} |A_{i_t}(z_x) e^{P_{i_t}(z_x)}| &\leq \left| \frac{f^{(k)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)} \right| + |A_{k-1}(z_x) e^{P_{k-1}(z_x)}| \left| \frac{f^{(k-1)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)} \right| \\ &+ \dots + |A_{i_t+1}(z_x) e^{P_{i_t+1}(z_x)}| \left| \frac{f^{(i_t+1)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)} \right| + |A_{i_t-1}(z_x) e^{P_{i_t-1}(z_x)}| \left| \frac{f^{(i_t-1)}(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)} \right| \\ &+ \dots + |A_1(z_x) e^{P_1(z_x)}| \left| \frac{f'(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)} \right| + |A_0(z_x) e^{P_0(z_x)}| \left| \frac{f(z_x)}{f^{(i_t)}(z_x)} \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|A_{i_t}(z_x) e^{P_{i_t}(z_x)}| \leq e^{(1+\varepsilon_1)r_x^n c \delta_t} r_x^{(2+\alpha)k}. \quad (2.3.5)$$

En vertu de (2.3.2) et de (2.3.5), nous trouvons

$$e^{(1-\varepsilon_1)r_x^n \delta_t} \leq e^{(1+\varepsilon_1)r_x^n c \delta_t} r_x^{(2+\alpha)k}, \quad 0 < c < 1,$$

d'où

$$e^{((1-c)-(1+c)\varepsilon_1)r_x^n \delta_t} r_x^{-(2+\alpha)k} \leq 1, \quad 0 < c < 1. \quad (2.3.6)$$

Nous pouvons prendre $0 < \varepsilon_1 < \frac{1-c}{1+c}$, alors $e^{((1-c)-(1+c)\varepsilon_1)r_x^n \delta_t} r_x^{-(2+\alpha)k} \rightarrow +\infty$ est une contradiction avec la limite du côté droit de l'inégalité (2.3.6). En conséquence, $|f^{(i_t)}(z)|$ est borné sur le rayon $\arg z = \theta$, nous posons $|f^{(i_t)}(z)| < M_1$ (M_1 une constante positive), alors

$$|f(z)| < M_1 r^k. \quad (2.3.7)$$

2ième Cas : $\delta_t < 0$. Soit

$$\delta = \max \{ \delta(P_{i_j}; \theta) : j \in \{1, 2, \dots, m\} - \{t\} \},$$

d'où

$$\delta < \delta_t < 0.$$

En conséquence, il existe une constante c' telle que $1 < c'$ et $\delta = c'\delta_t$. Pour tout $l \neq i_t$, nous avons les cas suivants de $\delta(P_l; \theta)$:

$$\delta(P_l; \theta) = c_{n,l}^{(i_t)} \delta(P_{i_t}; \theta) = c_{n,l}^{(i_t)} \delta_t$$

ou

$$\delta(P_l; \theta) = \delta(P_{i_j}; \theta) \leq \delta \quad (l \neq i_t)$$

ou

$$\delta(P_l; \theta) = c_{n,l}^{(i_j)} \delta(P_{i_j}; \theta) \leq c_{n,l}^{(i_j)} \delta.$$

Notons $c_1 = \min \left\{ c_{n,l}^{(i_t)}, c', c_{n,l}^{(i_j)} c', 1 \right\}$, nous avons $0 < c_1$. Par le Lemme 2.2.3, pour tout ε_2 ($0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$), quand $r \rightarrow +\infty$ et pour tout $j = 0, 1, \dots, k-1$, nous trouvons

$$|A_{i_t} e^{P_{i_t}(z)}| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n \delta_t} \text{ pour } l = i_t$$

et pour $l \neq i_t$ on a

$$|A_l e^{P_l(z)}| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n c_{n,l}^{(i_t)} \delta_t} \text{ ou } |A_l e^{P_l(z)}| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n \delta} \text{ ou } |A_l e^{P_l(z)}| \leq e^{(1+\varepsilon_2)r^n c_{n,l}^{(i_j)} \delta}.$$

Par conséquent, pour tout $j = 0, 1, \dots, k-1$

$$|A_j(z) e^{P_j(z)}| \leq e^{(1-\varepsilon_2)r^n c_1 \delta_t}. \quad (2.3.8)$$

Si $|f^{(k)}(z)|$ est borné sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le Lemme 2.2.1, il existe un nombre infini de points $z'_x = r'_x e^{i\theta}$ tels que quand $x \rightarrow +\infty$, nous avons $r_x \rightarrow +\infty$, $|f^{(k)}(z'_x)| \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)} \right| \leq \frac{1}{(k-j)!} |z'_x|^{k-j} (1 + o(1)) \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (2.3.9)$$

Puisque $f^{(k)} \not\equiv 0$, par (2.1.4), (2.3.8) et (2.3.9), quand $r'_x \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left| A_{k-1}(z'_x) e^{P_{k-1}(z'_x)} \right| \left| \frac{f^{(k-1)}(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)} \right| + \left| A_{k-2}(z'_x) e^{P_{k-2}(z'_x)} \right| \left| \frac{f^{(k-2)}(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)} \right| \\ &+ \dots + \left| A_1(z'_x) e^{P_1(z'_x)} \right| \left| \frac{f'(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)} \right| + \left| A_0(z'_x) e^{P_0(z'_x)} \right| \left| \frac{f(z'_x)}{f^{(k)}(z'_x)} \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$1 \leq e^{(1-\varepsilon_2)(r'_x)^n c_1 \delta_t} (r'_x)^{2k}, \quad (2.3.10)$$

on a $e^{(1-\varepsilon_2)(r'_x)^n c_1 \delta_t} (r'_x)^k \rightarrow 0$ une contradiction avec la limite du côté gauche de l'inégalité (2.3.10). En conséquence, $|f^{(k)}(z)|$ est borné sur le rayon $\arg z = \theta$, nous posons $|f^{(k)}(z)| < M_2$ (M_2 une constante positive), alors

$$|f(z)| < M_2 r^k. \quad (2.3.11)$$

Dans les deux cas (2.3.7) et (2.3.11), nous avons

$$|f(z)| < M r^k. \quad (2.3.12)$$

Puisque $f(z)$ est une fonction méromorphe avec un nombre fini de pôles, alors nous pouvons écrire $f(z)$ sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{Q(z)}$ où $Q(z)$ est un polynôme et $g(z)$ est une fonction entière. Nous savons que pour tout $z = r e^{i\theta}$ et $r \geq r_0$, il existe un entier positif s ($s \geq \deg Q$) tel que

$$|Q(z)| \leq r^s. \quad (2.3.13)$$

De (2.3.12) et (2.3.13), nous avons $|g(z)| < M r^\beta$ ($\beta \geq s+k$) pour tout rayons $z = r e^{i\theta}$ et $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1 \cup E_2 \cup E_3$. En appliquant le Lemme 2.2.4, nous trouvons que $g(z)$ est un polynôme de degré $\deg g \leq \beta$. Alors, $f(z)$ est une fonction rationnelle, ceci contredit la prétention que $f(z)$ est une fonction transcendante. Par conséquent $\rho(f) = +\infty$. En outre, si $a_{n, i_{j_0}} = a_{n, 0}$ avec $a_{n, i_{j_0}} \in \{a_{n, i_1}, a_{n, i_2}, \dots, a_{n, i_m}\}$, nous supposons que la solution $f(z)$ de l'équation (2.1.4) est une fonction rationnelle. Puisque nous avons $A_0 f e^{P_0} \neq 0$, on peut écrire

$$(A_s(z) e^{P_s(z) - a_{n,s} z^n} f^{(s)}(z) + A_t(z) e^{P_t(z) - a_{n,t} z^n} f^{(t)}(z)) e^{a_{n,s} z^n}$$

au lieu de $A_s f^{(s)} e^{P_s} + A_t f^{(t)} e^{P_t}$ quand $a_{n,s} = a_{n,t}$ ($a_{n,s}, a_{n,t} \in \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k-1}\}$). En conséquence, nous pouvons écrire l'équation (2.1.4) sous la forme

$$A_0(z) f(z) e^{P_0(z)} + \sum_{j \neq 0} B_j(z) e^{a_j z^n} = 0, \quad (2.3.14)$$

où $B_j(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini $\rho(B_j) < n$ et ayant un nombre fini de pôles. Nous avons $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $\arg a_{n,j} = \arg a_{n,0}$ mais $|a_{n,j}| < |a_{n,0}|$, et que $a_j - a_i \neq 0$ pour $i \neq j$ ($j \neq 0$). Par le Lemme 2.2.5, nous constatons que l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (2.3.14) est n , ceci contredit l'ordre nul du côté droit de l'équation (2.3.14). Supposons que $a_{n,0} = c_{n,0}^{(i_{j_0})} a_{n, i_{j_0}}$ et $0 < c_{n,0}^{(i_{j_0})} \neq c_{n,s}^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ et $a_{n, i_{j_0}} \in \{a_{n, i_1}, a_{n, i_2}, \dots, a_{n, i_m}\}$, nous assumons que la solution $f(z)$ de

l'équation (2.1.4) est une fonction rationnelle. Ainsi, nous avons $A_0 f e^{P_0} \not\equiv 0$ et aussi l'équation (2.3.14) est vérifiée.

Du fait $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $\arg a_{n,j} = \arg a_{n,0}$ mais $0 < c_0^{(i_{j_0})} \neq c_s^{(i_{j_0})}$, $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ce qui donne $|a_j| \neq |a_0|$ et par le Lemme 2.2.5 l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (2.3.14) est n , ceci contredit l'ordre nul du côté droit de l'équation (2.3.14). En outre, quand $a_{n,i_{j_0}} = a_{n,0}$ ou $a_{n,0} = c_{n,0}^{(i_{j_0})} a_{n,i_{j_0}}$ et $0 < c_{n,0}^{(i_{j_0})} \neq c_{n,s}^{(i_{j_0})} < 1$, $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ et $a_{n,i_{j_0}} \in \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, \dots, a_{n,i_m}\}$, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.4) est d'ordre infini.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.2.

(i) Soit $H_j(z) = A_j(z) e^{P_j(z)}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.4) satisfaisant $\lambda(f) < n$, alors nous pouvons écrire f sous la forme $f = \frac{\pi}{Q} e^h$, où π est une fonction entière avec $\lambda(\pi) < n$, h est une fonction entière transcendante et Q est un polynôme. Notons $g = \frac{f'}{f}$, alors (voir [47, Lemme 2.3.7 p. 39])

$$\frac{f^{(j)}}{f} = g^j + \frac{1}{2}j(j-1)g^{j-2}g' + G_{j-2}(g) \quad (j = 2, 3, \dots, k), \quad (2.4.1)$$

où $G_{j-2}(g)$ est un polynôme différentiel de la fonction méromorphe g avec des coefficients constants et de degré égale au plus $j-2$. La substitution de (2.4.1) dans (2.1.4) donne

$$g^k = T_{k-1}(g), \quad (2.4.2)$$

où $T_{k-1}(g)$ est un polynôme différentiel de la fonction méromorphe g avec les coefficients H_0, H_1, \dots, H_{k-1} et le degré égale au plus de $k-1$. L'application du Lemme de Clunie (voir [47, Lemme 2.4.2]) à (2.4.2) donne

$$m(r, g) \leq O\left(\sum_{j=0}^{k-1} m(r, H_j)\right) + S(r, g).$$

Nous savons que

$$N(r, g) = N\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

par conséquent

$$T(r, g) \leq O\left(\sum_{j=0}^{k-1} m(r, H_j)\right) + \overline{N}(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, g). \quad (2.4.3)$$

De (2.4.3) et le fait $\lambda(f) < n$, $\rho(H_j) = n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $\bar{N}(r, f) = O(\log r)$, il s'ensuit que $\rho(g) \leq n$. Nous affirmons maintenant que $\rho(g) = n$. Si $\rho(g) < n$, alors par (2.4.1) nous obtenons

$$\rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right) < n \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Puisque nous avons $A_{i_j}(z) \frac{f^{(i_j)}}{f} \not\equiv 0$, on peut écrire

$$(A_s(z) e^{P_s(z) - a_{n,s} z^n} f^{(s)}(z) + A_t(z) e^{P_t(z) - a_{n,t} z^n} f^{(t)}(z)) e^{a_s z^n}$$

au lieu de $A_s f^{(s)} e^{P_s} + A_t f^{(t)} e^{P_t}$ quand $a_{n,s} = a_{n,t}$ ($a_{n,s}, a_{n,t} \in \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k-1}\} - \{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, \dots, a_{n,i_m}\}$).

En conséquence, nous pouvons écrire l'équation (2.1.4) sous la forme

$$\sum_{j=0}^m A_{i_j}(z) \frac{f^{(i_j)}}{f} e^{P_{i_j}(z)} + \sum_s B_s(z) e^{a_s z^n} = 0, \quad (2.4.4)$$

où $B_s(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini $\rho(B_s) < n$ et ayant un nombre fini de pôles. Nous avons les $\arg(a_{n,i_j})$ sont distincts entre eux deux à deux dans $\{a_{n,i_1}, a_{n,i_2}, \dots, a_{n,i_m}\}$ et si $\arg a_{n,j} = \arg a_{n,i_j}$, alors $|a_{n,j}| < |a_{n,i_j}|$. Par le Lemme 2.2.5, nous constatons que l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (2.4.4) est n , ceci contredit l'ordre nul du côté droit de l'équation (2.4.4). Par conséquent $\rho(g) = n$. Puisque $\rho_2(f) = \rho_2(\pi e^h)$ donc par le Lemme 2.2.7 nous avons $\rho_2(\pi e^h) \leq \max\{\rho(H_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} = n$, en appliquant le Lemme 2.2.8, nous obtenons $\rho(h) \leq n$.

Supposons que $\rho(h) < n$. Alors, de $\frac{f'}{f} = \frac{\pi'}{\pi} - \frac{Q'}{Q} + h'$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{f'}{f}\right) &= O\left\{T\left(r, \frac{\pi'}{\pi}\right) + T\left(r, \frac{Q'}{Q}\right) + T(r, h')\right\} \\ &= O\left\{m\left(r, \frac{\pi'}{\pi}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\pi}\right) + \log r + T(r, h')\right\} \\ &= O\left\{\log r + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\pi}\right) + \log r + T(r, h')\right\} \\ &= O\left\{\log r + \bar{N}\left(r, \frac{1}{\pi}\right) + T(r, h')\right\}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

De (2.4.5) et le fait $\lambda(\pi) < n$, nous obtenons $\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \rho(g) < n$, c'est une contradiction à $\rho(g) = n$. Par conséquent $\rho(h) = n$, d'où $\rho_2(f) = n$.

(ii) Nous avons chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.4) est transcendante, en utilisant le même raisonnement comme dans (i), nous obtenons $\lambda(f) \geq n$ ou $\rho_2(f) = n$.

2.5 Preuve du Théorème 2.1.3.

(i) Assumons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.4) et supposons que $\tau(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe transcendante ayant un nombre fini de pôles et $\rho(\tau) < +\infty$. Par le Théorème 2.1.1, nous avons $\rho(f) = +\infty$. Soit $g = f - \tau$, alors $\rho(g) = +\infty$. La substitution de $f = g + \tau$ dans l'équation (2.1.4) donne

$$\begin{aligned} & g^{(k)} + H_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + H_s g^{(s)} + \cdots + H_1 g' + H_0 g \\ &= - \left(\tau^{(k)} + H_{k-1} \tau^{(k-1)} + \cdots + H_s \tau^{(s)} + \cdots + H_1 \tau' + H_0 \tau \right), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

où $H_j = A_j e^{P_j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Nous affirmons que

$$\tau^{(k)} + H_{k-1} \tau^{(k-1)} + \cdots + H_s \tau^{(s)} + \cdots + H_1 \tau' + H_0 \tau \not\equiv 0.$$

En effet, si $\tau^{(k)} + H_{k-1} \tau^{(k-1)} + \cdots + H_s \tau^{(s)} + \cdots + H_1 \tau' + H_0 \tau = 0$, alors τ est une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.4), par le Théorème 2.1 $\rho(\tau) = +\infty$ ceci contredit le fait $\rho(\tau) < +\infty$. Par conséquent

$$- \left(\tau^{(k)} + H_{k-1} \tau^{(k-1)} + \cdots + H_s \tau^{(s)} + \cdots + H_1 \tau' + H_0 \tau \right) \not\equiv 0. \quad (2.5.2)$$

Par (2.5.1), (2.5.2) et le Lemme 2.2.6, on obtient $\lambda(g) = \bar{\lambda}(g) = \rho(g) = +\infty$. Par conséquent $\lambda(f - \tau) = +\infty$.

(ii) Nous avons par le Théorème 2.1.1, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.4) est transcendante, en utilisant le même raisonnement qu'en (i), nous obtenons $\lambda(f - \tau) = +\infty$.

Sur l'ordre et l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieure

3.1 Introduction et résultats

Plusieurs auteurs, tels que Kwon [45], Chen [18] et Gundersen [35] ont étudié l'équation différentielle linéaire du second degré

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (3.1.1)$$

où $P(z)$, $Q(z)$ sont des polynômes non constants, $A_1(z)$, $A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que $\rho(A_1) < \deg P(z)$, $\rho(A_0) < \deg Q(z)$. Gundersen [35, p. 419] a montré que si $\deg P(z) \neq \deg Q(z)$, alors chaque solution méromorphe non constante de (3.1.1) est d'ordre infini. Si $\deg P(z) = \deg Q(z)$ alors (3.1.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini ; pour l'instant $f(z) = e^z + \frac{1}{2}$ satisfait $f'' + 2e^z f' - 2e^z f = 0$. Dans [21], Chen et Shon ont étudié le cas où $\deg P(z) = \deg Q(z) = 1$ et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème A. Soient $A_j(z) \not\equiv 0$ ($j = 0, 1$) deux fonctions méromorphes telles que $\rho(A_j) < 1$, soient a, b deux constantes complexes telles que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ ($0 < c < 1$). Alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = 0,$$

est d'ordre infini.

Dans [44], Xu et Yi ont généralisé le Théorème A et ils ont étudié les points fixes des solutions et leurs dérivées. En [9], Belaïdi a étudié ce cas et il l'a généralisé pour une classe des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, il a obtenu le résultat suivant.

Théorème B. Soient

$$P_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

des polynômes non constants, où $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $A_j(z) \not\equiv 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes. Supposons que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $a_{n,j} = ca_{n,0}$ ($0 < c < 1$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$), $\rho(A_j) < n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Alors, chaque solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)} f' + A_0 e^{P_0(z)} f = 0 \quad (3.1.2)$$

est d'ordre infini, avec $k \geq 2$.

Dans [51] Liu et Yuan ont généralisé le Théorème A et ils ont donné une évaluation de l'hyper-ordre des solutions. Dans [64] Wenjuan Chen et Junfeng Xu remplacent la condition " coefficients ayant un nombre fini de pôles " dans [51] par la condition " tous les pôles de la solution f de l'équation

$$f^{(k)} + h_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + h_s e^{P(z)} f^{(s)} + \dots + h_1 f' + h_0 e^{Q(z)} f = 0 \quad (3.1.3)$$

sont d'une multiplicité uniformément bornée " pour donner une évaluation sur l'hyper-ordre. Ils ont obtenu le théorème suivant.

Théorème C. Soient $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes non constants tels que

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

$$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

où a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des nombres complexes avec $a_n \neq 0, b_n \neq 0$ et soient h_j ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) ($h_0 \not\equiv 0$) des fonctions méromorphes telles que $\rho = \max \{ \rho(h_j) : j = 0, 1, \dots, k-1 \} < n$. Supposons que tous les pôles de f sont d'une multiplicité uniformément bornée. Alors, nous avons les trois assertions suivantes :

1. Si $a_n = b_n$, et $\deg(P - Q) = m \geq 1, \rho < m$, alors chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (3.1.3) est d'ordre infini et $m \leq \rho_2(f) \leq n$.
2. Si $a_n = cb_n$ avec $c > 1$, et $\deg(P - Q) = m \geq 1, \rho < m$, alors chaque solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (3.1.3) est d'ordre infini et $\rho_2(f) = n$.
3. Si $\rho < \rho(h_0) < 1/2$, $a_n = cb_n$ avec $c \geq 1$, et $P(z) - cQ(z)$ est constant, alors chaque solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (3.1.3) est d'ordre infini et $\rho(h_0) \leq \rho_2(f) \leq n$.

Dans ce chapitre, nous continuons la recherche dans ce type de problèmes, nous généralisons les résultats ci-dessus, et nous obtenons les théorèmes suivants.

Théorème 3.1.1 [4] *Soient*

$$P_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

des polynômes non constants, où $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), soient $h_j(z), d_j(z)$ ($h_0 \neq 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes. Supposons que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($c_j > 0, c_j \neq 1$) pour tout $j = 1, 2, \dots, k-1$, et $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(d_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$. Alors, nous avons ces deux assertions :

(i) Chaque solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + (h_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1}) f^{(k-1)} + \dots + (h_s e^{P_s(z)} + d_s) f^{(s)} + \dots + (h_0 e^{P_0(z)} + d_0) f = 0 \quad (3.1.4)$$

est transcendante.

(ii) Pour chaque solution méromorphe f de (3.1.4) d'ordre infini $\rho(f) = +\infty$ nous avons, si $\lambda(\frac{1}{f}) < n$ et $\lambda(f) < n$ alors $\rho_2(f) = n$.

Théorème 3.1.2 [4] *Soient*

$$P_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

des polynômes non constants, où $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$) et soient $h_j(z), d_j(z)$ ($h_0 \neq 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes. Supposons que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($0 < c_j < 1$) ($j = 1, 2, \dots, k-1$), et $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(d_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$. Alors, chaque solution méromorphe $f(z) \neq 0$ de l'équation (3.1.4) est d'ordre infini et l'hyper-ordre de f satisfait $\rho_2(f) \geq n$. En outre, si $\lambda(\frac{1}{f}) < +\infty$ alors $\rho_2(f) = n$.

Théorème 3.1.3 [4] *Soient*

$$P_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

des polynômes non constants, où $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), et $h_j(z), d_j(z)$ ($h_0 \neq 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes. Supposons que $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($c_j \geq 1$), $\deg\left(P_0(z) - \frac{1}{c_j} P_j(z)\right) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), et $\rho = \max\{\rho(h_j) \ (j = 1, \dots, k-1), \rho(d_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1)\} < \rho(h_0)$. Si $\lambda\left(\frac{1}{h_0}\right) < \mu(h_0) \leq \rho(h_0) < \frac{1}{2}$, alors chaque solution f méromorphe transcendante de l'équation (3.1.4) est d'ordre infini et l'hyper-ordre de f satisfait $\rho_2(f) \geq \rho(h_0)$. En outre, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$ alors $\rho(h_0) \leq \rho_2(f) \leq n$.
- (ii) Pour $c_j \neq 1$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), si $\lambda(f) < n$ et $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < n$ alors $\rho_2(f) = n$.

Théorème 3.1.4 [4] *Soient*

$$P_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

des polynômes non constants, où $a_{0,j}, a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes tels que $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), soient $h_j(z), d_j(z)$ ($h_0 \neq 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes. Supposons que $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), $\arg(a_{n,1} + a_{n,s}) \neq \arg a_{n,0}$ ($s = 2, 3$) ou $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($0 < c_j < 1$) ($j = 1, 2, \dots, k-1$), et $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(d_j) : j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$. Alors, pour toute solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (3.1.4), nous avons f, f', f'' ont un nombre infini de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = +\infty.$$

Exemple 3.1.1 *Soit l'équation différentielle du deuxième ordre,*

$$f'' - (1 + 3e^z) f' + 2e^{2z} f = 0. \quad (3.1.5)$$

Dans cette équation, on a $a_{n,1} = 1, a_{n,0} = 2$ d'où $a_{n,1} = \frac{1}{2} a_{n,0}$. D'après le Théorème 3.1.2 et le Théorème 3.1.4, on a toute solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (3.1.5), est d'ordre infini et nous avons f, f', f'' ont un nombre infini de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = +\infty.$$

En effet, les deux fonctions linéairement indépendantes $f_1(z) = e^{e^z}, f_2(z) = e^{2e^z}$, sont des solutions d'ordre infini de cette équation et $\rho_2(f) = 1$ qui vérifie le Théorème 3.1.1 car $\lambda(e^{e^z}) = \lambda\left(\frac{1}{e^{e^z}}\right) = 0 < 1$ et $\lambda(e^{2e^z}) = \lambda\left(\frac{1}{e^{2e^z}}\right) = 0 < 1$,

Exemple 3.1.2 Pour l'équation différentielle

$$f'' - i \left[\left(1 + \frac{1}{z}\right) e^{iz} + 1 \right] f' - \frac{1}{z} e^{2iz} f = 0, \quad (3.1.6)$$

on a $i = \left(\frac{1}{2}\right) 2i$ d'où $a_{n,1} = \frac{1}{2} a_{n,0}$. D'après le Théorème 3.1.2 et le Théorème 3.1.4, on a toute solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (3.1.6), est d'ordre infini et nous avons f, f', f'' ont un nombre infini de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = +\infty.$$

En effet, la fonction $f(z) = \exp(e^{iz})$ pour tout $z \neq 0$ est une solution de l'équation (3.1.6) qui vérifie

$$\rho(\exp(e^{iz})) = +\infty, \quad \rho_2(\exp(e^{iz})) = 1.$$

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 [52] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, avec n un entier positif, $a_n = \alpha_n e^{i\theta_n}$, $\alpha_n > 0$; et $\theta_n \in [0; 2\pi)$. Pour tout ε ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4n}$), nous présentons $2n$ angles fermés

$$S_j : -\frac{\theta_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} + \varepsilon \leq \theta \leq -\frac{\theta_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n} - \varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Alors, il existe $R_0 = R_0(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|z| = r > R_0$

$$\operatorname{Re} P(z) > \alpha_n r^n (1 - \varepsilon) \sin(n\varepsilon) \quad (3.2.1)$$

pour certains j , si $z = re^{i\theta} \in S_j$; tandis que pour les autres j , si $z = re^{i\theta} \in S_j$

$$\operatorname{Re} P(z) < -\alpha_n r^n (1 - \varepsilon) \sin(n\varepsilon).$$

Lemme 3.2.2 [18] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_0 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_0, r \rightarrow +\infty$, on a

$$|f(z)| \leq \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}. \quad (3.2.2)$$

Lemme 3.2.3 [34] Supposons que f est une fonction méromorphe transcendante. Soient $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ deux constantes. Alors, on a les deux assertions suivantes :

(i) Il existe une constante $A > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq A [T(\alpha r, f) r^\varepsilon \log T(\alpha r, f)]^j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.2.3)$$

(ii) Il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tels que si $\Psi_0 \in [0, 2\pi) \setminus E_2$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\Psi_0) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \Psi_0$ et $|z| \geq R_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq B \left[\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log r)^\alpha \log T(\alpha r, f) \right]^j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Lemme 3.2.4 [15] Supposons que $h(z)$ est une fonction méromorphe avec

$$\lambda\left(\frac{1}{h}\right) < \mu(h) \leq \rho(h) = \rho < \frac{1}{2}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ de densité logarithmique supérieure positive, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, on a

$$|h(z)| \geq \exp \left[(1 + o(1)) r^{\rho - \varepsilon} \right]. \quad (3.2.4)$$

Lemme 3.2.5 ([43], [61]) Soit $f(z) = g(z)/d(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini et $\rho_2(f) = \rho$, où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières, $\rho(d) < +\infty$. Alors, il existe une séquence $r_j (r_j \rightarrow +\infty)$ satisfaisant $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $\theta_j \in [0, 2\pi)$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \theta_j = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $|g(z_j)| = M(r_j, g)$ et pour j suffisamment grand, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z_j)}{f(z_j)} = \left(\frac{\nu_g(r_j)}{z_j} \right)^n (1 + o(1)) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\limsup_{r_k \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu_g(r_k)}{\log r_k} = \rho_2(g). \quad (3.2.5)$$

Lemme 3.2.6 Supposons que $k \geq 2$ et A_0, A_1, \dots, A_{k-1} sont des fonctions méromorphes. Soit $\rho = \max \{ \rho(A_j), j = 0, 1, 2, \dots, k-1 \}$ et soit $f(z)$ une solution méromorphe trans-cendante avec $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$ de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_0 f = 0 \quad (3.2.6)$$

Alors, $\rho_2(f) \leq \rho$.

Preuve. Nous assumons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.2.6).

Si $\rho(f) < +\infty$, donc $\rho_2 = 0 \leq \rho$.

Si $\rho(f) = +\infty$. Nous pouvons récrire (3.2.6) sous la forme

$$-\frac{f^{(k)}}{f} = A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + A_{k-2} \frac{f^{(k-2)}}{f} + \dots + A_1 \frac{f'}{f} + A_0. \quad (3.2.7)$$

Par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $g(z)$ et $d(z)$ sont deux fonctions entières, avec $\lambda(d) = \rho(d)$ et $\rho_2(f) = \rho_2(g)$. Puisque $\lambda(1/f) < +\infty$, donc $\lambda(d) = \rho(d) = \lambda(1/f) < +\infty$. Par le Lemme 3.2.2 et le Lemme 3.2.5, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une séquence (r_j) , $r_j \notin [0, 1] \cup E_0$, $(r_j \rightarrow +\infty)$ satisfaisant $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $\theta_j \in [0, 2\pi)$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \theta_j = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $|g(z_j)| = M(r_j, g)$, telle que pour j suffisamment grand, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z_j)}{f(z_j)} = \left(\frac{v_g(r_j)}{z_j} \right)^n (1 + o(1)) \quad (n \in N), \quad (3.2.8)$$

$$\limsup_{r_j \rightarrow +\infty} \frac{\log \log v_g(r_j)}{\log r_j} = \rho_2(g), \quad (3.2.9)$$

$$|A_s(z)| \leq \exp \{r_j^{\rho+\varepsilon}\}, \quad s = 1, 2, \dots, k-1. \quad (3.2.10)$$

La substitution de (3.2.8),(3.2.10) dans (3.2.7), nous donne

$$\left| \frac{v_g(r_j)}{z_j} \right|^k (1 + o(1)) \leq e^{r_j^{\rho+\varepsilon}} + \sum_{s=1}^{k-1} e^{r_j^{\rho+\varepsilon}} \left| \frac{v_g(r_j)}{z_j} \right|^s (1 + o(1)),$$

d'où

$$(v_g(r_j))^k (1 + o(1)) \leq k e^{r_j^{\rho+\varepsilon}} r_j^k (v_g(r_j))^{k-1} (1 + o(1)).$$

Donc

$$v_g(r_j) (1 + o(1)) \leq k e^{r_j^{\rho+\varepsilon}} r_j^k (1 + o(1)). \quad (3.2.11)$$

Alors, de (3.2.9), (3.2.11) et ε étant arbitraire, nous obtenons $\rho_2(f) \leq \rho$. \square

Lemme 3.2.7 [30, P.30] Soient P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 1$) des polynômes non constants de degrés respectivement d_1, d_2, \dots, d_n . Supposons que si $i \neq j$, alors $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$.

Soit $A(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) e^{P_j(z)}$, où $B_j(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes satisfaisant $\rho(B_j(z)) < d_j$. Alors,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \{d_j\}. \quad (3.2.12)$$

Lemme 3.2.8 [18] Soient A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$), F ($F \not\equiv 0$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F .$$

Alors, f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty . \quad (3.2.13)$$

Lemme 3.2.9 Soient $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des polynômes avec $\deg(P_0(z)) = n$ ($n \geq 1$) et $\deg(P_j(z)) \leq n$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Soient $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des fonctions méromorphes d'ordre fini et $\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, k\} < n$ telles que $A_0(z) \not\equiv 0$. Nous dénotons

$$F(z) = A_k e^{P_k(z)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + \dots + A_s e^{P_s(z)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)} + A_0 e^{P_0(z)} . \quad (3.2.14)$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ pour tout $j = 1, 2, \dots, k$, alors F est une fonction méromorphe non triviale d'ordre fini et satisfait $\rho(F) = n$.

Preuve. Soient $P_j(z) = a_{n,j}z^n + a_{n-1,j}z^{n-1} + \dots + a_{1,j}z + a_{0,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k$). Supposons que $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$. Alors, $a_{n,0} \neq a_{n,j}$, pour tout $j = 1, 2, \dots, k$.

Soit $\{a_{n,j_1}, a_{n,j_2}, \dots, a_{n,j_m}\} \subset \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k}\}$ tel que a_{n,j_l} ($l = 1, 2, \dots, m$) sont distincts entre eux deux à deux. Pour chacun des $a_{n,j} \in \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k}\}$ nous avons, $a_{n,j} = 0$ ou $a_{n,j} \neq 0$. Dans le cas où $a_{n,j} \neq 0$, il existe seulement un $a_{n,j_l} \in \{a_{n,j_1}, a_{n,j_2}, \dots, a_{n,j_m}\}$ tel que $a_{n,j} = a_{n,j_l}$.

Nous pouvons écrire

$$(A_j(z) e^{P_j(z) - a_{n,j}z^n} + A_{j_l}(z) e^{P_{j_l}(z) - a_{n,j_l}z^n}) e^{a_{n,j_l}z^n}$$

au lieu de $A_j(z) e^{P_j(z)} + A_{j_l}(z) e^{P_{j_l}(z)}$ quand $a_{n,j} = a_{n,j_l}$ ($a_{n,j} \in \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k}\}$). Pour $a_{n,j} = 0$, nous posons $a_{n,j} = a_{n,s_i} \in \{a_{n,s_1}, a_{n,s_2}, \dots, a_{n,s_t}\}$ quand $a_{n,s_i} = 0$ (i.e. $\deg(P_{s_i}) < n$ pour $i = 1, 2, \dots, t$). Nous pouvons écrire l'équation (3.2.14) sous la forme

$$A_0(z) e^{P_0(z)} + \sum_{l=1}^m B_{j_l}(z) e^{a_{n,j_l}z^n} + \sum_{i=1}^t A_{s_i}(z) e^{P_{s_i}(z)} = F(z) ,$$

il s'ensuit

$$A_0(z) e^{P_0(z)} + \sum_{l=1}^m B_{j_l}(z) e^{a_{n,j_l}z^n} = B(z) , \quad (3.2.15)$$

où $B(z) = F(z) - \sum_{i=1}^t A_{s_i}(z) e^{P_{s_i}(z)}$ et $A_{s_i}(z)$ ($i = 1, 2, \dots, t$), $B_{j_l}(z)$ ($l = 1, 2, \dots, m$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n .

Supposons que $\rho(F) \neq n$. Puisque $\deg(P_{s_i}(z)) < n$ et $\rho(A_{s_i}) < n$ ($i = 1, 2, \dots, t$), alors

$$\rho(B) \neq n \quad (3.2.16)$$

De l'affirmation que $a_{n,0}, a_{n,j_l}$ ($l = 1, 2, \dots, m$) sont distincts entre eux deux à deux, alors $\deg(P_0(z) - a_{n,j_l}z^n) = n$, ($l = 1, 2, \dots, m$) et $\deg(a_{n,j_{l'}}z^n - a_{n,j_l}z^n) = n$, ($l = 1, 2, \dots, m; l' = 1, 2, \dots, m; l \neq l'$). Nous avons $\rho(B_{j_l}) < n$, $\rho(A_0) < n$ et $A_0(z) \not\equiv 0$, donc en appliquant le Lemme 3.2.7 à l'équation (3.2.15), nous trouvons que $\rho(B) = n$, ceci contredit (3.2.16). Par conséquent, $\rho(F) = n$. \square

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1.

(i) Nous supposons que la solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.4) n'est pas transcendante, donc $\rho(f) = 0$ (f est une fonction rationnelle ou une fonction polynôme). Puisque nous avons $h_0f \not\equiv 0$, on peut écrire l'équation (3.1.4) sous la forme

$$h_0f e^{P_0(z)} + \sum_{i=1}^{k-1} h_i f^{(i)} e^{P_i(z)} = B(z), \quad (3.3.1)$$

où $B(z) = -(f^{(k)} + d_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + d_s f^{(s)} + \dots + d_0f)$, h_0f et $h_j f^{(j)}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho(B) < n$, $\rho(h_0f) < n$ et $\rho(h_j f^{(j)}) < n$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$). Puisque $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ et $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($c_j > 0$, $c_j \neq 1$) pour tout $j = 1, 2, \dots, k-1$, d'où $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$. De (3.3.1) et par le Lemme 3.2.9, nous avons $\rho(B) = n$, ceci contredit le fait $\rho(B) < n$. En conséquence, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.1.4) est transcendante.

(ii) Soient $H_j(z) = A_j(z) e^{P_j(z)} + d_j(z)$, ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (3.1.4) avec $\rho(f) = +\infty$, $\lambda(\frac{1}{f}) < n$ et $\lambda(f) < n$. Alors, par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{\pi(z)}{d(z)} e^{h(z)}$, où $\pi(z)$, $d(z)$ sont des fonctions entières avec $\lambda(\pi) = \rho(\pi) = \lambda(f) < n$, $\lambda(d) = \rho(d) = \lambda(\frac{1}{f}) < n$, et h est une fonction entière transcendante avec $\rho_2(f) = \rho(h)$. Mettons $g = \frac{f'}{f}$, alors [47, Lemme 2.3.7 p. 39]

$$\frac{f^{(j)}}{f} = g^j + \frac{1}{2}j(j-1)g^{j-2}g' + G_{j-2}(g) \quad (j = 2, 3, \dots, k), \quad (3.3.2)$$

où $G_{j-2}(g)$ est un polynôme différentiel de la fonction méromorphe g avec des coefficients constants et de degré au plus $j-2$. La substitution de (3.3.2) dans (3.1.4), nous donne

$$g^k = T_{k-1}(g), \quad (3.3.3)$$

où $T_{k-1}(g)$ est un polynôme différentiel de la fonction méromorphe g avec les coefficients H_0, H_1, \dots, H_{k-1} et de degré au plus $k-1$. L'application du lemme de Clunie [47, Lemme 2.4.2] à (3.3.3), nous donne

$$m(r, g) \leq O\left(\sum_{j=0}^{k-1} m(r, H_j)\right) + S(r, g).$$

Nous savons que

$$N(r, g) = N\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

par conséquent

$$T(r, g) \leq O\left(\sum_{j=0}^{k-1} m(r, H_j)\right) + \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, g). \quad (3.3.4)$$

De (3.3.4) et le fait que $\lambda(f) < n$, $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < n$, $\rho(H_j) = n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), nous obtenons $\rho(g) \leq n$.

Nous affirmons que $\rho(g) = n$. Si $\rho(g) < n$, alors par (3.3.2) nous avons

$$\rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right) < n \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Puisque nous avons $h_0 f \neq 0$, on peut écrire l'équation (3.1.4) sous la forme

$$h_0 e^{P_0(z)} f + \sum_{j=1}^{k-1} h_j e^{P_j(z)} f^{(j)} + (f^{(k)} + d_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + d_s f^{(s)} + \dots + d_0 f) = 0.$$

D'où, nous obtenons

$$h_0 e^{P_0(z)} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(h_j \frac{f^{(j)}}{f} \right) e^{P_j(z)} = - \left(\frac{f^{(k)}}{f} + d_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + d_s \frac{f^{(s)}}{f} + \dots + d_0 \right).$$

Par conséquent

$$h_0(z) e^{P_0(z)} + \sum_{j=1}^{k-1} B_j(z) e^{P_j(z)} = F(z), \quad (3.3.5)$$

où $B_j = h_j \frac{f^{(j)}}{f}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), $h_0 \neq 0$ et

$$F(z) = - \left(\frac{f^{(k)}}{f} + d_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + d_s \frac{f^{(s)}}{f} + \dots + d_0 \right)$$

sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho(B_j) < n$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), $\rho(h_0) < n$ et $\rho(F) < n$. Puisque $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($c_j > 0$, $c_j \neq 1$) pour tout $j =$

$1, 2, \dots, k-1$ alors $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$. De (3.3.5) et par le Lemme 3.2.9, nous avons $\rho(F) = n$, ceci contredit le fait $\rho(F) < n$. Par conséquent $\rho(g) = n$. Puisque $\rho_2(f) = \rho(h)$ et $\lambda(d) < n$, alors par le Lemme 3.2.6 nous obtenons

$$\rho_2(f) = \rho(h) \leq \max \{ \rho(H_j) : j = 0, 1, \dots, k-1 \} = n.$$

Supposons que $\rho(h) < n$. Alors, de $\frac{f'}{f} = \frac{\pi'}{\pi} - \frac{d'}{d} + h'$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} T(r, \frac{f'}{f}) &\leq T(r, \frac{\pi'}{\pi}) + T(r, \frac{d'}{d}) + T(r, h') + O(1) \\ &= m(r, \frac{\pi'}{\pi}) + \bar{N}(r, \frac{1}{\pi}) + m(r, \frac{d'}{d}) + \bar{N}(r, \frac{1}{d}) + T(r, h') + O(1) \\ &= O(\log r) + \bar{N}(r, \frac{1}{\pi}) + O(\log r) + \bar{N}(r, \frac{1}{d}) + T(r, h') \\ &= O(\log r) + \bar{N}(r, \frac{1}{\pi}) + \bar{N}(r, \frac{1}{d}) + T(r, h'). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

De (3.3.6) et le fait que $\lambda(\pi) < n$, $\lambda(d) < n$, nous obtenons $\rho(\frac{f'}{f}) = \rho(g) < n$, c'est une contradiction à $\rho(g) = n$, par conséquent $\rho(h) = n$, alors $\rho_2(f) = n$.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.2.

Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de l'équation (3.1.4). Alors, par le Théorème 3.1.1 f est transcendante.

lier Cas : $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$). De (3.1.4) nous avons

$$\begin{aligned} |e^{P_0(z)}| &\leq \left| \frac{1}{h_0(z)} \right| \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| + \left(\left| \frac{h_{k-1}(z)}{h_0(z)} \right| |e^{P_{k-1}(z)}| + \left| \frac{d_{k-1}(z)}{h_0(z)} \right| \right) \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} \right| \\ &\quad + \dots + \left(\left| \frac{h_s(z)}{h_0(z)} \right| |e^{P_s(z)}| + \left| \frac{d_s(z)}{h_0(z)} \right| \right) \left| \frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} \right| \\ &\quad + \dots + \left(\left| \frac{h_1(z)}{h_0(z)} \right| |e^{P_1(z)}| + \left| \frac{d_1(z)}{h_0(z)} \right| \right) \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| + \left| \frac{d_0(z)}{h_0(z)} \right|. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Par le Lemme 3.2.1, il existe des constantes $R_0 > 0$, $L > 0$, et $\theta_1 < \theta_2$, telles que pour tout $z = re^{i\theta}$: $|z| = r > R_0$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ nous avons

$$\operatorname{Re}(P_j(z)) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(P_0(z)) > Lr^n. \quad (3.4.2)$$

Nous avons $\rho = \max \{ \rho(h_j), \rho(d_j) : j = 0, 1, \dots, k-1 \} < n$, par le Lemme 3.2.2, pour tout ε ($0 < \varepsilon < n - \rho$), il existe un ensemble $E_0 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire nulle et de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_0$, $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\left| \frac{1}{h_0(z)} \right| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad \left| \frac{d_j(z)}{h_0(z)} \right| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{h_j(z)}{h_0(z)} \right| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \quad (3.4.3)$$

Par le Lemme 3.2.3 il existe une constante $A > 1$ et un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tels que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1, r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq A [T(2r, f)]^{2k}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.4.4)$$

D'après (3.4.2), (3.4.3) et (3.4.4), pour tout $z = re^{i\theta}, \theta \in (\theta_1, \theta_2), r \notin [0, 1] \cup E_0 \cup E_1, r \rightarrow +\infty$ l'inégalité (3.4.1) donne

$$e^{Lr^n} \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}} A [T(2r, f)]^{2k} + 2(k-1) e^{r^{\rho+\varepsilon}} A [T(2r, f)]^{2k} + e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

d'où

$$e^{Lr^n} \leq 2Ake^{r^{\rho+\varepsilon}} [T(2r, f)]^{2k},$$

alors

$$e^{Lr^n - r^{\rho+\varepsilon}} \leq 2Ak [T(2r, f)]^{2k}.$$

Puisque $\rho + \varepsilon < n$, donc nous avons

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty,$$

et

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq n.$$

En outre, si $\lambda(\frac{1}{f}) < +\infty$ alors par le Lemme 3.2.6 et de l'équation (3.1.4), nous obtenons $\rho_2(f) \leq n$, d'où $\rho_2(f) = n$.

2ième Cas : $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($0 < c_j < 1$) ($j = 1, 2, \dots, k-1$), nous mettons $\deg(P_j(z) - c_j P_0(z)) = m_j$ (m_j est un nombre entier positif et $0 \leq m_j < n$). Par le Lemme 3.2.1, il existe des constantes $R_1 > 0, L_1 > 0, \lambda > 0$ et $\theta_1 < \theta_2$, telles que pour tout $z = re^{i\theta} : |z| = r > R_1, \theta \in (\theta_1, \theta_2)$ nous avons

$$\operatorname{Re}(P_j(z) - c_j P_0(z)) < \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

et

$$\operatorname{Re}(P_0(z)) > L_1 r^n.$$

Soit $c = \max\{c_j, j = 1, 2, \dots, k-1\}$, alors nous avons $0 < c < 1$ et

$$e^{(1-c)Lr^n} \leq |e^{(1-c)P_0(z)}|, \quad |e^{-cP_0(z)}| < 1. \quad (3.4.5)$$

Puisque $(c_j - c) \leq 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, k-1$, alors

$$|e^{P_j(z) - cP_0(z)}| < |e^{P_j(z) - c_j P_0(z) + (c_j - c)P_0(z)}| = |e^{P_j(z) - c_j P_0(z)}| |e^{(c_j - c)P_0(z)}| < e^\lambda. \quad (3.4.6)$$

De (3.1.4) nous avons

$$\begin{aligned}
 |e^{(1-c)P_0(z)}| &\leq \left| \frac{1}{h_0(z)} \right| |e^{-cP_0(z)}| \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \\
 &+ \left(\left| \frac{h_{k-1}(z)}{h_0(z)} \right| |e^{P_{k-1}(z)-cP_0(z)}| + \left| \frac{d_{k-1}(z)}{h_0(z)} \right| |e^{-cP_0(z)}| \right) \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} \right| \\
 &+ \dots + \left(\left| \frac{h_s(z)}{h_0(z)} \right| |e^{P_s(z)-cP_0(z)}| + \left| \frac{d_s(z)}{h_0(z)} \right| |e^{-cP_0(z)}| \right) \left| \frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} \right| \\
 &+ \dots + \left(\left| \frac{h_1(z)}{h_0(z)} \right| |e^{P_1(z)-cP_0(z)}| + \left| \frac{d_1(z)}{h_0(z)} \right| |e^{-cP_0(z)}| \right) \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| + \left| \frac{d_0(z)}{h_0(z)} \right| |e^{-cP_0(z)}|. \quad (3.4.7)
 \end{aligned}$$

D'après (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5) et (3.4.6), pour tout $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $r \notin [0, 1] \cup E_0 \cup E_1$, $r \rightarrow +\infty$ l'inégalité (3.4.7) donne

$$e^{(1-c)L} r^n \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}} A [T(2r, f)]^{2k} + (k-1) e^{r^{\rho+\varepsilon}} (e^\lambda + 1) A [T(2r, f)]^{2k} + e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

d'où

$$\begin{aligned}
 e^{(1-c)L} r^n &\leq A(k+1)(e^\lambda + 1) e^{r^{\rho+\varepsilon}} [T(2r, f)]^{2k}, \\
 e^{(1-c)L} r^{n-r^{\rho+\varepsilon}} &\leq A(k+1)(e^\lambda + 1) [T(2r, f)]^{2k}.
 \end{aligned}$$

Puisque $\rho + \varepsilon < n$ et $1 - c > 0$, nous avons

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty$$

et

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq n.$$

En outre, si $\lambda(\frac{1}{f}) < +\infty$ alors par le Lemme 3.2.6 et de l'équation (3.1.4), nous obtenons $\rho_2(f) \leq n$, d'où $\rho_2(f) = n$.

3.5 Preuve du Théorème 3.1.3.

Soit f une solution méromorphe transcendante de (3.1.4).

Nous assumons que $P_0(z) - \frac{1}{c_j} P_j(z) = A_j$ (A_j est une constante) pour tout $i = 1, 2, \dots, k$, alors $P_j(z) = c_j P_0(z) - c_j A_j$. Soit $j_0 \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, nous avons

$$P_j(z) - \frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z) = (c_j - 1)P_0(z) - c_j A_j + A_{j_0}$$

D'après le Lemme 3.2.1, il existe une courbe continue Γ (voir également [45, P.385]), telle que pour tout $z = re^{i\theta}$, $z \in \Gamma$ et $|z| = r > R_4$, nous obtenons

$$\operatorname{Re}(P_0(z)) = 0$$

En conséquence, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $j = 1, 2, \dots, k-1$, nous avons

$$\left| e^{P_j(z) - \frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| < \left| e^{(c_j-1)P_0(z) - c_j A_j + A_{j_0}} \right| = e^{\operatorname{Re}(-c_j A_j + A_{j_0})} < e^\lambda$$

et

$$\left| e^{-\frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| < \left| e^{-P_0(z) + A_{j_0}} \right| = \left| e^{\operatorname{Re}(A_{j_0})} \right| < e^\lambda. \quad (3.5.1)$$

Puisque $\rho_1 = \max \{ \rho(h_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(d_i) \ (j = 0, 1, \dots, k-1) \} < \rho(h_0)$, soient α, β deux nombres réels satisfont $\rho_1 < \beta < \alpha < \rho(h_0)$. Alors, par le Lemme 3.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire nulle et de mesure logarithmique finie tel que quand $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|h_j(z)| \leq e^{r^\beta}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \text{ et } |d_i(z)| \leq e^{r^\beta}, \quad i = 0, 1. \quad (3.5.2)$$

Puisque h_0 est une fonction méromorphe et $\lambda \left(\frac{1}{h_0} \right) < \mu(h_0) \leq \rho(h_0) < \frac{1}{2}$, par le Lemme 3.2.4, il existe un ensemble $E_3 \subset (1, +\infty)$ d'une densité logarithmique supérieure positive tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_3$, nous avons

$$|h_0(z)| \geq e^{r^\alpha}. \quad (3.5.3)$$

De l'équation (3.1.4), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \left| h_0(z) e^{P_0(z) - \frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| \leq \left| e^{-\frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \\ & + \left(|h_{k-1}(z)| \left| e^{P_{k-1}(z) - \frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| + |d_{k-1}(z)| \left| e^{-\frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| \right) \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} \right| \\ & + \dots + \left(|h_s(z)| \left| e^{P_s(z) - \frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| + |d_s(z)| \left| e^{-\frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| \right) \left| \frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} \right| \\ & + \dots + \left(|h_1(z)| \left| e^{P_1(z) - \frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| + |d_1(z)| \left| e^{-\frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right| \right) \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| + |d_0(z)| \left| e^{-\frac{1}{c_{j_0}} P_{j_0}(z)} \right|. \quad (3.5.4) \end{aligned}$$

D'après (3.4.4), (3.5.1), (3.5.2) et (3.5.3), pour tout $z = re^{i\theta}$, $z \in C$ et $r \in E_3 - [0, 1] \cup E_1 \cup E_2$, $r \rightarrow +\infty$, l'inégalité (3.5.4) donne

$$e^{r^\alpha} e^{\operatorname{Re}(A_{j_0})} \leq e^\lambda A [T(2r, f)]^{2k} + (k-1) e^{r^\beta} 2e^\lambda A [T(2r, f)]^{2k} + e^\lambda e^{r^\beta}$$

$$\leq 2e^\lambda e^{r^\beta} \left(Ak [T(2r, f)]^{2k} + 1 \right),$$

d'où

$$\frac{1}{2} e^{r^\alpha - r^\beta} e^{\operatorname{Re}(A_{j_0}) - \lambda} - 1 \leq Ak [T(2r, f)]^{2k}.$$

Puisque $\beta < \alpha$, nous trouvons

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = +\infty$$

et

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \geq \alpha. \quad (3.5.5)$$

Puisque α est un nombre arbitraire dans l'intervalle $] \beta, \rho(h_0) [$, alors de (3.5.5) nous obtenons $\rho_2(f) \geq \rho(h_0)$.

En outre :

(i) Si $\lambda(\frac{1}{f}) < +\infty$ alors par le Lemme 3.2.6 et de l'équation (3.1.4), nous avons $\rho_2(f) \leq n$, d'où $\rho(h_0) \leq \rho_2(f) \leq n$.

(ii) Pour $c_j \neq 1$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$), $\lambda(f) < n$ et $\lambda(\frac{1}{f}) < n$. Alors, par le Théorème 3.1.1, nous obtenons $\rho_2(f) = n$.

3.6 Preuve du Théorème 3.1.4.

Soit f une solution méromorphe non triviale de l'équation (3.1.4), alors en appliquant le Théorème 3.1.2, nous obtenons $\rho(f) = +\infty$.

Étape N° 1 : Nous considérons les points fixes de $f(z)$. Soit $g_0(z) = f(z) - z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g_0(z) = 0$. Nous avons $g_0(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_0(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. La substitution de $f(z) = g_0(z) + z$ dans l'équation (3.1.4), nous donne

$$g_0^{(k)} + (h_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1}) g_0^{(k-1)} + \dots + (h_s e^{P(z)} + d_s) g_0^{(s)} + \dots +$$

$$(h_1 e^{P_1(z)} + d_1) g_0' + (h_0 e^{P_0(z)} + d_0) g_0 = - (h_1 e^{P_1(z)} + d_1) - z (h_0 e^{P_0(z)} + d_0). \quad (3.6.1)$$

Nous écrivons (3.6.1) sous la forme

$$g_0^{(k)} + A_{0,k-1} g_0^{(k-1)} + \dots + A_{0,1} g_0' + A_{0,0} g_0 = -A_{0,1} - z A_{0,0} = A_0. \quad (3.6.2)$$

Pour l'équation (3.6.2), nous considérons juste les solutions méromorphes d'ordre infini $g_0(z) = f(z) - z$. nous avons

$$A_0 = -A_{0,1} - z A_{0,0} = - (h_1 e^{P_1(z)} + d_1) - z (h_0 e^{P_0(z)} + d_0)$$

$$\begin{aligned}
&= -z h_0 e^{P_0(z)} - h_1 e^{P_1(z)} + (-d_1 - z d_0) \\
&= B_0 e^{P_0(z)} + B_1 e^{P_1(z)} + B_2.
\end{aligned}$$

Nous avons $\deg(P_0(z) - P_1(z)) = n$ et $\sigma = \max\{\rho(B_0), \rho(B_1), \rho(B_2)\} < n$. Puisque $h_0 \not\equiv 0$ ($B_0 \not\equiv 0$), alors D'après le Lemme 3.2.9, nous avons $A_0 \not\equiv 0$. Nous utilisons le Lemme 3.2.8 à l'équation (3.6.2) au-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_0(z)) = \bar{\tau}(f) = \rho(g_0(z)) = +\infty.$$

Étape N° 2 : Nous considérons les points fixes de $f'(z)$. Soit $g_1(z) = f'(z) - z$, alors z est un point fixe de $f'(z)$ si et seulement si $g_1(z) = 0$. Nous avons $g_1(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_1(z)) = \rho(f'(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (3.1.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&f^{(k+1)} + (h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1}) f^{(k)} + \left[(h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1})' + (h_{k-2}e^{P_{k-2}(z)} + d_{k-2}) \right] f^{(k-1)} \\
&\quad + \cdots + \left[(h_s e^{P_s(z)} + d_s)' + (h_{s-1}e^{P_{s-1}(z)} + d_{s-1}) \right] f^{(s)} \\
&\quad + \cdots + \left[(h_2 e^{P_2(z)} + d_2)' + (h_1 e^{P_1(z)} + d_1) \right] f'' \\
&\quad + \left[(h_1 e^{P_1(z)} + d_1)' + (h_0 e^{P_0(z)} + d_0) \right] f' + (h_0 e^{P_0(z)} + d_0)' f = 0. \tag{3.6.3}
\end{aligned}$$

De l'équation (3.1.4), nous avons

$$f = -\frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} \left[f^{(k)} + (h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1}) f^{(k-1)} + \cdots + (h_1 e^{P_1(z)} + d_1) f' \right]. \tag{3.6.4}$$

La substitution (3.6.4) dans (3.6.3), nous donne

$$\begin{aligned}
&f^{(k+1)} + \left[(h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1}) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} \right] f^{(k)} + \left[(h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1})' \right. \\
&\quad \left. + (h_{k-2}e^{P_{k-2}(z)} + d_{k-2}) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} (h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} + d_{k-1}) \right] f^{(k-1)} \\
&\quad + \cdots + \left[(h_s e^{P_s(z)} + d_s)' + (h_{s-1}e^{P_{s-1}(z)} + d_{s-1}) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} (h_s e^{P_s(z)} + d_s) \right] f^{(s)} \\
&\quad + \cdots + \left[(h_2 e^{P_2(z)} + d_2)' + (h_1 e^{P_1(z)} + d_1) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} (h_2 e^{P_2(z)} + d_2) \right] f'' \\
&\quad + \left[(h_1 e^{P_1(z)} + d_1)' + (h_0 e^{P_0(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} (h_1 e^{P_1(z)} + d_1) \right] f' = 0. \tag{3.6.5}
\end{aligned}$$

Nous pouvons dénoter l'équation (3.6.5) par la forme suivante

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + A_{1,k-1}f^{(k)} + A_{1,k-2}f^{(k-1)} + \dots + A_{1,s}f^{(s+1)} + A_{1,s-1}f^{(s)} \\ + \dots + A_{1,1}f'' + A_{1,0}f' = 0. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

où $A_{1,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (3.6.5). La substitution de $f'(z) = g_1(z) + z$, $f''(z) = g_1'(z) + 1$, $f^{(j+1)} = g_1^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, k$) dans l'équation (3.6.6), nous donne

$$\begin{aligned} g_1^{(k)} + A_{1,k-1}g_1^{(k-1)} + A_{1,k-2}g_1^{(k-2)} + \dots + A_{1,s+1}g_1^{(s+1)} + A_{1,s}g_1^{(s)} \\ + \dots + A_{1,1}g_1' + A_{1,0}g_1 = -A_{1,1} - z A_{1,0} = A_1, \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 = - \left[(h_2e^{P_2(z)} + d_2)' + (h_1e^{P_1(z)} + d_1) - \frac{(h_0e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0e^{P_0(z)} + d_0)} (h_2e^{P_2(z)} + d_2) \right] \\ - z \left[(h_1e^{P_1(z)} + d_1)' + (h_0e^{P_0(z)} + d_0) - \frac{(h_0e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0e^{P_0(z)} + d_0)} (h_1e^{P_1(z)} + d_1) \right] \\ = - \frac{1}{(h_0e^{P_0(z)} + d_0)} (zh_0^2e^{2P_0(z)} + B_1e^{P_0} + B_2e^{P_0+P_1} + B_3e^{P_0+P_2} + B_4e^{P_2} + B_5e^{P_1} + B_6) \\ = - \frac{1}{(h_0e^{P_0(z)} + d_0)} \left[\sum_{j=0}^{j=6} B_j e^{G_j} \right], \end{aligned}$$

G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus, avec $G_0 = 2P_0(z)$ et $B_0 = z h_0^2 \neq 0$, B_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z , h_i , h_i' , P_i' , d_i , d_i' ($i = 0, 1, 2$). Nous avons

$$\begin{array}{cccccc} G_j & P_0 & P_0 + P_1 & P_0 + P_2 & P_2 & P_1 \\ G_j - 2P_0(z) & -P_0 & P_1 - P_0 & P_2 - P_0 & P_2 - 2P_0 & P_1 - 2P_0 \end{array}$$

Puisque $a_{n,0} \neq 0$ et $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ou $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($0 < c_j < 1$) ($j = 1, 2, \dots, k-1$), alors

$$a_{n,j} - a_{n,0} \neq 0, \quad a_{n,j} - 2a_{n,0} \neq 0, \quad (j = 1, 2)$$

Par conséquent $\deg(2P_0(z)) = \deg(G_j - 2P_0(z)) = n$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Puisque $h_0 \neq 0$ ($B_0 \neq 0$). Alors, d'après le Lemme 3.2.9, nous avons $A_0 \neq 0$. Nous utilisons le Lemme 3.2.8 à l'équation (3.6.7) au-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\tau}(f') = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

Étape N° 3 : Nous prouvons que $\bar{\tau}(f'') = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty$. Soit $g_2(z) = f''(z) - z$, alors z est un point fixe de $f''(z)$ si et seulement si $g_2(z) = 0$. Nous avons $g_2(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_2(z)) = \rho(f''(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. Nous prouvons que $\bar{\lambda}(g_2) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (3.6.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(k+2)} + A_{1,k-1}f^{(k+1)} + (A'_{1,k-1} + A_{1,k-2})f^{(k)} + \cdots + (A'_{1,s-1} + A_{1,s-2})f^{(s)} \\ + \cdots + (A'_{1,1} + A_{1,0})f'' + A'_{1,0}f' = 0. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

De l'équation (3.6.6), nous avons

$$f' = -\frac{1}{A_{1,0}} \left[f^{(k+1)} + A_{1,k-1}f^{(k)} + A_{1,k-2}f^{(k-1)} + \cdots + A_{1,s-1}f^{(s)} + \cdots + A_{1,1}f'' \right]. \quad (3.6.9)$$

Nous remarquons que $A_{1,0} \neq 0$ car $h_0 \neq 0$ (pour la preuve, nous pouvons appliquer le Lemme 3.2.9). La substitution de (3.6.9) dans (3.6.8), nous donne

$$\begin{aligned} f^{(k+2)} + \left[A_{1,k-1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \right] f^{(k+1)} + \left[A'_{1,k-1} + A_{1,k-2} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,k-1} \right] f^{(k)} + \cdots \\ + \left[A'_{1,s-1} + A_{1,s-2} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,s-1} \right] f^{(s)} + \cdots + \left[A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] f^{(3)} \\ + \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] f'' = 0. \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Nous pouvons dénoter l'équation (3.6.10) par la forme suivante

$$\begin{aligned} f^{(k+2)} + A_{2,k-1}f^{(k+1)} + A_{2,k-2}f^{(k)} + \cdots + A_{2,s}f^{(s+2)} + A_{2,s-1}f^{(s+1)} + \cdots \\ + A_{2,1}f^{(3)} + A_{2,0}f'' = 0, \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

où $A_{2,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (3.6.10) au-dessus, et nous avons

$$A_{2,0} = A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \quad , \quad A_{2,1} = A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2}.$$

La substitution de $f''(z) = g_2(z) + z$, $f^{(3)}(z) = g'_2(z) + 1$, $f^{(j+2)} = g_1^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, k$) dans l'équation (3.6.11), nous donne

$$g_2^{(k)} + A_{2,k-1}g_2^{(k-1)} + A_{2,k-2}g_2^{(k-2)} + \cdots + A_{2,s}g_2^{(s)} + \cdots + A_{2,1}g'_2 + A_{2,0}g_2 = A_2 \quad (3.6.12)$$

où

$$A_2 = -A_{2,1} - z A_{2,0}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] - z \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] \\
&= - \frac{1}{A_{1,0}} \left[A'_{1,2} A_{1,0} + A_{1,1} A_{1,0} - A'_{1,0} A_{1,2} + z A'_{1,1} A_{1,0} + z A_{1,0}^2 - z A'_{1,0} A_{1,1} \right]. \quad (3.6.13)
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= (h_1 e^{P_1(z)} + d_1)' + (h_0 e^{P_0(z)} + d_0) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} (h_1 e^{P_1(z)} + d_1), \\
A_{1,1} &= (h_2 e^{P_2(z)} + d_2)' + (h_1 e^{P_1(z)} + d_1) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} (h_2 e^{P_2(z)} + d_2), \\
A_{1,2} &= (h_3 e^{P_3(z)} + d_3)' + (h_2 e^{P_2(z)} + d_2) - \frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} (h_3 e^{P_3(z)} + d_3).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} \left(h_0^2 e^{2P_0} + \alpha_{1,0}^{(1)} e^{P_0} + \alpha_{1,0}^{(2)} e^{P_0+P_1} + \alpha_{1,0}^{(3)} e^{P_1} + \alpha_{1,0}^{(4)} \right), \\
A_{1,1} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} \left(\alpha_{1,1}^{(0)} e^{P_0} + \alpha_{1,1}^{(1)} e^{P_0+P_2} + \alpha_{1,1}^{(2)} e^{P_0+P_1} + \alpha_{1,1}^{(3)} e^{P_2} + \alpha_{1,1}^{(4)} e^{P_1} + \alpha_{1,1}^{(5)} \right), \\
A_{1,2} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} \left(\alpha_{1,2}^{(0)} e^{P_0} + \alpha_{1,2}^{(1)} e^{P_0+P_2} + \alpha_{1,2}^{(2)} e^{P_0+P_3} + \alpha_{1,2}^{(3)} e^{P_2} + \alpha_{1,2}^{(4)} e^{P_3} + \alpha_{1,2}^{(5)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A'_{1,0} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)^2} \left(\beta_{1,0}^{(0)} e^{3P_0} + \beta_{1,0}^{(1)} e^{2P_0} + \beta_{1,0}^{(2)} e^{2P_0+P_1} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{1,0}^{(3)} e^{P_0+P_1} + \beta_{1,0}^{(4)} e^{P_0} + \beta_{1,0}^{(5)} e^{P_1} + \beta_{1,0}^{(6)} \right), \\
A'_{1,1} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)^2} \left(\beta_{1,1}^{(0)} e^{2P_0} + \beta_{1,1}^{(1)} e^{2P_0+P_2} + \beta_{1,1}^{(2)} e^{2P_0+P_1} + \beta_{1,1}^{(4)} e^{P_0+P_2} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{1,1}^{(5)} e^{P_0+P_1} + \beta_{1,1}^{(6)} e^{P_0} + \beta_{1,1}^{(7)} e^{P_2} + \beta_{1,1}^{(8)} e^{P_1} + \beta_{1,1}^{(9)} \right), \\
A'_{1,2} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)^2} \left(\beta_{1,2}^{(0)} e^{2P_0} + \beta_{1,2}^{(1)} e^{2P_0+P_2} + \beta_{1,2}^{(2)} e^{2P_0+P_3} + \beta_{1,2}^{(4)} e^{P_0+P_2} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{1,2}^{(5)} e^{P_0+P_3} + \beta_{1,2}^{(6)} e^{P_0} + \beta_{1,2}^{(7)} e^{P_2} + \beta_{1,2}^{(8)} e^{P_3} + \beta_{1,2}^{(9)} \right),
\end{aligned}$$

où $\alpha_{i,j}^{(l)}$, $\beta_{i,j}^{(l)}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions h_i , h'_i , P'_i , d_i , d'_i ($i = 0, 1, 2, 3$). De (3.6.13) nous avons :

$$A_2 = - \frac{1}{A_{1,0} (h_0 e^{P_0(z)} + d_0)^3} \left[z h_0^5 e^{5P_0} + B_1 e^{4P_0} + B_2 e^{3P_0} + B_3 e^{2P_0} + B_4 e^{P_0} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +B_5e^{4P_0+P_1} + B_6e^{4P_0+P_2} + B_7e^{4P_0+P_3} + B_8e^{3P_0+P_1} + B_9e^{3P_0+P_2} \\
& +B_{10}e^{3P_0+P_3} + B_{11}e^{3P_0+P_1+P_2} + B_{12}e^{3P_0+P_1+P_3} + B_{13}e^{3P_0+2P_1} + \\
& +B_{14}e^{2P_0+P_1} + B_{15}e^{2P_0+P_2} + B_{16}e^{2P_0+P_3} + B_{17}e^{2P_0+2P_1} + B_{18}e^{2P_0+P_1+P_2} + B_{19}e^{2P_0+P_1+P_3} \\
& +B_{20}e^{P_0+P_1} + B_{21}e^{P_0+P_2} + B_{22}e^{P_0+P_3} + B_{23}e^{P_0+2P_1} + B_{24}e^{P_0+P_1+P_2} + B_{25}e^{P_0+P_1+P_3} \\
& +B_{26}e^{2P_1} + B_{27}e^{P_1} + B_{28}e^{P_1+P_2} + B_{29}e^{P_1+P_3} + B_{30}e^{P_2} + B_{31}e^{P_3} + B_{32} \Big]. \\
& = -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{P_0(z)} + d_0)^3} \left[\sum_{j=0}^{j=32} B_j e^{G_j} \right],
\end{aligned}$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $B_0 = zh_0^5 \neq 0$, B_j ($j = 1, 2, \dots, 32$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions $z, h_i, h'_i, P'_i, d_i, d'_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Nous certifions que $A_2 \neq 0$. Nous avons

$$\begin{array}{l}
G_j \quad 4P_0 \quad 3P_0 \quad 2P_0 \quad P_0 \quad 4P_0 + P_1 \quad 4P_0 + P_2 \quad 4P_0 + P_3 \\
G_j - 5P_0 \quad -P_0 \quad -2P_0 \quad -3P_0 \quad -4P_0 \quad P_1 - P_0 \quad P_2 - P_0 \quad P_3 - P_0 \\
G_j \quad 3P_0 + P_1 \quad 3P_0 + P_2 \quad 3P_0 + P_3 \quad 3P_0 + P_1 + P_2 \quad 3P_0 + P_1 + P_3 \quad 3P_0 + 2P_1 \\
G_j - 5P_0 \quad P_1 - 2P_0 \quad P_2 - 2P_0 \quad P_3 - 2P_0 \quad P_1 + P_2 - 2P_0 \quad P_1 + P_3 - 2P_0 \quad 2P_1 - 2P_0 \\
G_j \quad 2P_0 + P_1 \quad 2P_0 + P_2 \quad 2P_0 + P_3 \quad 2P_0 + 2P_1 \quad 2P_0 + P_1 + P_2 \quad 2P_0 + P_1 + P_3 \\
G_j - 5P_0 \quad P_1 - 3P_0 \quad P_2 - 3P_0 \quad P_3 - 3P_0 \quad 2P_1 - 3P_0 \quad P_1 + P_2 - 3P_0 \quad P_1 + P_3 - 3P_0 \\
G_j \quad P_0 + P_1 \quad P_0 + P_2 \quad P_0 + P_3 \quad P_0 + 2P_1 \quad P_0 + P_1 + P_2 \quad P_0 + P_1 + P_3 \\
G_j - 5P_0 \quad P_1 - 4P_0 \quad P_2 - 4P_0 \quad P_3 - 4P_0 \quad 2P_1 - 4P_0 \quad P_1 + P_2 - 4P_0 \quad P_1 + P_3 - 4P_0 \\
G_j \quad 2P_1 \quad P_1 \quad P_1 + P_2 \quad P_1 + P_3 \quad P_2 \quad P_3 \\
G_j - 5P_0 \quad 2P_1 - 5P_0 \quad P_1 - 5P_0 \quad P_1 + P_2 - 5P_0 \quad P_1 + P_3 - 5P_0 \quad P_2 - 5P_0 \quad P_3 - 5P_0.
\end{array}$$

Puisque $a_{n,0} \neq 0$ et $a_{n,j} = c_j a_{n,0}$ ($0 < c_j < 1$) ($j = 1, 2, \dots, k-1$) alors

$$a_{n,j} - \lambda a_{n,0} = (c_j - \lambda) a_{n,0} \neq 0 \text{ pour } [\lambda = 1, 2, 3, 4, 5 \ (\lambda \geq 1) ; j = 1, 2, 3],$$

$$a_{n,1} - \lambda a_{n,0} = (c_1 - \lambda) \neq 0 \text{ pour } \left[\lambda = \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ (\lambda \geq 1) \right],$$

$$a_{n,1} + a_{n,j} - \lambda a_{n,0} = ((c_1 + c_j) - \lambda) \neq 0 \text{ pour } [\lambda = 2, 3, 4, 5 \ (\lambda \geq 2) ; j = 2, 3]$$

ou $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$) et $\arg(a_{n,1} + a_{n,j}) \neq \arg a_{n,0}$, par conséquent

$$\deg(G_j - 5P_0(z)) = \deg(5P_0(z)) = n \ (j = 1, 2, \dots, 32).$$

D'après le Lemme 3.2.9 et le fait que $h_0 \neq 0$, nous obtenons $A_2 \neq 0$. Nous utilisons le Lemme 3.2.8 à l'équation (3.6.12) au-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\tau}(f') = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

Sur la croissance et les points fixes des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes du second degré avec des coefficients méromorphes

4.1 Introduction et résultats

Pour l'équation différentielle linéaire du second degré

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (4.1.1)$$

où $P(z)$, $Q(z)$ sont des polynômes non constants; $A_1(z)$, $A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que $\rho(A_1) < \deg P(z)$; $\rho(A_0) < \deg Q(z)$. Gundersen [35] a montré que si $\deg P(z) \neq \deg Q(z)$, alors chaque solution méromorphe non constante de (1.1) est d'ordre infini. Si $\deg P(z) = \deg Q(z)$ alors (4.1.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini; par exemple $f(z) = e^z - 1$ satisfait $f'' - e^z f' + e^z f = 0$. Kwon [45], et Chen [18] ont étudié le cas où $\deg P(z) = \deg Q(z)$ et ils ont prouvé le même résultat. Chen et Shon [21] ont trouvé les mêmes résultats avec $A_1(z)$, $A_0(z) (\not\equiv 0)$ des fonctions méromorphes telles que $\rho(A_1) < 1$; $\rho(A_0) < 1$ et $\deg P(z) = \deg Q(z) = 1$. Wang et Laine [61] ont étudié l'équation différentielle linéaire non homogène du second degré

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = F(z), \quad (4.1.2)$$

où $A_1 \not\equiv 0, A_0 \not\equiv 0$, F sont des fonctions entières d'ordre inférieur à un, et les nombres complexes a, b avec $ab \neq 0$. Il ont prouvé que chaque solution non triviale de (4.1.2) est

d'ordre infini si on a $a \neq b$. Dans cette thèse, nous considérons l'équation

$$f'' + h_1(z) e^{P(z)} f' + h_0(z) e^{Q(z)} f = F(z), \quad (4.1.3)$$

où F, h_j ($j = 0, 1$) ($h_0 \not\equiv 0$) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur à n , et $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, nous prouvons le même résultat de Wang et Laine, et nous donnons une évaluation pour le hyper-ordre des solutions, nous donnons également une évaluation pour l'exposant de la convergence des points fixes des solutions et de leurs dérivées.

Théorème 4.1.1 [3] Soient $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ des polynômes non constants, où a_j, b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) sont des nombres complexes tels que $a_n b_n \neq 0$, et h_j ($j = 0, 1$), F avec $h_0 \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. Supposons que $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < n$. Nous affirmons les deux propositions suivantes :

(i) Si $a_n \neq b_n$ alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1.3) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$.

(ii) Si $a_n \neq b_n$ alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1.3) est d'ordre infini et l'hyper-ordre de f satisfait $\rho_2(f) \leq n$.

Théorème 4.1.2 [3] Soient $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ des polynômes non constants, où a_j, b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) sont des nombres complexes tels que $a_n b_n \neq 0$, et h_j ($j = 0, 1$), F avec $h_0 \not\equiv 0$ et $F \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. Supposons que $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < n$. Si $a_n \neq b_n$, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1.3) satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq n.$$

Théorème 4.1.3 [3] Soient $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ des polynômes non constants, où a_j, b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) sont des nombres complexes tels que $a_n b_n \neq 0$, et h_j ($j = 0, 1$), F avec $h_0 \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. Supposons que $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < n$. Si $a_n \neq b_n$ et $a_n \neq 2b_n$, alors pour chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1.3), on a f, f', f'' ont un nombre infini des points fixes et satisfont

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty.$$

Exemple 4.1.1 *Pour l'équation*

$$f'' + \frac{2}{z-1} e^{4z^2} f' + \frac{z^2}{z^2-1} e^{z^2} f = 2z. \quad (4.1.4)$$

On a $a_n = 4 \neq b_n = 1$ et $\rho = \max \left\{ \rho \left(\frac{2}{z-1} \right), \rho \left(\frac{z^2}{z^2-1} \right), \rho(2z) \right\} = 0 < n = 2$. D'après le Théorème 4.1.1, 4.1.2 et le Théorème 4.1.3, on a toute solution méromorphe f de l'équation (4.1.4), est d'ordre infini et satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq 2.$$

En outre f, f', f'' ont un nombre infini de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = +\infty.$$

4.2 Lemmes préliminaires

Lemme 4.2.1 [10] Soient $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, ($a_n = \alpha + i\beta \neq 0$) un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe avec $\rho(A) < n$. Soit $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = r e^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, où $E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, alors pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons

(i) si $\delta(P, \theta) > 0$, alors

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}, \quad (4.2.1)$$

(ii) si $\delta(P, \theta) < 0$, alors

$$\exp \{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}. \quad (4.2.2)$$

Lemme 4.2.2 [34, p. 89] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\rho(f) = \rho < +\infty$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_3$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \psi_0$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (4.2.3)$$

Lemme 4.2.3 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, et supposons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^\rho}$$

est non bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ avec la constante $\rho > 0$. Alors, il existe, une séquence infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ ($n = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que $G(z_n) \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{s-j} \quad (j = 0, \dots, s-1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.2.4)$$

Preuve. Soit $r_0 > 0$ où tout pôle de f est situé dans le disque de rayon r_0 et soit $M(r, \theta, G)$ le module maximum de G sur le segment $[r_0 e^{i\theta}, r e^{i\theta}]$ tel que $M(r, \theta, G) = \max \{G(z) : r_0 \leq |z| \leq r, \arg z = \theta\}$. Clairement, il existe une séquence infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}, r_n \geq r_0, r_n \rightarrow +\infty$ telle que $M(r_n, \theta, G) = G(z_n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent $|f^{(s)}(z_n)| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ où $M(r_n, \theta, f^{(s)}) = |f^{(s)}(z_n)|$. Pour chacun des n , et avec $(s-j)$ -intégrations réitérés sur le long du chemin $L_1 : z = r e^{i\theta}, r_0 \leq r \leq |z_n|$, nous avons

$$\begin{aligned} f^{(j)}(z_n) &= f^{(j)}(r_0 e^{i\theta}) + f^{(j+1)}(r_0 e^{i\theta}) \frac{(z_n - r_0 e^{i\theta})}{1!} \\ &+ \dots + \frac{1}{(s-j-1)!} f^{(s-1)}(r_0 e^{i\theta}) (z_n - r_0 e^{i\theta})^{s-j-1} + \int_{r_0 e^{i\theta}}^{z_n} \dots \int_{r_0 e^{i\theta}}^{\zeta} \int_{r_0 e^{i\theta}}^{\xi} f^{(s)}(t) dt d\xi d\zeta \dots du. \end{aligned}$$

Par conséquent, par une évaluation élémentaire d'inégalité et par $|f^{(s)}(z)| \leq |f^{(s)}(z_n)|$ sur le chemin L_1 nous avons

$$\begin{aligned} |f^{(j)}(z_n)| &\leq |f^{(j)}(r_0 e^{i\theta})| + |f^{(j+1)}(r_0 e^{i\theta})| \frac{|z_n - r_0 e^{i\theta}|}{1!} \\ &+ \dots + \frac{1}{(s-j-1)!} |f^{(s-1)}(r_0 e^{i\theta})| |z_n - r_0 e^{i\theta}|^{s-j-1} + \frac{1}{(s-j)!} |f^{(s)}(z_n)| |z_n - r_0 e^{i\theta}|^{s-j}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Quand $z_n \rightarrow +\infty$, nous obtenons à partir de (4.2.5)

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{s-j} \quad (j = 0, \dots, s-1).$$

□

Lemme 4.2.4 [61] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que $\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^\sigma$ pour tout rayon $\arg(z) = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, où M est une constante positive dépend de θ , tandis que σ est une constante indépendante de θ . Alors

$$\rho(f) \leq \sigma. \quad (4.2.6)$$

Lemme 4.2.5 [20] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5, r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|f(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}. \quad (4.2.7)$$

Lemme 4.2.6 [68] Soit $f(z) = g(z)/d(z)$ une fonction méromorphe transcendante, où $g(z)$ une fonction entière transcendante et $d(z)$ un polynôme. Alors, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6, r \rightarrow +\infty$ et $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)) \quad (4.2.8)$$

où $n \geq 1$ est un nombre entier positif.

Lemme 4.2.7 [23] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière d'ordre infini et d'hyper-ordre $\rho_2(f) = \rho$. Alors,

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r}. \quad (4.2.9)$$

Lemme 4.2.8 [50] Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini. On dénote $M(r, g) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$, alors pour tout nombre $\lambda > 0$ suffisamment grand, et tout $r \in E_7 \subset (1, +\infty)$, on a

$$M(r, g) > c_1 \exp\{c_2 r^\lambda\}, \quad (4.2.10)$$

où $lm(E_7) = +\infty$ et c_1, c_2 sont des constantes positives.

Lemme 4.2.9 Supposons que $k \geq 2$ et $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ ($A_0 \neq 0$) sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles. Soit $\rho = \max\{\rho(A_j), \rho(F) : j = 0, 1, 2, \dots, k-1\} < +\infty$ et soit $f(z)$ une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_0 f = F.$$

Alors,

$$\rho_2(f) \leq \rho. \quad (4.2.11)$$

Preuve. Nous assumons que f est une solution méromorphe de l'équation (4.1.3) d'ordre infini $\rho(f) = +\infty$.

Nous pouvons réécrire (4.1.3) sous la forme

$$-\frac{f^{(k)}}{f} = A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + A_{k-2} \frac{f^{(k-2)}}{f} + \dots + A_1 \frac{f'}{f} - \frac{F}{f} + A_0. \quad (4.2.12)$$

Puisque les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles des A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et F et puisque A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, alors $f(z)$ doit avoir un nombre fini de pôles. Par conséquent, par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $d(z)$ est un polynôme, $g(z)$ est une fonction entière transcendante avec $\rho_2(f) = \rho_2(g)$ et $\rho(g) = \rho(f) = +\infty$. Par le Lemme 4.2.5 et le Lemme 4.2.6, pour $\varepsilon > 0$ assez petit et tout nombre $\lambda > \rho + \varepsilon$ suffisamment grand, il existe un ensemble $E_3 = E_0 \cup E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ avec $lm(E) = +\infty$ et deux constantes positives c_1, c_2 , telles que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E \setminus [0, 1] \cup E_3$, $r \rightarrow +\infty$ avec $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z} \right)^n (1 + o(1)) \quad (n \geq 1), \quad (4.2.13)$$

$$|A_s(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, k-1 \text{ et } |F(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}, \quad (4.2.14)$$

$$\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{F(z)}{g(z)} \right| |d(z)| < Ar^m \frac{1}{c_1} \exp \{r^{\rho+\varepsilon} - c_2 r^\lambda\} \rightarrow 0 \quad (4.2.15)$$

où $A > 0$ est une constante, $m = \max \{\deg d(z), 1\}$ est un entier. La Substitution de (4.2.13), (4.2.14) et (4.2.15) dans (4.2.12), donne

$$\left| \frac{v_g(r)}{z} \right|^k |1 + o(1)| \leq \sum_{s=1}^{k-1} e^{r^{\rho+\varepsilon}} \left| \frac{v_g(r)}{z} \right|^s (1 + o(1)) + o(1) + e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Il s'ensuit que

$$(v_g(r))^k |1 + o(1)| \leq (k+1) e^{r^{\rho+\varepsilon}} r^k (v_g(r))^{k-1} (1 + o(1)),$$

donc

$$v_g(r) |1 + o(1)| \leq (k+1) e^{r^{\rho+\varepsilon}} r^k (1 + o(1)) \quad (4.2.16)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E \setminus [0, 1] \cup E_3$, $r \rightarrow +\infty$ avec $|g(z)| = M(r, g)$. Par conséquent, par le Lemme 4.2.7 nous obtenons

$$\rho_2(f) = \rho_2(g) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log v_g(r)}{\log r} \leq \rho + \varepsilon.$$

Puisque ε ($\varepsilon < \lambda - \rho$) étant arbitraire, alors nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \rho.$$

□

Lemme 4.2.10 [30] Soient P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 1$) des polynômes non constants de degrés respectivement d_1, d_2, \dots, d_n . Supposons que si $i \neq j$, alors $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$. Soit $A(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) e^{P_j(z)}$, où $B_j(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes satisfaisant $\rho(B_j(z)) < d_j$. Alors,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \{d_j\}. \quad (4.2.17)$$

Lemme 4.2.11 [4] Soient $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des polynômes avec $\deg(P_0(z)) = n$ ($n \geq 1$) et $\deg(P_j(z)) \leq n$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Soient $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des fonctions méromorphes d'ordre fini et $\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, k\} < n$ telles que $A_0(z) \not\equiv 0$. Nous dénotons

$$F(z) = A_k e^{P_k(z)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + \dots + A_s e^{P_s(z)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)} + A_0 e^{P_0(z)}. \quad (4.2.18)$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ pour tout $j = 1, 2, \dots, k$, alors F est une fonction méromorphe non triviale d'ordre fini et satisfait $\rho(F) = n$.

Lemme 4.2.12 [20] Soient A_j, F ($F \not\equiv 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_1 f' + A_0 f = F. \quad (4.2.19)$$

Alors, f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \sigma(f) = +\infty.$$

Lemme 4.2.13 [8] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) un polynôme non constant, où $a_n \neq 0$, a_{n-1}, \dots, a_0 sont des nombres complexes. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout z , $|z| = r > R$, nous avons

$$(1 - \varepsilon) |a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| r^n. \quad (4.2.20)$$

4.3 Preuve du Théorème 4.1.1.

(i) Nous prouvons que chaque solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$ quand $a_n \neq b_n$. Nous assumons que $f(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe de l'équation (4.1.3) est d'ordre inférieur à n , alors $\rho(f) < n$. Nous pouvons écrire l'équation (4.1.3) sous la forme

$$h_1(z) f'(z) e^{P(z)} + h_0(z) f(z) e^{Q(z)} = B(z), \quad (4.3.1)$$

où

$$B(z) = -f'' + F(z).$$

Puisque $\rho = \max \{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < n$ et $\rho(f) < n$, alors $h_0(z)f(z)$, $h_1(z)f'(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho(h_0f) < n$, $\rho(h_1f') < n$ et $\rho(B) < n$. Nous avons également $a_n \neq b_n$, d'où $\deg(P(z) - Q(z)) = n$. Puisque Nous avons $h_0f \not\equiv 0$, Par le Lemme 4.2.11, nous constatons que l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (4.3.1) est n , ceci contredit le fait $\rho(B) < n$. En conséquence, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (4.1.3) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$.

(ii) Supposons, contrairement à l'affirmation, que f est une solution méromorphe de (4.1.3) d'ordre $\rho(f) < \infty$, alors par l'affirmation (i) au-dessus, nous avons $n \leq \rho(f)$. Récrivons l'équation (4.1.3) sous la forme

$$f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = F \quad (4.3.2)$$

notons que $A_0(z) = h_0(z)e^{Q(z)}$, $A_1(z) = h_1(z)e^{P(z)}$. Par le Lemme 4.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, où $E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0, \delta(Q, \theta) = 0\} \cup \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = \delta(Q, \theta)\}$ est un ensemble fini, alors pour $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons $\delta(P, \theta) \neq 0$, $\delta(Q, \theta) \neq 0$, $\delta(P, \theta) \neq \delta(Q, \theta)$ et $A_j(z)$ $j = 0, 1$ satisfont l'une des inégalités (4.2.1) ou (4.2.2). En même temps, nous appliquons le Lemme 4.2.2, d'où il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \theta$ et $|z| \geq R_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{2\rho}, \quad 0 \leq i < j \leq 2. \quad (4.3.3)$$

Puisque $a_n \neq b_n$, alors a_n, b_n satisfont l'une des inégalités $\delta(P, \theta) < \delta(Q, \theta)$ ou $\delta(P, \theta) > \delta(Q, \theta)$.

1ier Cas : $\delta(P, \theta) < \delta(Q, \theta)$ et $\delta(Q, \theta) > 0$. Par conséquent, il existe un nombre positif $\delta_1 > 0$ tel que $\delta(P, \theta) \leq \delta_1 < \delta(Q, \theta)$. Par le Lemme 4.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \frac{\delta(Q, \theta) - \delta_1}{\delta(Q, \theta) + \delta_1}$), nous avons

$$\exp \{(1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r^n\} \leq |A_0(z)|, \quad (4.3.4)$$

$$|A_1(z)| \leq \exp \{(1 + \varepsilon) \delta_1 r^n\} \quad (4.3.5)$$

où $r \rightarrow +\infty$. Nous montrons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (4.3.6)$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, par le Lemme 4.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} \rightarrow +\infty. \quad (4.3.7)$$

De (4.3.7) et pour tout nombre positif $M_1 > 0$ suffisamment grand nous avons

$$\frac{\log^+ |f(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} > M_1$$

alors

$$|f(z_m)| > e^{M_1 |z_m|^{\rho+\varepsilon}} \text{ quand } m \rightarrow +\infty. \quad (4.3.8)$$

Puisque $F(z)$ est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, donc par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire $F(z)$ sous la forme $F(z) = \frac{H(z)}{\pi(z)}$, où $\pi(z)$ est un polynôme, $H(z)$ est une fonction entière d'ordre $\rho(H) = \rho(F) \leq \rho$. Nous avons également

$$\left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f(z_m)} \right|.$$

De (4.3.8) et par le Lemme 4.2.13, pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$), il existe une constante positive $c > 0$ telle que

$$\left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{c r^s e^{M_1 |z_m|^{\rho+\varepsilon}}} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{e^{M_1 |z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right|$$

où $s = \max \{ \deg \pi(z), 1 \}$ est un entier positif. Puisque $\rho(H) \leq \rho$, donc nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^{M |z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right| \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow +\infty. \quad (4.3.9)$$

De l'équation (4.3.2), nous obtenons

$$|A_0(z_m)| \leq \left| \frac{f''(z_m)}{f(z_m)} \right| + |A_1(z_m)| \left| \frac{f'(z_m)}{f(z_m)} \right| + \left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right|. \quad (4.3.10)$$

En utilisant les inégalités (4.3.3), (4.3.4), (4.3.5) et la limite (4.3.9), nous concluons de l'inégalité (4.3.10) que

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r_m^n \} \leq |z_m|^{2\rho} + \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_1 r_m^n \} |z_m|^{2\rho} + o(1)$$

d'où

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r_m^n \} \leq 3 \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_1 r_m^n \} r_m^{2\rho},$$

alors

$$\exp \{ [(1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta_1] r_m^n \} \leq 3 r_m^{2\rho}$$

d'où

$$\frac{1}{3r_m^{2\rho}} \exp \{[(\delta(Q, \theta) - \delta_1) - \varepsilon(\delta(Q, \theta) + \delta_1)] r_m^n\} \leq 1.$$

C'est une contradiction, qui se tient pour r_m suffisamment grand. (Puisque $0 < \varepsilon < \frac{\delta(Q, \theta) - \delta_1}{\delta(Q, \theta) + \delta_1}$, donc $[(\delta(Q, \theta) - \delta_1) - \varepsilon(\delta(Q, \theta) + \delta_1)] > 0$). Par conséquent, $\frac{\log^+ |f(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M_2 |z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (4.3.11)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

2ieme Cas : $\delta(P, \theta) < 0$ et $\delta(Q, \theta) < 0$. De (4.3.2), nous obtenons

$$-1 \leq A_1(z) \frac{f'(z)}{f''(z)} + A_0(z) \frac{f(z)}{f''(z)} - \frac{F(z)}{f''(z)}$$

d'où

$$1 \leq |A_1(z)| \left| \frac{f'(z)}{f''(z)} \right| + |A_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f''(z)} \right| + \left| \frac{F(z)}{f''(z)} \right|. \quad (4.3.12)$$

Par le Lemme 4.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), nous avons

$$|A_0(z)| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r^n\} \quad (4.3.13)$$

et

$$|A_1(z)| \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}. \quad (4.3.14)$$

Nous prouvons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f''(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, par le Lemma 2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f''(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} \rightarrow +\infty \quad (4.3.15)$$

et

$$\left| \frac{f'(z_m)}{f''(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m|^2 \text{ et } \left| \frac{f(z_m)}{f''(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m|^2 \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty. \quad (4.3.16)$$

De (4.3.15) et pour tout nombre $M_3 > 0$ suffisamment grand, nous avons

$$|f''(z_m)| > e^{M_3 |z_m|^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty. \quad (4.3.17)$$

En utilisant le même raisonnement comme ci-dessus, nous obtenons de (4.3.17) que pour m suffisamment grand ($m \rightarrow +\infty$)

$$\left| \frac{F(z_m)}{f''(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f''(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{c r^s e^{M_3 |z_m|^{\rho+\varepsilon}}} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{e^{M_3 |z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right|$$

où $c > 0$ est une constante et $s = \max\{\deg \pi, 1\}$ est un entier. Puisque $\rho(H) < \rho$, alors nous obtenons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^{M_3 |z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty. \quad (4.3.18)$$

En utilisant les inégalités (4.3.13), (4.3.14), (4.3.16) et la limite (4.3.18), nous concluons de l'inégalité (4.3.12) que

$$1 \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(Q, \theta) r_m^n\} r_m^2 (1+o(1)) + \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P, \theta) r_m^n\} r_m^2 (1+o(1)) + o(1).$$

C'est une contradiction qui se tient pour r_m suffisamment grand. (Nous avons pris $0 < \varepsilon < 1$, donc $(1-\varepsilon)\delta(Q, \theta) < 0$ et $(1-\varepsilon)\delta(P, \theta) < 0$). Par conséquent, $\frac{\log^+ |f''(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, d'où il existe une constante $M_4 > 0$ telle que

$$|f''(z)| \leq e^{M_4 |z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (4.3.19)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par conséquent, par deux- intégrations réitérés comme dans la preuve du Lemme 4.2.3, nous concluons que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2} (1+o(1)) r^2 |f''(z)|,$$

d'où

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2} (1+o(1)) r^2 e^{M_4 |z|^{\rho+\varepsilon}} \leq e^{M_4 r^{\rho+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

3ième Cas : $\delta(P, \theta) > \delta(Q, \theta)$ et $\delta(P, \theta) > 0$. Il existe un nombre positif $\delta_1 > 0$ tel que $\delta(Q, \theta) \leq \delta_1 < \delta(P, \theta)$. Par le Lemme 4.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \frac{\delta(P, \theta) - \delta_1}{\delta(P, \theta) + \delta_1}$) et pour r suffisamment grand, nous avons

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P, \theta) r^n\} \leq |A_1(z)| \quad (4.3.20)$$

et

$$|A_0(z)| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r^n\}. \quad (4.3.21)$$

De (4.3.2), nous obtenons

$$|A_1(z)| \leq \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| + |A_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| + \left| \frac{F(z)}{f'(z)} \right|. \quad (4.3.22)$$

Par le même raisonnement comme dans le 2ième Cas, nous prouverons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, par le Lemme 4.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\left| \frac{f(z_m)}{f'(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m| \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty \quad (4.3.23)$$

et

$$\left| \frac{F(z_m)}{f'(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^{M_5} |z_m|^{\rho+2\varepsilon}} \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty. \quad (4.3.24)$$

En utilisant les inégalités (4.3.3), (4.3.20), (4.3.19), (4.3.23) et la limite (4.3.24), nous concluons de l'inégalité (4.3.22) que

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r_m^n \} \leq |z_m|^{2\rho} + \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_1 r_m^n \} |z_m| + o(1)$$

d'où

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r_m^n \} \leq 3 \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_1 r_m^n \} r_m^{2\rho},$$

donc

$$\exp \{ [(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) - (1 + \varepsilon) \delta_1] r_m^n \} \leq 3r_m^{2\rho},$$

d'où

$$\frac{1}{3r_m^{2\rho}} \exp \{ [(\delta(P, \theta) - \delta_1) - \varepsilon(\delta(P, \theta) + \delta_1)] r_m^n \} \leq 1$$

C'est une contradiction qui se tient pour r_m suffisamment grand. ($0 < \varepsilon < \frac{\delta(P, \theta) - \delta_1}{\delta(P, \theta) + \delta_1}$, donc $[(\delta(P, \theta) - \delta_1) - \varepsilon(\delta(P, \theta) + \delta_1)] > 0$). Par conséquent, $\frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors, il existe une constante $M_6 > 0$ telle que

$$|f'(z)| \leq e^{M_6 |z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (4.3.25)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. D'où

$$|f(z)| \leq (1 + o(1)) r |f'(z)| \leq e^{M_6 r^{\rho+2\varepsilon}}.$$

Dans tous les cas, il existe une constante positive $M > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M r^{\rho+2\varepsilon}}. \quad (4.3.26)$$

Puisque les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles des A_j ($j = 0, 1$), F et puisque A_j ($j = 0, 1$), F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de

pôles, alors $f(z)$ doit avoir un nombre fini de pôles. Par conséquent, d'après le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $d(z)$ est un polynôme, $g(z)$ est une fonction entière avec $\rho(g) = \rho(f)$. Par la première affirmation (i) dans le Théorème 4.1.1, nous obtenons $\rho(g) \geq n$. De (4.3.26), nous avons

$$\left| \frac{g(z)}{d(z)} \right| \leq e^{Mr^{\rho+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. D'après le Lemme 4.2.13, nous trouvons

$$|g(z)| \leq |d(z)| e^{Mr^{\rho+2\varepsilon}} \leq Ar^\beta e^{Mr^{\rho+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Où $A > 0$ est une constante et $\beta = \max\{\deg d(z), 1\}$ est un entier. Par conséquent

$$|g(z)| \leq e^{Mr^{\rho+3\varepsilon}} \quad (4.3.27)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Donc pour toute $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, où $(E_1 \cup E_2 \cup E_3) \subset [0, 2\pi)$ un ensemble de mesure linéaire nulle, nous avons (4.3.27), sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et $|z| = r$ suffisamment grand. Alors, par le Lemme 4.2.4 nous avons $\rho(g) \leq \rho + 3\varepsilon < n$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, c'est une contradiction avec $\rho(g) \geq n$. Par conséquent, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (4.1.3) doit être d'ordre infini.

4.4 Preuve du Théorème 4.1.2.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (4.1.3), alors par le Théorème 4.1.1 f est d'ordre infini. Par conséquent, en appliquant le Lemme 4.2.12, nous obtenons

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty.$$

Nous savons que les zéros de f se produisent de l'ensemble des pôles de $h_j(z)$ $j = 0, 1$ ou les zéros de $F(z)$ et si z_0 est un zéro de f d'ordre m , $m > 2$, alors z_0 doit être un zéro de $F(z)$ d'ordre $m - 2$. Par conséquent, de $F \not\equiv 0$ nous avons

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N(r, h_0) + N(r, h_1). \quad (4.4.1)$$

D'autre part, (4.1.3) peut être écrite sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left[\frac{f''}{f} + h_1 e^P \frac{f'}{f} + h_0 e^Q \right],$$

d'où

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + m(r, h_0) + m(r, h_1) + m(r, e^P)$$

$$+ m(r, e^Q) + m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + o(1). \quad (4.4.2)$$

Par conséquent, par le lemme sur la dérivée logarithmique (voir [47] [34], [38, Lemme 2.3]), il existe un ensemble E de mesure linéaire finie tel que pour tout $r \notin E$, nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(\log T(r, f) + O(\log r)) \quad j = 1, 2. \quad (4.4.3)$$

De (4.4.1), (4.4.2) et (4.4.3), nous avons

$$\begin{aligned} T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) &\leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N(r, h_0) + N(r, h_1) + m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \\ & m(r, h_0) + m(r, h_1) + m(r, e^P) + m(r, e^Q) + m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + T(r, h_0) + T(r, h_1) \\ &+ T(r, e^P) + T(r, e^Q) + C \log(rT(r, f)), \quad r \notin E, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

où C est une constante positive. Puisque pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, nous avons

$$C \log(rT(r, f)) \leq \frac{1}{2}T(r, f), \quad T(r, F) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \quad T(r, e^P) \leq r^{n+\varepsilon} \quad (4.4.5)$$

$$T(r, e^Q) \leq r^{n+\varepsilon}, \quad T(r, h_j) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \quad j = 0, 1. \quad (4.4.6)$$

Alors, pour $r \notin E$ et r suffisamment grand et par l'utilisation de (4.4.5), (4.4.6) nous concluons de (4.4.4) que

$$T(r, f) \leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 3r^{\rho+\varepsilon} + 2r^{n+\varepsilon} + \frac{1}{2}T(r, f) + O(\log(r)),$$

d'où

$$T(r, f) \leq 4\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 6r^{\rho+\varepsilon} + 4r^{n+\varepsilon} + O(\log(r)).$$

Par conséquent

$$\rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f),$$

d'où

$$\lambda_2(f) \geq \bar{\lambda}_2(f) \geq \rho_2(f).$$

Puisque par définition, nous avons $\lambda_2(f) \leq \rho_2(f)$, donc

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f).$$

En utilisant le Lemme 4.2.9, nous obtenons

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq n.$$

4.5 Preuve du Théorème 4.1.3.

Soit f une solution méromorphe non triviale de l'équation (4.1.3), en appliquant le Théorème 4.1.1, nous obtenons $\rho(f) = +\infty$.

1^{ère} Étape. Nous commençons par les points fixes de $f(z)$. Soit $g_0(z) = f(z) - z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g_0(z) = 0$. Nous avons $g_0(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_0) = \rho(f) = +\infty$. La substitution $f(z) = g_0(z) + z$ dans l'équation (4.1.3), nous donne

$$g_0'' + h_1 e^{P(z)} g_0' + h_0 e^{Q(z)} g_0 = F - h_1 e^{P(z)} - z h_0 e^{Q(z)}. \quad (4.5.1)$$

Nous écrivons (4.5.1) sous la forme

$$g_0'' + A_{0,1} g_0' + A_{0,0} g_0 = F - A_{0,1} - z A_{0,0} = A_0. \quad (4.5.2)$$

Pour l'équation (4.5.2), nous considérons juste les solutions méromorphes d'ordre infini $g_0(z) = f(z) - z$. Nous avons

$$A_0 = F - h_1 e^{P(z)} - z h_0 e^{Q(z)},$$

$$\deg(P(z) - Q(z)) = n$$

et

$$\rho = \max \{ \rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1 \} < n.$$

Puisque $h_0 \not\equiv 0$, alors d'après le Lemme 4.2.11, nous avons $A_0 \not\equiv 0$. Nous utilisons le Lemme 4.2.12 à l'équation (4.5.2) en haut, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\tau}(f) = \rho(g_0) = +\infty.$$

2^{ème} Étape. maintenant nous considérons les points fixes de $f'(z)$. Soit $g_1(z) = f'(z) - z$, alors z est un point fixe de $f'(z)$ si et seulement si $g_1(z) = 0$. Nous avons $g_1(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_1) = \rho(f') = \rho(f) = +\infty$.

En dérivant les deux côtés de l'équation (4.1.3), nous obtenons

$$f^{(3)} + h_1 e^{P(z)} f'' + \left[(h_1 e^{P(z)})' + h_0 e^{Q(z)} \right] f' + (h_0 e^{Q(z)})' f = F'. \quad (4.5.3)$$

Par l'équation (4.1.3) nous avons

$$f = -\frac{1}{h_0 e^{Q(z)}} \left[f'' + h_1 e^{P(z)} f' - F \right]. \quad (4.5.4)$$

En substituant (4.5.4) dans (4.5.3), nous obtenons

$$f^{(3)} + \left[h_1 e^{P(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} \right] f'' + \left[(h_1 e^{P(z)})' + h_0 e^{Q(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} h_1 e^{P(z)} \right] f' + \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F = F'. \quad (4.5.5)$$

Nous pouvons noter l'équation (4.5.5) sous la forme suivante

$$f^{(3)} + A_{1,1} f'' + A_{1,0} f' = -\frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F + F'. \quad (4.5.6)$$

où $A_{1,j}$ ($j = 0, 1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (4.5.5). Par la substitution de $f'(z) = g_1(z) + z$, $f''(z) = g_1'(z) + 1$, $f^{(3)} = g_1''$ dans l'équation (4.5.6), nous obtenons

$$g_1'' + A_{1,1} g_1' + A_{1,0} g_1 = -A_{1,1} - z A_{1,0} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F + F' = A_1, \quad (4.5.7)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= - \left[h_1 e^{P(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} \right] \\ &- z \left[(h_1 e^{P(z)})' + h_0 e^{Q(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} h_1 e^{P(z)} \right] - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F + F' \\ &= -\frac{1}{h_0 e^{Q(z)}} (z h_0^2 e^{2Q(z)} + B_1 e^{Q(z)} + B_2 e^{Q(z)+P(z)}) \\ &= -\frac{1}{h_0 e^{P_0(z)}} \left[\sum_{j=0}^{j=2} B_j e^{G_j} \right], \end{aligned}$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $G_0 = 2Q(z)$ et $B_0 = z h_0^2$, B_j sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z , h_i , h'_j , Q' , P' , F , F' . Puisque $a_n \neq b_n$ et $a_n b_n \neq 0$, alors $\deg(2Q(z) - Q(z)) = n$ et $\deg(2Q(z) - Q(z) - P(z)) = n$. D'après le Lemme 4.2.11 et le fait que $h_0 \not\equiv 0$ ($B_0 \not\equiv 0$), nous avons $A_1 \not\equiv 0$. Nous utilisons le Lemme 4.2.12 à l'équation (4.5.7) en haut, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

3ième Étape. Nous prouvons que $\bar{\tau}(f'') = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty$. Soit $g_2(z) = f''(z) - z$, alors z est un point fixe de $f''(z)$ si et seulement si $g_2(z) = 0$. Nous avons $g_2(z)$ est une

fonction méromorphe et $\rho(g_2) = \rho(f'') = \rho(f) = +\infty$. Nous prouvons juste que $\bar{\lambda}(g_2) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (4.5.6), nous obtenons

$$f^{(4)} + A_{1,1}f^{(3)} + (A'_{1,1} + A_{1,0})f'' + A'_{1,0}f' = \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)'. \quad (4.5.8)$$

De l'équation (4.5.9), nous avons

$$f' = -\frac{1}{A_{1,0}} \left[f^{(3)} + A_{1,1}f'' + \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right]. \quad (4.5.9)$$

Nous remarquons que $A_{1,0} \neq 0$ $\left[A_{1,0} = \frac{1}{h_0e^{Q(z)}} \left(h_0^2e^{2Q} + \alpha_{1,0}^{(1)}e^{Q+P} \right) \right]$ car $h_0 \neq 0$ (pour la preuve, nous pouvons appliquer le Lemme 4.2.11). En substituant (4.5.9) dans (4.5.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(4)} + \left[A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \right] f^{(3)} + \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] f'' \\ - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) = \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)'. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Nous pouvons noter l'équation (4.5.10) sous la forme suivante

$$f^{(4)} + A_{2,1}f^{(3)} + A_{2,0}f'' = \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)', \quad (4.5.11)$$

où $A_{2,j}$ ($j = 0, 1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (4.5.10) ci-dessus, et nous avons

$$A_{2,0} = A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \quad \text{et} \quad A_{2,1} = A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}}.$$

La substitution de $f''(z) = g_2(z) + z$, $f^{(3)}(z) = g_2'(z) + 1$, $f^{(4)} = g_1^{(2)}$ dans l'équation (4.5.11), nous donne

$$g_2'' + A_{2,1}g_2' + A_{2,0}g_2 = A_2, \quad (4.5.12)$$

où

$$\begin{aligned} A_2 &= -A_{2,1} - z A_{2,0} + \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)' \\ &= - \left[A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \right] - z \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] \\ &\quad + \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{A_{1,0}} \left[A_{1,1}A_{1,0} - A'_{1,0} + z A'_{1,1}A_{1,0} + z A_{1,0}^2 - z A'_{1,0}A_{1,1} \right. \\
&\quad \left. - A'_{1,0}H - A_{1,0} \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)' \right]. \tag{4.5.13}
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= (h_1e^{P(z)})' + h_0e^{Q(z)} - \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}h_1e^{P(z)}, \\
A_{1,1} &= h_1e^{P(z)} - \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}, \\
\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' &= H \quad (\rho(H) < n).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= \frac{1}{h_0e^{Q(z)}} \left(h_0^2e^{2Q} + \alpha_{1,0}^{(1)}e^{Q+P} \right), \\
A_{1,1} &= \frac{1}{h_0e^{Q(z)}} \left(\alpha_{1,1}^{(0)}e^Q + \alpha_{1,1}^{(1)}e^{P+Q} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A'_{1,0} &= \frac{1}{(h_0e^{Q(z)})^2} \left(\beta_{1,0}^{(0)}e^{3Q} + \beta_{1,0}^{(1)}e^{2Q+P} \right), \\
A'_{1,1} &= \frac{1}{(h_0e^{Q(z)})^2} \left(\beta_{1,1}^{(0)}e^{2Q} + \beta_{1,1}^{(1)}e^{2Q+P} \right), \\
\left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)' &= -H',
\end{aligned}$$

où $\alpha_{i,j}^{(l)}$, $\beta_{i,j}^{(l)}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions h_k , h'_m , Q' , P' , F , F' . De (4.5.13) avons nous

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)})^3} \left[zh_0^5e^{5Q} + B_1e^{4Q} + B_2e^{4Q+P} + B_3e^{3Q+P} + B_4e^{3Q+2P} \right] \\
&= -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)})^3} \left[\sum_{j=0}^{j=4} B_j e^{G_j} \right], \quad G_j \text{ sont des polynômes définis comme ci-dessus}
\end{aligned}$$

où $B_0 = zh_0^5$ où B_j sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n . Nous certifions que $A_2 \not\equiv 0$. Puisque $a_n \neq b_n$ et $a_n \neq 2b_n$, alors nous avons $\deg(5Q - 4Q) = \deg Q = n$, $\deg(5Q - 4Q - P) = \deg(Q - P) = n$, $\deg(5Q - 3Q - P) = \deg(2Q - P) = n$, $\deg(5Q - 3Q - 2P) = \deg(2Q - 2P) = n$. Par conséquent $\deg(G_0 - G_j) = n$ ($j = 1, 2, 3, 4$) et $\rho(B_j) < n$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). D'après le Lemme 4.2.11 et le fait que $h_0 \not\equiv 0$ ($B_0 \not\equiv 0$), nous avons $A_2 \not\equiv 0$. Nous utilisons le Lemme 4.2.12 à l'équation (4.5.12) en haut, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

Sur la croissance et les points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires non homogènes du second degré

5.1 Introduction et résultats

Pour l'équation différentielle linéaire du second degré

$$f'' + Ae^{-z}f' + Q(z)f = 0, \quad (5.1.1)$$

où $Q(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\rho(Q) \neq 1$, Gundersen [36] a prouvé que chaque solution $f \not\equiv 0$ de (5.1.1) est d'ordre infini, et dans [35] il a montré que si $\rho(B) \neq \deg Q$, alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f'' + h(z)e^{Q(z)}f' + B(z)f = 0,$$

est d'ordre infini, avec $Q(z)$ est un polynôme non constant, $h(z) \not\equiv 0$ est les fonctions entières avec $\rho(h) < \deg Q(z)$ et $B(z)$ est une fonction entière transcendante. Wang et Laine [62] ont étudié l'équation différentielle linéaire du second degré non homogène

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = F(z), \quad (5.1.2)$$

où $A_1 \not\equiv 0, A_0 \not\equiv 0, F$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur d'un, et les nombres complexes a, b satisfont $ab \neq 0$. Ils ont prouvé que chaque solution non triviale de (5.1.2) est d'ordre infini si $a \neq b$. En ce chapitre, nous considérons l'équation

$$f'' + h_1(z)e^{P(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = F(z), \quad (5.1.3)$$

où $F, h_j \not\equiv 0$ ($j = 0, 1$) sont des fonctions méromorphes d'ordre inférieur de n , et $P(z), Q(z)$ sont des polynômes non constants avec $\rho(h_0) < \deg(Q), \rho(h_1) < \deg(P)$ et $\deg(Q) \neq \deg(P)$. Nous prouvons le même résultat de Wang et Laine, et nous donnons une évaluation pour l'hyper-ordre des solutions, nous donnons également une évaluation pour l'exposant de la convergence des points fixes des solutions et de leurs dérivées.

Théorème 5.1.1 *Soient $P(z), Q(z)$ deux polynômes non constants avec $\deg Q(z) = q, \deg P(z) = p$ ($p \geq 1, q \geq 1$ et $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$). Soient h_j ($j = 0, 1$), F avec $h_j \not\equiv 0$ $j = 0, 1$ des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles telles que $\rho(h_0) < q, \rho(h_1) < p$ et $\rho(F) < \max\{q, p\}$. Supposons que $\deg Q(z) \neq \deg P(z)$, alors chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (5.1.3) est d'ordre infini.*

Théorème 5.1.2 *Soient $P(z), Q(z)$ deux polynômes non constants avec $\deg Q(z) = q, \deg P(z) = p$ ($p \geq 1, q \geq 1$ et $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$). Soient h_j ($j = 0, 1$), F avec $h_j \not\equiv 0$ $j = 0, 1$ et $F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles telles que $\rho(h_0) < q, \rho(h_1) < p$ et $\rho(F) < \max\{q, p\}$. Supposons que $\deg Q(z) \neq \deg P(z)$, alors chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (5.1.3) satisfait*

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq \max\{q, p\}.$$

Théorème 5.1.3 *Soient $P(z), Q(z)$ deux polynômes non constants avec $\deg Q(z) = q, \deg P(z) = p$ ($p \geq 1, q \geq 1$ et $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$). Soient h_j ($j = 0, 1$), F avec $h_j \not\equiv 0, j = 0, 1$ des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles telles que $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < \min\{q, p\}$. Supposons que $\deg Q(z) \neq \deg P(z)$, alors pour toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (5.1.3), nous avons f, f', f'' ont un nombre infini des points fixes et satisfont*

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty.$$

Exemple 5.1.1 *Soit l'équation différentielle du deuxième ordre,*

$$f'' + \left(\frac{1}{z}e^{z^3}\right) f' - 2e^{z+z^2} f = e^z. \quad (5.1.4)$$

Dans cette équation, on a $\deg Q(z) = 2 \neq \deg P(z) = 3$ et $\rho = \max\{\rho(\frac{1}{z}), \rho(-2e^z), \rho(e^z)\} = 1 < \min\{q, p\} = 2$. D'après le Théorème 5.1.1, 5.1.2 et le Théorème 5.1.3, on a toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (5.1.4), est d'ordre infini et satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq 3.$$

En outre f, f', f'' ont un nombre infini de points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = +\infty.$$

5.2 Lemmes préliminaires

Lemme 5.2.1 [10] Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, ($a_n = \alpha + i\beta \neq 0$) un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe avec $\rho(A) < n$. Soit $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = r e^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3)$, où $E_3 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, alors pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons

(i) Si $\delta(P, \theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\}, \quad (5.2.1)$$

(ii) Si $\delta(P, \theta) < 0$, alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\}. \quad (5.2.2)$$

Lemme 5.2.2 [34] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\rho(f) = \rho < +\infty$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \psi_0$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (5.2.3)$$

Lemme 5.2.3 [4] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, et supposons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^\rho}$$

est non bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ avec la constante $\rho > 0$. Alors, il existe, une séquence infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ ($n = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que $G(z_n) \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{s-j} \quad (j = 0, \dots, s-1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.2.4)$$

Lemme 5.2.4 [61] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que $\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^\sigma$ pour tout rayon $\arg(z) = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, où M est une constante positive dépend de θ , tandis que σ est une constante indépendante de θ . Alors

$$\rho(f) \leq \sigma. \quad (5.2.5)$$

Lemme 5.2.5 [20] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5, r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|f(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}. \quad (5.2.6)$$

Lemme 5.2.6 [68] Soit $f(z) = g(z)/d(z)$ une fonction méromorphe transcendante, où $g(z)$ une fonction entière transcendante et $d(z)$ un polynôme. Alors, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6, r \rightarrow +\infty$ et $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)) \quad (5.2.7)$$

où $n \geq 1$ est un nombre entier positif.

Lemme 5.2.7 [50] Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini. On dénote $M(r, g) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$, alors pour tout nombre $\lambda > 0$ suffisamment grand, et tout $r \in E_7 \subset (1, \infty)$, on a

$$M(r, g) > c_1 \exp\{c_2 r^\lambda\}, \quad (5.2.8)$$

où $lm(E_7) = +\infty$ et c_1, c_2 sont des constantes positives.

Lemme 5.2.8 [35] Soit $\varphi : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions monotones et non décroissantes telles que $\varphi(r) \leq \psi(r)$ pour tout $r \notin E_8 \cup [0; 1]$, où $E_8 \subset (1; +\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors, il existe $r_1 = r_1(\alpha) > 0$ tel que $\varphi(r) \leq \psi(\alpha r)$ pour tout $r > r_1$.

Lemme 5.2.9 [4] Supposons que $k \geq 2$ et $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ ($A_0 \neq 0$) sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles. Soit $\rho = \max\{\rho(A_j), \rho(F) : j = 0, 1, 2, \dots, k-1\} < +\infty$ et soit $f(z)$ une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_0 f = F.$$

Alors,

$$\rho_2(f) \leq \rho. \quad (5.2.9)$$

Lemme 5.2.10 [30] Soient P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 1$) des polynômes non constants de degrés respectivement d_1, d_2, \dots, d_n . Supposons que si $i \neq j$, alors $\deg(P_i - P_j) = \max\{d_i, d_j\}$. Soit $A(z) = \sum_{j=1}^n B_j(z) e^{P_j(z)}$, où $B_j(z) \neq 0$ sont des fonctions méromorphes satisfaisant $\rho(B_j(z)) < d_j$. Alors,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \{d_j\}. \quad (5.2.10)$$

Lemme 5.2.11 [4] Soient $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des polynômes avec $\deg(P_0(z)) = n$ ($n \geq 1$) et $\deg(P_j(z)) \leq n$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Soient $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des fonctions méromorphes d'ordre fini et $\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, k\} < n$ telles que $A_0(z) \not\equiv 0$. Nous dénotons

$$F(z) = A_k e^{P_k(z)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + \dots + A_s e^{P_s(z)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)} + A_0 e^{P_0(z)} \quad (5.2.11)$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ pour tout $j = 1, 2, \dots, k$, alors F est une fonction méromorphe non triviale d'ordre fini et satisfait $\rho(F) = n$.

Lemme 5.2.12 [20] Soient A_j, F ($F \not\equiv 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_1 f' + A_0 f = F. \quad (5.2.12)$$

Alors, f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \sigma(f) = +\infty.$$

Lemme 5.2.13 [9] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) un polynôme non constant, où $a_n \neq 0$, a_{n-1}, \dots, a_0 sont des nombres complexes. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout z , $|z| = r > R$, nous avons

$$(1 - \varepsilon) |a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| r^n. \quad (5.2.13)$$

5.3 Preuve du Théorème 5.1.1.

Premièrement, nous affirmons que chaque solution méromorphe transcendante f est d'ordre $\rho(f) \geq \max\{q, p\}$ quand $\deg Q(z) \neq \deg P(z)$. Nous supposons que la solution méromorphe f de l'équation (5.1.3) est transcendante d'ordre inférieur à $\max\{q, p\}$, doù $\rho(f) < \max\{q, p\}$. Puisque nous avons $h_0 f \not\equiv 0$, $h_1 f' \not\equiv 0$, nous pouvons écrire l'équation (5.1.3) sous la forme

$$h_1(z) f'(z) e^{P(z)} + h_0(z) f(z) e^{Q(z)} = B(z), \quad (5.3.1)$$

où

$$B(z) = -f'' + F(z).$$

Puisque $\max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < \max\{q, p\}$ et $\rho(f) < \max\{q, p\}$, alors $h_0(z) f(z)$, $h_1(z) f'(z)$ et $B(z)$ sont les fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho(h_0 f) < \max\{q, p\}$, $\rho(h_1 f') < \max\{q, p\}$ et $\rho(B) < \max\{q, p\}$. Nous avons également $\deg Q(z) \neq \deg P(z)$,

donc $\deg(P(z) - Q(z)) = \max\{q, p\}$. Par le Lemme 5.2.11, nous constatons que l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (5.3.1) est $\max\{q, p\}$, ceci contredit le fait $\rho(B) < \max\{q, p\}$. En conséquence, toute solution méromorphe transcendante f de l'équation (5.1.3) est d'ordre $\rho(f) \geq \max\{q, p\}$.

Maintenant nous prouvons que $\rho(f) = +\infty$. Supposons le contraire, que f est une solution méromorphe de (5.1.3) d'ordre $\rho(f) < +\infty$, alors par l'affirmation ci-dessus, nous avons $\max\{q, p\} \leq \rho(f)$. Récrivons l'équation (5.1.3) sous la forme

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = F. \quad (5.3.2)$$

On dénote $A_0(z) = h_0(z) e^{Q(z)}$, $A_1(z) = h_1(z) e^{P(z)}$ et nous posons

$$\max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} = \rho < \max\{q, p\}.$$

Par le Lemme 5.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ d'une mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3)$, où $E_3 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0, \delta(Q, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, donc pour $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons $\delta(P, \theta) \neq 0$, $\delta(Q, \theta) \neq 0$ et $A_j(z)$ $j = 0, 1$ satisfont une des inégalité (5.2.1) ou (5.2.2). En même temps, nous pouvons appliquer le Lemme 5.2.2, nous pouvons assumer que

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{2\alpha}, \quad 0 \leq i < j \leq 2. \quad (5.3.3)$$

où α est une constante plus grande que $\rho(f)$. Puisque $\deg Q(z) \neq \deg P(z)$, alors $\delta(Q, \theta) r^q \neq \delta(P, \theta) r^p$ pour r suffisamment grand et $Q(z)$, $P(z)$ satisfont un cas de ces quatre cas $\delta(Q, \theta) > 0$ et $\delta(P, \theta) > 0$, ou $\delta(Q, \theta) > 0$ et $\delta(P, \theta) < 0$, ou $\delta(Q, \theta) < 0$ et $\delta(P, \theta) > 0$, ou $\delta(Q, \theta) < 0$ et $\delta(P, \theta) < 0$.

1ier Cas : $\delta(Q, \theta) > 0$ et $\delta(P, \theta) > 0$

Cas 1.1 : $q > p$. Par le Lemme 5.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), nous avons

$$\exp\{(1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r^q\} \leq |A_0(z)|, \quad (5.3.4)$$

$$|A_1(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^p\} \quad (5.3.5)$$

pour r suffisamment grand. Nous montrons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Nous supposons que ce n'est pas le cas, donc par Lemme 5.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} \rightarrow +\infty \quad (5.3.6)$$

de (5.3.6) et pour de tout nombre positif $M > 0$, nous avons

$$\frac{\log^+ |f(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} > M \text{ alors } |f(z_m)| > e^M |z_m|^{\rho+\varepsilon} \text{ as } m \rightarrow +\infty. \quad (5.3.7)$$

Puisque $F(z)$ est une fonction méromorphe avec un nombre fini de pôles, alors par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire $F(z)$ sous la forme $F(z) = \frac{H(z)}{\pi(z)}$ où $\pi(z)$ est un polynôme, $H(z)$ est une fonction entière avec $\rho(H) = \rho(F) \leq \rho$. Nous avons également

$$\left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f(z_m)} \right|.$$

De (5.3.7) et le Lemme 5.2.13, pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$), il existe deux constantes positives $c > 0$, $M_1 > 0$ telles que,

$$\left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{(1-\varepsilon) c r^{M_1} e^M |z_m|^{\rho+\varepsilon}} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{e^M |z_m|^{\rho+2\varepsilon}} \right|.$$

Puisque $\rho(H) \leq \rho$, alors nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^M |z_m|^{\rho+2\varepsilon}} \right| \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow +\infty. \quad (5.3.8)$$

De l'équation (5.3.2), nous obtenons

$$|A_0(z_m)| \leq \left| \frac{f''(z_m)}{f(z_m)} \right| + |A_1(z_m)| \left| \frac{f'(z_m)}{f(z_m)} \right| + \left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right|. \quad (5.3.9)$$

En utilisant les inégalités (5.3.3), (5.3.4), (5.3.5) et la limite (5.3.8), nous concluons de l'inégalité (5.3.9) que

$$\exp \{ (1-\varepsilon) \delta(Q, \theta) r_m^q \} \leq |z_m|^{2\alpha} + |z_m|^{2\alpha} \exp \{ (1+\varepsilon) \delta(P, \theta) r_m^p \} + o(1),$$

d'où

$$\exp \{ (1-\varepsilon) \delta(Q, \theta) r_m^q \} \leq 3r_m^{2\alpha} \exp \{ (1+\varepsilon) \delta(P, \theta) r_m^p \}.$$

C'est une contradiction, pour r suffisamment grand. Par conséquent, $\frac{\log^+ |f(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors, il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M_2 |z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (5.3.10)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

Cas 1.2 : $q < p$. Par le Lemme 5.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), nous avons

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^p\} \leq |A_1(z)|, \quad (5.3.11)$$

$$|A_0(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(Q, \theta)r^q\} \quad (5.3.12)$$

pour r suffisamment grand. De (5.3.2), nous obtenons

$$|A_1(z)| \leq \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| + |A_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| + \left| \frac{F(z)}{f'(z)} \right|. \quad (5.3.13)$$

Par le même raisonnement que dans le Cas 1.1, nous prouvons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 5.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\left| \frac{f(z_m)}{f'(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m| \quad \text{as } m \rightarrow +\infty \quad (5.3.14)$$

et

$$\left| \frac{F(z_m)}{f'(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^{M|z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } m \rightarrow +\infty. \quad (5.3.15)$$

En utilisant les inégalités (5.3.3), (5.3.11), (5.3.12), (5.3.14) et la limite (5.3.15), nous concluons de l'inégalité (5.3.13) que

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r_m^p\} \leq |z_m|^{2\alpha} + |z_m| \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(Q, \theta)r_m^q\} + o(1),$$

d'où

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r_m^p\} \leq 3r_m^\alpha \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(Q, \theta)r_m^q\}.$$

C'est une contradiction, pour r suffisamment grand. Par conséquent, $\frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors, il existe une constante $M_3 > 0$ telle que

$$|f'(z)| \leq e^{M_3|z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (5.3.16)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par intégration comme dans la preuve du Lemme 5.2.3, nous concluons que

$$|f(z)| \leq (1 + o(1)) r |f'(z)| \leq e^{M_3 r^{\rho+2\varepsilon}}.$$

Alors, il existe une constante $M_3 > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M_3|z|^{\rho+2\varepsilon}} \quad (5.3.17)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

2ième Cas : $\delta(P, \theta) < 0$ et $\delta(Q, \theta) > 0$. Par le Lemme 5.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), nous avons

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(Q, \theta)r^q\} \leq |A_0(z)|, \quad (5.3.18)$$

$$|A_1(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^p\} \quad (5.3.19)$$

pour r suffisamment grand. Par le même raisonnement que dans le Cas 1.1, nous montrons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 5.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} \rightarrow +\infty \quad (5.3.20)$$

d'où

$$\left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^{M|z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right| \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow +\infty. \quad (5.3.21)$$

À partir de l'équation (5.3.2), nous obtenons

$$|A_0(z_m)| \leq \left| \frac{f''(z_m)}{f(z_m)} \right| + |A_1(z_m)| \left| \frac{f'(z_m)}{f(z_m)} \right| + \left| \frac{F(z_m)}{f(z_m)} \right|. \quad (5.3.22)$$

En utilisant les inégalités (5.3.3), (5.3.8), (5.3.9) et la limite (5.3.21), nous concluons de l'inégalité (5.3.22) que

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(Q, \theta)r_m^q\} \leq |z_m|^{2\alpha} + |z_m|^{2\alpha} \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^p\} + o(1)$$

d'où

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(Q, \theta)r_m^q\} \leq r_m^{2\rho} + 2o(1).$$

C'est une contradiction, pour r est suffisamment grand. (Nous avons pris $\delta(Q, \theta) > 0$). Par conséquent, $\frac{\log^+ |f(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Donc il existe une constante $M_4 > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M_4|z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (5.3.23)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

3ième Cas : $\delta(Q, \theta) < 0$ et $\delta(P, \theta) > 0$. Par le Lemme 5.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), nous avons

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^p\} \leq |A_1(z)| \quad (5.3.24)$$

$$|A_0(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(Q, \theta)r^q\}, \quad (5.3.25)$$

pour r suffisamment grand. De (5.3.2), nous obtenons

$$|A_1(z)| \leq \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| + |A_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| + \left| \frac{F(z)}{f'(z)} \right|. \quad (5.3.26)$$

Par le même raisonnement que dans le Cas 1.2, nous prouvons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 5.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\left| \frac{f(z_m)}{f'(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m| \quad \text{as } m \rightarrow +\infty \quad (5.3.27)$$

et

$$\left| \frac{F(z_m)}{f'(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^M |z_m|^{\rho+2\varepsilon}} \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } m \rightarrow +\infty. \quad (5.3.28)$$

En utilisant les inégalités (5.3.3), (5.3.24), (5.3.25), (5.3.27) et la limite (5.3.28), nous concluons de l'inégalité (5.3.26) que

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r_m^p\} \leq |z_m|^{2\alpha} + |z_m| \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(Q, \theta)r_m^q\} + o(1),$$

d'où

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r_m^p\} \leq r_m^{2\alpha} + 2o(1).$$

C'est une contradiction, pour r suffisamment grand. (Nous avons pris $\delta(P, \theta) > 0$). Par conséquent, $\frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors, il existe une constante $M_5 > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M_5 |z|^{\rho+2\varepsilon}} \quad (5.3.29)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

4ième Cas : $\delta(P, \theta) < 0$ et $\delta(Q, \theta) < 0$. De (5.3.2), nous obtenons

$$-1 \leq A_1(z) \frac{f'(z)}{f''(z)} + A_0(z) \frac{f(z)}{f''(z)} - \frac{F(z)}{f''(z)},$$

d'où

$$1 \leq |A_1(z)| \left| \frac{f'(z)}{f''(z)} \right| + |A_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f''(z)} \right| + \left| \frac{F(z)}{f''(z)} \right|. \quad (5.3.30)$$

Par le Lemme 5.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$) nous avons

$$|A_0(z)| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r^q \}, \quad (5.3.31)$$

$$|A_1(z)| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^p \}. \quad (5.3.32)$$

Nous prouvons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f''(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 5.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f''(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} \rightarrow +\infty \quad (5.3.33)$$

et

$$\left| \frac{f'(z_m)}{f''(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m|^2 \quad \text{et} \quad \left| \frac{f(z_m)}{f''(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m|^2 \quad \text{pour } m \rightarrow +\infty. \quad (5.3.34)$$

De (5.3.33) et pour tout nombre positif $M > 0$, nous avons

$$|f''(z_m)| > e^M |z_m|^{\rho+\varepsilon} \quad \text{as } m \rightarrow +\infty \quad (5.3.35)$$

et avec le même raisonnement comme ci-dessus nous obtenons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f''(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f''(z_m)} \right|,$$

de (5.3.35) et le Lemme 5.2.13, pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$), il existe des constantes positives $c > 0$, $M_1 > 0$ telles que

$$\left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f''(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{(1 - \varepsilon) c r^{M_1} e^M |z_m|^{\rho+\varepsilon}} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{e^M |z_m|^{\rho+2\varepsilon}} \right|.$$

Puisque $\rho(H) < \rho$, donc nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f''(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^{M_3} |z_m|^{\rho+2\varepsilon}} \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } m \rightarrow +\infty. \quad (5.3.36)$$

En utilisant les inégalités (5.3.31), (5.3.32), (5.3.34) et la limite (5.3.36), nous concluons de l'inégalité (5.3.30) que

$$1 \leq \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r_m^n\} r_m^2 (1 + o(1)) + \exp \{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r_m^n\} r_m^2 (1 + o(1)) + o(1),$$

d'où

$$1 \leq 3o(1).$$

C'est une contradiction, pour r suffisamment grand. (Nous avons pris $0 < \varepsilon < 1$, d'où $(1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) < 0$ et $(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) < 0$). Par conséquent, $\frac{\log^+ |f''(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, il existe une constante $M_6 > 0$ telle que

$$|f''(z)| \leq e^{M_6 |z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (5.3.37)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par conséquent, par une intégration réitérée comme dans la preuve du Lemme 5.2.3, nous concluons que

$$|f(z)| \leq (1 + o(1)) r^2 |f''(z)|,$$

d'où

$$|f(z)| \leq (1 + o(1)) r^2 e^{M_6 |z|^{\rho+\varepsilon}} \leq e^{M_6 |z|^{\rho+\varepsilon}(1+o(1))} \leq e^{M_6 r^{\rho+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par conséquent dans tous les cas, il existe une constante positive $M_7 > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M_7 r^{\rho+2\varepsilon}}. \quad (5.3.38)$$

Puisque les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles de A_j ($j = 0, 1$), F et puisque A_j ($j = 0, 1$), F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, alors $f(z)$ doit avoir un nombre fini de pôles. Par conséquent, par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où $d(z)$ est un polynôme, $g(z)$ est une fonction entière avec $\rho(g) = \rho(f)$. Noton $n = \max\{p, q\}$, par la première affirmation dans la preuve du Théorème 5.1.1 on a $\rho(g) \geq n$. De (5.3.38), nous avons

$$\left| \frac{g(z)}{d(z)} \right| \leq e^{M_7 r^{\rho+2\varepsilon}},$$

d'où

$$|g(z)| \leq |d(z)| e^{M_7 r^{\rho+2\varepsilon}} \leq r^\beta e^{M_7 r^{\rho+2\varepsilon}},$$

donc

$$|g(z)| \leq e^{M_7 r^{\rho+3\varepsilon}}. \quad (5.3.39)$$

Par conséquent, pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3)$, où $(E_2 \cup E_3) \subset [0, 2\pi)$ est un ensemble de mesure linéaire nulle, nous avons (5.3.39) pour $|z| = r$ suffisamment grand. Alors, par le Lemme 5.2.4 $\rho(g) \leq \rho + 3\varepsilon < n$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, c'est une contradiction avec $\rho(g) \geq n$. Par conséquent, chaque solution méromorphe transcendante f de (5.1.3) doit être d'ordre infini.

5.4 Preuve du Théorème 5.1.2.

Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (5.1.3), alors par le Théorème 5.1.1 f est d'ordre infini. Par conséquent par le Lemme 5.2.12, nous obtenons

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty.$$

Nous savons, les zéros de f se produisent de l'ensemble des pôles de $h_j(z)$ $j = 0, 1$ ou de l'ensemble des zéros de $F(z)$ et si z_0 est un zéro de f d'ordre m , $m > 2$, alors z_0 doit être un zéro à $F(z)$ d'ordre $m - 2$. Par conséquent, de $F \neq 0$ nous obtenons

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N(r, h_0) + N(r, h_1). \quad (5.4.1)$$

Nous pouvons écrire (5.1.3) sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left[\frac{f''}{f} + h_1 e^P \frac{f'}{f} + h_0 e^Q \right],$$

d'où

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + m(r, h_0) + m(r, h_1) + m(r, e^P) \\ &\quad + m(r, e^Q) + m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1). \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Par conséquent, par le lemme sur la dérivée logarithmique (voir [47] [34], [38, Lemme 2.3]), il existe un ensemble E de mesure linéaire finie tel que pour tout $r \notin E$, nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(\log T(r, f) + O(\log r)) \quad j = 1, 2. \quad (5.4.3)$$

Par (5.4.1) et (5.4.2), nous avons

$$\begin{aligned} T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) &\leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N(r, h_0) + N(r, h_1) + m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \\ &\quad m(r, h_0) + m(r, h_1) + m(r, e^P) + m(r, e^Q) + m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1), \end{aligned}$$

nous appliquons (5.4.3)

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + T(r, h_0) + T(r, h_1) \\ &\quad + T(r, e^P) + T(r, e^Q) + C \log(rT(r, f)), \quad r \notin E, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

où C est une constante positive. Puisque pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, nous avons

$$C \log(rT(r, f)) \leq \frac{1}{2}T(r, f), \quad T(r, F) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \quad T(r, e^P) \leq r^{n+\varepsilon}, \quad (5.4.5)$$

$$T(r, e^Q) \leq r^{n+\varepsilon}, \quad T(r, h_j) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \quad j = 0, 1 \quad (5.4.6)$$

tels que $n = \max\{p, q\}$. Alors, pour $r \notin E$ et r suffisamment grand et par l'utilisation de (5.4.5), (5.4.6) nous concluons de (5.4.4) que

$$T(r, f) \leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 3r^{\rho+\varepsilon} + 2r^{n+\varepsilon} + \frac{1}{2}T(r, f) + O(\log(r)),$$

d'où

$$T(r, f) \leq 4\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 6r^{\rho+\varepsilon} + 4r^{n+\varepsilon} + O(\log(r)).$$

Par conséquent, pour $r \rightarrow +\infty$ et par le Lemme 5.2.8, nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f),$$

alors

$$\lambda_2(f) \geq \bar{\lambda}_2(f) \geq \rho_2(f).$$

Puisque par définition, nous avons $\lambda_2(f) \leq \rho_2(f)$, donc

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f).$$

Du Lemme 5.2.9, nous obtenons

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq n.$$

5.5 Preuve du Théorème 5.1.3.

Soit f une solution méromorphe non triviale de l'équation (5.1.3), en appliquant le Théorème 5.1.1, nous obtenons $\rho(f) = +\infty$.

1ière Étape. Nous commençons par les points fixes de $f(z)$. Soit $g_0(z) = f(z) - z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g_0(z) = 0$. Nous avons $g_0(z)$ est une fonction

méromorphe et $\rho(g_0) = \rho(f) = +\infty$. La substitution $f(z) = g_0(z) + z$ dans l'équation (5.1.3), nous donne

$$g_0'' + h_1 e^{P(z)} g_0' + h_0 e^{Q(z)} g_0 = F - h_1 e^{P(z)} - z h_0 e^{Q(z)}. \quad (5.5.1)$$

Nous écrivons (5.5.1) sous la forme

$$g_0'' + A_{0,1} g_0' + A_{0,0} g_0 = F - A_{0,1} - z A_{0,0} = A_0. \quad (5.5.2)$$

Pour l'équation (5.5.2), nous considérons juste les solutions méromorphes d'ordre infini $g_0(z) = f(z) - z$. Nous avons

$$A_0 = F - h_1 e^{P(z)} - z h_0 e^{Q(z)}, \quad \deg(P(z) - Q(z)) = \max\{q, p\}$$

et

$$\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < \min\{q, p\}.$$

Puisque $h_j \neq 0$ $j = 0, 1$, alors d'après le Lemme 5.2.11, nous avons $A_0 \neq 0$. Nous utilisons le Lemme 5.2.12 à l'équation (5.5.2) en haut, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\tau}(f) = \rho(g_0) = +\infty.$$

2ième Étape. maintenant nous considérons les points fixes de $f'(z)$. Soit $g_1(z) = f'(z) - z$, alors z est un point fixe de $f'(z)$ si et seulement si $g_1(z) = 0$. Nous avons $g_1(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_1) = \rho(f') = \rho(f) = +\infty$.

En dérivant les deux côtés de l'équation (5.1.3), nous obtenons

$$f^{(3)} + h_1 e^{P(z)} f'' + \left[(h_1 e^{P(z)})' + h_0 e^{Q(z)} \right] f' + (h_0 e^{Q(z)})' f = F'. \quad (5.5.3)$$

Par l'équation (5.1.3) nous avons

$$f = -\frac{1}{h_0 e^{Q(z)}} \left[f'' + h_1 e^{P(z)} f' - F \right]. \quad (5.5.4)$$

En substituant (5.5.4) dans (5.5.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} & f^{(3)} + \left[h_1 e^{P(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} \right] f'' \\ & + \left[(h_1 e^{P(z)})' + h_0 e^{Q(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} h_1 e^{P(z)} \right] f' + \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F = F'. \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Nous pouvons noter l'équation (5.5.5) sous la forme suivante

$$f^{(3)} + A_{1,1}f'' + A_{1,0}f' = -\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \quad (5.5.6)$$

où $A_{1,j}$ ($j = 0, 1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (5.5.5). Par la substitution de $f'(z) = g_1(z) + z$, $f''(z) = g_1'(z) + 1$, $f^{(3)} = g_1''$ dans l'équation (5.5.6), nous obtenons

$$g_1'' + A_{1,1}g_1' + A_{1,0}g_1 = -A_{1,1} - z A_{1,0} - \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' = A_1, \quad (5.5.7)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= - \left[h_1e^{P(z)} - \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}} \right] \\ &\quad - z \left[(h_1e^{P(z)})' + h_0e^{Q(z)} - \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}h_1e^{P(z)} \right] - \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \\ &= -\frac{1}{h_0e^{Q(z)}} (zh_0^2e^{2Q(z)} + B_1e^{Q(z)} + B_2e^{Q(z)+P(z)}) = -\frac{1}{h_0e^{Q(z)}} \left[\sum_{j=0}^{j=2} B_j e^{G_j} \right], \end{aligned}$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $G_0 = 2Q(z)$ et $B_0 = zh_0^2$, B_j sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à $\min\{p, q\}$, écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions $z, h_i, h'_j, Q', P', F, F'$.

1er Cas : $q > p$, alors $\deg(2Q(z) - Q(z)) = q$ et $\deg(2Q(z) - Q(z) - P(z)) = q$. D'après le Lemme 5.2.11 et le fait $h_0 \neq 0$ ($B_0 \neq 0$), nous avons $A_1 \neq 0$.

2ème Cas : $q < p$ et $B_2 \neq 0$, alors $\deg(Q(z) + P(z) - 2Q(z)) = p$ et $\deg(Q(z) + P(z) - Q(z)) = p$. D'après le Lemme 5.2.11 et le fait $B_2 \neq 0$, nous avons $A_1 \neq 0$.

3ème Cas : $q < p$ et $B_2 \equiv 0$, nous avons

$$A_1 = -\frac{1}{h_0e^{Q(z)}} (zh_0^2e^{2Q(z)} + B_1e^{Q(z)})$$

$\deg(2Q(z) - Q(z)) = q$. D'après le Lemme 5.2.11 et le fait $h_0 \neq 0$ ($B_0 \neq 0$); $\rho(B_1) < q$. Nous avons $A_1 \neq 0$. Dans tous les cas nous avons $A_1 \neq 0$. Nous employons le Lemme 5.2.12 à l'équation (5.5.7) en haut, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

3ème Étape. Nous prouvons que $\bar{\tau}(f'') = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty$. Soit $g_2(z) = f''(z) - z$, alors z est un point fixe de $f''(z)$ si et seulement si $g_2(z) = 0$. Nous avons $g_2(z)$ est une

fonction méromorphe et $\rho(g_2) = \rho(f'') = \rho(f) = +\infty$. Nous prouvons juste que $\bar{\lambda}(g_2) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (5.5.6), nous obtenons

$$f^{(4)} + A_{1,1}f^{(3)} + (A'_{1,1} + A_{1,0})f'' + A'_{1,0}f' = \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)'. \quad (5.5.8)$$

De l'équation (5.5.6), nous avons

$$f' = -\frac{1}{A_{1,0}} \left[f^{(3)} + A_{1,1}f'' + \frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right]. \quad (5.5.9)$$

Nous remarquons que $A_{1,0} \neq 0$ $\left[A_{1,0} = \frac{1}{h_0e^{Q(z)}} (h_0^2e^{2Q} + \alpha_{1,1}e^{Q+P}) \right]$ car $h_0 \neq 0$ (pour la preuve, nous pouvons appliquer le Lemme 5.2.11). En substituant (5.5.9) dans (5.5.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(4)} + \left[A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \right] f^{(3)} + \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] f'' \\ - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) = \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)'. \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Nous pouvons noter l'équation (5.5.10) sous la forme suivante

$$f^{(4)} + A_{2,1}f^{(3)} + A_{2,0}f'' = \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)', \quad (5.5.11)$$

où $A_{2,j}$ ($j = 0, 1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (5.5.10) ci-dessus, et nous avons

$$A_{2,0} = A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \quad \text{et} \quad A_{2,1} = A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}}.$$

La substitution de $f''(z) = g_2(z) + z$, $f^{(3)}(z) = g_2'(z) + 1$, $f^{(4)} = g_1^{(2)}$ dans l'équation (5.5.11), nous donne

$$g_2'' + A_{2,1}g_2' + A_{2,0}g_2 = A_2, \quad (5.5.12)$$

où

$$\begin{aligned} A_2 &= -A_{2,1} - z A_{2,0} + \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)' \\ &= - \left[A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \right] - z \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] \\ &\quad + \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0e^{Q(z)})'}{h_0e^{Q(z)}}F + F' \right)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{A_{1,0}} \left[A_{1,1}A_{1,0} - A'_{1,0} + z A'_{1,1}A_{1,0} + z A_{1,0}^2 - z A'_{1,0}A_{1,1} \right. \\
&\quad \left. - A'_{1,0} \left(\frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F - F' \right) - A_{1,0} \left(-\frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F + F' \right) \right]. \tag{5.5.13}
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= (h_1 e^{P(z)})' + h_0 e^{Q(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} h_1 e^{P(z)}, \\
A_{1,1} &= h_1 e^{P(z)} - \frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}}, \\
\frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F - F' &= H \quad (\rho(H) < \min \{q, p\}).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= \frac{1}{h_0 e^{Q(z)}} (h_0^2 e^{2Q} + \alpha_{1,1} e^{Q+P}), \\
A_{1,1} &= \frac{1}{h_0 e^{Q(z)}} (\beta_{1,0} e^Q + \beta_{1,1} e^{P+Q})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A'_{1,0} &= \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)})^2} (\alpha_{2,0} e^{3Q} + \beta_{2,2} e^{2Q+P}), \\
A'_{1,1} &= \frac{1}{(h_0 e^{Q(z)})^2} (\beta_{2,0} e^{2Q} + \beta_{2,1} e^{2Q+P}), \\
\left(-\frac{(h_0 e^{Q(z)})'}{h_0 e^{Q(z)}} F + F' \right)' &= -H'
\end{aligned}$$

où $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à $\min \{q, p\}$, écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions h_k, h'_m, Q', P', F, F' . De (5.5.13) avons nous

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{1}{A_{1,0} (h_0 e^{Q(z)})^3} [z h_0^5 e^{5Q} + B_1 e^{4Q} + B_2 e^{4Q+P} + B_3 e^{3Q+P} + B_4 e^{3Q+2P}] \\
&= -\frac{1}{A_{1,0} (h_0 e^{Q(z)})^3} \left[\sum_{j=0}^{j=4} B_j e^{G_j} \right], \quad G_j \text{ sont des polynômes définis comme ci-dessus}
\end{aligned}$$

où $B_0 = z h_0^5$ où B_j sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à $\min \{q, p\}$. Nous certifions que $A_2 \not\equiv 0$.

lier Cas : $q > p$, alors nous avons

$\deg(5Q - 4Q) = \deg Q = q$, $\deg(5Q - 4Q - P) = \deg(Q - P) = q$,
 $\deg(5Q - 3Q - P) = \deg(2Q - P) = q$, $\deg(5Q - 3Q - 2P) = \deg(2Q - 2P) = q$.
 Par conséquent $\deg(G_0 - G_j) = q$ ($j = 1, 2, 3, 4$) et $\rho(B_j) < q$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). D'après le
 Lemme 5.2.11 et le fait $h_0 \neq 0$ ($B_0 \neq 0$), nous avons $A_2 \neq 0$.

2ième Cas : $q < p$ et $B_4 \neq 0$, alors
 $\deg(3Q(z) + 2P(z) - 5Q(z)) = p$, $\deg(3Q(z) + 2P(z) - 4Q(z)) = p$,
 $\deg(3Q(z) + 2P(z) - 4Q(z) - P(z)) = p$, $\deg(3Q(z) + 2P(z) - 3Q(z) - P(z)) = p$.
 Par conséquent $\deg(G_4 - G_j) = P$ ($j = 0, 1, 2, 3$) et $\rho(B_j) < P$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$). D'après le
 Lemme 5.2.11 et le fait $B_4 \neq 0$, nous avons $A_1 \neq 0$.

3ième Cas : $q < p$ et $B_4 \equiv 0$, nous avons deux sous-cas

Cas 3.1 : $B_2e^{4Q} + B_3e^{3Q} \neq 0$, alors nous avons

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)})^3} [zh_0^5e^{5Q} + B_1e^{4Q} + (B_2e^{4Q} + B_3e^{3Q})e^P]$$

et on a

$$\deg(P(z) - 5Q(z)) = p = \deg(P(z) - 4Q(z)).$$

D'après le Lemme 5.2.11 et le fait $\rho(B_2e^{4Q} + B_3e^{3Q}) < p$, nous avons $A_1 \neq 0$.

Cas 3.2 : $B_2e^{4Q} + B_3e^{3Q} \equiv 0$, alors nous avons

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{Q(z)})^3} [zh_0^5e^{5Q} + B_1e^{4Q}]$$

et on a $\deg(5Q(z) - 4Q(z)) = \deg Q(z) = q$, $\rho(B_2e^{4Q} + B_3e^{3Q}) < q$. D'après le Lemme
 5.2.11 et le fait $h_0 \neq 0$, nous avons $A_1 \neq 0$. Dans tous les cas nous avons $A_2 \neq 0$. Nous
 utilisons le Lemme 5.2.12 à l'équation (5.5.7) ci-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \rho(g_2) = \rho(f) = +\infty .$$

Hyper-ordre et points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur

6.1 Introduction et résultats

Plusieurs auteurs tels que Kwon [45], Chen [19], Gundersen [35, p. 419] ont étudié l'équation différentielle linéaire du second degré

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (6.1.1)$$

où $P(z)$, $Q(z)$ sont des polynômes non constants, $A_1(z), A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que $\rho(A_1) < \deg P(z)$, $\rho(A_0) < \deg Q(z)$, Gundersen [35, p. 419] a montré que si $\deg P(z) \neq \deg Q(z)$, alors chaque solution non constante de (6.1.1) est d'ordre infini. Si $\deg P(z) = \deg Q(z)$, alors (6.1.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini, par exemple $f(z) = e^z + 1/2$ satisfait $f'' + 2e^z f' - 2e^z f = 0$. Dans le chapitre 5, nous avons amélioré et généralisé le résultat de Gundersen [35] pour une classe d'équations différentielles de deuxième ordre à coefficients méromorphes. En ce chapitre, nous considérons l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \dots + h_1(z) e^{P_1(z)} f' + h_0(z) e^{P_0(z)} f = F(z), \quad (6.1.2)$$

où $P_j(z)$ sont des polynômes de degré $n_j \geq 1$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). h_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) pas toutes nulles, F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles. Nous généralisons nos résultats dans le chapitre 5 et nous améliorons l'étude dans [35].

Théorème 6.1.1 Soient $n_j \geq 1$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des nombres entiers, $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des polynômes de degré n_j , et $h_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) pas toutes nulles, F des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, telles que $\rho(F) < n = \max\{n_j : j = 0, 1, \dots, k-1\}$ et $\rho(h_j) < n_j$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Supposons que n_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres entiers distincts. Alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (6.1.2) est d'ordre infini et l'hyper-ordre de f satisfait $\rho_2(f) \leq n$.

En outre, si $F \not\equiv 0$, alors chaque solution méromorphe f de l'équation (6.1.2) satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq n.$$

Théorème 6.1.2 Soient $n_j \geq 1$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des nombres entiers, $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des polynômes de degré n_j , et $h_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($h_0 \not\equiv 0$), F des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, telles que

$$n = \max\{\rho(h_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F)\} < n_j \ (j = 0, 1, \dots, k-1),$$

avec $P_j(z) \equiv 0$ si $h_j \equiv 0$. Si n_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres entiers distincts, alors pour n'importe quelle solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (6.1.2), nous avons f, f', f'' ont un nombre infini des points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = +\infty.$$

6.2 Lemmes préliminaires

Lemme 6.2.1 [52, p. 254] Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, ($a_n = \alpha + i\beta \neq 0$) un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe avec $\rho(A) < n$. Soit $f(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = r e^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_2 \cup E_3)$, où $E_3 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, alors pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons

(i) Si $\delta(P, \theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}, \quad (6.2.1)$$

(ii) Si $\delta(P, \theta) < 0$, alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(P, \theta) r^n\}. \quad (6.2.2)$$

Lemme 6.2.2 [34, p. 89] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\rho(f) = \rho < +\infty$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de

nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_3$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \psi_0$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (6.2.3)$$

Lemme 6.2.3 [4] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, et supposons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^\rho}$$

est non bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ avec la constante $\rho > 0$. Alors, il existe, une séquence infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ ($n = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que $G(z_n) \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{s-j} \quad (j = 0, \dots, s-1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (6.2.4)$$

Lemme 6.2.4 [61] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que $\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^\sigma$ pour tout rayon $\arg(z) = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, où M est une constante positive dépend de θ , tandis que σ est une constante indépendante de θ . Alors

$$\rho(f) \leq \sigma. \quad (6.2.5)$$

Lemme 6.2.5 [19] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|f(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}. \quad (6.2.6)$$

Lemme 6.2.6 [68] Soit $f(z) = g(z)/d(z)$ une fonction méromorphe transcendante, où $g(z)$ une fonction entière transcendante et $d(z)$ un polynôme. Alors, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6$, $r \rightarrow +\infty$ et $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z} \right)^n (1 + o(1)) \quad (6.2.7)$$

où $n \geq 1$ est un nombre entier positif.

Lemme 6.2.7 [23] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière d'ordre infini et d'hyper-ordre $\rho_2(f) = \rho$. Alors,

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r}. \quad (6.2.8)$$

Lemme 6.2.8 [50] Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini. On dénote $M(r, g) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$, alors pour tout nombre $\lambda > 0$ suffisamment grand, et tout $r \in E_7 \subset (1, +\infty)$, on a

$$M(r, g) > c_1 \exp\{c_2 r^\lambda\}, \quad (6.2.9)$$

où $lm(E_7) = +\infty$ et c_1, c_2 sont des constantes positives.

Lemme 6.2.9 Supposons que $k \geq 2$ et $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F$ sont des fonctions méromorphes (non-toutes nulles) ayant un nombre fini de pôles. Soit $\rho = \max\{\rho(A_j) (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F)\} < +\infty$ et soit $f(z)$ une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F. \quad (6.2.10)$$

Alors,

$$\rho_2(f) \leq \rho.$$

En outre, si $F \not\equiv 0$, alors nous avons

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq \rho.$$

Preuve. Nous assumons que f est une solution méromorphe de l'équation (6.2.10) d'ordre infini $\rho(f) = +\infty$.

Nous pouvons récrire (6.2.10) sous la forme

$$\left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| \leq |A_{k-1}| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f} \right| + |A_{k-2}| \left| \frac{f^{(k-2)}}{f} \right| + \dots + |A_1| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right| + |A_0|. \quad (6.2.11)$$

Puisque les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles des A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et F et puisque A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, alors $f(z)$ doit avoir un nombre fini de pôles. Par conséquent, par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $d(z)$ est un polynôme, $g(z)$ est une fonction entière transcendante avec $\rho_2(f) = \rho_2(g)$ et $\rho(g) = \rho(f) = +\infty$. Par les Lemme 6.2.5, Lemme 6.2.6 et Lemme 6.2.8, pour $\varepsilon > 0$ assez petit et tout nombre $\lambda > \rho + \varepsilon$ suffisamment grand, il existe un ensemble $E_3 = E_0 \cup E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et un ensemble $E \subset (1, +\infty)$

avec $lm(E) = +\infty$ et deux constantes positives c_1, c_2 , telles que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E \setminus [0, 1] \cup E_3$, $r \longrightarrow +\infty$ avec $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z} \right)^j (1 + o(1)) \quad (j = 1, \dots, k), \quad (6.2.12)$$

$$|A_j(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \text{ et } |F(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}, \quad (6.2.13)$$

$$\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{F(z)}{g(z)} \right| |d(z)| < Ar^m \frac{1}{c_1} \exp \{r^{\rho+\varepsilon} - c_2 r^\lambda\} \longrightarrow 0 \quad (6.2.14)$$

où $A > 0$ est une constante, $m = \max \{\deg d(z), 1\}$ est un entier. La Substitution de (6.2.12), (6.2.13) et (6.2.14) dans (6.2.11), donne

$$\left| \frac{v_g(r)}{z} \right|^k |1 + o(1)| \leq \sum_{j=1}^{k-1} e^{r^{\rho+\varepsilon}} \left| \frac{v_g(r)}{z} \right|^j (1 + o(1)) + o(1) + e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

donc

$$(v_g(r))^k |1 + o(1)| \leq (k+1) e^{r^{\rho+\varepsilon}} r^k (v_g(r))^{k-1} (1 + o(1)),$$

d'où

$$v_g(r) |1 + o(1)| \leq (k+1) e^{r^{\rho+\varepsilon}} r^k (1 + o(1)) \quad (6.2.15)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_7 \setminus [0, 1] \cup E$, $r \longrightarrow +\infty$ avec $|g(z)| = M(r, g)$. Par conséquent, par le Lemme 6.2.7 et de (6.2.15) nous obtenons

$$\rho_2(f) = \rho_2(g) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log v_g(r)}{\log r} \leq \rho + \varepsilon.$$

Puisque ε ($\varepsilon < \lambda - \rho$) étant arbitraire, alors nous avons

$$\rho_2(f) \leq \rho. \quad (6.2.16)$$

Nous savons que si z_0 est un zéro de f d'ordre m , $m > k$, alors z_0 doit être un zéro de $F(z)$ d'ordre $m - k$. Par conséquent, de $F \not\equiv 0$ et de l'équation (6.2.10), nous obtenons

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{j=k-1} N(r, A_j). \quad (6.2.17)$$

Nous pouvons écrire (6.2.10) sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left[\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + A_1 \frac{f'}{f} + A_0 \right],$$

d'où

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{j=k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{j=k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1). \quad (6.2.18)$$

Par conséquent, par le lemme sur la dérivée logarithmique (Voir [47] [34], [38, Lemme 2.3]), il existe un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout $r \notin E$, nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(\log T(r, f) + O(\log r)) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Par (6.2.17) et (6.2.18), nous avons

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{j=k-1} N(r, A_j) + m\left(r, \frac{1}{F}\right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{j=k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{j=k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1) \\ &= k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{j=k-1} T(r, A_j) + C \log(rT(r, f)), \quad r \notin E \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

où C est une constante positive. Puisque pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, nous avons

$$C \log(rT(r, f)) \leq \frac{1}{2}T(r, f), \quad T(r, F) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \quad (6.2.20)$$

$$T(r, A_j) \leq r^{\rho+\varepsilon} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (6.2.21)$$

Alors, pour $r \notin E$ et r suffisamment grand et par l'utilisation de (6.2.20), (6.2.21) nous concluons de (6.2.19) que

$$T(r, f) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+1)r^{\rho+\varepsilon} + \frac{1}{2}T(r, f)$$

d'où

$$T(r, f) \leq 2k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2(k+1)r^{\rho+\varepsilon}, \quad r \notin E. \quad (6.2.22)$$

Par conséquent, d'après (6.2.22), nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f),$$

alors

$$\lambda_2(f) \geq \bar{\lambda}_2(f) \geq \rho_2(f).$$

Puisque par définition, nous avons $\lambda_2(f) \leq \rho_2(f)$, alors

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f),$$

donc, par (6.2.16) nous obtenons

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq \rho.$$

□

Lemme 6.2.10 [3, p. 34] Soient $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des polynômes avec $\deg(P_0(z)) = n$ ($n \geq 1$) et $\deg(P_j(z)) \leq n$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Soient $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des fonctions méromorphes d'ordre fini et $\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, k\} < n$ telles que $A_0(z) \not\equiv 0$. Nous dénotons

$$F(z) = A_k e^{P_k(z)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + \dots + A_s e^{P_s(z)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)} + A_0 e^{P_0(z)}. \quad (6.2.23)$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ pour tout $j = 1, 2, \dots, k$, alors F est une fonction méromorphe non triviale d'ordre fini et satisfait $\rho(F) = n$.

Lemme 6.2.11 [20] Soient A_j, F ($F \not\equiv 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_1 f' + A_0 f = F.$$

Alors, f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \sigma(f) = +\infty. \quad (6.2.24)$$

6.3 Preuve du Théorème 6.1.1.

D'abord, nous montrons que chaque solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$. Nous assumons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation (6.1.2) avec $\rho(f) < n$. Puisque $\deg P_j \neq \deg P_i$ ($0 \leq i < j \leq k-1$) alors, il existe exactement un $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ tel que

$$h_s \not\equiv 0 \text{ et } \deg P_s(z) = n = \max\{\deg P_j(z) \mid (j = 0, 1, \dots, k-1)\}.$$

Nous pouvons récrire l'équation (6.1.2) sous la forme

$$h_{k-1}(z) f^{(k-1)} e^{P_{k-1}(z)} + \dots + h_s(z) f^{(s)} e^{P_s(z)} + \dots + h_1(z) f' e^{P_1(z)} + h_0(z) f e^{P_0(z)} = B(z), \quad (6.3.1)$$

où

$$B(z) = -f^{(k)} + F(z).$$

Puisque $\sigma = \max\{\rho(h_j) \mid (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F)\} < n$, $\deg P_j(z) < n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($j \neq s$) et $\rho(f) < n$, alors $h_j(z) f^{(j)}(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $B(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho(h_j f^{(j)}) < n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $\rho(B) < n$. Nous avons $\deg(P_s(z) - P_j(z)) = n$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$) ($j \neq s$). Par le Lemme 6.2.10, nous constatons que l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (6.3.1) est n , ceci contredit le

fait $\rho(B) < n$. En conséquence, toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (6.1.2) est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$.

Supposons contrairement à l'affirmation que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (6.1.2) avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, par l'affirmation ci-dessus nous avons $n \leq \rho(f)$. Récrivons l'équation (6.1.2) sous la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F, \quad (6.3.2)$$

où $A_j(z) = h_j(z)e^{P_j(z)}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Par le Lemme 6.2.2, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_3$, il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$, telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \theta$ et $|z| = r \geq R_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{2\rho}, \quad 0 \leq i < j \leq k. \quad (6.3.3)$$

Par le Lemme 6.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, où $E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = 0 \ (j = 0, 1, \dots, k-1)\}$ est un ensemble fini. Alors, pour $|z| = r$ suffisamment grands, nous avons $\delta(P_j, \theta) \neq 0 \ (j = 0, 1, \dots, k-1)$ et $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) satisfont l'une des inégalités (6.2.11) ou (6.2.12). Pour θ fixe avec $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, nous avons deux cas : Au moins un de $\delta(P_j, \theta)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) est strictement positif ou tout les $\delta(P_j, \theta)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) satisfont $\delta(P_j, \theta) < 0$. Nous discutons maintenant ces deux cas séparément.

1er Cas : Soit $\delta(P_{j_i}, \theta) = \delta_{j_i} > 0$ pour $j_i \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \subset \{0, 1, \dots, k-1\}$ et $\delta(P_l, \theta) = \delta_l < 0$ ($\delta_l \neq 0$) pour $l \in \{0, 1, \dots, k-1\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Alors, il existe un $j_s \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ tel que

$$\deg P_{j_s} = d_{j_s} = \max \{ \deg P_{j_i} : j_i = j_1, j_2, \dots, j_m \}.$$

Par le Lemme 6.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), nous avons

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta_{j_s} r^{d_{j_s}} \} \leq |A_{j_s}(z)|,$$

$$|A_{j_i}(z)| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_{j_i} r^{d_{j_i}} \} \text{ pour } j_i = j_1, j_2, \dots, j_m \text{ et } j_s \neq j_i,$$

$$|A_l(z)| \leq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta_l r^{d_l} \} \text{ pour } l \in \{0, 1, \dots, k-1\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$$

où r est suffisamment grand. Dénotons $d_{j_i} = \max \{ \deg P_{j_i} : j_i = j_1, j_2, \dots, j_m; j_i \neq j_s \}$. Donc pour r suffisamment grands, nous avons

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta_{j_s} r^{d_{j_s}} \} \leq |A_{j_s}(z)|, \quad (6.3.4)$$

$$|A_j(z)| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_{j_t} r_m^{d_{j_t}} \} \text{ pour } j \in \{0, 1, \dots, k-1\} \text{ et } j_s \neq j_i. \quad (6.3.5)$$

Nous montrons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(j_s)}(z)|}{|z|^{\sigma+\varepsilon}} \quad (6.3.6)$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 6.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f^{(j_s)}(z_m)|}{|z_m|^{\sigma+\varepsilon}} \rightarrow +\infty \quad (6.3.7)$$

et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| \leq \frac{1}{(j_s - j)!} (1 + o(1)) |z_m|^{j_s - j} \quad (j = 0, \dots, j_s - 1) \text{ as } m \rightarrow +\infty. \quad (6.3.8)$$

De (6.3.7), pour tout nombre $M_1 > 0$ suffisamment grand, nous avons

$$\frac{\log^+ |f^{(j_s)}(z_m)|}{|z_m|^{\sigma+\varepsilon}} > M_1, \text{ alors } |f^{(j_s)}(z_m)| > e^{M_1 |z_m|^{\sigma+\varepsilon}} \text{ pour } m \rightarrow +\infty. \quad (6.3.9)$$

Puisque $F(z)$ est une fonction méromorphe avec un nombre fini de pôles, alors par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire $F(z)$ sous la forme $F(z) = \frac{H(z)}{\pi(z)}$, où $\pi(z)$ est un polynôme, $H(z)$ est une fonction entière avec $\rho(H) = \rho(F)$. De (6.3.9) pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$), nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f^{(j_s)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{c r_m^d e^{M_1 |z_m|^{\sigma+\varepsilon}}} = \frac{|H(z_m)|}{e^{M_1 |z_m|^{\sigma+2\varepsilon}}},$$

où $c > 0$ est une constante et $d = \max \{ \deg \pi, 1 \}$ est un nombre entier. Puisque $\rho(H) = \rho(F) \leq \sigma$, alors nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{e^{M_1 |z_m|^{\sigma+2\varepsilon}}} \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow +\infty. \quad (6.3.10)$$

De l'équation (6.3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} |A_{j_s}(z_m)| &\leq \left| \frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| + |A_{k-1}(z_m)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| \\ &+ \dots + |A_{j_s+1}(z_m)| \left| \frac{f^{(j_s+1)}(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| + |A_{j_s-1}(z_m)| \left| \frac{f^{(j_s-1)}(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| \\ &+ \dots + |A_1(z_m)| \left| \frac{f'(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| + |A_0(z_m)| \left| \frac{f(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| + \left| \frac{F(z_m)}{f^{(j_s)}(z_m)} \right| \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

En utilisant les inégalités (6.3.3), (6.3.4), (6.3.5), (6.3.8) et la limite (6.3.10), nous concluons de l'inégalité (6.3.11) que

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta_{j_s} r_m^{d_{j_s}} \} \leq r_m^\alpha + (k-1) r_m^\alpha \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_{j_t} r_m^{d_{j_t}} \} + o(1)$$

où α est une constante qui vérifie $\alpha > \max \{2\rho, (j_s - j) \mid j = 0, \dots, j_s - 1\}$. Par conséquent

$$\exp \left\{ (1 - \varepsilon) \delta_{j_s} r_m^{d_{j_s}} \right\} \leq (k + 1) r_m^\alpha \exp \left\{ (1 + \varepsilon) \delta_{j_t} r_m^{d_{j_t}} \right\},$$

d'où

$$\exp \left\{ (1 - \varepsilon) \delta_{j_s} r_m^{d_{j_s}} - (1 + \varepsilon) \delta_{j_t} r_m^{d_{j_t}} \right\} \leq (k + 1) r_m^\alpha.$$

C'est une contradiction, pour r suffisamment grand, $0 < \varepsilon < 1$ et $d_{j_s} > d_{j_t}$. Par conséquent, $\frac{\log^+ |f^{(j_s)}(z)|}{|z|^{\sigma+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$|f^{(j_s)}(z)| \leq e^{M_2 |z|^{\sigma+\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

2ième Cas : $\delta(P_j, \theta) = \delta_j < 0$ ($j = 0, 1, \dots, k - 1$). De (6.3.2), nous obtenons

$$1 \leq |A_{k-1}(z)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + |A_{k-2}(z)| \left| \frac{f^{(k-2)}(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + \dots + |A_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + \left| \frac{F(z)}{f^{(k)}(z)} \right|. \quad (6.3.12)$$

Par le Lemme 6.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp \left\{ (1 - \varepsilon) \delta_j r^{d_j} \right\}, \quad (j = 0, 1, \dots, k - 1),$$

d'où

$$|A_j(z)| \leq \exp \left\{ (1 - \varepsilon) \delta r^{d_{j_t}} \right\}, \quad (j = 0, 1, \dots, k - 1). \quad (6.3.13)$$

où $\delta = \max \{\delta_j : j = 0, 1, \dots, k - 1\}$ et $d_{j_t} = \min \{\deg P_j : j = 0, 1, \dots, k - 1\}$. Nous prouvons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^{\sigma+\varepsilon}} \quad (6.3.14)$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 6.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f^{(k)}(z_m)|}{|z_m|^{\sigma+\varepsilon}} \rightarrow +\infty \text{ pour } m \rightarrow +\infty \quad (6.3.15)$$

et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m|^{k-j}, \quad (j = 0, 1, \dots, k - 1). \quad (6.3.16)$$

de (6.3.15) pour tout nombre $M_3 > 0$ suffisamment grand, nous avons

$$|f^{(k)}(z_m)| > e^{M_3 |z_m|^{\sigma+\varepsilon}} \text{ pour } m \rightarrow +\infty. \quad (6.3.17)$$

En utilisant le même raisonnement comme ci-dessus. De (6.3.17) pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$) nous obtenons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f^{(k)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{c r_m^d e^{M_3 |z_m|^{\sigma+\varepsilon}}} = \frac{|H(z_m)|}{e^{M_3 |z_m|^{\sigma+2\varepsilon}}}$$

où $c > 0$ et $s = \max \{ \deg \pi, 1 \}$. Puisque $\rho(H) = \rho(F) \leq \sigma$, alors nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{e^{M_3 |z_m|^{\sigma+2\varepsilon}}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty. \quad (6.3.18)$$

En utilisant les inégalités (6.3.13), (6.3.16) et la limite (6.3.18), nous concluons de l'inégalité (6.3.12) que

$$1 \leq k \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta r_m^{d_t} \} r_m^k (1 + o(1)) + o(1).$$

Par $0 < \varepsilon < 1$, c'est une contradiction, à condition que r_m est suffisamment grand. Par conséquent, $\frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^{\sigma+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors il existe une constante $M_4 > 0$ telle que

$$|f^{(k)}(z)| \leq e^{M_4 |z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (6.3.19)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par conséquent, par (k) -intégrations réitérées, comme dans la preuve du Lemme 6.2.3, nous concluons que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{k!} (1 + o(1)) r^k |f^{(k)}(z)|$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors, en utilisant (6.3.19), nous obtenons

$$|f(z)| \leq \frac{1}{k} (1 + o(1)) r^k e^{M_4 |z|^{\rho+\varepsilon}} \leq e^{M_4 r^{\sigma+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Dans les deux cas, il existe une constante positive $M > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M r^{\sigma+2\varepsilon}} \quad (6.3.20)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Puisque les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles de A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et F . Puisque A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$), F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, alors $f(z)$ doit avoir un nombre fini de pôles. Par conséquent, par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $d(z)$ est un polynôme et $g(z)$ est une fonction entière avec $\rho(g) = \rho(f)$. Par la première affirmation dans la preuve du Théorème 6.1.1 nous obtenons $\rho(g) \geq n$. De (6.3.20), nous avons

$$\left| \frac{g(z)}{d(z)} \right| \leq e^{M r^{\sigma+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors,

$$|g(z)| \leq |d(z)| e^{Mr^{\sigma+2\varepsilon}} \leq Ar^\beta e^{Mr^{\sigma+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$, où $A > 0$ est une constante et $\beta = \max\{\deg d, 1\}$ est un nombre entier. Par conséquent

$$|g(z)| \leq e^{Mr^{\sigma+3\varepsilon}} \quad (6.3.21)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par conséquent, pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, où $(E_1 \cup E_2 \cup E_3) \subset [0, 2\pi)$ est un ensemble de mesure linéaire nulle, nous avons (6.3.21), pour $|z| = r$ suffisamment grand. Alors, par le Lemme 6.2.4 $\rho(g) \leq \rho + 3\varepsilon < n$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, c'est une contradiction avec $\rho(g) \geq n$. Par conséquent, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (6.1.2) doit être d'ordre infini. Maintenant, en appliquant le Lemme 6.2.9, nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \max\{\rho(A_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F)\} = n.$$

Supposons que $F \not\equiv 0$. Alors, par le Lemme 6.2.9 et le Lemme 6.2.11, nous obtenons

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq n.$$

6.4 Preuve du Théorème 6.1.2.

Soit f une solution méromorphe non triviale de l'équation (6.1.2), alors en appliquant le Théorème 6.1.1, nous obtenons $\sigma(f) = +\infty$.

Étape N° 1 : Nous considérons les points fixes de $f(z)$. Soit $g_0(z) = f(z) - z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g_0(z) = 0$. Nous avons $g_0(z)$ est une fonction méromorphe et $\sigma(g_0(z)) = \sigma(f(z)) = +\infty$. La substitution de $f(z) = g_0(z) + z$ dans l'équation (6.1.2), nous donne

$$\begin{aligned} g_0^{(k)} + h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}g_0^{(k-1)} + \dots + h_s e^{P(z)}g_0^{(s)} + \dots + \\ h_1 e^{P_1(z)}g_0' + h_0 e^{P_0(z)}g_0 = F - h_1 e^{P_1(z)} - z h_0 e^{P_0(z)}. \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

Nous écrivons (6.4.1) sous la forme

$$g_0^{(k)} + A_{0,k-1}g_0^{(k-1)} + \dots + A_{0,1}g_0' + A_{0,0}g_0 = F - A_{0,1} - zA_{0,0} = A_0. \quad (6.4.2)$$

Pour l'équation (6.4.2), nous considérons juste les solutions méromorphes d'ordre infini $g_0(z) = f(z) - z$. nous avons

$$A_0 = F - A_{0,1} - zA_{0,0}$$

$$A_0 = -zh_0e^{P_0(z)} - h_1e^{P_1(z)} + F.$$

Puisque $\deg P_j$ ($j = 0, 1$) sont des nombres entiers distincts et

$$\sigma = \max\{\rho(zh_0), \rho(h_1), \rho(F)\} < \deg P_j(z) \quad (j = 0, 1),$$

alors $zh_0e^{P_0(z)}$, $h_1e^{P_1(z)}$, F sont linéairement indépendantes avec $h_0 \neq 0$ d'où $A_0 \neq 0$. Nous utilisons le Lemme 6.2.11 à l'équation (6.4.2) au-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\tau}(f) = \rho(g_0) = +\infty.$$

Étape N° 2 : Nous considérons les points fixes de $f'(z)$. Soit $g_1(z) = f'(z) - z$, alors z est un point fixe de $f'(z)$ si et seulement si $g_1(z) = 0$. Nous avons $g_1(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_1(z)) = \rho(f'(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (6.1.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}f^{(k)} + \left[(h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)})' + h_{k-2}e^{P_{k-2}(z)} \right] f^{(k-1)} \\ + \dots + \left[(h_s e^{P_s(z)})' + h_{s-1}e^{P_{s-1}(z)} \right] f^{(s)} \\ + \dots + \left[(h_2 e^{P_2(z)})' + h_1 e^{P_1(z)} \right] f'' \\ + \left[(h_1 e^{P_1(z)})' + h_0 e^{P_0(z)} \right] f' + (h_0 e^{P_0(z)})' f = F'. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

De l'équation (6.1.2), nous avons

$$f = -\frac{1}{h_0 e^{P_0(z)}} \left[f^{(k)} + h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + \dots + h_s e^{P_s(z)}f^{(s)} + \dots + h_1 e^{P_1(z)}f' - F \right]. \quad (6.4.4)$$

La substitution (6.4.4) dans (6.4.3), nous donne

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + \left[h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} \right] f^{(k)} \\ + \left[(h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)})' + h_{k-2}e^{P_{k-2}(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)} \right] f^{(k-1)} \\ + \dots + \left[(h_s e^{P_s(z)})' + h_{s-1}e^{P_{s-1}(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} h_s e^{P_s(z)} \right] f^{(s)} \\ + \dots + \left[(h_2 e^{P_2(z)})' + h_1 e^{P_1(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} h_2 e^{P_2(z)} \right] f'' \\ + \left[(h_1 e^{P_1(z)})' + h_0 e^{P_0(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} h_1 e^{P_1(z)} \right] f' + \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} F = F'. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Nous pouvons dénoter l'équation (6.4.5) par la forme suivante

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + A_{1,k-1}f^{(k)} + A_{1,k-2}f^{(k-1)} + \cdots + A_{1,s}f^{(s+1)} + A_{1,s-1}f^{(s)} \\ + \cdots + A_{1,1}f'' + A_{1,0}f' + \frac{(h_0e^{P_0(z)})'}{h_0e^{P_0(z)}}F = F'. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

où $A_{1,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (6.4.5). La substitution de $f'(z) = g_1(z) + z$, $f''(z) = g_1'(z) + 1$, $f^{(j+1)} = g_1^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, k$) dans l'équation (6.4.6), nous donne

$$\begin{aligned} g_1^{(k)} + A_{1,k-1}g_1^{(k-1)} + A_{1,k-2}g_1^{(k-2)} + \cdots + A_{1,s+1}g_1^{(s+1)} + A_{1,s}g_1^{(s)} \\ + \cdots + A_{1,1}g_1' + A_{1,0}g_1 = -A_{1,1} - z A_{1,0} - \frac{(h_0e^{P_0(z)})'}{h_0e^{P_0(z)}}F + F' = A_1, \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= - \left[(h_2e^{P_2(z)})' + h_1e^{P_1(z)} - \frac{(h_0e^{P_0(z)})'}{h_0e^{P_0(z)}}h_2e^{P_2(z)} \right] \\ &- z \left[(h_1e^{P_1(z)})' + h_0e^{P_0(z)} - \frac{(h_0e^{P_0(z)})'}{h_0e^{P_0(z)}}h_1e^{P_1(z)} \right] - \frac{(h_0e^{P_0(z)})'}{h_0e^{P_0(z)}}F + F' \\ &= -\frac{1}{h_0e^{P_0(z)}} (zh_0^2e^{2P_0(z)} + B_1e^{P_0} + B_2e^{P_0+P_1} + B_3e^{P_0+P_2}) \\ &= -\frac{1}{h_0} (zh_0^2e^{P_0(z)} + B_1 + B_2e^{P_1} + B_3e^{P_2}) \end{aligned}$$

où $B_0 = zh_0^2$ et B_j ($j = 1, 2, 3$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n_j ($j = 0, 1, 2$), écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions $z, h_i, h_i', P_i', F, F'$. Puisque $\deg P_j$ ($j = 0, 1, 2$) sont des nombres entiers distincts et

$$\sigma = \max \{ \rho(B_j) \ (j = 0, 2, 1, 3) \} < \deg P_j(z) \ (j = 0, 1, 2),$$

alors $zh_0^2e^{P_0(z)}, B_1, B_2e^{P_1}, B_3e^{P_2}$ sont linéairement indépendantes avec $h_0 \neq 0$ alors $A_0 \neq 0$.

En appliquant le Lemme 6.2.11 à l'équation (6.4.7) en haut, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\tau}(f') = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

Étape N° 3 : Nous prouvons que $\bar{\tau}(f'') = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty$. Soit $g_2(z) = f''(z) - z$, alors z est un point fixe de $f''(z)$ si et seulement si $g_2(z) = 0$. Nous avons $g_2(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_2(z)) = \rho(f''(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. Nous prouvons que $\bar{\lambda}(g_2) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (6.4.6), nous obtenons

$$f^{(k+2)} + A_{1,k-1}f^{(k+1)} + (A'_{1,k-1} + A_{1,k-2})f^{(k)} + \cdots + (A'_{1,s-1} + A_{1,s-2})f^{(s)}$$

$$+ \cdots + (A'_{1,1} + A_{1,0}) f'' + A'_{1,0} f' = H' \quad (6.4.8)$$

où H est une fonction méromorphe d'ordre $\rho(H) < n_j$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et

$$H = -\frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} F + F'.$$

De l'équation (6.4.6) nous avons

$$f' = -\frac{1}{A_{1,0}} [f^{(k+1)} + A_{1,k-1} f^{(k)} + A_{1,k-2} f^{(k-1)} + \cdots + A_{1,s-1} f^{(s)} + \cdots + A_{1,1} f'' - H]. \quad (6.4.9)$$

Nous remarquons que $A_{1,0} \neq 0$ car $h_0 \neq 0$ (pour la preuve, nous pouvons appliquer le Lemme 6.2.10). La substitution de (6.4.9) dans (6.4.8), nous donne

$$\begin{aligned} f^{(k+2)} + \left[A_{1,k-1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \right] f^{(k+1)} + \left[A'_{1,k-1} + A_{1,k-2} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,k-1} \right] f^{(k)} + \cdots \\ + \left[A'_{1,s-1} + A_{1,s-2} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,s-1} \right] f^{(s)} + \cdots + \left[A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] f^{(3)} \\ + \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] f'' + \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} H = H'. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Nous pouvons dénoter l'équation (6.4.10) par la forme suivante

$$f^{(k+2)} + A_{2,k-1} f^{(k+1)} + A_{2,k-2} f^{(k)} + \cdots + A_{2,1} f^{(3)} + A_{2,0} f'' = -\frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} H + H', \quad (6.4.11)$$

où $A_{2,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes définies par les équations (6.4.10) ci-dessus, et nous avons

$$A_{2,0} = A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \quad \text{et} \quad A_{2,1} = A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2}.$$

La substitution de $f''(z) = g_2(z) + z$, $f^{(3)}(z) = g_2'(z) + 1$, $f^{(j+2)} = g_2^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, k$) dans l'équation (6.4.11), nous donne

$$g_2^{(k)} + A_{2,k-1} g_2^{(k-1)} + A_{2,k-2} g_2^{(k-2)} + \cdots + A_{2,s} g_2^{(s)} + \cdots + A_{2,1} g_2' + A_{2,0} g_2 = A_2 \quad (6.4.12)$$

où

$$\begin{aligned} A_2 &= -A_{2,1} - z A_{2,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} H + H'. \\ &= -\left[A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] - z \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} H + H'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{A_{1,0}} \left[A'_{1,2}A_{1,0} + A_{1,1}A_{1,0} - A'_{1,0}A_{1,2} + zA'_{1,1}A_{1,0} \right. \\
&\quad \left. + zA_{1,0}^2 - zA'_{1,0}A_{1,1} + A'_{1,0}H - A_{1,0}H' \right]. \tag{6.4.13}
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= (h_1 e^{P_1(z)})' + h_0 e^{P_0(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} h_1 e^{P_1(z)}, \\
A_{1,1} &= (h_2 e^{P_2(z)})' + h_1 e^{P_1(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} h_2 e^{P_2(z)}, \\
A_{1,2} &= (h_3 e^{P_3(z)})' + h_2 e^{P_2(z)} - \frac{(h_0 e^{P_0(z)})'}{h_0 e^{P_0(z)}} h_3 e^{P_3(z)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= \frac{1}{h_0 e^{P_0(z)}} \left(h_0^2 e^{2P_0} + \alpha_{1,0}^{(1)} e^{P_0+P_1} \right), \\
A_{1,1} &= \frac{1}{h_0 e^{P_0(z)}} \left(\alpha_{1,1}^{(0)} e^{P_0+P_2} + \alpha_{1,1}^{(1)} e^{P_0+P_1} \right), \\
A_{1,2} &= \frac{1}{h_0 e^{P_0(z)}} \left(\alpha_{1,2}^{(0)} e^{P_0+P_2} + \alpha_{1,2}^{(1)} e^{P_0+P_3} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A'_{1,0} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)})^2} \left(\beta_{1,0}^{(0)} e^{3P_0} + \beta_{1,0}^{(1)} e^{2P_0+P_1} \right), \\
A'_{1,1} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)})^2} \left(\beta_{1,1}^{(0)} e^{2P_0+P_2} + \beta_{1,1}^{(1)} e^{2P_0+P_1} \right), \\
A'_{1,2} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0(z)})^2} \left(\beta_{1,2}^{(1)} e^{2P_0+P_2} + \beta_{1,2}^{(2)} e^{2P_0+P_3} \right),
\end{aligned}$$

où $\alpha_{i,j}^{(l)}$, $\beta_{i,j}^{(l)}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n_j ($j = 0, 1, 2, 3$), écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions h_i , h'_i , P'_i , ($i = 0, 1, 2, 3$). De (6.4.13) nous avons

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{1}{A_{1,0} (h_0 e^{P_0(z)})^3} \left[z h_0^5 e^{5P_0} + B_1 e^{4P_0} + B_2 e^{4P_0+P_1} + B_3 e^{4P_0+P_2} + \right. \\
&\quad \left. B_4 e^{4P_0+P_3} + B_5 e^{3P_0+P_1} + B_6 e^{3P_0+2P_1} + B_7 e^{3P_0+P_1+P_2} + B_8 e^{3P_0+P_1+P_3} \right]. \\
&= -\frac{1}{A_{1,0} h_0} \left[z h_0^5 e^{2P_0} + B_1 e^{P_0} + B_2 e^{P_0+P_1} + B_3 e^{P_0+P_2} + \right. \\
&\quad \left. B_4 e^{P_0+P_3} + B_5 e^{P_1} + B_6 e^{2P_1} + B_7 e^{P_1+P_2} + B_8 e^{P_1+P_3} \right]. \\
&= -\frac{1}{A_{1,0} h_0} \left[\sum_{j=0}^{j=8} B_j e^{G_j} \right],
\end{aligned}$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $B_0 = zh_0^5 \neq 0$, B_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n_j ($j = 0, 1, 2, 3$), écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z , h_i , h'_i , P'_i , H , H' .

Nous avons quatre cas à traiter.

1ier Cas : $\deg P_0 > \deg P_i$ ($i = 1, 2, 3$), nous avons $\deg(G_0 - G_i) = \deg P_0$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). D'après le Lemme 6.2.10 et le fait $B_0 = zh_0^5 \neq 0$ nous avons $A_2 \neq 0$.

2ième Cas : $\deg P_1 > \deg P_i$ ($i = 0, 2, 3$), nous écrivons A_2 sous la forme

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} [e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1 + B_3 e^{P_2} + B_4 e^{P_3}) + e^{P_1} (B_2 e^{P_0} + B_5 + B_6 e^{P_1} + B_7 e^{P_2} + B_8 e^{P_3})] +$$

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} [e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1 + B_3 e^{P_2} + B_4 e^{P_3}) + B e^{P_1}]$$

Puisque $\deg P_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) sont des nombres distincts

$$\sigma = \max \{ \rho(B_j) (j = 0, 1, \dots, 8) \} < \deg P_j(z) (j = 0, 1, 2, 3)$$

alors $zh_0^5 e^{P_0}$, B_1 , $B_3 e^{P_2}$, $B_4 e^{P_3}$ sont linéairement indépendantes avec $h_0 \neq 0$, par conséquent $K_1 = (zh_0^5 e^{P_0} + B_1 + B_3 e^{P_2} + B_4 e^{P_3}) \neq 0$. Nous avons $e^{P_0} K_1 = e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1 + B_3 e^{P_2} + B_4 e^{P_3}) \neq 0$, $K_2 = B e^{P_1}$ ($\rho(B) < \deg P_1$) n'ont pas le même ordre de croissance, alors $e^{P_0} K_1$, K_2 sont linéairement les fonctions indépendantes, par conséquent

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} [e^{P_0} K_1 + K_2] \neq 0.$$

3ième Cas : $\deg P_2 > \deg P_i$ ($i = 0, 1, 3$), nous écrivons A_2 sous la forme

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} [e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1 + B_2 e^{P_1} + B_4 e^{P_3}) + (B_5 e^{P_1} + B_6 e^{2P_1} + B_8 e^{P_1+P_3}) + e^{P_2} (B_3 e^{P_0} + B_7 e^{P_1})], \text{ avec } \deg P_0 > \deg P_i (i = 1, 3)$$

ou

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} [e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1 + B_4 e^{P_3}) + e^{P_1} (B_2 e^{P_0} + B_5 + B_6 e^{P_1} + B_8 e^{P_3}) + e^{P_2} (B_3 e^{P_0} + B_7 e^{P_1})], \text{ avec } \deg P_1 > \deg P_0 > \deg P_3$$

ou

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} \left[e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1) + B_4 e^{P_3+P_0} + e^{P_1} (B_2 e^{P_0} + B_5 + B_6 e^{P_1} + B_8 e^{P_3}) + e^{P_2} (B_3 e^{P_0} + B_7 e^{P_1}) \right], \text{ avec } \deg P_1 > \deg P_3 > \deg P_0$$

ou

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} \left[e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1 + B_2 e^{P_1}) + e^{P_3} (B_4 e^{P_0} + B_8 e^{P_1}) + (B_5 e^{P_1} + B_6 e^{2P_1}) + e^{P_2} (B_3 e^{P_0} + B_7 e^{P_1}) \right], \text{ avec } \deg P_3 > \deg P_0 > \deg P_1$$

ou

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} \left[e^{P_0} (zh_0^5 e^{P_0} + B_1) + e^{P_3} (B_4 e^{P_0} + B_8 e^{P_1}) + e^{P_1} (B_2 e^{P_0} + B_5 + B_6 e^{P_1}) + e^{P_2} (B_3 e^{P_0} + B_7 e^{P_1}) \right], \text{ avec } \deg P_3 > \deg P_1 > \deg P_0,$$

alors nous pouvons écrire A_2 sous la forme

$$A_2 = -\frac{1}{A_{1,0}h_0} [e^{P_0} K_1 + K_2].$$

Par le même raisonnement que dans la preuve du 2 ième Cas ci-dessus, nous concluons que $K_1 \not\equiv 0$ et K_2 sont linéairement indépendantes, par conséquent $A_2 \not\equiv 0$.

4ième Cas : $\deg P_3 > \deg P_i$ ($i = 0, 1, 2$). Par le même raisonnement que dans la preuve du 2 ième Cas et du 3 ième Cas ci-dessus, nous concluons que $A_2 \not\equiv 0$. Dans tous les cas, nous avons $A_2 \not\equiv 0$. En appliquant le Lemme 6.2.11 à l'équation (6.4.12) ci-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \bar{\tau}(f'') = \rho(g_2) = \rho(f) = +\infty.$$

L'ordre, l'hyper-ordre et les points fixes des solutions méromorphes des équations différentielles d'ordre supérieur

7.1 Introduction et résultats

Pour l'équation différentielle linéaire du second degré

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (7.1.1)$$

où $P(z)$, $Q(z)$ sont des polynômes non constants, $A_1(z), A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que $\rho(A_1) < \deg P(z)$, $\rho(A_0) < \deg Q(z)$, Gundersen [35, p. 419] a montré que si $\deg P(z) \neq \deg Q(z)$, alors chaque solution non constante de (7.1.1) est d'ordre infini. Si $\deg P(z) = \deg Q(z)$ alors (7.1.1) peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini, par exemple $f(z) = e^z - 1$ satisfait $f'' - e^z f' + e^z f = 0$. Kwon [45] et Chen [15] ont étudié le cas où $\deg P(z) = \deg Q(z)$ et ils ont obtenu des résultats sur l'ordre de croissance des solutions. Dans [21], Chen et Shon ont prouvé que les solutions sont d'ordre infini, où $A_1(z), A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes telles que $\rho(A_1) < 1$, $\rho(A_0) < 1$ et $\deg P(z) = \deg Q(z) = 1$. Wang et Laine [62], Belaïdi et El Farissi [11] ont étudié l'équation différentielle linéaire du second degré non homogène

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = F(z), \quad (7.1.2)$$

où $A_1 \not\equiv 0, A_0 \not\equiv 0$, F sont des fonctions entières d'ordre inférieur d'un, et les nombres complexes a, b satisfont $ab \neq 0$. Ils ont montré que chaque solution non triviale de (7.1.2) est

d'ordre infini si $a \neq b$. Wang et Laine [61] ont également travaillé sur l'équation différentielle linéaire d'ordre supérieur et ils ont prouvé ce théorème.

Théorème A. [61] On suppose que $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), où $P_j(z) = a_{jn}z^n + a_{j(n-1)}z^{n-1} + \dots + a_{j1}z + a_{j0}$ sont des polynômes avec le degré $n \geq 1$, $h_j(z)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à n , pas toutes nulles, et que $H(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre inférieur à n . Si a_{nj} ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes distincts, alors chaque solution f de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = H(z)$$

est d'ordre infini.

Dans [3], nous avons amélioré et généralisé les résultats de Wang et Laine, Belaïdi et EL Farissi pour les solutions de l'équation différentielle linéaire du second degré

$$f'' + h_1(z) e^{P(z)} f' + h_0(z) e^{Q(z)} f = F(z) \quad (7.1.3)$$

et on a obtenu les résultats prouvés dans le chapitre 4. En ce chapitre 7, nous améliorons le résultat de Wang et Laine [61] et nous généralisons notre résultat dans [3] aux solutions de l'équation différentielle d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \dots + h_1(z) e^{P_1(z)} f' + h_0(z) e^{P_0(z)} f = F(z) \quad (7.1.4)$$

où $P_j(z) = a_{jn}z^n + a_{j(n-1)}z^{n-1} + \dots + a_{j1}z + a_{j0}$ sont des polynômes avec le degré $n \geq 1$, h_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($h_0 \not\equiv 0$), F sont les fonctions méromorphes d'ordre inférieur à n , ayant un nombre fini de pôles.

Théorème 7.1.1 Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $P_j(z) = a_{jn}z^n + a_{j(n-1)}z^{n-1} + \dots + a_{j1}z + a_{j0}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des polynômes avec le degré n , et soient $h_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($h_0 \not\equiv 0$), F fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. Supposons que $\sigma = \max\{\rho(h_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F)\} < n$. Si a_{nj} ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes distincts, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (7.1.4) est d'ordre infini et l'hyper-ordre de f satisfait $\rho_2(f) \leq n$.

En outre, si $F \not\equiv 0$, alors chaque solution méromorphe f de l'équation (7.1.4) satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq n.$$

Théorème 7.1.2 Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $P_j(z) = a_{jn}z^n + a_{j(n-1)}z^{n-1} + \dots + a_{j1}z + a_{j0}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des polynômes avec le degré n , et soient $h_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ($h_0 \not\equiv 0$), F des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. Supposons que $\sigma = \max\{\rho(h_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F)\} < n$. Si a_{nj} ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des nombres complexes distincts tels que $a_{1n} \neq 2a_{0n}$, $a_{1n} + a_{2n} \neq 2a_{0n}$, $a_{1n} + a_{3n} \neq 2a_{0n}$, alors pour toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (7.1.4), on a f, f', f'' ont un nombre infini des points fixes et satisfont

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\tau}(f') = \bar{\tau}(f'') = +\infty.$$

7.2 Lemmes préliminaires

Lemme 7.2.1 [52, p. 245] Soient $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, ($a_n = \alpha + i\beta \neq 0$) un polynôme de degré $n \geq 1$ et $A(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe avec $\rho(A) < n$. Soit $f(z) = A(z)e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, où $E_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini, alors pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons

(i) si $\delta(P, \theta) > 0$, alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\}, \quad (7.2.1)$$

(ii) si $\delta(P, \theta) < 0$, alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\}. \quad (7.2.2)$$

Lemme 7.2.2 [34, p. 89] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\rho(f) = \rho < +\infty$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de paires distinctes de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_3$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \psi_0$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (7.2.3)$$

Lemme 7.2.3 [3, p. 31] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, et supposons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^\rho}$$

est non bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ avec une constante $\rho > 0$. Alors, il existe, une séquence infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ ($n = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que $G(z_n) \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{s-j} \quad (j = 0, \dots, s-1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (7.2.4)$$

Lemme 7.2.4 [61] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que $\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^\sigma$ pour tout rayon $\arg(z) = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, où M est une constante positive dépend de θ , tandis que σ est une constante indépendante de θ . Alors

$$\rho(f) \leq \sigma. \quad (7.2.5)$$

Lemme 7.2.5 [19] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|f(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}. \quad (7.2.6)$$

Lemme 7.2.6 [3, Lemme 2.9] Supposons que $k \geq 2$ et $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ ($A_0(z) \not\equiv 0$), F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles. Soit $\rho = \max\{\rho(A_j) \ (j = 0, 1, 2, \dots, k-1), \rho(F)\} < +\infty$ et soit $f(z)$ une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_0 f = F.$$

Alors,

$$\rho_2(f) \leq \rho. \quad (7.2.7)$$

Lemme 7.2.7 [3, Lemme 2.11] Soient $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des polynômes avec $\deg(P_0(z)) = n$ ($n \geq 1$) et $\deg(P_j(z)) \leq n$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Soient $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) des fonctions méromorphes d'ordre fini et $\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, k\} < n$ telles que $A_0(z) \not\equiv 0$. Nous dénotons

$$F(z) = A_k e^{P_k(z)} + A_{k-1} e^{P_{k-1}(z)} + \dots + A_s e^{P_s(z)} + \dots + A_1 e^{P_1(z)} + A_0 e^{P_0(z)}. \quad (7.2.8)$$

Si $\deg(P_0(z) - P_j(z)) = n$ pour tout $j = 1, 2, \dots, k$, alors F est une fonction méromorphe non triviale d'ordre fini et satisfait $\rho(F) = n$.

Lemme 7.2.8 [20] Soient A_j, F ($F \neq 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F. \quad (7.2.9)$$

Alors, f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \sigma(f) = +\infty.$$

Lemme 7.2.9 [9] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) un polynôme non constant, où $a_n \neq 0$, a_{n-1}, \dots, a_0 sont des nombres complexes. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout z , $|z| = r > R$, nous avons

$$(1 - \varepsilon) |a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| r^n. \quad (7.2.10)$$

7.3 Preuve du Théorème 7.1.1.

Nous prouvons que chaque solution méromorphe $f(z) \neq 0$ est transcendante d'ordre $\rho(f) \geq n$ quand $a_{jn} \neq a_{sn}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$ et $j \neq s$). Nous assumons que $f(z) \neq 0$ est une fonction méromorphe de l'équation (7.1.4) est d'ordre $\rho(f) < n$. Nous pouvons écrire l'équation (7.1.4) sous la forme

$$h_{k-1}(z) f^{(k-1)} e^{P_{k-1}(z)} + \dots + h_s(z) f^{(s)} e^{P_s(z)} + \dots + h_1(z) f' e^{P_1(z)} + h_0(z) f e^{P_0(z)} = B(z), \quad (7.3.1)$$

où

$$B(z) = -f^{(k)} + F(z).$$

Puisque $\rho = \max\{\rho(h_j), \rho(F) : j = 0, 1\} < n$ et $\rho(f) < n$, alors $h_j(z) f^{(j)}(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $B(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini avec $\rho(h_j f^{(j)}) < n$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) et $\rho(B) < n$. Il existe au moins un coefficient $h_s f^{(s)} \neq 0$ pour $h_s \neq 0$. Nous avons $a_{jn} \neq a_{sn}$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$ et $j \neq s$), alors $\deg(P_s(z) - P_j(z)) = n$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$ et $j \neq s$). Par le Lemme 7.2.7, nous constatons que l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (7.3.1) est n , ceci contredit le fait $\rho(B) < n$. En conséquence, toute solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (7.1.4) est transcendante et d'ordre $\rho(f) \geq n$.

Supposons, contrairement à l'affirmation, que $f \neq 0$ est une solution méromorphe de l'équation (7.1.4) avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, de l'affirmation ci-dessus, nous avons $n \leq \rho(f)$. Récrivons l'équation (7.1.4) sous la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F, \quad (7.3.2)$$

où $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Par le Lemme 7.2.2, il existe un ensemble $E_3 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_3$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$, telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \theta$ et $|z| = r \geq R_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)} \right| \leq |z|^{2\rho}, \quad 0 \leq i < j \leq k. \quad (7.3.3)$$

Par le Lemme 7.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, où

$$\begin{aligned} E_2 &= \{ \theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \} \\ &\cup \{ \theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_j, \theta) = \delta(P_i, \theta) \quad (j = 0 \leq j < i \leq k-1) \} \end{aligned}$$

est un ensemble fini, alors pour $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons $\delta(P_j, \theta) \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), $\delta(P_j - P_i, \theta) \neq 0$ ($j = 0 \leq j < i \leq k-1$) et $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) satisfont l'une des inégalités (7.2.1) ou (7.2.2). Puisque $\delta(P_j, \theta) \neq \delta(P_i, \theta)$ ($j = 0 \leq j < i \leq k-1$), alors pour tout θ fixée telle que $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, il existe un seul $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ tel que

$$\delta(P_s, \theta) = \delta = \max \{ \delta(P_j, \theta) : j = 0, 1, \dots, k-1 \}.$$

Dénotons $\delta_1 = \max \{ \delta(P_j, \theta) : 0 \leq j \neq s \leq k-1 \}$, alors $\delta_1 < \delta$ et $\delta \neq 0$. Nous discutons maintenant deux cas séparément.

1er Cas : $\delta > 0$. Dénotons δ_2 une constante positive vérifie $\delta_1 < \delta_2 < \delta$. Par le Lemme 7.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \frac{\delta - \delta_2}{\delta + \delta_2}$), nous avons

$$\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(P_s, \theta) r^n \} \leq |A_s(z)|, \quad (7.3.4)$$

$$|A_j(z)| \leq \exp \{ (1 + \varepsilon) \delta_2 r^n \} \quad 0 \leq j \neq s \leq k-1 \quad (7.3.5)$$

où r est suffisamment grand. Nous montrons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^{\sigma + \varepsilon}} \quad (7.3.6)$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 7.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z_m)|}{|z_m|^{\sigma + \varepsilon}} \rightarrow +\infty \quad (7.3.7)$$

et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1+o(1)) |z_m|^{s-j} \quad (j = 0, \dots, s-1) \quad \text{as } m \rightarrow +\infty. \quad (7.3.8)$$

De (7.3.7), pour tout nombre $M_1 > 0$ suffisamment grand, nous avons

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} > M_1, \text{ alors } |f^{(s)}(z_m)| > e^{M_1 |z_m|^{\rho+\varepsilon}} \text{ pour } m \rightarrow +\infty. \quad (7.3.9)$$

Puisque $F(z)$ est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, donc par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire $F(z)$ sous la forme $F(z) = \frac{H(z)}{\pi(z)}$, où $\pi(z)$ est un polynôme, $H(z)$ est une fonction entière d'ordre $\rho(H) = \rho(F) \leq \sigma$. De (7.3.9) et par le Lemme 7.2.9, pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$), il existe une constante positive $c > 0$ telle que

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f^{(s)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{c r_m^d e^{M_1 |z_m|^{\sigma+\varepsilon}}} = \frac{|H(z_m)|}{e^{M_1 |z_m|^{\sigma+2\varepsilon}}},$$

où $d = \max\{\deg \pi, 1\}$ est un nombre entier. Puisque $\rho(H) = \rho(F) \leq \sigma$, alors nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{e^{M_1 |z_m|^{\sigma+2\varepsilon}}} \rightarrow 0 \quad \text{as } m \rightarrow +\infty. \quad (7.3.10)$$

De l'équation (7.3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} |A_s(z_m)| &\leq \left| \frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| + |A_{k-1}(z_m)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| \\ &+ \dots + |A_{s+1}(z_m)| \left| \frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| + |A_{s-1}(z_m)| \left| \frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| \\ &+ \dots + |A_1(z_m)| \left| \frac{f'(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| + |A_0(z_m)| \left| \frac{f(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| + \left| \frac{F(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} \right| \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

En utilisant les inégalités (7.3.3), (7.3.4), (7.3.5), (7.3.8) et la limite (7.3.10), nous concluons de l'inégalité (7.3.11) que

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_s, \theta) r_m^n\} \leq |z_m|^\alpha + (k-1) \exp\{(1+\varepsilon)\delta_2 r_m^n\} |z_m|^\alpha + o(1)$$

où α est une constante positive vérifie $\alpha > \max\{2\rho, (s-j)(j=0, \dots, s-1)\}$. Par conséquent

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta r_m^n\} \leq (k+1) \exp\{(1+\varepsilon)\delta_2 r_m^n\} r_m^\alpha,$$

d'où

$$\exp\{[(1-\varepsilon)\delta - (1+\varepsilon)\delta_2] r_m^n\} \leq (k+1) r_m^\alpha.$$

Puisque $0 < \varepsilon < \frac{\delta - \delta_2}{\delta + \delta_2}$, c'est une contradiction, pour r suffisamment grand. Par conséquent, $\frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^{\sigma + \varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$|f^{(s)}(z)| \leq e^{M_2 |z|^{\sigma + \varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$.

2ième Cas : $\delta < 0$. de (7.3.2), nous obtenons

$$1 \leq |A_{k-1}(z)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + |A_{k-2}(z)| \left| \frac{f^{(k-2)}(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + \cdots + |A_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + \left| \frac{F(z)}{f^{(k)}(z)} \right|. \quad (7.3.12)$$

Par le Lemme 7.2.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$) nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta r^n\}, \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (7.3.13)$$

Nous prouvons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^{\sigma + \varepsilon}} \quad (7.3.14)$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas, alors par le Lemme 7.2.3, il existe une séquence infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\frac{\log^+ |f''(z_m)|}{|z_m|^{\sigma + \varepsilon}} \rightarrow +\infty \text{ pour } m \rightarrow +\infty \quad (7.3.15)$$

et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m|^{k-j}, \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (7.3.16)$$

De (7.3.15), pour tout nombre $M_3 > 0$ suffisamment grand, nous avons

$$|f^{(k)}(z_m)| > e^{M_3 |z_m|^{\sigma + \varepsilon}} \text{ as } m \rightarrow +\infty. \quad (7.3.17)$$

En utilisant le même raisonnement comme ci-dessus nous obtenons de (7.3.17) que

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f^{(k)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{c r_m^d e^{M_3 |z_m|^{\sigma + \varepsilon}}} = \frac{|H(z_m)|}{e^{M_3 |z_m|^{\sigma + 2\varepsilon}}},$$

pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$), où $c > 0$ et $s = \max\{\deg \pi, 1\}$. Puisque $\rho(H) = \rho(F) \leq \sigma$, alors nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leq \frac{|H(z_m)|}{e^{M_3 |z_m|^{\sigma + 2\varepsilon}}} \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow +\infty. \quad (7.3.18)$$

En utilisant les inégalités (7.3.13), (7.3.16) et la limite (7.3.18), nous concluons de l'inégalité (7.3.12) que

$$1 \leq k \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta r_m^n \} r_m^k (1 + o(1)) + o(1).$$

Par $0 < \varepsilon < 1$, c'est une contradiction, pour r_m suffisamment grand. Par conséquent, $\frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^{\sigma+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors il existe une constante $M_4 > 0$ telle que

$$|f^{(k)}(z)| \leq e^{M_4 |z|^{\rho+\varepsilon}} \quad (7.3.19)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par conséquent, par (k) -intégrations réitérées comme dans la preuve du Lemme 7.2.3, nous concluons que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{k!} (1 + o(1)) r^k |f^{(k)}(z)|$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors, en utilisant (7.3.19), nous obtenons

$$|f(z)| \leq \frac{1}{k} (1 + o(1)) r^k e^{M_4 |z|^{\rho+\varepsilon}} \leq e^{M_4 r^{\sigma+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Dans les deux cas, il existe une constante positive $M > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq e^{M r^{\sigma+2\varepsilon}} \quad (7.3.20)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Puisque les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles des A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$), F et puisque A_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$), F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles, alors $f(z)$ doit avoir un nombre fini de pôles. Par conséquent, d'après le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $d(z)$ est un polynôme, $g(z)$ est une fonction entière avec $\rho(g) = \rho(f)$. Par la première affirmation (i) dans le Théorème 7.1.1, nous obtenons $\rho(g) \geq n$. De (7.3.20), nous avons

$$\left| \frac{g(z)}{d(z)} \right| \leq e^{M r^{\sigma+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors,

$$|g(z)| \leq |d(z)| e^{M r^{\sigma+2\varepsilon}} \leq A r^\beta e^{M r^{\sigma+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$, où $A > 0$ est une constante et $\beta = \{\deg \pi, 1\}$ est un nombre entier.

Par conséquent

$$|g(z)| \leq e^{M r^{\sigma+3\varepsilon}} \quad (7.3.21)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Par conséquent, pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, où $(E_1 \cup E_2 \cup E_3) \subset [0, 2\pi)$ est un ensemble de mesure linéaire nulle, nous avons (7.3.21), pour $|z| = r$ suffisamment grand. Alors, par le Lemme 7.2.4 $\rho(g) \leq \rho + 3\varepsilon < n$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, c'est une contradiction avec $\rho(g) \geq n$. Par conséquent, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (7.1.4) est d'ordre infini. Maintenant, en utilisant le Lemme 7.2.6, nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \max \{ \rho(A_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(F) \} = n.$$

Supposons que $F \not\equiv 0$. Alors, par le Lemme 7.2.8, nous obtenons

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty.$$

Nous savons les zéros de f se produisent de l'ensemble des pôles de $h_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) ou les zéros de $F(z)$ et si z_0 est un zéro de f d'ordre m , $m > k$, alors z_0 doit être un zéro de $F(z)$ d'ordre $m - k$. Par conséquent, de $F \not\equiv 0$ nous avons

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N(r, h_j). \quad (7.3.22)$$

D'autre part, (7.1.4) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left[\frac{f^{(k)}}{f} + h_{k-1} e^{P_{k-1}} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + h_1 e^{P_1} \frac{f'}{f} + h_0 e^{P_0} \right],$$

d'où

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, h_j) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, e^{P_j}) + \sum_{j=1}^k m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1). \quad (7.3.23)$$

Par conséquent, par le lemme de la dérivée logarithmique (voir [47] [34], [38, Lemme 2.3]), il existe un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire finie, tel que pour tout $r \notin E$, nous avons

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(\log T(r, f) + O(\log r)) \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Par (7.3.22) et (7.3.23), nous avons

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N(r, h_j) + m\left(r, \frac{1}{F}\right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, h_j) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, e^{P_j}) + \sum_{j=1}^k m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1) \end{aligned}$$

$$= k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, h_j) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, e^{P_j}) + C \log(rT(r, f)), \quad r \notin E, \quad (7.3.24)$$

où C est une constante positive. Pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, nous avons

$$C \log(rT(r, f)) \leq \frac{1}{2}T(r, f), \quad T(r, F) \leq r^{\sigma+\varepsilon}, \quad (7.3.25)$$

$$T(r, e^{P_j}) \leq r^{n+\varepsilon} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1), \quad T(r, h_j) \leq r^{\sigma+\varepsilon} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (7.3.26)$$

Alors, pour $r \notin E$, r suffisamment grand et en utilisant (7.3.25), (7.3.26) nous concluons de (7.3.24) que

$$T(r, f) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+1)r^{\sigma+\varepsilon} + kr^{n+\varepsilon} + \frac{1}{2}T(r, f),$$

d'où

$$T(r, f) \leq 2k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2(k+1)r^{\sigma+\varepsilon} + 2kr^{n+\varepsilon}, \quad r \notin E. \quad (7.3.27)$$

Par conséquent, par (7.3.27), nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f),$$

alors

$$\lambda_2(f) \geq \bar{\lambda}_2(f) \geq \rho_2(f).$$

Puisque par définition, nous avons $\lambda_2(f) \leq \rho_2(f)$, donc

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f),$$

par conséquent,

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq n.$$

7.4 Preuve du Théorème 7.1.2.

Soit f une solution méromorphe non triviale de l'équation (7.1.4), alors en appliquant le Théorème 7.1.1, nous obtenons $\rho(f) = +\infty$.

Étape N° 1 : Nous considérons les points fixes de $f(z)$. Soit $g_0(z) = f(z) - z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g_0(z) = 0$. Nous avons $g_0(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_0(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. La substitution de $f(z) = g_0(z) + z$ dans l'équation (7.1.4), nous donne

$$g_0^{(k)} + h_{k-1}e^{P_{k-1}(z)}g_0^{(k-1)} + \dots + h_1e^{P_1(z)}g_0' + h_0e^{P_0(z)}g_0 = F - h_1e^{P_1(z)} - zh_0e^{P_0(z)}. \quad (7.4.1)$$

Nous écrivons (7.4.1) sous la forme

$$g_0^{(k)} + A_{0,k-1}g_0^{(k-1)} + \cdots + A_{0,1}g_0' + A_{0,0}g_0 = A_0, \quad (7.4.2)$$

où $A_0 = F - h_1e^{P_1(z)} - zh_0e^{P_0(z)}$. Pour l'équation (7.4.2), nous considérons juste les solutions méromorphes d'ordre infini $g_0(z) = f(z) - z$. Nous avons $\deg(P_1(z) - P_0(z)) = n$ et $\rho = \max\{\rho(h_j) \ (j = 0, 1), \rho(F)\} < n$. Puisque $h_0 \not\equiv 0$, alors d'après le Lemme 7.2.7, nous avons $A_0 \not\equiv 0$. Nous utilisons le Lemme 7.2.8 à l'équation (7.4.2) au-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_0) = \bar{\tau}(f) = \rho(g_0) = +\infty.$$

Étape N° 2 : Nous considérons les points fixes de $f'(z)$. Soit $g_1(z) = f'(z) - z$, alors z est un point fixe de $f'(z)$ si et seulement si $g_1(z) = 0$. Nous avons $g_1(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_1(z)) = \rho(f'(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (7.1.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + h_{k-1}e^{P_{k-1}}f^{(k)} + \left[(h_{k-1}e^{P_{k-1}})' + h_{k-2}e^{P_{k-2}} \right] f^{(k-1)} + \cdots + \\ \left[(h_s e^{P_s})' + h_{s-1}e^{P_{s-1}} \right] f^{(s)} + \cdots + \left[(h_2 e^{P_2})' + h_1 e^{P_1} \right] f'' + \\ \left[(h_1 e^{P_1})' + h_0 e^{P_0} \right] f' + (h_0 e^{P_0})' f = F'. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

De l'équation (7.1.4), nous avons

$$f = -\frac{1}{h_0 e^{P_0}} \left[f^{(k)} + h_{k-1}e^{P_{k-1}}f^{(k-1)} + \cdots + h_s e^{P_s}f^{(s)} + \cdots + h_1 e^{P_1}f' - F \right]. \quad (7.4.4)$$

La substitution (7.4.4) dans (7.4.3), nous donne

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} + \left[h_{k-1}e^{P_{k-1}} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} \right] f^{(k)} \\ + \left[(h_{k-1}e^{P_{k-1}})' + h_{k-2}e^{P_{k-2}} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} h_{k-1}e^{P_{k-1}} \right] f^{(k-1)} \\ + \cdots + \left[(h_s e^{P_s})' + h_{s-1}e^{P_{s-1}} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} h_s e^{P_s} \right] f^{(s)} + \cdots \\ + \left[(h_2 e^{P_2})' + h_1 e^{P_1} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} h_2 e^{P_2} \right] f'' \\ + \left[(h_1 e^{P_1})' + h_0 e^{P_0} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} h_1 e^{P_1} \right] f' + \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F = F'. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Nous pouvons dénoter l'équation (7.4.5) par la forme suivante

$$f^{(k+1)} + A_{1,k-1}f^{(k)} + A_{1,k-2}f^{(k-1)} + \cdots + A_{1,1}f'' + A_{1,0}f' = -\frac{(h_0e^{P_0})'}{(h_0e^{P_0})}F + F'. \quad (7.4.6)$$

où $A_{1,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (7.4.5). La substitution de $f'(z) = g_1(z) + z$, $f''(z) = g_1'(z) + 1$, $f^{(j+1)} = g_1^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, k$) dans l'équation (7.4.6), nous donne

$$g_1^{(k)} + A_{1,k-1}g_1^{(k-1)} + \cdots + A_{1,1}g_1' + A_{1,0}g_1 = -A_{1,1} - z A_{1,0} - \frac{(h_0e^{P_0})'}{(h_0e^{P_0})}F + F' = A_1 \quad (7.4.7)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= - \left[(h_2e^{P_2})' + (h_1e^{P_1}) - \frac{(h_0e^{P_0})'}{(h_0e^{P_0})}h_2e^{P_2} \right] \\ &\quad - z \left[(h_1e^{P_1})' + h_0e^{P_0} - \frac{(h_0e^{P_0})'}{(h_0e^{P_0})}h_1e^{P_1} \right] - \frac{(h_0e^{P_0})'}{(h_0e^{P_0})}F + F' \\ &= -\frac{1}{(h_0e^{P_0})} (zh_0^2e^{2P_0} + B_1e^{P_0} + B_2e^{P_0+P_1} + B_3e^{P_0+P_2}) \\ &= -\frac{1}{(h_0e^{P_0})} \left[\sum_{j=0}^{j=3} B_j e^{G_j} \right], \end{aligned}$$

G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus, avec $G_0 = 2P_0(z)$ et $B_0 = zh_0^2 \neq 0$, B_j ($j = 1, 2, 3$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z , h_i , h'_j , P'_l , F , F' . Puisque a_{jn} ($j = 0, 1, 2$) sont des nombres complexes distincts, alors $\deg(G_0 - G_j) = n$ ($j = 1, 2, 3$). D'après le Lemme 7.2.7 et le fait $B_0 = zh_0^2 \neq 0$, nous avons $A_1 \neq 0$. à l'équation (7.4.7) au-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\tau}(f') = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

Étape N° 3 : Nous prouvons que $\bar{\tau}(f'') = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty$. Soit $g_2(z) = f''(z) - z$, alors z est un point fixe de $f''(z)$ si et seulement si $g_2(z) = 0$. Nous avons $g_2(z)$ est une fonction méromorphe et $\rho(g_2(z)) = \rho(f''(z)) = \rho(f(z)) = +\infty$. Nous prouvons que $\bar{\lambda}(g_2) = +\infty$. En dérivant les deux côtés de l'équation (7.4.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} &f^{(k+2)} + A_{1,k-1}f^{(k+1)} + (A'_{1,k-1} + A_{1,k-2})f^{(k)} + \cdots + (A'_{1,s-1} + A_{1,s-2})f^{(s)} \\ &\quad + \cdots + (A'_{1,1} + A_{1,0})f'' + A'_{1,0}f' = \left(-\frac{(h_0e^{P_0})'}{(h_0e^{P_0})}F + F' \right)'. \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

De l'équation (7.4.6), nous avons

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= (h_1 e^{P_1})' + h_0 e^{P_0} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} h_1 e^{P_1} \\ &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0})} \left(h_0^2 e^{2P_0} + \alpha_{1,0}^{(1)} e^{P_0+P_1} \right), \end{aligned}$$

où $\alpha_{1,0}^{(1)}$ est une fonction méromorphe d'ordre inférieur à n . D'après le Lemme 7.2.7 et le fait $h_0 \neq 0$, nous avons

$$A_{1,0} \neq 0.$$

Par l'équation (7.4.6) nous avons

$$f' = -\frac{1}{A_{1,0}} \left[f^{(k+1)} + A_{1,k-1} f^{(k)} + A_{1,k-2} f^{(k-1)} + \dots + A_{1,1} f'' + \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F - F' \right]. \quad (7.4.9)$$

La substitution de (7.4.9) dans (7.4.8), nous donne

$$\begin{aligned} &f^{(k+2)} + \left[A_{1,k-1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \right] f^{(k+1)} + \left[A'_{1,k-1} + A_{1,k-2} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,k-1} \right] f^{(k)} + \dots \\ &+ \left[A'_{1,s-1} + A_{1,s-2} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,s-1} \right] f^{(s)} + \dots + \left[A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] f^{(3)} \\ &+ \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] f'' - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F - F' \right) = \left(-\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F + F' \right)'. \quad (7.4.10) \end{aligned}$$

Nous pouvons dénoter l'équation (7.4.10) par la forme suivante

$$\begin{aligned} &f^{(k+2)} + A_{2,k-1} f^{(k+1)} + A_{2,k-2} f^{(k)} + \dots + A_{2,s} f^{(s+2)} + A_{2,s-1} f^{(s+1)} + \dots \\ &+ A_{2,1} f^{(3)} + A_{2,0} f'' = \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)'}{(h_0 e^{P_0(z)} + d_0)} F + F' \right)', \quad (7.4.11) \end{aligned}$$

où $A_{2,j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) sont des fonctions méromorphes définies par l'équation (4.4.6) au-dessus, et nous avons

$$A_{2,0} = A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1}, \quad A_{2,1} = A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2}.$$

La substitution $f''(z) = g_2(z) + z$, $f^{(3)}(z) = g_2'(z) + 1$, $f^{(j+2)} = g_1^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, k$) dans l'équation (7.4.11), nous donne

$$g_2^{(k)} + A_{2,k-1} g_2^{(k-1)} + A_{2,k-2} g_2^{(k-2)} + \dots + A_{2,1} g_2' + A_{2,0} g_2 = A_2 \quad (7.4.12)$$

où

$$\begin{aligned}
A_2 &= -A_{2,1} - z A_{2,0} + \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F + F' \right)' \\
&= - \left[A'_{1,2} + A_{1,1} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,2} \right] - z \left[A'_{1,1} + A_{1,0} - \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} A_{1,1} \right] \\
&\quad + \frac{A'_{1,0}}{A_{1,0}} \left(\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F - F' \right) + \left(-\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F + F' \right)' \\
&= -\frac{1}{A_{1,0}} \left[A'_{1,2} A_{1,0} + A_{1,1} A_{1,0} - A'_{1,0} A_{1,2} + z A'_{1,1} A_{1,0} + z A_{1,0}^2 - z A'_{1,0} A_{1,1} \right. \\
&\quad \left. - A'_{1,0} \left(\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F - F' \right) - A_{1,0} \left(-\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F + F' \right)' \right]. \tag{7.4.13}
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= (h_2 e^{P_2})' + h_1 e^{P_1} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} h_2 e^{P_2}, \\
A_{1,2} &= (h_3 e^{P_3})' + h_2 e^{P_2} - \frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} h_3 e^{P_3}, \\
\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F - F' &= H, \quad (\rho(H) < n).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0})} \left(h_0^2 e^{2P_0} + \alpha_{1,0}^{(1)} e^{P_0+P_1} \right), \\
A_{1,1} &= \frac{1}{h_0 e^{P_0}(z)} \left(\alpha_{1,1}^{(1)} e^{P_0+P_2} + \alpha_{1,1}^{(2)} e^{P_0+P_1} \right), \\
A_{1,2} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0})} \left(\alpha_{1,2}^{(1)} e^{P_0+P_2} + \alpha_{1,2}^{(2)} e^{P_0+P_3} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A'_{1,0} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0})^2} \left(\beta_{1,0}^{(1)} e^{3P_0} + \beta_{1,0}^{(2)} e^{2P_0+P_1} \right), \\
A'_{1,1} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0})^2} \left(\beta_{1,1}^{(1)} e^{2P_0+P_2} + \beta_{1,1}^{(2)} e^{2P_0+P_1} \right), \\
A'_{1,2} &= \frac{1}{(h_0 e^{P_0})^2} \left(\beta_{1,2}^{(1)} e^{2P_0+P_2} + \beta_{1,2}^{(2)} e^{2P_0+P_3} \right), \\
\left(\frac{(h_0 e^{P_0})'}{(h_0 e^{P_0})} F - F' \right)' &= H',
\end{aligned}$$

où $\alpha_{i,j}^{(l)}$, $\beta_{i,j}^{(l)}$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions h_k, h'_m, P'_j . De (7.4.13) nous avons

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{P_0})^3} \left[zh_0^5e^{5P_0} + B_1e^{4P_0} + B_2e^{4P_0+P_1} + B_3e^{4P_0+P_2} + B_4e^{4P_0+P_3} \right. \\ &\quad \left. + B_5e^{3P_0+P_1} + B_6e^{3P_0+2P_1} + B_7e^{3P_0+P_1+P_2} + B_8e^{3P_0+P_1+P_3} \right] \\ &= -\frac{1}{A_{1,0}(h_0e^{P_0})^3} \left[\sum_{j=0}^{j=8} B_j e^{G_j} \right], \end{aligned}$$

où G_j sont des polynômes définis comme ci-dessus et $B_0 = zh_0^5 \neq 0$, B_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini inférieur à n , écrites sous la forme d'une somme de multiplications des termes constitués par les fonctions z, h_i, h'_i, P'_i ($i = 0, 1, 2, 3$). Nous certifions que $A_2 \neq 0$. Puisque $a_{0n} \neq a_{jn}$ ($j = 1, 2, 3$), $a_{1n} \neq 2a_{0n}$, $a_{1n} + a_{2n} \neq 2a_{0n}$ et $a_{1n} + a_{3n} \neq 2a_{0n}$, alors nous avons $\deg(5P_0 - 4P_0) = \deg P_0 = n$, $\deg(5P_0 - 4P_0 - P_1) = \deg(P_0 - P_1) = n$, $\deg(5P_0 - 4P_0 - P_2) = \deg(P_0 - P_2) = n$, $\deg(5P_0 - 4P_0 - P_3) = \deg(P_0 - P_3) = n$, $\deg(5P_0 - 3P_0 - P_1) = \deg(2P_0 - P_1) = n$, $\deg(5P_0 - 3P_0 - 2P_1) = \deg(2P_0 - 2P_1) = n$, $\deg(5P_0 - 3P_0 - P_1 - P_2) = \deg(2P_0 - P_1 - P_2) = n$, $\deg(5P_0 - 3P_0 - P_1 - P_3) = \deg(2P_0 - P_1 - P_3) = n$. Par conséquent $\deg(5P_0 - G_j) = n$ ($j = 1, 2, \dots, 8$) et $\rho(B_j) < n$ ($j = 0, 1, \dots, 8$). D'après le Lemme 7.2.7 et le fait $B_0 = zh_0^5 \neq 0$, nous avons $A_2 \neq 0$. Nous utilisons le Lemme 7.2.8 à l'équation (7.4.12) au-dessus, nous obtenons

$$\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \bar{\tau}(f'') = \rho(g_1) = \rho(f) = +\infty.$$

Sur la croissance et les zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes d'ordre supérieur

8.1 Introduction et résultats

Dans [46], Kwon a étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second degré et a obtenu le résultat suivant.

Théorème A. Soit H un ensemble de nombres complexes avec $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in H\} > 0$ et soient $A(z)$, $B(z)$ deux fonctions entières telles que pour les constantes $\alpha (> 0)$, $\beta (> 0)$, on a

$$|A(z)| \leq \exp \left\{ o(1) |z|^\beta \right\}$$

et

$$|B(z)| \geq \exp \left\{ (o(1) + 1) \alpha |z|^\beta \right\}$$

où $z \rightarrow \infty$ pour $z \in H$. Alors, chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0 \tag{8.1.1}$$

est d'ordre infini et $\rho_2(f) \geq \beta$.

Dans [23], Chen et Yang ont étudié la croissance des solutions de l'équation (8.1.1) et ont obtenu.

Théorème B. Soit H un ensemble de nombres complexes avec $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in H\} > 0$ et soit $\rho(A) \leq \rho(B) = \sigma < +\infty$ tel que pour une constante $C (> 0)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|A(z)| \leq \exp\{o(1)|z|^{\sigma-\varepsilon}\}$$

et

$$|B(z)| \geq \exp\{(o(1) + 1)C|z|^{\sigma-\varepsilon}\}$$

où $z \rightarrow \infty$ pour $z \in H$. Alors, nous avons, chaque solution f de l'équation (1.1), est d'ordre infini et $\rho_2(f) = \rho(B)$.

Ces résultats ont été améliorés par Belaïdi [6] [7] en considérant des conditions plus générales aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur avec des coefficients des fonctions entières. Récemment, Y. Chen [70] a étendu les résultats précédents en étudiant les zéros et la croissance des solutions méromorphes de l'équation (8.1.1) et de l'équation non homogène $f'' + A(z)f' + B(z)f = F$ où $A(z)$, $B(z)$ sont des fonctions méromorphes.

En ce chapitre, nous considérons les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = 0 \quad (k \geq 2), \quad (8.1.2)$$

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j f^{(j)} + A_0 f = A_k \quad (k \geq 2), \quad (8.1.3)$$

où $A_j(z)$ $j = 0, 1, \dots, k$ ($A_0 \not\equiv 0$ et $A_k \not\equiv 0$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. nous étudierons les zéros et la croissance des solutions méromorphes d'équations (8.1.2) et (8.1.3), nous améliorons les résultats de Yu Chen considérablement et nous donnons deux corollaires dans le cas $\rho = \max\{\rho(A_j) \ j = 1, 2, \dots, k\} < \rho(A_0) = \sigma < \frac{1}{2}$.

Théorème 8.1.1 Soit $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble de mesure linéaire infinie, et soient $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe des constantes positives $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que $\rho = \max\{\rho(A_j), \ j = 1, 2, \dots, k-1\} < \sigma$, et $|A_0(z)| \geq e^{\alpha r}$ pour $|z| = r \in H$, $r \rightarrow +\infty$ tel que $\rho(A_0) < +\infty$. Alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (8.1.2) satisfait

$$\mu(f) = \rho(f) = +\infty \text{ et } \rho_2(f) \geq \sigma.$$

En outre, si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$, alors

$$\sigma \leq \rho_2(f) \leq \rho(A_0).$$

Remarque 8.1.1 Nous pouvons prouver les mêmes résultats dans le Théorème 8.1.1, en mettant $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble de densité supérieure positive (ou en mettant $H \subset [1, +\infty)$ un ensemble de densité logarithmique supérieure positive) (ou en mettant $H \subset [1, +\infty)$ un ensemble de mesure logarithmique infinie) au lieu de H un ensemble de mesure linéaire infinie. (voir le Lemme 8.2.13).

Théorème 8.1.2 Soit $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble de densité supérieure positive, et soit $A_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) ($A_k \not\equiv 0$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe des constantes positives $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que $\rho = \max\{\rho(A_j) \ j = 1, 2, \dots, k\} < \sigma$, et $|A_0(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma}$ où $|z| = r \in H$ tel que $\rho(A_0) < +\infty$. Alors, chaque solution méromorphe f avec $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma$ de l'équation (8.1.3) est d'ordre infini et

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f).$$

En outre, si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \min\{\mu(f), \sigma\}$ alors $\rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.

Corollaire 8.1.1 Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, \dots, k$ des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles telles que $\rho = \max\{\rho(A_j) \ j = 1, 2, \dots, k\} < \rho(A_0) = \sigma < \frac{1}{2}$ et $A_k \not\equiv 0$. Alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (8.1.2) satisfait

$$\mu(f) = \rho(f) = +\infty \text{ et } \rho_2(f) = \sigma.$$

En outre, chaque solution méromorphe f de l'équation (8.1.3) satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f)$$

et si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ alors $\rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.

Corollaire 8.1.2 Soient $A_j(z)$ $j = 0, 1, \dots, k$ des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que $\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right) < \mu(A_0) \leq \rho(A_0) = \sigma < \frac{1}{2}$, $\rho = \max\{\rho(A_j) \ j = 1, 2, \dots, k\} < \sigma$ et $A_k \not\equiv 0$. Alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (8.1.2) satisfait

$$\mu(f) = \rho(f) = +\infty \text{ et } \rho_2(f) = \sigma.$$

En outre, supposons que tous les pôles de f sont d'une multiplicité uniformément bornée. Alors, chaque solution méromorphe f de l'équation (8.1.3) satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f)$$

et si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ alors $\rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.

8.2 Lemmes préliminaires

Lemme 8.2.1 [34] *On suppose que f est une fonction méromorphe transcendante. Soient $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ deux constantes. Alors, il existe un ensemble $E_0 \subset [0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $c > 0$, tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_0$, nous avons*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq c [T(\alpha r, f) r^\varepsilon \log T(\alpha r, f)]^j \quad j \in \mathbb{N}. \quad (8.2.1)$$

Lemme 8.2.2 [20] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1, r \rightarrow +\infty$, nous avons*

$$|f(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}. \quad (8.2.2)$$

Lemme 8.2.3 [16] *Soit $f(z) = g(z)/d(z)$ une fonction méromorphe, où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières telles que*

$$\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \rho(g) = \rho(f) \leq +\infty, \quad \lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \beta < \mu. \quad (8.2.3)$$

Soit z le point avec $|z| = r$ au quel $|g(z)| = M(r, g)$ et $\nu_g(r)$ dénote l'index central de $g(z)$. Alors, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique $lm(E_2) < +\infty$, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \geq 1). \quad (8.2.4)$$

Lemme 8.2.4 [23] *Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini, avec le hyper-ordre $\rho_2(g) = \sigma$, et $\nu(r)$ dénote l'index central de g . Alors,*

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu(r)}{\log r} = \sigma. \quad (8.2.5)$$

Lemme 8.2.5 [50] *Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini. On dénote $M(r, g) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$, alors pour tout nombre $\lambda > 0$ suffisamment grand, et tout $r \in H_0 \subset (1, +\infty)$, on a*

$$M(r, g) > c_1 \exp\{c_2 r^\lambda\}, \quad (8.2.6)$$

où $lm(H_0) = +\infty$ et c_1, c_2 sont des constantes positives.

Lemme 8.2.6 *Supposons que $k \geq 2$ et h_0, h_1, \dots, h_k ($h_0 \neq 0$) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Soit $\rho = \max\{\rho(h_j) : j = 0, 1, 2, \dots, k\} < +\infty$ et soit f une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)} + h_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + h_0 f = h_k, \quad (8.2.7)$$

telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \mu < \mu(f)$. Alors, $\rho_2(f) \leq \rho$.

Preuve. Nous assumons que f est une solution méromorphe d'ordre infini $\rho(f) = +\infty$ de l'équation (8.2.7). Nous pouvons récrire (8.2.7) sous la forme

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| \leq |h_0| + \sum_{s=1}^{k-1} |h_s| \left|\frac{f^{(s)}}{f}\right| + \left|\frac{h_k}{f}\right|. \quad (8.2.8)$$

Par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières telles que

$$\mu(f) = \mu(g) \leq \rho(f) = \rho(g) = +\infty, \quad \lambda(d) = \rho(d) = \lambda(1/f) < \mu(f)$$

et

$$\rho_2(f) = \rho_2(g).$$

Par le Lemme 8.2.3, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ au quel $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \geq 1). \quad (8.2.9)$$

Puisque $\rho(h_k(z)d(z)) \leq \rho_1 = \max\{\mu, \rho\}$, alors par le Lemme 8.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que

$$|h_k(z)d(z)| \leq e^{r^{\rho_1+\varepsilon}} \quad (8.2.10)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, $r \rightarrow +\infty$. D'autre part, par le Lemme 8.2.5 et pour un nombre $\lambda > \rho_1$ suffisamment grand, il existe un ensemble $H_0 \subset (1, +\infty)$ avec $lm(H_0) = +\infty$ et c_1, c_2 deux constantes positives tels que pour tout $r \in H_0$

$$M(r, g) > c_1 \exp\{c_2 r^\lambda\}, \quad (8.2.11)$$

de (8.2.10) et (8.2.11), pour tout ε où $0 < \varepsilon < \lambda - \rho_1$ et pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_0 - [0, 1] \cup E_1$, $r \rightarrow +\infty$ au quel $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\left|\frac{h_k(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{d(z)h_k(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}}{c_1 e^{c_2 r^\lambda}} \rightarrow 0. \quad (8.2.12)$$

Puisque $\rho = \max\{\rho(h_j) : j = 0, 1, 2, \dots, k\} < +\infty$, alors par le Lemme 8.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que

$$|h_j| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (8.2.13)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, $r \rightarrow +\infty$. En substituant (8.2.9), (8.2.12) et (8.2.13) dans (8.2.8), nous obtenons pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_0 - [0, 1] \cup E_1 \cup E_2$, ($r \rightarrow +\infty$) au quel $|g(z)| = M(r, g)$,

$$\left| \frac{v_g(r)}{z} \right|^k |1 + o(1)| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}} + \sum_{s=1}^{k-1} e^{r^{\rho+\varepsilon}} \left| \frac{v_g(r)}{z} \right|^s |1 + o(1)| + o(1).$$

Ainsi nous obtenons

$$|v_g(r)|^k |1 + o(1)| \leq (k+1) r^k e^{r^{\rho+\varepsilon}} |v_g(r)|^{k-1} |1 + o(1)|,$$

par conséquent

$$v_g(r) |1 + o(1)| \leq k e^{r^{\rho+\varepsilon}} r^k |1 + o(1)|. \quad (8.2.14)$$

Alors, par le Lemme 8.2.4, nous obtenons de (8.2.14) que $\rho_2(f) \leq \rho + \varepsilon$.

Puisque ε ($0 < \varepsilon < \lambda - \rho$) étant arbitraire, nous obtenons $\rho_2(f) \leq \rho$. \square

Lemme 8.2.7 [14] *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre ρ où $0 < \rho(f) < \frac{1}{2}$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante. Alors, il existe un ensemble $H \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{\text{dens}}H \geq 1 - 2\rho$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H$, nous avons*

$$|f(z)| \geq \exp(r^{\rho-\varepsilon}). \quad (8.2.15)$$

Lemme 8.2.8 [16] *On suppose que $h(z)$ est une fonction méromorphe avec $\lambda\left(\frac{1}{h}\right) < \mu(h) \leq \rho(h) = \sigma < \frac{1}{2}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $H \subset (1, +\infty)$ d'une densité logarithmique supérieure positive, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H$, nous avons*

$$|h(z)| \geq \exp[(1 + o(1)) r^{\sigma-\varepsilon}]. \quad (8.2.16)$$

Lemme 8.2.9 [48] *Soit $g(z)$ une fonction entière non constante d'ordre fini. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $H_1 \subset (0, +\infty)$ avec $\overline{\text{dens}}H_1 = 1$ tel que*

$$M(r, g) \geq \exp[r^{\rho(g)-\varepsilon}] \quad (8.2.17)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_1$.

Lemme 8.2.10 [20] Soient A_j, F ($F \neq 0$) ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si $f(z)$ est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F,$$

alors f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty. \quad (8.2.18)$$

Lemme 8.2.11 [47] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ avec $a_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) un polynôme non constant. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $z, |z| = r > R$, nous avons

$$(1 - \varepsilon) |a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| r^n. \quad (8.2.19)$$

Lemme 8.2.12 Soit $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble d'une mesure linéaire infinie, et soient $h_j(z)$ $j = 0, 1, \dots, k$ ($h_0 \neq 0$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe des constantes positives $\sigma > 0, \alpha > 0$ telles que $|h_0(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma}$ pour $|z| = r \in H - [0, 1]; r \rightarrow +\infty$, et $\rho = \max\{\rho(h_j) \ j = 1, 2, \dots, k\} < \sigma$. Alors, chaque solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} h_j f^{(j)} + h_0 f = h_k \quad (k \geq 2), \quad (8.2.20)$$

est transcendante et satisfait $\rho(f) \geq \sigma$.

Preuve. Assumons que $\rho(f) < \sigma$. De (8.2.20), il s'ensuit que

$$\frac{h_k}{f} - \frac{f^{(k)}}{f} - \sum_{j=1}^{k-1} h_j \frac{f^{(j)}}{f} = h_0 \quad (8.2.21)$$

Puisque $\rho(h_j) < \sigma$ ($j = 1, 2, \dots, k$) et $\rho(f) < \sigma$, Alors, de (8.2.21) nous obtenons que l'ordre de croissance de h_0 est $\rho_1 \leq \max\{\rho, \rho(f)\} < \sigma$. par le Lemme 8.2.2, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \sigma - \rho_1$)

il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie tel que

$$|h_0| \leq e^{r^{\rho_1 + \varepsilon}} \quad (8.2.22)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1, r \rightarrow +\infty$.

De l'hypothèse du Lemme 8.2.12, il existe un ensemble H avec $m(H) > 0$, et il existe des constantes positives $\sigma > 0, \alpha > 0$ telles que

$$|h_0(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma} \quad (8.2.23)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H; r \rightarrow +\infty$.

Par (8.2.22) et (8.2.23), nous concluons que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H - [0, 1] \cup E_1; r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$e^{\alpha r^\sigma} \leq e^{r^{\rho_1 + \varepsilon}}$$

et puisque ε ($0 < \varepsilon < \sigma - \rho_1$) c'est une contradiction pour $r \rightarrow +\infty$. En conséquence, toute solution méromorphe $f \neq 0$ de l'équation (8.2.20) est transcendante et satisfait $\rho(f) \geq \sigma$. \square

Lemme 8.2.13 *Soit H un ensemble de nombres réels positifs et $\chi_H(t)$ la fonction caractéristique de l'ensemble H . Alors, pour tout $H \subset [1, +\infty)$ nous avons*

i) Si $lm(H) = +\infty$ alors $m(H) = +\infty$.

ii) Si $\overline{dens}H > 0$ alors $m(H) = +\infty$.

iii) Si $\log \overline{dens}H > 0$ alors $lm(H) = +\infty$.

Preuve. i) Puisque nous avons $\frac{\chi_E(t)}{t} \leq \chi_E(t)$ pour tout $t \in H \subset [1, +\infty)$ alors

$$m(H) \geq lm(H).$$

Nous pouvons facilement prouver les résultats ii) et iii) par l'application de la définition de la limite et les propriétés $lm(H \cap [1, r]) \leq lm(H)$ et $m(H \cap [0, r]) \leq m(H)$. \square

8.3 Preuve du Théorème 8.1.1.

Soit $f \neq 0$ une solution méromorphe de (8.1.2). De (8.1.2), il s'ensuit que

$$|A_0| \leq \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + \sum_{j=1}^{k-1} |A_j| \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right|. \quad (8.3.1)$$

Par le Lemme 8.2.12 f est transcendante, par l'utilisation du Lemme 8.2.1, il existe un ensemble $E_0 \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}}{f} \right| \leq rT(2r, f)^{2k}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (8.3.2)$$

Par le Lemme 8.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie, tel que

$$|A_j| \leq e^{r^{\rho_1 + \varepsilon}}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (8.3.3)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, $r \rightarrow +\infty$. En outre, par l'hypothèse du Théorème 8.1.1, il existe un ensemble H avec $m(H) = +\infty$, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H$; $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|A_0(z)| \geq e^{r^{\alpha r^\sigma}}. \quad (8.3.4)$$

Par conséquent, il s'ensuit de (8.3.1), (8.3.2), (8.3.3) et (8.3.4) que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H - [0, 1] \cup E_0 \cup E_1$; $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\begin{aligned} e^{\alpha r^\sigma} &\leq rT(2r, f)^{2k} + \sum_{j=1}^{k-1} e^{r^{\rho+\varepsilon}} rT(2r, f)^{2k} \\ &\leq krT(2r, f)^{2k} e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

d'où

$$e^{\alpha(1-o(1))r^\sigma} \leq krT(2r, f)^{2k}. \quad (8.3.5)$$

Par conséquent, par (8.3.5), nous trouvons

$$\mu(f) = \rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \rho_2(f) \geq \sigma. \quad (8.3.6)$$

En outre, si $\lambda(1/f) < +\infty$ et $\rho(A_0) = \beta$ ($\beta \geq \sigma$), alors f est une solution méromorphe avec $\rho(f) = \mu(f) = +\infty$, $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ et $\rho = \max\{\rho(A_j) \mid j = 0, 1, \dots, k-1\} = \beta < +\infty$. Par le Lemme 8.2.6, nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \beta. \quad (8.3.7)$$

Par (8.3.6) et (8.3.7), nous concluons que

$$\sigma \leq \rho_2(f) \leq \rho(A_0).$$

8.4 Preuve du Théorème 8.1.2.

Soit f une solution méromorphe de (8.1.3). Supposons que $\rho(f) < +\infty$. il s'ensuit de (8.1.3) que

$$|A_0| \leq \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| + \sum_{j=1}^{k-1} |A_j| \left| \frac{f^{(j)}}{f} \right| + \left| \frac{A_k}{f} \right|. \quad (8.4.1)$$

Par le Lemme 8.2.12 f est transcendante avec $\rho(f) \geq \sigma$. Par l'hypothèse $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma$ et par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$, où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières, avec $\lambda(d) = \rho(d) = \lambda(1/f) < \sigma$, $\rho(f) = \rho(g) \geq \sigma$. Par conséquent

$$\left| \frac{A_k(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{d(z) A_k(z)}{g(z)} \right|. \quad (8.4.2)$$

Par le Lemme 8.2.9, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \rho(f)$), il existe un ensemble $H_1 \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{\text{dens}}H_1 = 1$, tel que

$$M(r, g) \geq e^{r^{\rho(g)-\varepsilon}} \quad (8.4.3)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_1$. Par (8.4.3), pour tout z satisfaisant $|z| \in H_1$ au quel $|g(z)| = M(r, g)$, nous obtenons

$$|g(z)| \geq 1. \quad (8.4.4)$$

Alors, par (8.4.2) et (8.4.4), nous avons

$$\left| \frac{A_k(z)}{f(z)} \right| \leq |d(z) A_k(z)|.$$

On a $\rho(d(z) A_k(z)) < \sigma$ et notons $\rho_1 = \max\{\rho(A_j), \rho(d) : j = 1, 2, \dots, k\} < \sigma$. Par conséquent, en utilisant le même raisonnement comme dans la preuve du Théorème 8.1.1, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \sigma - \rho_1$) il existe un ensemble $H_2 = H \cap H_1 \subset [0, +\infty)$ de densité supérieure positive tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_2 - [0, 1] \cup E_0 \cup E_1$, $r \rightarrow +\infty$, au quel $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}}{f} \right| \leq rT(2r, f)^{2k}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (8.4.5)$$

$$\left| \frac{A_k(z)}{f(z)} \right| \leq e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}, \quad (8.4.6)$$

$$|A_j| \leq e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad (8.4.7)$$

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma}. \quad (8.4.8)$$

De (8.4.5), (8.4.6), (8.4.7), (8.4.8), (8.4.1) et pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H_2 - [0, 1] \cup E_0 \cup E_1$, $r \rightarrow +\infty$, au quel $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\begin{aligned} e^{\alpha r^\sigma} &\leq rT(2r, f)^{2k} + \sum_{j=1}^{k-1} e^{r^{\rho_1+\varepsilon}} rT(2r, f)^k + e^{r^{\rho_1+\varepsilon}} \\ &\leq (k+1) rT(2r, f)^{2k} e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

d'où

$$e^{\alpha(1-o(1))r^\sigma} \leq krT(2r, f)^{2k}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (8.4.9)$$

Par conséquent, par (8.4.9), nous avons $\rho(f) = +\infty$. C'est une contradiction, d'où $\rho(f) < +\infty$ n'est pas juste. Par conséquent, nous concluons que $\rho(f) = +\infty$. Maintenant, supposons

que f est une solution méromorphe de l'équation (8.1.3), alors f est d'ordre infini. Par conséquent par le Lemme 8.2.10, nous obtenons

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty.$$

Nous connaissons que les zéros de f se produisent de l'ensemble des pôles de A_j $j = 0, 1, \dots, k-1$ ou l'ensemble des zéros de A_k et si f a un zéro z_0 d'ordre m , $m > k$, alors A_k doit avoir un zéro à z_0 d'ordre $m - k$. Par conséquent, nous obtenons par $A_k \not\equiv 0$ que

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{A_k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N(r, A_j). \quad (8.4.10)$$

D'autre part, (8.1.3) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{A_k} \left[\frac{f^{(k)}}{f} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j \frac{f^{(j)}}{f} + A_0 \right].$$

Ainsi, nous obtenons

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{A_k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^k m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1). \quad (8.4.11)$$

Par (8.4.10) et (8.4.11), nous avons

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{A_k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N(r, A_j) \\ &+ m\left(r, \frac{1}{A_k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^k m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1). \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

Par (8.4.12) et par le lemme de la dérivée logarithmique (voir [47] [34], [38, Lemme 2.3]), il existe un ensemble E de mesure linéaire finie tel que pour tout $r \notin [0, 1] \cup E$, nous avons

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \\ &\leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T\left(r, \frac{1}{A_k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j) + C \log(rT(r, f)) + O(\log(r)), \end{aligned}$$

d'où

$$T(r, f) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{j=0}^k T(r, A_j) + C \log(rT(r, f)) \quad (8.4.13)$$

où C est une constante positive. Puisque pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, nous avons

$$C \log(rT(r, f)) \leq \frac{1}{2}T(r, f), \quad T(r, A_j) \leq r^{\beta+\varepsilon}, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad (8.4.14)$$

où $\beta = \rho(A_0) > \sigma$. Alors, pour $r \notin [0, 1] \cup E$ et r suffisamment grand et par l'utilisation de (8.4.14), nous concluons de (8.4.13) que

$$T(r, f) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k+1)r^{\beta+\varepsilon} + \frac{1}{2}T(r, f).$$

Ainsi, nous obtenons

$$T(r, f) \leq 2k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2(k+1)r^{\beta+\varepsilon}. \quad (8.4.15)$$

Par conséquent, par (8.4.15), nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f),$$

alors

$$\lambda_2(f) \geq \bar{\lambda}_2(f) \geq \rho_2(f).$$

Par définition, nous avons $\lambda_2(f) \leq \rho_2(f)$, donc

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f). \quad (8.4.16)$$

En outre, nous avons $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ et $\rho(A_0) = \beta$ ($\beta \geq \sigma$), alors f est une solution méromorphe avec $\rho(f) = +\infty$, $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ et $\rho = \max\{\rho(A_j) \mid j = 0, 1, \dots, k-1\} = \beta < +\infty$. par le Lemme 8.2.6, nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \beta. \quad (8.4.17)$$

par (8.4.16) et (8.4.17), nous concluons que

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq \rho(A_0).$$

8.5 Preuve du Corollaire 8.1.1.

Puisque A_0 est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles et $\rho(A_0) = \sigma$, alors par théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire A_0 sous la forme $A_0(z) = \frac{B(z)}{P(z)}$, où $B(z)$ est une fonction entière avec $\rho(A_0) = \rho(B) = \sigma$ et $P(z)$ est un polynôme. Par conséquent, par le Lemme 8.2.7 et le Lemme 8.2.11, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \sigma$), il existe un ensemble $H \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{\text{dens}}H \geq 1 - 2\sigma > 0$ (par le Lemme 8.2.13 nous avons $m(H) = +\infty$) et constantes positives $c > 0$, $m > 0$ telles que

$$|B(z)| \geq e^{r^{\sigma-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad |P(z)| \leq cr^m \quad (8.5.1)$$

pour tout z , $|z| = r \in H$ et $r \rightarrow +\infty$. Par conséquent

$$|A_0(z)| = \left| \frac{B(z)}{P(z)} \right| \geq \frac{e^{r^{\sigma-\varepsilon}}}{cr^m} \geq e^{r^{\sigma-2\varepsilon}}.$$

Puisque A_j ($j = 0, 1, \dots, k$) sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles et les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles des A_j ($j = 0, 1, \dots, k$), alors f doit avoir un nombre fini des pôles. par conséquent, $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = 0$. Alors, pour tout ε avec $0 < 2\varepsilon < \sigma - \rho$, nous avons (??) et

$$\rho = \max \{ \rho(A_j) \ j = 1, 2, \dots, k \} < \sigma - 2\varepsilon \quad (8.5.2)$$

et nous avons toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de (8.1.2) ou (8.1.3) satisfait

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma - 2\varepsilon. \quad (8.5.3)$$

Alors, par (??), (8.5.2) et (8.5.3), en appliquant le Théorème 8.1.1 à l'équation (8.1.2), nous trouvons que chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (8.1.2) satisfait

$$\mu(f) = \rho(f) = +\infty$$

et

$$\sigma - 2\varepsilon \leq \rho_2(f) \leq \sigma.$$

Puisque ε ($0 < 2\varepsilon < \sigma - \rho$) étant arbitraire, nous obtenons

$$\rho_2(f) = \sigma.$$

En outre, avec l'application du Théorème 8.1.2 à l'équation (8.1.3), nous trouvons que chaque solution méromorphe f de l'équation (8.1.3) satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f).$$

et si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ alors $\rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.

8.6 Preuve du Corollaire 8.1.2.

Puisque A_0 est une fonction méromorphe avec $\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right) < \mu(A_0) \leq \rho(A_0) = \sigma < \frac{1}{2}$, alors par le Lemme 8.2.8, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \sigma$), il existe un ensemble $H \subset (1, +\infty)$ avec $\overline{\log dens} H > 0$ (par le Lemme 8.2.13 nous avons $m(H) = +\infty$) tel que pour tout z , $|z| = r \in H$, nous avons

$$|A_0(z)| \geq e^{(1+o(1))r^{\sigma-\varepsilon}} \quad (8.6.1)$$

Évidemment, les pôles de f se produisent de l'ensemble des pôles des A_j ($j = 0, 1, \dots, k$), notons que tout les pôles de f sont de multiplicité uniformément borné, par conséquent, de $\lambda\left(\frac{1}{A_0}\right) < \sigma$ et $\rho = \max\{\rho(A_j) \mid j = 1, 2, \dots, k-1\} < \sigma$, nous avons $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma$. Donc, pour tout ε avec $0 < \varepsilon < \min\left\{\sigma - \rho, \sigma - \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}$, nous avons (6.1) et

$$\rho = \max\{\rho(A_j) \mid j = 1, 2, \dots, k\} < \sigma - \varepsilon \quad (8.6.2)$$

et

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \sigma - \varepsilon. \quad (8.6.3)$$

Alors, par (8.6.1), (8.6.2) et (8.6.3) et avec l'application du Théorème 8.1.1 à l'équation (8.1.2), nous trouvons que chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation (8.1.2) satisfait

$$\mu(f) = \rho(f) = +\infty$$

et

$$\sigma - \varepsilon \leq \rho_2(f) \leq \sigma.$$

Puisque ε ($0 < \varepsilon < \min\left\{\sigma - \rho, \sigma - \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}$) étant arbitraire, nous obtenons

$$\rho_2(f) = \sigma.$$

En outre, par l'application du Théorème 8.1.2 à l'équation (8.1.3), nous trouvons que chaque solution méromorphe f de l'équation (8.1.3) satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f).$$

et si $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$ alors $\rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.

Sur la croissance et les zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes du second degré

9.1 Introduction et résultats

Soit H un ensemble de nombres complexes avec $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in H\} > 0$. Pour l'équation différentielle linéaire du second degré

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = F(z), \quad (9.1.1)$$

où $A(z)$, $B(z)$ sont des fonctions entières.

Kwon [46] a montré que si $|A(z)| \leq \exp\{o(1)|z|^\beta\}$ et $|B(z)| \geq \exp\{(o(1) + 1)\alpha|z|^\beta\}$ quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in H$, où $\alpha, \beta > 0$ deux constantes, alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de (9.1.1) avec $F \equiv 0$ est d'ordre infini et $\rho_2(f) \geq \beta$. Dans [23] Chen et Yang ont étudié la croissance des solutions de l'équation non homogène (9.1.1) (F est une fonction entière avec $F \not\equiv 0$), ils ont prouvé que si $\rho(A) \leq \rho(B) = \sigma$, $\rho(F) < +\infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $|A(z)| \leq \exp\{o(1)|z|^{\sigma-\varepsilon}\}$ et $|B(z)| \geq \exp\{(o(1) + 1)C|z|^{\sigma-\varepsilon}\}$ quand $z \rightarrow \infty$ pour $z \in H$, où $C > 0$ une constante réelle, alors chaque solution f de (9.1.1), est d'ordre infini et $\bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) = \sigma$ avec au plus une solution exceptionnelle f_0 satisfaisant $\rho(f_0) < \sigma$. Belaïdi [6], [7], a amélioré les résultats de Kwon [46] et de Chen et Yang [23], avec des conditions plus générales sur les coefficients entières d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation différentielle linéaire homogène et non homogène (9.1.1), où $A(z)$, $B(z)$ et $F(z)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant

un nombre fini de pôles. Nous échangerons les conditions entre $A(z)$ et $B(z)$, et nous étudions les zéros et l'ordre de croissance des solutions méromorphes de l'équation (9.1.1). On obtient les résultats suivants

Théorème 9.1.1 *Soit $H \subset [0, +\infty)$ un ensemble d'une densité supérieure positive, et soient $A(z)$, $B(z)$ et $F(z)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. S'il existe des constantes positives $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que $|A(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma}$ quand $|z| = r \in H$, $r \rightarrow +\infty$, et $\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \sigma$. Alors, chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (9.1.1) satisfait*

$$\rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \rho_2(f) \leq \rho(A).$$

Théorème 9.1.2 *Soit $H \subset [1, +\infty)$ un ensemble d'une densité logarithmique supérieure positive, et soient $A(z)$, $B(z)$ et $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. S'il existe des constantes positives $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que $|A(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma}$ quand $|z| = r \in H$, $r \rightarrow +\infty$, et $\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \sigma$. Alors, chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (9.1.1) satisfait*

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq \beta.$$

Corollaire 9.1.1 *Soient $A(z)$, $B(z)$, $F(z)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles telles que $\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \rho(A) = \sigma < \frac{1}{2}$. Alors, chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (9.1.1) satisfait*

$$\rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \rho_2(f) \leq \sigma.$$

En outre, si $F(z) \not\equiv 0$, alors chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (9.1.1) satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq \sigma.$$

9.2 Lemmes préliminaires

Lemme 9.2.1 [34] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ρ , et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_0 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E_0 \cup [0, 1]$, et pour tout $k, j, 0 \leq j < k$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (9.2.1)$$

De même, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $|z|$ suffisamment grand et $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, et pour tout $k, j, 0 \leq j < k$, l'inégalité (9.2.1) est vérifiée.

Lemme 9.2.2 [20] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\rho(f) = \rho < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2, r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|f(z)| \leq \exp \{r^{\rho+\varepsilon}\}. \quad (9.2.2)$$

Lemme 9.2.3 [9] Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ avec $a_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) un polynôme non constant. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $z, |z| = r > R$, nous avons

$$(1 - \varepsilon) |a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| r^n. \quad (9.2.3)$$

Lemme 9.2.4 [3] Supposons que $k \geq 2$ et $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, F$ ($A_0 \neq 0$) sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles. Soit

$$\rho = \max \{ \rho(A_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), F \},$$

et soit $f(z)$ une solution méromorphe transcendante de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_0 f = F.$$

Alors

$$\rho_2(f) \leq \rho. \quad (9.2.4)$$

Lemme 9.2.5 [3] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, et supposons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^\rho}$$

est non bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ avec la constante $\rho > 0$. Alors, il existe, une séquence infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ ($n = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que $G(z_n) \rightarrow +\infty$ et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{s-j} \quad (j = 0, \dots, s-1) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (9.2.5)$$

Lemme 9.2.6 [62] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\rho(f) = \rho < +\infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que $\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^\sigma$ pour tout rayon $\arg(z) = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E$, où M est une constante positive dépend de θ , tandis que σ est une constante indépendante de θ . Alors

$$\rho(f) \leq \sigma. \quad (9.2.6)$$

Lemme 9.2.7 [14] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre ρ où $0 < \rho(f) < \frac{1}{2}$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $H \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{\text{dens}}H \geq 1 - 2\rho$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H$, nous avons

$$|f(z)| \geq \exp(r^{\rho-\varepsilon}). \quad (9.2.7)$$

Lemme 9.2.8 [20] Soient A_j, F ($F \neq 0$) ($j = 0, 1, \dots, k-1$) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F,$$

alors f satisfait

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty. \quad (9.2.8)$$

9.3 Preuve du Théorème 9.1.1.

Assumons que f est transcendante ($f' \neq 0$) avec $\rho(f) < \sigma$. De (9.1.1), il s'ensuit que

$$-\frac{f''}{f'} - B(z) \frac{f}{f'} + \frac{F(z)}{f'} = A(z). \quad (9.3.1)$$

Puisque $\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \sigma$, alors l'ordre de croissance du côté gauche de l'équation (9.3.1) est $\rho_1 = \max\{\rho(B), \rho(F), \rho(f)\} < \sigma$, par conséquent $\rho(A) \leq \rho_1$. Par le Lemme 9.2.2, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \sigma - \rho_1$) il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que

$$|A(z)| \leq e^{r^{\rho_1+\varepsilon}} \quad (9.3.2)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, $r \rightarrow +\infty$. De l'hypothèse du Théorème 9.1.1, il existe un ensemble H avec $\overline{\text{dens}}H > 0$, et il existe deux constantes positives $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ telles que

$$|A(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma} \quad (9.3.3)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H$; $r \rightarrow +\infty$. Par (9.3.2) et (9.3.3), nous concluons que

$$e^{\alpha r^\sigma} \leq e^{r^{\rho_1 + \varepsilon}},$$

d'où

$$e^{(1-o(1))\alpha r^\sigma} \leq 1$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H \setminus [0, 1] \cup E_2$; $r \rightarrow +\infty$, ceci contredit le fait $e^{(1-o(1))\alpha r^\sigma} \rightarrow +\infty$. En conséquence, toute solution méromorphe transcendante f est d'ordre $\rho(f) \geq \sigma$. Maintenant, nous prouvons que $\rho(f) = +\infty$. Soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe transcendante de (9.1.1). Nous supposons que f est d'ordre fini et $\rho(f) = \delta$, nous avons $\rho(f) = \delta \geq \sigma$. De (9.1.1), il s'ensuit que

$$|A| \leq \left| \frac{f''}{f'} \right| + |B| \left| \frac{f}{f'} \right| + \left| \frac{F}{f'} \right|. \quad (9.3.4)$$

Par le Lemme 9.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geq R_0$, nous avons

$$\left| \frac{f''}{f'} \right| \leq r^{2\delta}. \quad (9.3.5)$$

Nous montrons que

$$G(z) = \frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, par le Lemme 9.2.5, il existe une séquence infinie des points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2, \dots$) tendant à l'infini telle que

$$\left| \frac{f(z_m)}{f'(z_m)} \right| \leq (1 + o(1)) |z_m| \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty \quad (9.3.6)$$

et

$$\frac{\log^+ |f'(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} \rightarrow +\infty. \quad (9.3.7)$$

De (9.3.7) et pour toute constante positive $M > 0$, nous avons

$$\frac{\log^+ |f'(z_m)|}{|z_m|^{\rho+\varepsilon}} > M$$

alors

$$|f'(z_m)| > e^{M|z_m|^{\rho+\varepsilon}} \text{ quand } m \rightarrow +\infty. \quad (9.3.8)$$

Puisque $F(z)$ est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles, alors par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire $F(z)$ sous la forme $F(z) = \frac{H(z)}{\pi(z)}$ où $\pi(z)$ est un polynôme, $H(z)$ est une fonction entière avec $\rho(H) = \rho(F)$. De (9.3.8), pour m suffisamment grand ($r_m \rightarrow +\infty$), nous avons

$$\left| \frac{F(z_m)}{f'(z_m)} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f'(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{c r_m^s e^{M_1 |z_m|^{\rho+\varepsilon}}} \right| = \left| \frac{H(z_m)}{e^{M_1 |z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right|,$$

où $c > 0$, $M_1 > 0$ deux constantes et $s \geq \deg \pi$ est un nombre entier. Puisque $\rho(H) = \rho(F) \leq \rho$, alors

$$\left| \frac{H(z_m)}{\pi(z_m) f'(z_m)} \right| \leq \left| \frac{H(z_m)}{e^{M|z_m|^{\rho+2\varepsilon}}} \right| \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow +\infty. \quad (9.3.9)$$

Par le Lemme 9.2.2, pour tout $0 < \varepsilon < \sigma - \rho$ il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et de mesure logarithmique finie tel que

$$|B(z)| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad (9.3.10)$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, $r \rightarrow +\infty$. Alors, par l'hypothèse du Théorème 9.1.1, il existe un ensemble H avec $\overline{\text{dens}} H > 0$, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in H$; $r \rightarrow +\infty$, nous avons

$$|A(z)| \geq e^{\alpha r^\sigma}. \quad (9.3.11)$$

En utilisant les inégalités (9.3.5), (9.3.6), (9.3.8), (9.3.10), (9.3.11) et la limite (9.3.9), nous concluons de l'inégalité (9.3.4) que pour tout $z_m = r_m e^{i\theta}$ satisfaisant $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$ et $r_m \in H \setminus [0, 1] \cup E_2$; $r_m \rightarrow +\infty$, nous avons

$$e^{\alpha r_m^\sigma} \leq r_m^{2\delta} + e^{r_m^{\rho+\varepsilon}} r_m (1 + o(1)) + o(1) \leq 3r_m^{2\delta} e^{r_m^{\rho+\varepsilon}},$$

d'où

$$e^{\alpha(1-o(1))r_m^\sigma} \leq 3r_m^{2\delta}$$

qui est une contradiction pour m assez grand. Par conséquent, $\frac{\log^+ |f'(z)|}{|z|^{\rho+\varepsilon}}$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$, alors il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$|f'(z)| \leq e^{M_2 |z|^{\rho+\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Donc

$$|f(z)| \leq (1 + o(1)) r |f'(z)| \leq e^{M_2 r^{\rho+2\varepsilon}},$$

par conséquent

$$|f(z)| \leq e^{M_2 r^{\rho+2\varepsilon}}. \quad (9.3.12)$$

Puisque A , B et F sont des fonctions méromorphes ayant un nombre fini de pôles et les pôles de f peuvent seulement se produire de l'ensemble des pôles de A , B et F , alors $f(z)$ doit avoir un nombre fini de pôles. Par conséquent, par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ où $d(z)$ est un polynôme et $g(z)$ est une fonction entière avec $\rho(g) = \rho(f) \geq \sigma$. De (9.3.12), nous avons

$$\left| \frac{g(z)}{d(z)} \right| \leq e^{M_2 r^{\rho+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors

$$|g(z)| \leq |d(z)| e^{M_2 r^{\rho+2\varepsilon}} \leq Ar^m e^{M_2 r^{\rho+2\varepsilon}}$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$, où $A > 0$ est une constante et $m \geq \deg d(z)$ est un nombre entier.

Par conséquent

$$|g(z)| \leq e^{M_2 r^{\rho+3\varepsilon}} \quad (9.3.13)$$

sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors, pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$, où $E_1 \subset [0, 2\pi)$ est un ensemble de mesure linéaire nulle, pour tout $|z| = r$ suffisamment grand, nous avons (9.3.13). Alors, par le Lemme 9.2.6, nous obtenons $\rho(g) \leq \rho + 3\varepsilon < \sigma$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, c'est une contradiction avec $\rho(g) \geq \sigma$. Par conséquent, chaque solution méromorphe transcendante f de (9.1.1) doit être d'ordre infini. Puisque $\rho(A) \geq \sigma$ et $\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \sigma$, alors, par l'utilisation du Lemme 9.2.4, nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \beta.$$

9.4 Preuve du Théorème 9.1.2.

Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (9.1.1). Alors, par le Théorème 9.1.1 f est d'ordre infini. Par conséquent, par $F \not\equiv 0$ et le Lemme 9.2.8, nous obtenons

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \rho(f) = +\infty.$$

Nous savons que si z_0 est un zéro de f d'ordre m ($m > 2$), et $A(z)$, $B(z)$ sont analytiques au point z_0 , alors z_0 doit être un zéro de $F(z)$ d'ordre $m - 2$. Par conséquent, nous obtenons par $F \not\equiv 0$ que

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N(r, A) + N(r, B). \quad (9.4.1)$$

D'autre part (9.1.1) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left[\frac{f''}{f} + A \frac{f'}{f} + B \right].$$

Ainsi

$$m \left(r, \frac{1}{f} \right) \leq m \left(r, \frac{1}{F} \right) + m(r, A) + m(r, B) + \sum_{j=1}^2 m \left(r, \frac{f^{(j)}}{f} \right) + O(1). \quad (9.4.2)$$

Par conséquent, par le lemme de la dérivée logarithmique (voir [47] [34], [38, Lemme 2.3]), il existe un ensemble E de mesure linéaire finie tel que pour tout $r \notin E$, nous avons

$$m \left(r, \frac{f^{(j)}}{f} \right) = (\log(rT(r, f))) \quad (j = 1, 2).$$

Par (9.4.1) et (9.4.2), nous avons

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T \left(r, \frac{1}{f} \right) + O(1) \leq 2\bar{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + N \left(r, \frac{1}{F} \right) + N(r, A) + N(r, B) \\ &+ m \left(r, \frac{1}{F} \right) + m(r, A) + m(r, B) + \sum_{j=1}^2 m \left(r, \frac{f^{(j)}}{f} \right) + O(1) \leq 2\bar{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) \\ &+ T(r, F) + T(r, A) + T(r, B) + C \log(rT(r, f)), \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

où C est une constante positive. Posons $\beta = \rho(A_0) = \max\{\rho, \rho(A_0)\}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, nous avons

$$C \log(rT(r, f)) \leq \frac{1}{2}T(r, f), \quad T(r, A) \leq r^{\beta+\varepsilon}, \quad T(r, B) \leq r^{\beta+\varepsilon}, \quad T(r, F) \leq r^{\beta+\varepsilon}. \quad (9.4.4)$$

D'où pour tout $r \notin E$, r suffisamment grand et en utilisant (9.4.3), (9.4.4), nous concluons que

$$T(r, f) \leq 2\bar{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + 3r^{\beta+\varepsilon} + \frac{1}{2}T(r, f),$$

donc

$$T(r, f) \leq 4\bar{N} \left(r, \frac{1}{f} \right) + 6r^{\beta+\varepsilon}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f),$$

alors

$$\lambda_2(f) \geq \bar{\lambda}_2(f) \geq \rho_2(f).$$

Par définition, nous avons $\lambda_2(f) \leq \rho_2(f)$, donc

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f).$$

Du Lemme 9.2.4, nous obtenons

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \rho_2(f) \leq \beta.$$

9.5 Preuve du Corollaire 9.1.1.

Puisque A est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles et $\rho(A) = \sigma$, alors par le théorème de factorisation d'Hadamard, nous pouvons écrire A sous la forme $A(z) = \frac{K(z)}{P(z)}$, où $K(z)$ est une fonction entière avec $\rho(A) = \rho(K) = \sigma$ et $P(z)$ est un polynôme. Par conséquent, par le Lemme 9.2.3 et le Lemme 9.2.7, pour tout ε ($0 < \varepsilon < \sigma$), il existe un ensemble $H \subset [0, +\infty)$ avec $\overline{\text{dens}}H \geq 1 - 2\sigma > 0$, et deux constantes positives $c > 0$, $m > 0$ tels que

$$|K(z)| \geq e^{r^{\sigma-\varepsilon}}, \quad (9.5.1)$$

$$|P(z)| \leq cr^m \quad (9.5.2)$$

pour tout z , $|z| = r \in H$ et $r \rightarrow +\infty$. Par conséquent

$$|A(z)| = \left| \frac{K(z)}{P(z)} \right| \geq \left| \frac{e^{r^{\sigma-\varepsilon}}}{cr^m} \right| \geq \left| e^{r^{\sigma-2\varepsilon}} \right|. \quad (9.5.3)$$

Puisque $\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \sigma$, alors pour ε donné avec $0 < 2\varepsilon < \sigma - \rho$, nous avons (9.5.3) et

$$\rho = \max\{\rho(B), \rho(F)\} < \sigma - 2\varepsilon. \quad (9.5.4)$$

En appliquant le Théorème 9.1.1 pour l'équation (9.1.1), nous trouvons que chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (9.1.1) satisfait

$$\rho(f) = +\infty \quad \text{et} \quad \rho_2(f) \leq \sigma. \quad (9.5.5)$$

En outre, par l'utilisation de (9.5.5) et le fait $F \not\equiv 0$, nous concluons du Théorème 9.1.2 que chaque solution méromorphe transcendante f de l'équation (9.1.1) avec $F \not\equiv 0$ satisfait

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq \sigma.$$

Bibliographie

- [1] Ahlfors L., *Complex Analysis.*, McGraw-Hill, 1979.
- [2] Amemiya I. and Ozawa M., *Non-existence of finite order solutions of $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$* , Hokkaido Math. J. 10 (1981), Special Issue, 1–17.
- [3] Andasmas M. and Belaïdi B., *On the growth and fixed points of meromorphic solutions of second order non-homogeneous linear differential equations*, Int. J. Math. Comput. 18(2013), no. 1, 28-45.
- [4] Andasmas M. and Belaïdi B., *On the order and hyper-order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Hokkaido Mathematical Journal Vol. 42 (2013) p. 1–27.
- [5] Belaïdi B. and Andasmas M., *Growth of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients*, Mathematica Pannonica 23/2 (2012), 1–15
- [6] Belaïdi B., *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions*, EJTDE, 2002 No. 5 :1-8.
- [7] Belaïdi B., *Growth of solutions of certain non-homogeneous linear differential equations with entire coefficients*, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 5(2) Art. 40, 2004, 1-9.
- [8] Belaïdi B., *On the iterated order and the fixed points of entire solutions of some complex linear differential equations*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 9. (2006), 1–11.
- [9] Belaïdi B., *On the meromorphic solutions of linear differential equations*, Jrl Syst Sci & Complexity (2007) 20 : 41-46.
- [10] Belaïdi B. and El Farissi A., *Differential polynomials generated by some complex linear differential equations with meromorphic coefficients*, Glas. Mat. Ser. III 43(63) (2008), no. 2, 363-373.

- [11] Belaïdi B. and El Farissi A., *Relation between differential polynomials and small functions*, Kyoto J. Math. Volume 50. Number 2 (2010). 453-468.
- [12] Belaïdi B. and Hamani K., *The rate of growth of solutions of linear differential equations with meromorphic coefficients*, Southeast Asian Bull. Math. 30 (3) (2006) 405-414.
- [13] Belaïdi B. and Hamani K., *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003(2003), No. 17, pp. 1–12.
- [14] Besicovitch A., *On integral functions of order < 1* , Math. Ann. 97 (1927), 677-95.
- [15] Chen Z. X., *On the hyper-order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta Mathematica Sinica Engl. Ser. 18(2002), (1), 79-88.
- [16] Chen Z. X., *On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*. Acta Mathematica Sinica 1999,,42(3),551-558.
- [17] Chen Z. X., *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations*, Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. 20 (2000), no. 3, 425-432.
- [18] Chen Z. X., *The growth of solutions of the differential equation $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$* , Science in China (Series A) 31 (2001) 775-784.
- [19] Chen Z. X., *The zero, pole and order of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients*, Kodai Math. J. 19 (1996), no. 3, 341-354.
- [20] Chen Z. X., *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Analysis 14 (1994), no. 4, 425-438.
- [21] Chen Z. X. and Shon K. H., *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coefficients*, Acta Mathematica Sinica Engl. Ser.21 (2005),no 4, 753-764.
- [22] Chen Z. X. and Shon K. H., *On the growth of solutions of a class of higher order differential equations*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 24 (2004), no. 1, 52–60.
- [23] Chen Z. X. and Yang C. C., *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 22(1999), pp. 273-285.
- [24] Cherry W. and Ye Z., *Nevanlinna's Theory of Value Distribution*, Springer, 2001.
- [25] Drasin D., *Normal families and the Nevanlinna theory*, Acta Math. 122, (1969), 231–263.
- [26] Frank G. and Hellerstein S., *On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients*. Proc. London Math. Soc. (3), 53 (1986), 407-428.

- [27] Frank G. and Reinders M., *A unique range set for meromorphic functions with 11 elements*, Complex Variables Theory Appl. **37** (1998), 185–193.
- [28] Frei M., *Sur l'ordre des solutions entière d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sei. Paris **236** (1953), 38-40.
- [29] Frei M., *Über die Subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w'' + e^{-z}w' + (Konst.)w = 0$* , Comment. Math. Helv. **36**, 1961, 1–8.
- [30] Gao. S. A., Chen Zongxuan, Chen T. W., *Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 1988. (in Chinese).
- [31] Gol'dberg A. A., *On single-valued solutions of first-order differential equations* (Russian), Ukrain. Math. Zh. **8** (1956), 254-261.
- [32] Gross F., *On factorization of meromorphic functions*, Lectures at the Math. Instt. University of California La Jolla, June 28, 1966.
- [33] Gross F., *On the distribution of values of meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968), 199-214.
- [34] Gundersen G., *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function*, plus similar estimates, J. London Math. Soc.(2)**37** (1988),no. 1, 88-104.
- [35] Gundersen G., *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **305** (1988), 415-429.
- [36] Gundersen G., *On the question of whether $f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0$ can admit a solution $f \not\equiv 0$ of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **102** (1986), no. 1-2, 9–17.
- [37] Han Q. and Yi H-X, *Some further results on meromorphic functions that share two sets*, Ann. Polon. Math. **93**, (2008), 17–31.
- [38] Hayman W. K., *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [39] Hayman W., *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull., **17**, 317–358 (1974)
- [40] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, A weley-interscience publication, 1976 by John Wiley & Sons.
- [41] Hong-Yan X. and Ting-Bin Cao, *Oscillation of solutions of some higher order linear differential equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2009, No. **63**, 1-18.

- [42] Jank G., Volkmann L., *Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*, Birkhauser, 1985.
- [43] Jun-Feng Xu and Zhang. Z. L., *Growth order of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations*, Kyungpook Mathematical Journal, 48(2008), 123-132.
- [44] Jun-Feng Xu and Hong-Xun Yi, *Growth and fixed points of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations*, J. Korean Math. Soc. 46 (2009), No. 4, pp. 747-758.
- [45] Kwon. K. H., *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 19(1996), 378-387.
- [46] Kwon. K. H., *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations*, Bull. Korean Math. Soc. 33(1996), N 3, pp. 487-496.
- [47] Laine I., *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [48] Laine I. and Rieppo J., *Differential polynomials generated by linear differential equations*, Complex Var. Theory Appl. 49 (2004), no. 12, 897-911.
- [49] Langley J. K., *On complex oscillation and a problem of Ozawa*, Kodai Math. J. 9 (1986), no. 3, 430-439.
- [50] Li C. H. and Gu Y. X., *On the oscilation of differential equation $f'' + e^{az}f' + Q(z)f = F(z)$* , Acta Math. Sci. 25A(2)(2005) : 192-200.
- [51] Liu M. S. and Yuan C. L., *The growth of meromorphic solutions for a class of higher-order linear differential equations*, Applicable Analysis, 85(2006), 1189-1199.
- [52] Markushevich A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable* (translated by R. A. Silverman), Vol. II, , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [53] Nevanlinna R., *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [54] Nevanlinna R., *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage, Reprint, (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Band 46), Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [55] Nevanlinna R., *Über Riemannschen Flächen mit endlich vielen Windungspunkten*, Acta Math. 58, (1932), 295-373.
- [56] Ozawa M., *On a solution of $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$* , Kodai Math. J. 3 (1980), no. 2, 295-309.

- [57] Smirnov V., *Cours de mathématiques supérieures*, Tome 3, deuxième parties, éditions Mir. Moscow, 1972.
- [58] Valiron G., *Lectures on the general theory of integral functions*, translated by E. F. Collingwood, Chelsea, New York, 1949.
- [59] Vojta. P., *Diophantine Approximation and Nevanlinna Theory*, World Scientific, 2001., Accessed online at <http://math.berkeley.edu/~vojta/cime/cime.pdf>.
- [60] Wang J., Oscillation results for solutions of differential equations and their application, Doctoral Thesis, Shandong University, 2003.
- [61] Wang J. and Laine I., *Growth of Solutions of Nonhomogeneous Linear Differential Equations*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2009, Article ID 363927, 11 pages
- [62] Wang J. and Laine I., *Growth of solutions of second order linear differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 342, no. 1, pp. 39–51, 2008.
- [63] Wang J. and Yi H. X., *Fixed points and hyper order of differential polynomials generated by solutions of differential equations*, Complex Var. Theory Appl. 48 (2003), no. 1, 83-94.
- [64] Wenjuan Chen and Junfeng Xu, *Growth of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2009, No. 1, 1-13.
- [65] Wittich H., *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.
- [66] Xiao L. P. and Chen Z. X., *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations*, Southeast Asian Bull. Math. (2009) 33 : 789-798.
- [67] Yi H. X. and Yang C. C., *The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Science Press, Beijing, 1995 (in Chinese).
- [68] Yi Caifeng and Z. X., *The properties of solutions of homogeneous linear differential equations with meromorphic coefficients*, Mathematica Applicata, 14(3), 101-107, 2001.
- [69] Yosida K., *A generalization of Malmquist's theorem*, J. Math. 9, (1933), 253–256.
- [70] Yu Chen, *Estimates of the Zeros and Growths of Meromorphic Solutions of Homogeneous and non-homogeneous Second order Linear Differential Equations*, Institute of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Jiangxi 330022.