

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

**Master Académique**

**pour obtenir le diplôme de Master délivré par**

**Université de Mostaganem**

**Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"**

*présenté et soutenu publiquement par*

**Chérifa BOUBEKEUR**

le 12 Juin 2018

## **Sur les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaire et les systèmes différentiels fractionnaires**

Encadeur : **Louzia TABHARIT (UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM, ALGÉRIE)**

### **Jury**

**Zoubir DAHMANI ,**

Pr Président (Université de Mostaganem, Algérie)

**Maghnia HAMOU MAAMAR,**

M.A.B Examinatrice (Université de Mostaganem, Algérie)

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)  
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie**

**M  
A  
S  
T  
E  
R**

# Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'intégration et la dérivation fractionnaire. Nous commençons ce travail avec quelques rappels liés à ces deux notions. Puis, nous reprenons l'étude de l'existence et la multiplicité ainsi que l'existence et l'unicité de la solution pour : une équation aux dérivées d'ordre non entier et un système différentiel fractionnaire.

D'autre part, nous établissons un résultat lié à l'existence de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaire dit séquentiel en utilisant le point fixe de Schaefer. Et en moyennant le théorème de contraction de Banach, nous démontrons l'existence d'une solution unique du même problème étudié. Nos résultats sont illustrés avec des exemples.

**Mots clés** : Calcul fractionnaire, contraction de Banach, point fixe de Schaefer, existence, unicité, équation différentielle.

## Abstract

In this manuscript, we are concerned with fractional integration and derivation. We start this work with some reminders related to these two notions. Then, we study the existence and uniqueness of the solution for : fractional differential equation and system.

On the other hand, we establish a existence result for a nother class of problems (sequential system). And, using Banach contraction principle, we prove the existence of an unique solution of this problem.

Our results are illustred with examples.

**Keywords** : Fractional calculus, Banach contraction, fixed point of Schaefer, existence, uniqueness, differential equation.

# Remerciements

Avant de commencer la présentation de ce rapport, nous profitons l'occasion pour remercier du fond du cœur toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance à Mme Louiza TABHARIT pour le temps qu'elle m'a consacré tout au long de cette période.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury Zoubir DAHMANI et Maghnia HAMOU MAAMAR pour l'intérêt qu'il ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Ma gratitude et mes chaleureux remerciements s'adressent également à mes parents qui ont toujours prié pour me voir réussir.

Enfin, un grand et spécial remerciement à mon époux.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>8</b>
1 Notations et Définitions . . . . .	8
2 Théorèmes du Point Fixe . . . . .	9
3 Fonctions Spéciales du Calcul Fractionnaire . . . . .	10
4 Opérateurs d'Intégration et de Dérivation d'Ordre non Entier . . . . .	12
<b>2 Équations et Systèmes d'ordre non Entier</b>	<b>16</b>
1 Lemmes Fondamentaux . . . . .	16
2 Équations aux Dérivées Fractionnaires . . . . .	16
3 Systèmes Différentiels Fractionnaires . . . . .	20
<b>3 Système Séquentiel d'Ordre non Entier</b>	<b>28</b>
<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

# Introduction

L'histoire du calcul fractionnaire remonte au 17<sup>ème</sup> siècle. Quand, Leibniz a posé sa fameuse question à l'Hospital dans une lettre s'interrogeant sur la possibilité d'étendre la notion de dérivée d'ordre entier à une dérivée avec un ordre non entier. Le 30 septembre 1695, l'Hospital a répondu à la lettre avec une autre question demandant si la dérivée d'ordre  $\frac{1}{2}$  d'une fonction pourrai avoir un sens mathématique. Ainsi, cette théorie peut être considérée comme un sujet très ancien.

A fin d'établir une bonne représentation définissant les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires, des recherches multiples ont été lancées par les grands fondateurs de cette théorie tels que : L. Euler, N.H. Abel, J. Cross, G.H. Hardy, S.F. Lacroix, J. Liouville et B. Riemann [2, 6, 16].

Le calcul d'ordre non entier est resté longtemps dans l'ombre à cause de l'absence des interprétations géométriques et physiques. Contrairement aux dernières décennies, cette branche de mathématiques est devenue très importante et ceci grâce à ses nombreuses applications dans les différents domaines de la vie.

La modélisation fractionnaire a suscité l'intérêt de la communauté scientifiques qui a compris l'importance des Équations Différentielles Fractionnaires (**EDFs**) décrivant des processus chimiques, physiques, économiques et dans les sciences des matériaux [14]. Dans toutes les sciences appliquées, il est souvent nécessaire de décrire le comportement d'un système par un modèle mathématique. Ainsi, les Systèmes d'Équations Différentielles Fractionnaires (**SEDFs**) sont utilisés dans la rhéologie, la biologie, la diffusion, la théorie du contrôle et la robotique. Pour plus d'informations sur les applications du calcul fractionnaire nous invitons nos lecteurs à consulter les références suivantes [5, 7, 11, 13].

## Motivation

### Modèle épidémiologique "Fièvre de Dengue"

La fièvre de dengue est une infection virale transmise à l'homme par la piqûre des femelles moustiques infectées, principalement des espèces *Aedes aegypti* et *Aedes albopictus*. La Dengue est largement répandue dans les pays tropicaux. La progression des épidémies est souvent mesurée dans le temps et dans l'espace. Les variations spatio-temporelles telles que la température, l'urbanisation rapide et non maîtrisée, l'humidité et le vent, peuvent avoir un effet sur la transmission de cette maladie. D'où, la diver-

sité des modèles mathématiques proposés pour l'étude de la Dengue. La plus part de ces modèles sont représentés par des équations différentielles ordinaires. Cependant, les modèles fractionnaires fournissent une technique intéressante de modélisation dans le contexte de l'épidémiologie et plus particulièrement pour la fièvre tropicale.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires proposé par Torres et al. dans [17] décrivant la transmission de la fièvre de Dengue :

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt}(t) = \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{I_m}{N_h} + \mu_h) S_h, \\ \frac{dI_h}{dt}(t) = B\beta_{mh} \frac{I_m}{N_h} S_h - (\eta_h + \mu_h) I_h, \\ \frac{dR_h}{dt}(t) = \eta_h I_h - \mu_h R_h, \\ \frac{dS_m}{dt}(t) = \mu_m N_m - (B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h} + \mu_m) S_m, \\ \frac{dI_m}{dt}(t) = B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m. \end{cases} \quad (1)$$

Où, la population humaine étudiée est divisée en trois classes :

$S_h$  : les humains susceptibles.

$I_h$  : les humains infectés.

$R_h$  : les humains résistants.

Pour les moustiques, nous avons deux compartiments :

$S_m$  : les moustiques susceptibles.

$I_m$  : les moustiques infectées.

De plus,  $N_h = S_h + R_h + I_h$  et  $N_m = S_m + I_m$ .

Sous les conditions :

$N_h = 56000$ ,  $N_m = 3 \times 56000$  et

$$\begin{cases} S_h(0) = N_h - 216 \\ I_h(0) = 216 \\ S_m(0) = 0 \\ S_h(0) = 0 \\ S_m(0) = 0 \\ I_m(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Avec,

$\mu_h = \frac{1}{3}$  et  $\mu_m = \frac{1}{10}$  sont les taux de natalité ou mortalité des hommes et des moustiques.

$B = 0.7$  est le nombre moyen de piques par jour.

$\beta_{mh} = \beta_{hm} = 0.36$  sont les probabilités de la transmission moustique → homme et homme → moustique.

$\eta_h = \frac{1}{71 \times 365}$  est le taux de récupération des humains infectés.

### Reformulation fractionnaire

Le modèle (1) est reformulé en substituant la dérivée ordinaire d'ordre 1 par la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha S_h(t) = \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{I_m}{N_h} + \mu_h) S_h \\ D^\alpha I_h(t) = B\beta_{mh} \frac{I_m}{N_h} S_h - (\eta_h + \mu_h) I_h \\ D^\alpha R_h(t) = \eta_h I_h - \mu_h R_h \\ D^\alpha S_m(t) = \mu_m N_m - (B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h} + \mu_m) S_m \\ D^\alpha I_m(t) = B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \end{cases} \quad (2)$$

L'objectif principale de cette reformulation est de trouver la valeur de  $\alpha$  qui rend le modèle fractionnaire (2) plus réaliste que le modèle classique (1) en le comparant avec les données réelles. Les auteurs ont démontré avec des simulations numériques que le second modèle simule mieux la réalité que le premier comme le montre la figure suivante :

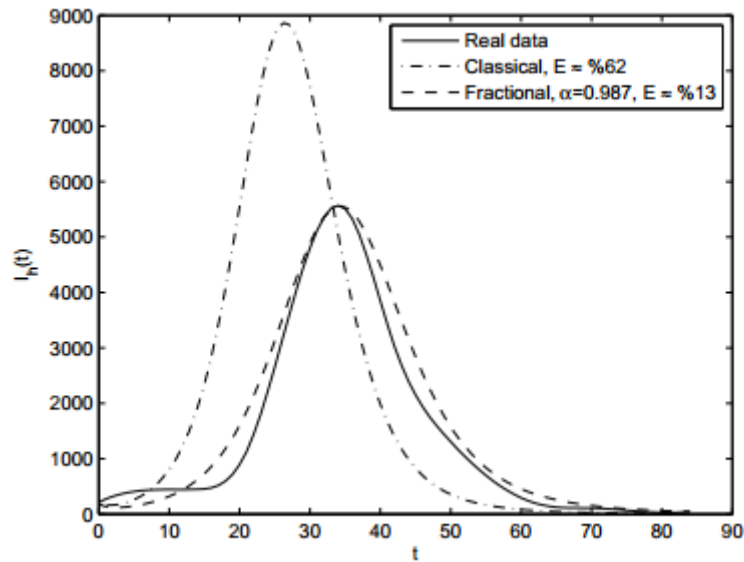


FIGURE 1 – Les données réelles par rapport à la solution du modèle classique (1) et le modèle fractionnaire (2).

En effet, nous remarquons que le graphe décrivant l'évolution de la contamination humaine avec un ordre de dérivation égal à 0.987 est plus proche de celui des données réelles par rapport au graphe issu de la dérivation d'ordre entier.

## **Organisation du manuscrit**

Ce manuscrit se compose d'une introduction générale, trois chapitres et une conclusion.

Le 1er Chapitre est constitué de notions de base. Nous commençons d'abord par donner quelques notations, définitions et lemmes utilisés au cours de ce travail. Puis, nous introduisons les deux fonctions essentielles du calcul fractionnaire en citant les propriétés les plus importantes de chacune d'elles.

La deuxième partie est consacrée aux opérateurs d'ordre non entier où nous définissons l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville généralisant l'intégrale ordinaire et la dérivée d'ordre arbitraire en utilisant les 2 approches les plus connues dans l'histoire du calcul fractionnaire.

Le second chapitre est dédié à l'étude de l'existence/ l'existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire et d'un système d'équations d'ordre non entier en moyennant la théorie de point fixe.

Le dernier Chapitre a pour objectif l'étude d'un système différentiel séquentiel avec un ordre de dérivation non entier compris entre 3 et 4. En utilisant la contraction de Banach, nous présentons un résultat lié à l'existence et l'unicité de la solution. D'autre part, nous établissons un deuxième résultat sur l'existence et la multiplicité des solutions de ce système en appliquant le théorème de point fixe de Schaefer.

Ce travail, s'achève avec une conclusion.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1 Notations et Définitions

Dans cette partie du manuscrit, nous introduisons les notations et quelques définitions liées aux théorèmes du point fixe.

$\mathbb{N}$  : Ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$  :  $\mathbb{N} - \{0\}$ .

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$\|\cdot\|_\infty$  : Norme infinie,  $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$ .

$\|\cdot\|_E$  : Norme de l'espace de Banach E.

$J^\alpha$  : Intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville.

$D_c^\alpha$  : Dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo.

$D_{RL}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville.

$\Gamma(\cdot)$  : La fonction Gamma d'Euler.

$B(\cdot, \cdot)$  : La fonction Bêta d'Euler.

$L^1[a, b]$  : Espaces des fonctions intégrables sur  $[a, b]$ . i.e  $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ .

$C([a, b], \mathbb{R})$  : Espace de Banach des fonctions continues de  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ; muni de la norme infinie.

$C_\mu$  : Espace des fonctions continues avec poids. On dit que  $f \in C_\mu([a, b])$  si :  $\exists s > \mu$ , tel que  $f(x) = x^s g(x)$ , où  $g \in C([a, b])$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ .

$C_\mu^n$  : Espace de Banach de toutes les fonctions continues différentiables à l'ordre  $n - 1$  sur  $[a, b]$ . On dit  $f \in C_\mu^n([a, b])$  si :  $f^{(n)} \in C_\mu([a, b])$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition 1.1** (Suite de Cauchy) Soient un espace vectoriel normé  $E$  et  $(x_n)$  une suite de  $E$ . Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0; \forall p > N \text{ et } \forall q > N \text{ nous avons : } \|x_{p+q} - x_p\|_E < \varepsilon,$$

alors  $(x_n)$  est une suite de Cauchy.

**Définition 1.2** [9] (Espace de Banach) Un espace  $E$  est dit complet si toute suite de Cauchy converge pour la norme  $\|\cdot\|_E$ . Si  $E$  est normé, alors c'est un espace de Banach.

**Définition 1.3** [9] (Opérateur contractant) Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé. Une application  $T : E \rightarrow E$  est

1. Lipschitzienne avec  $k > 0$ . Si pour tout  $x, y$  de  $E$ , nous avons :

$$\|Tx - Ty\|_E \leq k\|x - y\|_E.$$

La constante  $k$  est dite de Lipschitz.

2. Contractante si elle est  $k$ -Lipschitzienne avec  $0 \leq k < 1$ , ici  $k$  est appelée constante de contraction.

**Définition 1.4** [8] (Point Fixe) Soit  $T$  une application dans un espace vectoriel  $E$  dans lui-même. Un élément  $x \in E$  est un point fixe de  $T$  si :  $x = Tx$ .

**Définition 1.5** (Opérateur complètement continu) Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Un opérateur continu  $T : E \rightarrow F$  est dit complètement continu s'il transforme tout borné de  $E$  en une partie relativement compacte dans  $F$  ( pour l'espace  $\mathbb{R}^n$  les parties relativement compactes sont les parties bornées).

**Lemme 1.1** [9] (Arzela- Ascoli) Un opérateur  $T$  de  $E$  uniformément borné et équi-continu est dit relativement compacte dans  $E$ .

## 2 Théorèmes du Point Fixe

### Théorème de Schaefer

Ce théorème est un cas particulier du théorème établi par Leray et Schauder (Leray-Schauder theorem), utilisé particulièrement pour démontrer l'existence de solutions des équations différentielles non linéaires.

**Théorème 1.1** [16] Soient  $E$  un espace de Banach et l'opérateur complètement continu  $T : E \rightarrow E$ . Si l'ensemble  $V = \{x \in E : x = \mu Tx, 0 < \mu < 1\}$  est borné, alors  $T$  admet au moins un point fixe dans  $E$ .

### Principe de Contraction de Banach

Le principe de contraction de Banach qui garantit l'existence d'un point fixe pour une contraction est le plus connu des théorèmes de point fixe.

Énoncé par le mathématicien Stefan Banach en 1922 [4, 7, 8], ce théorème élémentaire a eu de nombreuses applications dans la théorie des Fractales et celles des Équations Différentielles.

**Théorème 1.2** Tout opérateur contractant  $T$  d'un espace de Banach  $E$  possède un point fixe unique  $x$  appartenant à  $E$  et vérifiant :  $x = Tx$ .

### 3 Fonctions Spéciales du Calcul Fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions spéciales qui sont utilisées dans les autres chapitres en définissant les fonctions Gamma et Bêta d'Euler. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie de différentiation d'ordre arbitraire et dans la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

#### 3.1 Fonction Gamma

La première fonction essentielle du calcul fractionnaire est la fonction Gamma " $\Gamma$ " qui généralise la factorielle  $n!$  et permet à  $n$  de prendre des valeurs non entières et même complexes.

Nous rappelons dans cette section quelques propriétés de la fonction Gamma qui sont importantes pour la suite de ce travail. Elle est définie par l'intégral [16] :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (1.1)$$

#### Propriétés de la fonction Gamma

**Proposition 1.1** Soient  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :

$$(i) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad (1.2)$$

$$(ii) \quad \Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1) \Gamma(\alpha), \quad (1.3)$$

$$(iii) \quad \Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \geq 1. \quad (1.4)$$

#### Preuve :

**Propriété (i)** : Une intégration par partie de l'intégrale qui définit  $\Gamma(\alpha)$  nous donne

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \\ &= \left[ \frac{e^{-t} t^{\alpha}}{\alpha} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt, \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha + 1). \end{aligned}$$

**Propriété (ii)** : Nous obtenons le résultat en se basant sur la propriété précédente.

**Propriété (iii)** : Nous utilisons une démonstration par récurrence :

- Pour  $n = 1$ , nous avons :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1.$$

- Supposons que  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  est vraie.

- Montrons que la propriété reste vraie pour l'ordre  $(n + 1)$ , d'après la **Propriété (i)** nous avons :

$$\begin{aligned}\Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n), \\ &= n(n - 1)!, \\ &= n!.\end{aligned}$$

### Quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{2} u = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\dots(2n-1)} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

### 3.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction Bêta d'Euler au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Cette fonction est définie dans [16] par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (1.5)$$

### Propriétés de la fonction Bêta

**Proposition 1.2** Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ , nous avons

(i)

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \quad (1.6)$$

(ii)

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (1.7)$$

### Preuve :

**Propriété (i)** : Nous avons

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du.$$

En utilisant le changement de variable  $u = 1 - t$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt = B(\beta, \alpha).$$

**Propriété (ii)** : Par définition, nous avons :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du \int_0^\infty e^{-v} v^{\beta-1} dv$$

En utilisant le changement de variables  $(u, v) = (rs, r(1-s))$ , dont la matrice jacobienne est  $J = \begin{bmatrix} s & r \\ 1-s & -r \end{bmatrix}$  et  $|J| = r$ , alors  $dudv = r dr ds$ . Puis en appliquant le théorème de Fubini, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty e^{-r} u^{\alpha+\beta-1} dr \int_0^1 s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} ds, \\ &= \Gamma(\alpha + \beta)B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Ce qui représente la relation entre les deux fonctions essentielles du calcul fractionnaire.

### Quelques valeurs particulières de $B(\alpha, \beta)$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi,$$

$$B(x, 1) = \frac{1}{x},$$

$$B(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \quad n \geq 1,$$

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

## 4 Opérateurs d'Intégration et de Dérivation d'Ordre non Entier

### 4.1 Intégrale Fractionnaire

L'intégrale d'ordre non entier a été introduite par plusieurs mathématiciens, d'où l'existence de différentes définitions. Mais, la définition de Riemann-Liouville est la plus courante.

#### Intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville

**Définition 1.6** [10] *L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha \geq 0$  de Riemann-Liouville d'une fonction  $f \in C_\mu([a, b])$  est donnée par*

$$\begin{cases} J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt; & \alpha > 0, \\ J^0 f(x) = f(x). \end{cases} \quad (1.8)$$

#### Propriétés

**Proposition 1.3** *Soit une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , pour tout  $t \in [a, b]$ , nous avons*

(i)

$$J^\alpha \text{ est un opérateur linéaire,} \quad (1.9)$$

(ii)

$$J^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}, \quad \beta > -1, \quad (1.10)$$

(iii)

$$J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x) = J^\beta J^\alpha f(x). \quad (1.11)$$

**Preuve**
**Propriété (ii)** : Par définition nous avons :

$$\begin{aligned} J^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt, \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^\beta dt. \end{aligned}$$

 Posons  $t = xu$ . Ainsi,  $dt = xdu$  et

$$\begin{aligned} J^\alpha x^\beta &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^\beta u^\beta x du, \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du, \\ &= \frac{B(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la relation (1.7) nous obtenons (1.10) .

**Propriété (iii)** : En appliquant la définition (1.8), nous avons

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} J^\beta f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt ds. \end{aligned}$$

 Posons  $t - s = u(x - s)$ , alors  $dt = (x - s)du$  et

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} (x-s)^{\alpha-1} u^{\beta-1} (x-s)^{\beta-1} du ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\alpha-1}, \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

En moyennant la relation (1.7) , nous obtenons

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds, \\ &= J^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

**Exemple**

 Calculons l'intégrale au sens de R-L d'ordre  $\frac{3}{2}$  de la fonction  $x^2$ . En appliquant la relation (1.10), nous avons :

$$J^{\frac{3}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{9}{2})} x^{\frac{7}{2}}.$$

En utilisant la même propriété, nous calculons  $J^{\frac{1}{2}}J^{\frac{3}{2}}x^2$  et nous obtenons :

$$\begin{aligned} J^{\frac{1}{2}}J^{\frac{3}{2}}x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5)}x^4 \\ &= \frac{1}{12}x^4. \end{aligned}$$

Nous remarquons que la double intégrale  $J^{\frac{1}{2}}J^{\frac{3}{2}}x^2$  est égale à l'intégration ordinaire d'ordre 2 de la fonction  $x^2$ .

## 4.2 Dérivées Fractionnaires

De nombreux mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation d'ordre non entier et différentes définitions de cet opérateur ont vu le jour. Dans cette section, nous allons présenter les définitions les plus familières : celle de Riemann-Liouville et de Caputo.

### Dérivée de Riemann-Liouville

**Définition 1.7** [16] La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $f \in C^{n+1}([a, b])$  est donnée par :

— Pour  $0 < \alpha < 1$

$$D_{\text{RL}}^{\alpha}f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \right), \quad (1.12)$$

$$= \frac{d}{dx} J^{1-\alpha} f(x). \quad (1.13)$$

— Pour  $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$

$$D_{\text{RL}}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.14)$$

$$= D^n J^{n-\alpha} f(x). \quad (1.15)$$

**Proposition 1.4** Pour  $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$

(i)

L'opérateur  $D_{\text{RL}}^{\alpha}$  est linéaire,

(ii)

$$D_{\text{RL}}^{\alpha} J^{\alpha} f(x) = f(x),$$

(iii)

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} D_{\text{RL}}^{\alpha} f(x) = D_{\text{RL}}^{n-1} f(x),$$

(iv)

$$D_{\text{RL}}^{\alpha} D_{\text{RL}}^{\beta} f(x) \neq D_{\text{RL}}^{\alpha+\beta} f(x).$$

### La dérivée non entière d'une fonction constante :

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante. Nous avons :

$$D_{\text{RL}}^{\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

**Exemple**

Soient  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{3}{2}$

- $D_{RL}^\alpha D_{RL}^\beta f(x) = 0$

- $D_{RL}^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}}$

**Dérivée non entière au sens de Caputo**

**Définition 1.8** [15] La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  de Caputo d'une fonction  $f \in C_{-1}^n([a, b])$  est donnée par

— Pour  $0 < \alpha < 1$

$$D_C^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} \frac{d}{dx} f(t) dt, \quad (1.16)$$

$$= J^{1-\alpha} \frac{d}{dx} f(x). \quad (1.17)$$

— Pour  $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$

$$D_C^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dx^n} f(t) dt, \quad (1.18)$$

$$= J^{n-\alpha} D^n f(x). \quad (1.19)$$

**Proposition 1.5** Pour  $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$

(i)

L'opérateur  $D_c^\alpha$  est linéaire,

(ii)

$$D_c^\alpha J^\alpha f(x) = f(x).$$

(iii) Pour  $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$  avec  $0 < \alpha + \beta < 1$ , nous avons :

$$D_c^\alpha D_c^\beta f(x) = D_c^{\alpha+\beta} f(x).$$

**La relation entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville**

Soient  $f \in C^n([a, b])$  et  $n-1 < \alpha < n$ . Nous avons :

$$D_C^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} f^{(i)}(0).$$

**Remarque** La dérivée non entière au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle.

# Chapitre 2

## Équations et Systèmes d'ordre non Entier

Dans ce chapitre, nous allons essayer d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de deux problèmes fractionnaires en utilisant la théorie de point fixe.

Nous commençons d'abord par introduire les lemmes fondamentaux [12] pour les démonstrations des résultats d'existence et d'unicité.

### 1 Lemmes Fondamentaux

**Lemme 2.1** Soit  $f \in L^1([a, b])$ . L'équation différentielle fractionnaire

$$D_c^\alpha f(t) = 0, \quad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.1)$$

admet une solution sous la forme :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j, \quad c_j \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

**Lemme 2.2** Soit  $f \in C_{-1}^n([a, b])$ . Nous avons

$$J^\alpha D_c^\alpha f(t) = f(t) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j, \quad (2.3)$$

où  $c_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{0, n-1}$  et  $n = [\alpha] + 1$ .

### 2 Équations aux Dérivées Fractionnaires

La plupart du temps, l'intégrale et la dérivée fractionnaire n'ont pas une interprétation géométrique et physique claire. De plus, le sens physique est difficile à expliquer et les définitions ne sont pas plus rigoureuses que celles d'ordre entier.

Récemment, il a été prouvé que les équations différentielles d'ordre non entier sont les meilleurs outils pour la modélisation de plusieurs phénomènes. En effet, la théorie des problèmes aux limites a besoin d'être explorée et c'est la raison pour laquelle de nombreux chercheurs s'intéressent à l'étude d'existence et l'unicité des solutions de tels problèmes.

Motivés par l'ensemble des travaux fait dans ce sens et plus particulièrement par [18], nous avons consacré cette section à l'étude du problème fractionnaire suivant :

### Problème 1

Soit à considérer l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$D_c^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (2.4)$$

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0, \quad u^{(n-2)}(1) = \int_0^\eta u(s)g(s)ds.$$

$D_c^\alpha$  représente l'opérateur différentiel fractionnaire de Caputo d'ordre  $(n - 1 < \alpha \leq n)$  et  $f$  est dans  $C([0, 1])$ .

La solution intégrale de l'équation (2.4) est donnée par ce lemme :

**Lemme 2.3** Soit  $n - 1 < \alpha \leq n$ . La solution du **problème 1** est :

$$u(t) = J^\alpha f(t, u(t)) - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^\eta u(s)g(s)ds \right]. \quad (2.5)$$

Nous allons démontrer que le **problème 1** admet (2.5) comme solution.

Nous introduisons l'espace de Banach  $C([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme  $\|u\| = \sup_{t \in [0, 1]} |u(t)|$ .

**Preuve.** Soient  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n - 1$ . En utilisant les lemmes 2.1 et 2.2, nous pouvons écrire :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \dots - a_{n-1} t^{n-1}. \quad (2.6)$$

Et en tenant compte des conditions :

$$u(0) = u'(0) = u''(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$$

et

$$u^{(n-2)}(1) = \int_0^\eta u(s)g(s)ds,$$

permettant de calculer les  $a_i$ , nous obtenons :

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-2} = 0$$

et

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^\eta u(s)g(s)ds \right].$$

En remplaçant les  $a_i$  dans (2.6), nous trouvons la formule (2.5). ■

Afin d'étudier l'existence et l'unicité de cette solution, Tabharit et Dahmani ont introduit les hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>) (i) La fonction  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne, i.e : il existe  $k > 0$ , tel que pour tout  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, 1]$ , nous avons :

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq k|u_1 - u_2|.$$

(ii) Il existe  $M$  strictement positive, telle que :

$$\|g\|_{L^1} = \int_0^\eta |g(t)| dt \leq M < \infty.$$

(H<sub>2</sub>) La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ .

(H<sub>3</sub>) Il existe une constante positive  $N$ , telle que  $|f(t, u)| \leq N$ , pour tout  $t \in [0, 1], u \in \mathbb{R}$ .

## Existence et Unicité de la Solution

Ce premier résultat est un théorème montrant l'existence et l'unicité de la solution du **problème 1** dont la preuve se base essentiellement sur le principe de contraction de Banach.

**Théorème 2.1** *Si  $(H_1)$  est vérifiée et*

$$k \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha-n+3)} \right) + \frac{M}{\Gamma(n)} < 1, \quad (2.7)$$

*alors le problème aux limites (2.4) a une solution unique sur  $[0, 1]$ .*

**Preuve.** Soit à considérer l'opérateur  $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ , défini par :

$$\begin{aligned} Tu(t) = & J^\alpha f(t, u(t)) \\ & - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^\eta u(s)g(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Soient  $u_1, u_2 \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |Tu_1(t) - Tu_2(t)| \leq & J^\alpha |f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))| \\ & + \left| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right| \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} |f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau))| d\tau \right] \\ & + \left| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right| \left[ \int_0^\eta |g(s)| |u_1(s) - u_2(s)| ds \right]. \end{aligned}$$

Comme  $(H_1)$  est vérifiée, alors nous obtenons :

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq \left( k \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha-n+3)} \right] + \frac{M}{\Gamma(n)} \right) \|u_1 - u_2\|. \quad (2.9)$$

En utilisant la condition (2.7), nous concluons que  $T$  est une contraction.

Ainsi, d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un point fixe unique solution du problème 1. ■

## Résultat d'Existence

Le deuxième résultat représente un théorème d'existence d'au moins une solution pour (2.4).

**Théorème 2.2** *Si les hypothèses  $(H_2)$  et  $(H_3)$  sont satisfaites et*

$$\Gamma(n) \geq M, \quad (2.10)$$

*le problème aux limites (2.4) admet au moins une solution dans  $C([0, 1], \mathbb{R})$ .*

**Preuve.** La démonstration sera donnée en 4 étapes.

**étape 1 :** Continuité de T

Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $C([0, 1])$ . Alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |Tu_n(t) - Tu(t)| &= |J^\alpha f(t, u_n(t)) \\ &\quad - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u_n(\tau)) d\tau - \int_0^\eta u_n(s) g(s) ds \right] \\ &\quad - \left( J^\alpha f(t, u(t)) - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^\eta u(s) g(s) ds \right] \right). \end{aligned}$$

Comme  $f$  est continue, alors

$$\|Tu_n - Tu\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ainsi, T est continu.

**étape 2 :** T envoie les bornés dans des bornés

Soit l'ensemble  $B_\nu = \{u \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|u\| \leq \nu, 0 < \nu < 1\}$ . Considérons  $u \in B_\nu$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq J^\alpha |f(t, u(t))| \\ &\quad + \left| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right| \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} |f(\tau, u(\tau))| d\tau + \int_0^\eta |u(s) g(s)| ds \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $f$  vérifie l'hypothèse  $(H_3)$ , nous pouvons écrire :

$$\|Tu\| \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{N}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha-n+3)} + \frac{\nu M}{\Gamma(n)}.$$

En effet, l'opérateur T est borné.

**étape 3 :** L'équicontinuité de T

Soient  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  tels que  $t_1 < t_2$ . Nous avons

$$\begin{aligned} |Tu(t_2) - Tu(t_1)| &= \left| J^\alpha f(t_2, u(t_2)) - \frac{t_2^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^\eta u(s) g(s) ds \right] \right. \\ &\quad \left. - J^\alpha f(t_1, u(t_1)) + \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^\eta u(s) g(s) ds \right] \right|. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |Tu(t_2) - Tu(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - \tau)^{\alpha-1} - (t_1 - \tau)^{\alpha-1}] f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_2}^{t_1} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \\ &\quad + \left| \frac{t_2^{n-1} - t_1^{n-1}}{(n-1)!} \right| \left( \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} |f(\tau, u(\tau))| d\tau + \int_0^\eta |u(s) g(s)| ds \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |Tu(t_2) - Tu(t_1)| &\leq \frac{2N}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{N}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2^\alpha - t_1^\alpha) \\ &\quad + \left( \frac{N}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha-n+3)} + \frac{\nu M}{\Gamma(n)} \right) (t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Quand  $t_1$  tend vers  $t_2$ , le second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro. D'après le théorème d'ascoli-Arzela, T est complètement continu.

**étape 4 :** Maintenant, il reste à démontrer que l'ensemble

$$\Omega = \{u \in C([0, 1], \mathbb{R}), u = \lambda Tu, \lambda \in ]0, 1[\}$$

est borné. Soit  $u \in \Omega$ . Alors

$$u(t) = \lambda Tu(t). \quad (2.12)$$

D'après l'étape 2, nous avons l'expression suivante :

$$|u(t)| \leq \lambda \left( \frac{N}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{N}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha - n + 3)} + \frac{vM}{\Gamma(n)} \right), t \in [0, 1]. \quad (2.13)$$

Ce qui mène à :

$$\|u\| < \infty.$$

Par conséquent,  $\Omega$  est borné.

D'après le théorème du point fixe de Schaefer, nous constatons que T admet au moins un point fixe qui est la solution du problème 1.

### 3 Systèmes Différentiels Fractionnaires

Dans cette section, nous nous intéressons aux systèmes d'équations différentielles qui apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherche grâce à leurs applications.

En 2014, Dahmani et Tabharit [3] se sont intéressés à l'étude de l'existence et l'unicité du système couplé suivant :

#### Problème 2

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} D_c^\alpha x(t) + f(t, y(t)) = 0, & t \in [0, 1] \\ D_c^\beta y(t) + g(t, y(t)) = 0, & t \in [0, 1] \\ x(0) = y(0) = 0, & x(1) - \lambda_1 x(\eta) = 0, \\ x''(0) = y''(0) = 0, & x''(1) - \lambda_2 x''(\xi) = 0, \\ y(1) - \lambda_1 y(\eta) = 0, & y''(1) - \lambda_2 y''(\xi) = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $D_c^\alpha, D_c^\beta$  sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo avec  $3 < \alpha, \beta \leq 4$ , les constantes  $\xi > 0$  et  $\eta < 1$  et les réelles  $\lambda_1, \lambda_2$  doivent satisfaire les conditions suivantes :  $\lambda_1 \eta \neq 1$  et  $\lambda_2 \xi \neq 1$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues.

Nous introduisons l'espaces de Banach suivants :

$$X = \{u : u \in C([0, 1])\},$$

Et

$$\|u\| = \text{Sup}_t |u(t)|, t \in [0, 1]$$

est la norme associée à  $X$ .

Ainsi,  $(X \times X, \|\cdot\|_{X \times X})$  est un espace de Banach avec  $\|(u, v)\|_{X \times X} = \|u\| + \|v\|$ .

Le lemme suivant, détermine la solution générale du problème (2.14).

**Lemme 2.4** Soient  $\phi, h \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors la solution du système :

$$\begin{cases} D_c^\alpha x(t) = h(t), \\ D_c^\beta y(t) = \phi(t), \end{cases} \quad (2.15)$$

sous les conditions :

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = 0, \quad x(1) - \lambda_1 x(\eta) = 0, \\ x''(0) = y''(0) = 0, \quad x''(1) - \lambda_2 x''(\xi) = 0, \\ y(1) - \lambda_1 y(\eta) = 0, \quad y''(1) - \lambda_2 y''(\xi) = 0, \end{aligned}$$

est donnée par les équations intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ & + \frac{\lambda_1 t}{\lambda_1 \eta - 1} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ & - \frac{t}{\lambda_1 \eta - 1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ & + \frac{(\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3) t - (\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3} h(s) ds \\ & - \frac{(1 - \lambda_1 \eta^3) t + (\lambda_1 \eta - 1) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} h(s) ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

et

$$\begin{aligned} y(t) = & -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi(s) ds \\ & + \frac{\lambda_1 t}{\lambda_1 \eta - 1} \int_0^\eta (\eta-s)^{\beta-1} \phi(s) ds \\ & - \frac{t}{\lambda_1 \eta - 1} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \phi(s) ds \\ & + \frac{(\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3) t - (\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\beta-3} \phi(s) ds \\ & - \frac{(1 - \lambda_1 \eta^3) t + (\lambda_1 \eta - 1) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-3} \phi(s) ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

**Preuve.** L'application des lemmes 2.1, 2.2 à la première équation de (2.15) permet d'écrire :

$$x(t) = -J^\alpha h(t) - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - c_3 t^3, \quad (2.18)$$

avec  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

En utilisant les conditions initiales, nous trouvons  $c_0 = c_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned} c_1 = & -\frac{\lambda_1}{(\lambda_1\eta - 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ & + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1\eta - 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ & - \frac{\lambda_2(1 - \lambda_1\eta^3)}{6(\lambda_1\eta - 1)(\lambda_2\xi - 1)\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^\xi (\xi - s)^{\alpha-3} h(s) ds \\ & + \frac{(1 - \lambda_1\eta^3)}{6(\lambda_1\eta - 1)(\lambda_2\xi - 1)\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-3} h(s) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_2 = & -\frac{\lambda_2}{6(\lambda_2\xi - 1)\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^\xi (\xi - s)^{\alpha-3} h(s) ds \\ & + \frac{1}{6(\lambda_2\xi - 1)\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-3} h(s) ds. \end{aligned}$$

En remplaçant les valeurs de  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  dans (2.18), nous obtenons (2.16). ■

De manière similaire, nous trouvons (2.17).

### Existence et Unicité de la Solution

Posons :

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{|\lambda_1\eta - 1| + |\lambda_1|\eta^\alpha + 1}{|\lambda_1\eta - 1|\Gamma(\alpha + 1)} \\ & + \frac{(|\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2\eta^3| + |\lambda_1\lambda_2\eta - \lambda_2|)\xi^{\alpha-2} + |1 - \lambda_1\eta^3| + |\lambda_1\eta - 1|}{6|\lambda_1\eta - 1||\lambda_2\xi - 1|\Gamma(\alpha + 1)}, \\ N_2 = & \frac{|\lambda_1\eta - 1| + |\lambda_1|\eta^\beta + 1}{|\lambda_1\eta - 1|\Gamma(\beta + 1)} \\ & + \frac{(|\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2\eta^3| + |\lambda_1\lambda_2\eta - \lambda_2|)\xi^{\beta-2} + |1 - \lambda_1\eta^3| + |\lambda_1\eta - 1|}{6|\lambda_1\eta - 1||\lambda_2\xi - 1|\Gamma(\beta + 1)}. \end{aligned}$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  doivent vérifier les trois hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>) Les fonctions  $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues.

(H<sub>2</sub>) Il existe des constantes positives  $l_1$  et  $l_2$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| & \leq l_1 |y_1 - y_2|, \\ |g(t, x_1) - g(t, x_2)| & \leq l_2 |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

(H<sub>3</sub>) Il existe deux constantes positives  $L_1$  et  $L_2$  vérifiant

$$|f(t, y)| \leq L_1, \quad |g(t, x)| \leq L_2, \quad t \in [0, 1], (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Théorème 2.3** *Le problème (2.14) admet une solution unique sur  $[0, 1]$  si l'hypothèse (H<sub>2</sub>) et la condition :*

$$N_1 l_1 + N_2 l_2 < 1 \tag{2.19}$$

sont vérifiées.

**Preuve.**

Soit l'opérateur  $T : X \times X \rightarrow X \times X$ , défini par

$$T(x, y)(t) = (T_1 y(t), T_2 x(t)),$$

tel que

$$\begin{aligned} T_1 y(t) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ & + \frac{\lambda_1 t}{(\lambda_1 \eta - 1) \Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ & - \frac{t}{(\lambda_1 \eta - 1) \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ & + \frac{(\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3) t - (\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1) \Gamma(\alpha - 2)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3} f(s, y(s)) ds \\ & - \frac{(1 - \lambda_1 \eta^3) t + (\lambda_1 \eta - 1) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1) \Gamma(\alpha - 2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} f(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 x(t) = & -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s, x(s)) ds \\ & + \frac{\lambda_1 t}{(\lambda_1 \eta - 1) \Gamma(\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\beta-1} g(s, x(s)) ds \\ & - \frac{t}{(\lambda_1 \eta - 1) \Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g(s, x(s)) ds \\ & + \frac{(\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3) t - (\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1) \Gamma(\beta - 2)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\beta-3} g(s, x(s)) ds \\ & - \frac{(1 - \lambda_1 \eta^3) t + (\lambda_1 \eta - 1) t^3}{6(\lambda_1 \eta - 1)(\lambda_2 \xi - 1) \Gamma(\beta - 2)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-3} g(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Nous montrons que  $T$  est une application contractante.

Soient  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons :

$$\begin{aligned} & |T_1 y_1(t) - T_1 y_2(t)| \leq \\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ & + \frac{|\lambda_1| t}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ & + \frac{t}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ & + \frac{|\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3| t + |\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2| t^3}{6|\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 2)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \end{aligned}$$

$$+ \frac{|1 - \lambda_1 \eta^3|t + |\lambda_1 \eta - 1|t^3}{6|\lambda_1 \eta - 1||\lambda_2 \xi - 1|\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds.$$

Les hypothèses de (H<sub>2</sub>) mènent à :

$$\|T_1 y_1 - T_1 y_2\| \leq N_1 l_1 \|y_1 - y_2\|. \quad (2.20)$$

De la même manière, nous trouvons :

$$\|T_2 x_1 - T_2 x_2\| \leq N_2 l_2 \|x_1 - x_2\|. \quad (2.21)$$

Grâce aux deux dernières formules, nous pouvons écrire :

$$\|T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)\|_{X \times X} \leq (N_1 l_1 + N_2 l_2) \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|_{X \times X}. \quad (2.22)$$

Par conséquent, T est une contraction. D'après le théorème de point fixe de Banach, l'opérateur T admet un unique point fixe qui représente la solution du problème sur [0, 1].

■

### Existence de la Solution

**Théorème 2.4** Si (H<sub>1</sub>) et (H<sub>2</sub>) sont vérifiées, alors le problème (2.14) admet au moins une solution sur [0, 1].

**Preuve.** Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer la multiplicité des solutions du **Problème 2**

**étape 1 :** Continuité de T :

Soient (x<sub>n</sub>), (y<sub>n</sub>) deux suites telles que (x<sub>n</sub>, y<sub>n</sub>) → (x, y) dans C([0, 1]). Alors pour tout t ∈ [0, 1], nous avons :

$$\begin{aligned} & |T_1 y_n(t) - T_1 y(t)| \leq \\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{|\lambda_1|t}{|\lambda_1 \eta - 1|\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{t}{|\lambda_1 \eta - 1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{|\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3|t + |\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2|t^3}{6|\lambda_1 \eta - 1||\lambda_2 \xi - 1|\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{|1 - \lambda_1 \eta^3|t + |\lambda_1 \eta - 1|t^3}{6|\lambda_1 \eta - 1||\lambda_2 \xi - 1|\Gamma(\alpha - 2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & |T_2 x_n(t) - T_2 x(t)| \leq \\
 & + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds \\
 & + \frac{|\lambda_1|t}{|\lambda_1\eta - 1|\Gamma(\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\beta-1} |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds \\
 & + \frac{t}{|\lambda_1\eta - 1|\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds \\
 & + \frac{|\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1\eta^3|t + |\lambda_2\lambda_1\eta - \lambda_2|t^3}{6|\lambda_1\eta - 1||\lambda_2\xi - 1|\Gamma(\beta-2)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\beta-3} |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds \\
 & + \frac{|1 - \lambda_1\eta^3|t + |\lambda_1\eta - 1|t^3}{6|\lambda_1\eta - 1||\lambda_2\xi - 1|\Gamma(\beta-2)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-3} |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds.
 \end{aligned}$$

Comme  $f$  et  $g$  sont continues, nous avons

$$\|T(x_n, y_n) - T(x, y)\|_{X \times X} \rightarrow 0, (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \blacksquare$$

**étape 2 :**  $T$  borné

Soit  $(x, y) \in X \times X$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 |T_1 y(t)| & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{|\lambda_1|t}{|\lambda_1\eta - 1|\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{t}{|\lambda_1\eta - 1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{|\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1\eta^3|t + |\lambda_2\lambda_1\eta - \lambda_2|t^3}{6|\lambda_1\eta - 1||\lambda_2\xi - 1|\Gamma(\alpha-2)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{|1 - \lambda_1\eta^3|t + |\lambda_1\eta - 1|t^3}{6|\lambda_1\eta - 1||\lambda_2\xi - 1|\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} |f(s, y(s))| ds.
 \end{aligned}$$

Puisque  $f$  vérifie l'hypothèse (H<sub>3</sub>), alors

$$\|T_1 y\| \leq N_1 L_1.$$

De la même manière, nous trouvons

$$\|T_2 x\| \leq N_2 L_2.$$

D'où,

$$\|T(x, y)\|_{X \times X} \leq N_1 L_1 + N_2 L_2 < \infty.$$

**étape 3 :** T équicontinu

Soient  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  tels que  $t_1 < t_2$ , alors nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 & |T_1 y(t_2) - T_1 y(t_1)| \leq \\
 & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}) |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{|\lambda_1|(t_2 - t_1)}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{(t_2 - t_1)}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{|\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3|(t_2 - t_1) + |\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2|(t_2^3 - t_1^3)}{6|\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 2)} \int_0^\xi (\xi - s)^{\alpha-3} |f(s, y(s))| ds \\
 & + \frac{|1 - \lambda_1 \eta^3|(t_2 - t_1) + |\lambda_1 \eta - 1|(t_2^3 - t_1^3)}{6|\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 2)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-3} |f(s, y(s))| ds.
 \end{aligned}$$

Ce qui mène à écrire :

$$\begin{aligned}
 & |T_1 y(t_2) - T_1 y(t_1)| \leq \\
 & \frac{L_1}{\Gamma(\alpha + 1)} ((t_1^\alpha - t_2^\alpha) + 2(t_2 - t_1)^\alpha) \\
 & + L_1 \left[ \frac{|\lambda_1 \eta - 1| + |\lambda_1| \eta^\alpha}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{|\lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1 \eta^3| \xi^{\alpha-2}}{6|\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 1)} \right] (t_2 - t_1) \\
 & + L_1 \left[ \frac{1}{|\lambda_1 \eta - 1| \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{|1 - \lambda_1 \eta^3|}{6|\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 1)} \right] (t_1 - t_2) \\
 & + L_1 \left[ \frac{|\lambda_2 \lambda_1 \eta - \lambda_2| \xi^{\alpha-2}}{6|\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 1)} + \frac{|\lambda_1 \eta - 1|}{6|\lambda_1 \eta - 1| |\lambda_2 \xi - 1| \Gamma(\alpha - 1)} \right] (t_2^3 - t_1^3).
 \end{aligned}$$

Remarquons que si  $t_1$  tend vers  $t_2$ , alors la norme  $\|T(x, y) - T(x, y)\|_{X \times X} \rightarrow 0$ .  
Puis, en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli, nous déduisons que l'opérateur T est complètement continu.

**étape 4 :** Finalement, nous allons montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{(x, y) \in X \times X, (x, y) = \lambda T(x, y), \lambda \in ]0, 1[\}$$

est borné.

Soit  $(x, y) \in \Omega$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons :

$$y(t) = \lambda T_1 y(t) \quad \text{et} \quad x(t) = \lambda T_2 x(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}|y(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{|\lambda_1|t}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{t}{|\lambda_1\eta-1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{|\lambda_2-\lambda_2\lambda_1\eta^3|t+|\lambda_2\lambda_1\eta-\lambda_2|t^3}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha-3} |f(s, y(s))| ds \\ & + \frac{|1-\lambda_1\eta^3|t+|\lambda_1\eta-1|t^3}{6|\lambda_1\eta-1||\lambda_2\xi-1|\Gamma(\alpha-2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} |f(s, y(s))| ds. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions de (H<sub>3</sub>), nous pouvons écrire :

$$|y(t)| \leq \lambda L_1 N_1, \quad t \in [0, 1].$$

De la même manière, nous trouvons

$$|x(t)| \leq \lambda L_2 N_2, \quad t \in [0, 1].$$

Par conséquent,

$$\|(x, y)\|_{X \times X} \leq \lambda L_1 N_1 + \lambda L_2 N_2.$$

Donc,

$$\|T(x, y)\|_{X \times X} < \infty.$$

Ce qui implique que l'ensemble  $\Omega$  est borné.

Des étapes 1, 2, 3 et 4, nous déduisons que T a au moins un point fixe. Donc, le problème 2 admet au minimum une solution.

# Chapitre 3

## Système Séquentiel d'Ordre non Entier

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes d'équations différentielles séquentielles au sens de Caputo.

Les systèmes séquentiels modélisent des circuits qui possèdent une mémoire interne et dont la fonction sortie dépend des entrées et des valeurs des événements permettant le changement ou la transition d'un état à un autre.

En 2016, Bashir Ahmad et al. dans [1] ont étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème séquentiel suivant :

$$\begin{cases} (D_c^\alpha + kD_c^{\alpha-1})x(t) = f(t, x(t), D_c^\beta x(t), J^\gamma x(t)) \\ x(0) = x'(0) = 0, \\ \sum_{i=1}^m a_i x(\zeta_i) = \lambda \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} x(s) ds, \delta \geq 1, 0 < \eta < \zeta_1 < \dots < \zeta_m < 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $D_c^\alpha, D_c^\beta$  sont les dérivées fractionnaire au sens de Caputo avec un ordre  $2 < \alpha \leq 3, 0 < \beta < 1$ ,  $J^\gamma$  est l'intégrale de Riemann- Liouville d'ordre  $0 < \gamma < 1$ .  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue,  $k > 0$  et  $\lambda, a_i, i = 1, \dots, m$  sont des constantes.

Motivé par ce travail, nous avons essayé de généralisé ce problème à un système d'équations différentielles avec un ordre compris entre 3 et 4. Notre contribution consiste à étudier l'existence avec unicité ainsi que l'existence avec multiplicité des solutions du **problème 3**.

### Problème 3

Soit à considérer le système séquentiel suivant :

$$\begin{cases} (D_c^q + kD_c^{q-1})x(t) = f(t, x(t), D_c^\beta x(t), J^\gamma x(t)), \\ x(0) = x'(0) = 0, \\ x''(0) = b, \\ x^{(3)}(0) = a, \end{cases} \quad (3.2)$$

où les dérivées  $D_c^q, D_c^{q-1}$  et  $D_c^\beta$  sont au sens de Caputo,  $J^\gamma$  est l'intégrale de Riemann- Liouville d'ordre  $\gamma$ , avec  $3 < q \leq 4, 0 < \beta, \gamma < 1$  et  $k > 0$ .  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $a, b$  sont deux réelles.

Nous introduisons l'espace de Banach suivant :

$$X = \{x : x \in C([0, 1], \mathbb{R}) \text{ et } D_c^\beta x \in C([0, 1], \mathbb{R})\}.$$

Auquel nous associons la norme :

$$\|x\|_X = \|x\| + \|D_c^\beta x\|,$$

où,  $\|\cdot\| = \sup_{t \in [0,1]} |\cdot|$ .

Ainsi  $(X, \|\cdot\|_X)$  est un espace de Banach.

Pour définir la solution du **problème 3**, nous considérons le lemme suivant :

**Lemme 3.1** Soient  $y \in C([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $3 < q \leq 4$ . Alors la solution de l'équation différentielle fractionnaire séquentiel linéaire :

$$(D_c^q + kD_c^{q-1})x(t) = y(t), \quad (3.3)$$

avec  $x(0) = x'(0) = 0$  et  $x''(0) = b$ ,  $x^{(3)}(0) = a$ , est la fonction  $x$  donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{b}{k^2} (tk - 1 + e^{-kt}) - \frac{a + kb}{2k^3} \left[ t^2 k^2 - 2(tk - 1 + e^{-kt}) \right] \\ & + \int_0^t e^{-k(t-s)} J^{q-1} y(s) ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Preuve** Soit  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, 3}$ . En utilisant les lemmes 2.1 et 2.2. La solution générale de l'équation (3.3) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t) = & c_0 e^{-kt} - \frac{c_1}{k} (1 - e^{-kt}) - \frac{2c_2}{k^2} (tk - 1 + e^{-kt}) \\ & - \frac{3c_3}{k^3} \left[ t^2 k^2 - 2(tk - 1 + e^{-kt}) \right] + \int_0^t e^{-k(t-s)} J^{q-1} y(s) ds. \end{aligned}$$

En employant les conditions initiales nous trouvons :  $c_0 = c_1 = 0$ ,  $c_2 = \frac{-b}{2}$  et  $c_3 = \frac{a+kb}{6}$ .

Finalement, nous remplaçons les valeurs des  $c_i$ , pour obtenir (3.4).

## Existence et Unicité de la Solution

Nous introduisons les quantités suivantes :

$$L_1 = 1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}, \quad L_2 = \frac{1-e^{-k}}{k\Gamma(q)}, \quad L_3 = \frac{2-e^{-k}}{\Gamma(q)}.$$

$$N_1 = \frac{|b|}{k^2} |k - e^{-k}|, \quad N_2 = \frac{|a+kb|}{2k^3} |k^2 - (k - e^{-k})|.$$

**Théorème 3.1** Soit  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue vérifiant :

$$(H_1) \quad |f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| \leq L [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|], \text{ pour tout } (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } t \in [0, 1] \text{ telle que } L \text{ est la constante de Lipschitz.}$$

Si

$$LL_1 \left( L_2 + \frac{L_3}{\Gamma(2-\beta)} \right) < 1.$$

Alors, le système (3.2) admet une solution unique sur  $[0, 1]$ .

La preuve de ce théorème consiste à montrer que l'opérateur donné par :

$$\begin{aligned} Tx(t) = & \frac{b}{k^2} \left( tk - 1 + e^{-kt} \right) - \frac{a + kb}{2k^3} \left[ t^2 k^2 - 2 \left( tk - 1 + e^{-kt} \right) \right], \\ & + \int_0^t e^{-k(t-s)} J^{q-1} f(s, x(s), D_c^\beta(s), J^\gamma(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

admet un point fixe unique dans  $C([0, 1], \mathbb{R})$  en appliquant le théorème de Banach.

**Preuve** Soient  $x_1, x_2 \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors nous avons :

$$\begin{aligned} |Tx_1(t) - Tx_2(t)| & \leq \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |f(\tau, x_1, D_c^\beta x_1, J^\gamma x_1) - f(\tau, x_2, D_c^\beta x_2, J^\gamma x_2)| d\tau ds \\ & \leq L \left[ \int_0^1 \frac{e^{-k(t-s)}}{\Gamma(q)} ds \right] \left[ \|x_1 - x_2\| + \|D_c^\beta x_1 - D_c^\beta x_2\| + \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \|x_1 - x_2\| \right] \\ & \leq \frac{L}{k\Gamma(q)} (1 - e^{-k}) \left( 1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \right) \|x_1 - x_2\|_X \\ & \leq LL_1 L_2 \|x_1 - x_2\|_X. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |(Tx_1)'(t) - (Tx_2)'(t)| & \leq k \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |f(\tau, x_1, D_c^\beta x_1, J^\gamma x_1) - f(\tau, x_2, D_c^\beta x_2, J^\gamma x_2)| d\tau ds \\ & \quad + \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |f(s, x_1, D_c^\beta x_1, J^\gamma x_1) - f(s, x_2, D_c^\beta x_2, J^\gamma x_2)| ds \\ & \leq LL_3 L_1 \|x_1 - x_2\|_X. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} |D_c^\beta Tx_1(t) - D_c^\beta Tx_2(t)| & \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} |T'x_1(s) - T'x_2(s)| ds \\ & \leq \frac{LL_1 L_3}{\Gamma(2-\beta)} \|x_1 - x_2\|_X. \end{aligned}$$

D'après les deux dernières inégalités, nous avons :

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_X \leq LL_1 \left( L_2 + \frac{L_3}{\Gamma(2-\beta)} \right) \|x_1 - x_2\|_X.$$

Par conséquent, T est une contraction.

Ainsi, d'après théorème du point fixe de Banach, il existe un point fixe unique  $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$  solution du **problème 3.■**

**Exemple :** Soit  $f$  définie par  $f(t, x(t), D_c^{\frac{1}{2}} x(t), J^{\frac{3}{4}} x(t)) = \frac{\cos(x(t)) + \sin(D_c^{\frac{1}{2}} x(t)) + \sin(J^{\frac{3}{4}} x(t))}{4\pi^5(t+2)e^t}$ . Nous considérons le problème suivant :

$$\left( D_c^{\frac{7}{2}} + 3D_c^{\frac{5}{2}} \right) x(t) = f(t, x(t), D_c^{\frac{1}{2}} x(t), J^{\frac{3}{4}} x(t)), \quad (3.6)$$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

$$x''(0) = \frac{6}{7}, \quad x^{(3)}(0) = \sqrt{5}.$$

Ainsi,

$$|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| \leq \frac{1}{4\pi^5 e} [ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| ],$$

$$L_1 = 2.0881, \quad L_2 = 0.0953, \quad L_3 = 0.5868,$$

$$LL_1 \left( L_2 + \frac{L_3}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) = 4.7534 \cdot 10^{-4} < 1.$$

Alors, le problème (3.6) a une solution unique dans  $[0, 1]$ .

Le théorème suivant étudie l'existence d'au moins une solution du système (3.2).

**Théorème 3.2** Soit  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. S'il existe une constante positive  $M$ , telle que  $|f(t, x, y, z)| \leq M$ , pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , alors le système (3.2) admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

**Preuve**

### 1. La continuité de T

Soit  $(x_n)$  une suite telle que  $x_n \rightarrow x$  dans  $C([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors, pour tout  $t \in [0, 1]$  nous avons :

$$\begin{aligned} & |Tx_n(t) - Tx(t)| \\ & \leq \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |f(\tau, x_n, D_c^\beta x_n, J^\gamma x_n) - f(\tau, x, D_c^\beta x, J^\gamma x)| d\tau ds \end{aligned}$$

et

$$|D_c^\beta Tx_n(t) - D_c^\beta Tx(t)| \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} |T'x_n(s) - T'x(s)| ds.$$

Les seconds membres des deux inégalités précédentes tendent vers zéro quand  $x_n \rightarrow x$  car la fonction  $f$  est continue. Impliquant :

$$\|Tx_n - Tx\|_X \rightarrow 0, \quad x_n \rightarrow x.$$

Ce qui veut dire que T est continu.

### 2. La Bornitude de T

Soit  $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$ , pour tout  $t \in [0, 1]$  nous avons :

$$\begin{aligned} |x(t)| & \leq \frac{|b|}{k^2} |k - e^{-k}| + \frac{|a + kb|}{2k^3} |k^2 - (k - e^{-k})| \\ & + \int_0^1 e^{-k(1-s)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} |f(\tau, x, D_c^\beta x, J^\gamma x)| d\tau ds \\ & \leq N_1 + N_2 + ML_2. \end{aligned}$$

Pour  $D_c^\beta x$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |D_c^\beta x(t)| &\leq \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} |x'(s)| ds \\ &\leq N_1 + N_2 + ML_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|x\|_X \leq 2N_1 + 2N_2 + M(L_2 + L_3) < \infty. \blacksquare$$

### 3. L'équicontinuité de T

Soient  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  tels que  $t_1 < t_2$  et  $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors,

$$\begin{aligned} |Tx(t_2) - Tx(t_1)| &\leq \frac{|b|}{k} |t_2 - t_1| + \frac{|b|}{k^2} |e^{-kt_2} - e^{-kt_1}| + \frac{|a+kb|}{2k} |t_2^2 - t_1^2| \\ &\quad + \frac{|a+kb|}{2k^2} |t_2 - t_1| + \frac{|a+kb|}{2k^3} |e^{-kt_2} - e^{-kt_1}| \\ &\quad + M \int_0^{t_1} |e^{-k(t_2-s)} - e^{-k(t_1-s)}| \int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} d\tau ds \\ &\quad + M \int_{t_1}^{t_2} |e^{-k(t_2-s)}| \int_0^s \frac{(s-\tau)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} d\tau ds \\ &\leq \frac{|b|}{k} |t_2 - t_1| + \frac{|b|}{k^2} |e^{-kt_2} - e^{-kt_1}| + \frac{|a+kb|}{2k} |t_2^2 - t_1^2| \\ &\quad + \frac{|a+kb|}{2k^2} |t_2 - t_1| + \frac{|a+kb|}{2k^3} |e^{-kt_2} - e^{-kt_1}| \\ &\quad + \frac{M}{k\Gamma(q)} \left[ |t_2^{q-1} - t_1^{q-1}| + |t_1^{q-1} - t_2^{q-1}| e^{-k|t_2-t_1|} + |e^{-kt_1} - e^{-kt_2}| t_1^{q-1} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |D_c^\beta Tx(t_2) - D_c^\beta Tx(t_1)| &\leq \left| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} T'x(s) ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} T'x(s) ds \right| \\ &\leq \frac{(N_1 + N_2 + L_3)}{\Gamma(2-\beta)} |t_2^{1-\beta} - t_1^{1-\beta}|. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $Tx(t_1) \rightarrow Tx(t_2)$  et  $D_c^\beta Tx(t_1) \rightarrow D_c^\beta Tx(t_2)$  quand  $t_1 \rightarrow t_2$ .  $\blacksquare$   
Alors, nous déduisons que l'opérateur T est complètement continu.

---

#### 4. Bornitude de $\Omega$

L'ensemble  $\Omega$  est défini par :  $\Omega = \{x : x = \lambda Tx, 0 < \lambda < 1\}$ . Soit  $x \in \Omega$ , alors

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \lambda |Tx(t)| \\ &\leq \lambda [N_1 + N_2 + ML_2] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |D_c^\beta x(t)| &\leq \lambda |D_c^\beta Tx(t)| \\ &\leq \lambda [N_1 + N_2 + ML_3]. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|x\|_X \leq \lambda [2N_1 + 2N_2 + M(L_2 + L_3)] < \infty. \blacksquare$$

D'après le théorème de point fixe de Schaefer,  $T$  admet au moins un point fixe  $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Ce qui achève la démonstration.

**Example** Nous considérons le problème suivant :

$$\left( D_c^{\frac{7}{2}} + 3D_c^{\frac{5}{2}} \right) x(t) = f(t, x(t), D_c^{\frac{1}{2}} x(t), J^{\frac{3}{4}} x(t)),$$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

$$x''(0) = \frac{6}{7}, \quad x^{(3)}(0) = \sqrt{5}.$$

Où

$$f(t, x(t), D_c^{\frac{1}{2}} x(t), J^{\frac{3}{4}} x(t)) = \frac{\cos(x(t)) + \sin(D_c^{\frac{1}{2}} x(t)) + \sin(J^{\frac{3}{4}} x(t))}{4\pi^5(t+2)e^t}.$$

La fonction  $f$  vérifie l'hypothèse du théorème 3.2, alors le problème admet au moins une solution sur  $[0, 1]$ .

# Conclusion

Dans ce travail, Nous avons présenté quelques résultats sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire et un système d'équations aux dérivées non entières au sens de Caputo.

Nous avons, aussi, présenté une solution intégrale pour un système séquentiel d'ordre fractionnaire. En utilisant la théorie du point fixe, nous avons montré l'existence de cette solution et en faisant intervenir le principe de contraction de Banach nous avons établi un résultat sur l'existence et l'unicité de la solution.

# Bibliographie

- [1] **B. Ahmad, S.K. Ntouyas, R.P. Agarwal and A. Alsaedi** : Existence results for Sequential Fractional Integro-Differential Equations With Nonlocal Multi-Point and Strip Conditions, Bound. value probl. 205, pp. 1-16. [28](#)
- [2] **W.C. Brenke** : An Application of Abel's Integral Equation, American Mathematical Monthly, 29, 1922, pp. 58-60. [4](#)
- [3] **Z. Dahmani and L. Tabharit** : Fractional Order Differential Equations Involving Caputo Derivative, Theory and Application of Mathematics and Computer Science, 4(1), 2014, pp. 40-55. [20](#)
- [4] **H.T. Davis** : The Theory of Linear Operators, Bloomington, Indiana : The Principia Press, 1936; p.20. [9](#)
- [5] **A. M. A. El-Sayed** : Fractional Order Diffusion-Wave Equation, Intern. J. Theo. Ohysics., 35, 1996, pp. 311-322. [4](#)
- [6] **R. Gorenflo and F. Mainardi** : Fractional Calculus : Integral and Differential Equations of Fractional Order, Springer Verlag, Wien, 1997, pp. 223-276. [4](#)
- [7] **D. Graiem and R.L. Armentano** : A Fractional Derivative Model to Describe Arterial Viscoelasticity, Biorheology., 44, pp.251-263. [4](#), [9](#)
- [8] **A. Granas and J. Dugundji** : Fixed Point Theory, Springer-Verlas, New York. 2003. [9](#)
- [9] **N.J. Kalton and E. saab** : Banach spaces, Proceedings of the Missouri Conference held in Colimbia, USA, june 24-29, 1984. [9](#)
- [10] **V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala** : Basic Theory of Fractional Differential Equations, Nonlinear Anal. , 69(8), 2008, pp. 2677-2682. [12](#)
- [11] **J.A.T. Machado and A. Azenha** : Position Force Fractional Control of Mechanical Manipulators. In : Proceeding of the 1998 5th international workshop on advanced motion control, Coimbra, Portugal, 1998, pp.216-221. [4](#)
- [12] **J.A.T Machado, V. Kiryakova and F.Mainardi** : A Poster About The Old History of Fractional Calculus, Frac. Appl. Anal. 13(4), 2010, pp. 447-454. [16](#)
- [13] **R.L. Magin** : Fractional calculus in bioengineering, Begell House, Connecticut. 2006. [4](#)
- [14] **F. Mainardi**, Fractional Calculus : Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics, in " Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" ( A Carpinteri and F. Mainardi, Eds), Springer-Verlag, Wien. 1997, pp. 291-348. [4](#)
- [15] **K.B. Oldham and J. Spanier** : The Fractional Calculus, Academic Press, New York. 1974. [15](#)
- [16] **I. Podlubny** : Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego.1999. [4](#), [9](#), [10](#), [11](#), [14](#)

- [17] **S. Pooseh, H.S. Rodrigues and D.F.M. Torres** : Fractional derivatives in Dengue epidemics, *Math. CA*, 1389 (2011), pp. 739-742. [5](#)
- [18] **L. Tabharit and Z. Dahmani** : Solvability of boundary value problem with Caputo derivative, *journal of interdisciplinary Mathematics* 19(5-6), pp.907-915. [16](#)