

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Manal GHENIM

**Calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système
dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel**

soutenu publiquement le 12 juin 2025 devant le jury composé de :

Président :	Djillali BOUAGADA	Prof.	UMAB
Examinatrice :	Hafida BENDAHPANE	MCB	UMAB
Encadrante :	Zineb KAISSELI	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2024 / 2025

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Ma mère Allah yerhamha;

Mon père;

Mes chères grand-mères;

Mes oncles et mes tantes;

Mon frère et mes sœurs;

Mes cousins et mes cousines;

Toute ma famille;

Mes amies et mes collègues;

Mon encadrante Madame Zineb KAISSERLI.

Manal

Remerciements

Avant tout, je rends grâce à Allah, le Tout-Puissant, pour m'avoir donné la force, le courage, la patience et la détermination nécessaires à l'aboutissement de ce travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadrante, Madame Zineb KAISSERLI, Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, à qui j'exprime toute ma reconnaissance pour m'avoir encadrée, pour ses précieux conseils, ses efforts constants et sa disponibilité.

Je remercie Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université de Mostaganem, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance. J'exprime également ma reconnaissance à Madame Hafida BENDAHMANE, Maître de Conférences à l'Université de Mostaganem, pour avoir examiné ce travail avec attention.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques de l'Université de Mostaganem pour la qualité de leur enseignement et les connaissances qu'ils m'ont transmises durant ces années d'études.

Un merci spécial à mes collègues et mes amies pour leur soutien, leurs échanges intellectuels et pour tous les moments partagés ensemble.

Je tiens à remercier vivement toute ma famille pour m'avoir aidée, soutenue et encouragée tout au long de mes études.

Enfin, je souhaite remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

Ce mémoire est le fruit d'un travail collectif autant que personnel, et je suis profondément reconnaissante envers tous ceux qui m'ont accompagnée.

M anal

Table des matières

Table des figures	iv
Index des notations	v
Introduction	1
1 Éléments préliminaires	4
1 Introduction	4
2 Fonctions spéciales	4
3 Intégration et dérivation d'ordre fractionnaire	6
4 Transformations intégrales	8
5 Conclusion	12
2 Énergie de la réponse impulsionnelle	13
1 Introduction	13
2 Système dynamique d'ordre fractionnaire	13
3 Norme $\mathcal{H}_2$ pour un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimen- sionnel	21
4 Conclusion	25
3 Validation numérique	26
1 Introduction	26
2 Norme $\mathcal{H}_2$ pour des fonctions de transfert de premier et de second type . .	26
3 Norme $\mathcal{H}_2$ d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel	29
4 Conclusion	35
Conclusion	36
Bibliographie	37

Table des figures

2.1	Phénomène réel décrivant l'équation de secousse.	15
2.2	Domaine de stabilité des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et commensurable [10].	22
3.1	Comparaison des valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour une fonction de transfert du premier type entre la nouvelle approche et celle de <i>Malti et al.</i> [15].	27
3.2	Comparaison des valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour une fonction de transfert du second type entre la nouvelle approche et la méthode de <i>Malti et al.</i> [15] pour différentes valeurs de α	29
3.3	Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \in \left] \frac{1}{6}, 2 \right[$	31
3.4	Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{6}$	31
3.5	Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \geq 2$	32
3.6	Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{4\alpha} + 4s^{3\alpha} + 6s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \in \left] \frac{1}{8}, 2 \right[$	33
3.7	Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{4\alpha} + 4s^{3\alpha} + 6s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{8} \right[$	34
3.8	Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{4\alpha} + 4s^{3\alpha} + 6s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \geq 2$	34

Index des notations

$\mathbb{N}$	: Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	: Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	: Corps des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: Corps des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	: Corps des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{R}^m$	: Espace des vecteurs à m composantes réelles.
$\mathbb{R}^{m \times p}$	: Espace des matrices réelles de dimensions $m \times p$.
$\mathbb{C}$	: Corps des nombres complexes.
$[a, b]$	: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b où $a < b < \infty$.
$\mathcal{C}^n$	: Espace des fonctions n fois continument différentiable.
$I_{m \times m}$	: Matrice identité de dimension m , notée aussi I_m .
$\mathcal{L}$	: Transformation de Laplace unidimensionnelle.
$\mathcal{L}^{-1}$	: Transformation inverse de Laplace unidimensionnelle.
$\mathcal{M}$	: Transformation de Mellin.
$\mathcal{M}^{-1}$	: Transformation inverse de Mellin.
$\ \cdot\ _{\mathcal{H}_2}$	: Norme $\mathcal{H}_2$.
$ \cdot $	: Module d'un nombre complexe.
$\Gamma(\cdot)$	: Fonction Gamma d'Euler.
$\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$	: Fonction Bêta d'Euler.
E_α	: Fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.
$E_{\alpha, \beta}$	: Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
δ	: Fonction Delta de Dirac.
$f^{(n)}$	: Dérivée n -ième de la fonction f .
$\mathbf{I}^\alpha$	: Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
$\mathbf{D}^\alpha$	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α où $n - 1 \leq \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$i = \overline{p, q}$	: $i \in \{p, p + 1, p + 2, \dots, q - 1, q\}$ où $p, q \in \mathbb{N}$.
$\text{tr}(\cdot)$	: Trace d'une matrice carrée.
A^*	: Complexe conjuguée d'une matrice A .
$\text{Re}(\cdot)$	: Partie réelle du nombre complexe.
$\arg(\cdot)$	: Argument d'un nombre complexe.
$\det$	: Déterminant d'une matrice.
$!$	: Factorielle d'un entier naturel.
$\star$	: Produit de convolution pour une fonction unidimensionnelle.
EDO	: Équation différentielle ordinaire.
EDF	: Équation différentielle d'ordre fractionnaire.
BIBO	: <i>Bounded-input, bounded-output</i> , c'est-à-dire, entrée bornée, sortie bornée.
MIMO	: <i>Multiple-input, multiple-output</i> , c'est-à-dire, plusieurs entrées, plusieurs sorties.
SISO	: <i>Single-input, single-output</i> , c'est-à-dire, une seule entrée, une seule sortie.

Introduction

La modélisation mathématique permet de transformer un phénomène réel en une expression mathématique utilisée pour prédire et analyser son comportement. Cette démarche repose généralement sur l'identification des variables principales (états, entrées, sorties) ainsi que sur la compréhension des lois physiques [1], chimiques [13] ou biologiques [1] qui régissent leur évolution. Ces phénomènes sont souvent modélisés à l'aide des équations différentielles ordinaires (EDOs), lesquelles prennent la forme suivante

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t)),$$

où

- $y \in \mathbb{R}^m$ représente la variable d'état du système en fonction du temps t ;
- $u \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée ou de commande du système ;
- f est une fonction donnée, exprimant la relation entre les variables ;
- $n \in \mathbb{N}^*$ désigne l'ordre de la dérivation.

Malgré le grand succès des EDOs, elles ne permettent pas de modéliser certains phénomènes dynamiques plus complexes. Cependant, les avancées récentes en science ont montré que les équations différentielles d'ordres fractionnaires sont considérées comme plus adaptées pour modéliser des phénomènes complexes avec une grande précision. Contrairement aux EDOs, les EDFs intègrent des dérivées d'ordre non entières, ce qui permet de mieux capturer les dynamiques des systèmes réels.

Dans la littérature, plusieurs types de dérivées d'ordre fractionnaire sont inventoriés ; néanmoins, celle de Caputo est la plus adaptée à la modélisation des phénomènes réels. Une équation différentielle fractionnaire peut être exprimée par

$$\sum_{i=0}^m a_i \mathbf{D}^{\alpha_i} y(t) = u(t),$$

où $\mathbf{D}^{\alpha_i}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec $n-1 \leq \alpha_i < n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) linéaires peuvent être représentées de différentes manières, parmi lesquelles nous trouvons :

- La représentation en espace d'état, particulièrement utile pour analyser la dynamique interne des systèmes linéaires invariants dans le temps ainsi que pour le contrôle, est exprimée par

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha} x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, avec $n-1 \leq \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, appliquée à la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$. $x \in \mathbb{R}^m$ représente

le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de commande, $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ est la matrice d'observation et $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ est la matrice de transmission.

- La fonction de transfert associée à cette représentation, notée G , permet d'étudier la réponse du système dans le domaine fréquentiel, facilitant ainsi l'analyse des systèmes linéaires. Elle relie, sous certaines conditions, l'entrée u à la sortie y selon :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$, où U et Y sont respectivement les transformées de Laplace de l'entrée u et de la sortie y .

La théorie du contrôle repose principalement sur des outils mathématiques pour l'étude et l'analyse des systèmes dynamiques. Parmi les concepts fondamentaux de ce domaine, nous trouvons l'énergie de la réponse impulsionnelle, également connue sous le nom de la norme $\mathcal{H}_2$. Elle constitue l'un des critères centraux pour évaluer les performances des systèmes linéaires invariants dans le temps. Cette norme, issue de la théorie des espaces de Hardy¹, permet de mesurer la précision du système ainsi que son comportement face à des perturbations aléatoires ou contrôlées. Elle est définie par la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel par la réponse impulsionnelle. Cette relation est établie à l'aide du théorème de Plancherel.

L'objectif de ce travail est de généraliser une approche développée récemment [4, 14] pour le calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel. Cette approche repose sur la représentation en espace d'état, les techniques de la théorie des matrices et les transformations intégrales. Cette étude se distingue des travaux précédents, tels que celui de *Malti et al.* [15], où le calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ est effectué de manière analytique en utilisant uniquement la fonction de transfert. En revanche, l'approche que nous présentons dans ce manuscrit est plus efficace et mieux adaptée numériquement.

Le présent manuscrit porte sur une étude théorique, suivie de simulations numériques. Il est composé de trois chapitres

- Le premier chapitre présente les notions préliminaires essentielles. Nous commencerons par rappeler certaines fonctions spéciales, puis nous introduirons l'intégrale et la dérivée d'ordre fractionnaire, suivies de deux transformations intégrales.
- Le deuxième chapitre est consacré au calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel, en utilisant une nouvelle approche. Nous présenterons d'abord un système dynamique ainsi que ses différentes représentations, suivi de quelques définitions liées à la norme $\mathcal{H}_2$. Enfin, nous procéderons au calcul de cette norme.

1. La définition rigoureuse est la suivante : si $0 < p < +\infty$, alors, l'espace de Hardy $\mathcal{H}_p(D)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes f , i.e., analytiques définies sur le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ et satisfaisant la condition

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

La norme $\|f\|_{\mathcal{H}_p}$ est dite norme p de Hardy de la fonction f .

- Le dernier chapitre porte sur la validation numérique du résultat théorique obtenu, en s'appuyant sur des exemples académiques. Nous réaliserons une comparaison entre la nouvelle approche et celle proposée par *Malti et al.* [15], à l'aide de fonctions de transfert de premier et de second type. Le calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ pour différentes valeurs de α , appliqué à d'autres fonctions de transfert, sera également examiné.

Ce manuscrit se termine par une conclusion, suivie d'une liste des articles et ouvrages utilisés pour élaborer ce travail.

Chapitre 1

Éléments préliminaires

1 Introduction

Les concepts et notions clés utilisés dans ce modeste projet de recherche sont présentés dans ce chapitre. Nous commencerons par rappeler quelques fonctions spéciales. Ensuite, nous introduirons l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ainsi que la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Enfin, nous aborderons quelques notions relatives aux transformations intégrales de Laplace et de Mellin.

2 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présenterons certaines fonctions spécifiques. Nous ferons référence à la fonction Gamma d'Euler, à la fonction Bêta d'Euler, aux fonctions de Mittag-Leffler et, enfin, à la fonction Delta de Dirac.

2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 [12] *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, la fonction Gamma d'Euler, notée par Γ , est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.1)$$

Proposition 1.1 [12]

a) *Pour tout $z > 0$, nous avons*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z);$$

b) *Pour tout $z \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\Gamma(z+1) = z!.$$

Exemple 1.1 *Soit à calculer*

$$I = \int_0^{+\infty} 3^{-4z^2} dz.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-4\ln(3)z^2} dz, \\ &= \frac{\sqrt{\ln(3)}}{4\ln(3)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}} dx, \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\ln(3)}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

En dernier,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln(3)}},$$

vu que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.2 [7] Pour tout $\operatorname{Re}(x) > 0$ et $\operatorname{Re}(y) > 0$, la fonction Bêta d'Euler, notée par $\mathbf{B}$, est définie par l'intégrale suivante

$$\mathbf{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (1.2)$$

Exemple 1.2 Pour $x = 2$ et $y = 3$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(2, 3) &= \int_0^1 t(1-t)^2 dt, \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2 [7] La relation suivante établit le lien entre la fonction Gamma d'Euler Γ et la fonction Bêta d'Euler $\mathbf{B}$. En effet, pour tout $\operatorname{Re}(x) > 0$ et $\operatorname{Re}(y) > 0$, nous avons

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

2.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.3 [12] Pour tout $\alpha > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Définition 1.4 [12] Pour tout $\alpha, \beta > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Proposition 1.3 [12] Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta = 1$, nous avons

$$E_{\alpha, 1}(z) = E_\alpha(z).$$

En particulier, si $\alpha = \beta = 1$, il découle

$$E_{1, 1} = e^z.$$

Exemple 1.3 Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, nous avons

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ &= z^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-2}}{k!} + z + 1, \\ &= z^2 E_{1,3}(z) + z + 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_{1,3}(z) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}.$$

2.4 Fonction Delta de Dirac

Définition 1.5 [12] L'impulsion de Dirac est la fonction δ définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

3 Intégration et dérivation d'ordre fractionnaire

L'objectif de cette section est de présenter les définitions ainsi que quelques résultats associés à l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et à la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo.

3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.6 [12, 16] On appelle intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α , $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, de la fonction f , et on la note par $\mathbf{I}_a^\alpha$, la fonction définie par

$$\mathbf{I}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction de Gamma d'Euler définie par la formule (1.1) et $a \in \mathbb{R}_+$.

Notation 1.1 Pour $a = 0$, nous notons $\mathbf{I}_a^\alpha f(t) = \mathbf{I}^\alpha f(t)$. Ainsi, l'équation (1.3) devient

$$\mathbf{I}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Exemple 1.4 Soit la fonction f définie par

$$f(t) = t^\beta, \text{ où } \beta > 0.$$

Calculons son intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α .

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} t^\beta \left(\frac{\tau}{t}\right)^\beta d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $u = \frac{\tau}{t}$ et la définition de la fonction Bêta d'Euler (formule (1.2)), nous obtenons

$$\mathbf{I}^\alpha t^\beta = \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{B}(\alpha, \beta+1).$$

Par la proposition 1.2, il découle

$$\mathbf{I}^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \quad (1.4)$$

3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.7 [5, 16] La dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , $n-1 \leq \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction f , telle que $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}_+$, est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha f(t) &= \mathbf{I}^{n-\alpha} \mathbf{D}^n f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $f^{(n)}$ représente la dérivée nième de la fonction f par rapport à la variable τ .

Exemple 1.5 Calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction f présentée dans l'exemple 1.4.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha f(t) &= \mathbf{I}^{n-\alpha} \mathbf{D}^n f(t), \\ &= \mathbf{I}^{n-\alpha} \mathbf{D}^n t^\beta. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^n t^\beta &= \beta(\beta-1) \cdots (\beta-n+1) t^{\beta-n}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-n}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha t^\beta &= \mathbf{I}^{n-\alpha} \mathbf{D}^n f(t), \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \mathbf{I}^{n-\alpha} t^{\beta-n}. \end{aligned}$$

L'utilisation de l'expression (1.4), permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4 [12, 16] Pour tout $\alpha > 0$, $f, g \in \mathcal{C}^n((a, b])$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathbf{D}^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathbf{D}^\alpha f(t) + \mu \mathbf{D}^\alpha g(t).$$

4 Transformations intégrales

Les transformations intégrales permettent de convertir des systèmes intégro-différentiels complexes en systèmes algébriques plus simples, facilitant ainsi leur étude et analyse. Elles peuvent généralement être exprimées par

$$\mathcal{T}[f(t)](s) = \int_a^b f(t)N(t,s)dt,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. N désigne le noyau de la transformation et f représente la fonction à transformer.

L'un des critères assurant l'existence d'une telle transformation intégrale est énoncé par la définition suivante

Définition 1.8 [7] *Une fonction f continue est dite d'ordre exponentiel, d'ordre $a > 0$ sur $t \in [0, +\infty[$, s'il existe une constante positive K telle que pour un certain $t > T$, nous ayons*

$$|f(t)| \leq Ke^{at}.$$

Ainsi, en fonction des différentes expressions du noyau N et valeurs de a et de b , plusieurs transformations intégrales peuvent être définies.

Toutefois, dans la présente section, nous nous intéressons à deux transformations intégrales : celle de Laplace et celle de Mellin. Elles constituent des outils essentiels pour l'analyse des systèmes dynamiques linéaires. Nous commencerons par donner leurs expressions puis les conditions assurant leur convergence.

4.1 Transformation de Laplace unidimensionnelle

4.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.9 [9] *La transformée de Laplace unilatérale d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue, notée par $\mathcal{L}[f]$, est définie par*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

où $s \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}(s) > 0$.

Les conditions garantissant l'existence de la transformation de Laplace d'une fonction f sont décrites dans les théorèmes ci-dessous.

Théorème 1.1 [7] *Si une fonction f est continue ou continue par morceaux dans tout intervalle fini $[0, T]$ et d'ordre exponentiel d'ordre $a > 0$, alors, la transformée de Laplace de $\mathcal{L}[f]$ existe pour tout s telle que $\text{Re}(s) > a$.*

Théorème 1.2 [6] *Supposons que*

- *f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;*
- *Pour certain $a < 1$, $f(t) = O(t^{-a})$ lorsque $t \rightarrow 0$;*
- *Pour tout $b > 0$, $e^{-bt}f(t)$ tend vers 0, lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

Alors, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 0$ et définit une fonction holomorphe¹ sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Exemple 1.6 Soit f une fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Cherchons sa transformée de Laplace unilatérale.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \\ &= \int_0^1 t e^{-st} dt + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_1^{\tau} e^{-st} dt, \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s^2}, \quad \text{avec } \operatorname{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.5 [9, 17] Pour toutes fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$, avec $f \in \mathcal{C}^n([0, +\infty[)$ et $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons les propriétés suivantes

i. Linéarité

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s);$$

ii. Dérivée d'ordre $n, n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(t) \Big|_{t=0};$$

iii. Produit de convolution

$$\mathcal{L}[(f \star g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \mathcal{L}[g(t)](s),$$

où

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Proposition 1.6 [9, 17] Soient $t \in \mathbb{R}_+, v \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}$ et δ la fonction Delta de Dirac, ainsi,

1.

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a};$$

2.

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = 1;$$

3.

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\right](s) = \frac{1}{s^\nu}.$$

1. Une fonction $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable en chaque point de $\mathbf{U}$, et si sa dérivée $f' : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue.

Définition 1.10 [9, 17] La transformée inverse de Laplace d'une fonction F , notée $\mathcal{L}^{-1}[F]$, est définie par

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

où γ est une constante réelle qui dépasse la partie réelle de toutes les singularités de $F(s)$.

Remarque 1.1 Il est à noter que la transformée inverse de Laplace préserve les propriétés de la transformée de Laplace.

Exemple 1.7 Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, considérons la fonction suivante

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s-1)}.$$

Ainsi, sa transformée inverse de Laplace est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2(s-1)}\right](t), \\ &= -2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t), \\ &= -2 - t + 2e^t. \end{aligned}$$

4.1.2 Transformée de Laplace et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.11 [16] La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continument différentiable, notée par $\mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha f]$, est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha f(t)](s) &= \int_0^\infty \mathbf{D}^\alpha f(t) e^{-st} dt, \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t) \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

où $s \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}(s) > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.8 Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire à coefficient constant avec second membre

$$\mathbf{D}^\alpha f(t) = e^{at}, \quad (1.6)$$

où $0 < \alpha < 1$. La condition initiale associée à l'équation (1.6) est $f(0) = 0$.

Pour résoudre l'équation différentielle (1.6), nous utilisons la transformation de Laplace. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha f(t)](s) = \mathcal{L}[e^{at}](s) &\iff s^\alpha F(s) = \frac{1}{s-a}, \\ &\iff F(s) = \frac{1}{s^\alpha(s-a)}. \end{aligned}$$

Pour revenir à notre fonction f , nous utilisons la transformée inverse de Laplace. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha(s-a)}\right](t) &\iff f(t) = -\frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\right](t) + \frac{1}{a^\alpha} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right](t), \\ &\iff f(t) = -\frac{1}{a} t^{\alpha-1} + \frac{1}{a^\alpha} e^{at}. \end{aligned}$$

4.2 Transformation de Mellin

Définition 1.12 [9] La transformée de Mellin d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue, notée $\mathcal{M}[f]$, est définie par

$$\mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt,$$

où $s \in \mathbb{C}$.

Les conditions d'existence de la transformée de Mellin sont décrites par les théorèmes suivants.

Théorème 1.3 [9] La transformée de Mellin de la fonction f existe, si la fonction f est continue par morceaux dans tout intervalle fermé $[a, b] \subset [0, +\infty[$, telle que

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| t^{k-1} dt,$$

est bornée pour un certain $k > 0$.

Théorème 1.4 [6] Supposons que

- f est continue sur $[0, +\infty[$;
- Pour un certain $a \in \mathbb{R}$, $f(t) = O(t^{-a})$ lorsque $t \rightarrow 0$;
- Pour tout t , $f(t)$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Alors, l'intégrale de Mellin

$$\int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt,$$

converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > a$ et définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > a$.

Exemple 1.9 Considérons la fonction

$$f(t) = (1+t)^{-1}.$$

Pour $t+1 = \frac{1}{1-x}$, il découle $t = \frac{x}{1-x}$, $x = \frac{t}{t+1}$ et $dt = \frac{dx}{(1-x)^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(t)](s) &= \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt, \\ &= \int_0^{\infty} (1+t)^{-1} t^{s-1} dt, \\ &= \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{-s} dx, \\ &= \mathbf{B}(s, 1-s), \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \end{aligned}$$

Proposition 1.7 [9] Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathcal{M}[\lambda f(t) + \mu g(t)](s) = \lambda \mathcal{M}[f(t)](s) + \mu \mathcal{M}[g(t)](s).$$

Proposition 1.8 [9] *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left[\frac{1}{a + t^n} \right] (s) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{a + t^n} dt, \\ &= \frac{\pi n^{-1} a^{\frac{s}{n}-1}}{\sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

avec $|\arg(a)| < \pi$ et $0 < \operatorname{Re}(s) < n$.

Définition 1.13 [9] *La transformée inverse de Mellin de la fonction F , notée $\mathcal{M}^{-1}[F]$, est définie par*

$$\mathcal{M}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) t^{-s} ds.$$

5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de présenter les concepts et outils fondamentaux qui serviront de base aux résultats développés dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Énergie de la réponse impulsionnelle

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel, également appelée norme $\mathcal{H}_2$, en utilisant une nouvelle approche [4, 14]. Tout d'abord, nous présenterons quelques notions sur le système dynamique ainsi que ses différentes représentations. Ensuite, nous rappellerons certaines définitions relatives à la norme $\mathcal{H}_2$. Enfin, nous généraliserons l'approche proposée dans [4, 14] pour le calcul de cette norme appliquée à un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel. Contrairement à l'approche développée par *Malti et al.* [15], cette nouvelle approche est basée sur l'utilisation des techniques de la théorie des matrices et des transformations intégrales.

2 Système dynamique d'ordre fractionnaire

Considérons un système dynamique linéaire standard d'ordre fractionnaire à temps continu de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{D}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, avec $n-1 \leq \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$ appliquée à la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$. $x \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de commande, $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ est la matrice d'observation et $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ est la matrice de transmission directe de l'entrée sur la sortie.

Les conditions initiales associées au système (2.1) sont

$$x^{(i)}(0) = x_{i,0}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

2.1 Définitions et résultats auxiliaires

Définition 2.1 [3] *Un système dynamique linéaire fractionnaire standard à temps continu, de la forme (2.1), est dit régulier si*

$$\det(s^\alpha \mathbf{I} - A) \neq 0,$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.1 [3] Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $n-1 \leq \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la série de Laurent autour de l'infini est définie par

$$(s^\alpha I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i s^{-(i+1)\alpha}. \quad (2.2)$$

Théorème 2.1 [3] Le système dynamique linéaire fractionnaire standard (2.1) admet comme trajectoire

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i B}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^i \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(t) \Big|_{t=0},$$

où Γ représente la fonction Gamma d'Euler (1.1)

Définition 2.2 [12] La paire (A, B) (où le système (2.1)) est dite contrôlable si

$$\text{rg } \mathcal{C} = m \quad \text{où} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{m-1}B \end{pmatrix}.$$

Définition 2.3 [12] La paire (C, A) (où le système (2.1)) est dite observable si

$$\text{rg } \mathcal{O} = m \quad \text{où} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1 Soit le système dynamique d'ordre fractionnaire (2.1) avec

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice de contrôlabilité $\mathcal{C}$ est

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & -270 \\ 5 & -30 & 160 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix},$$

ainsi, le système dynamique associé est contrôlable puisque $\text{rg } \mathcal{C} = 3$.

- La matrice d'observabilité $\mathcal{O}$ est donnée par

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 9 & -30 & -120 \end{pmatrix}.$$

Puisque son rang est égal à 3, le système dynamique associé est observable.

2.2 Représentation d'un système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire à temps continu

Dans cette section, nous étayons les multiples représentations d'un système dynamique d'ordre fractionnaire, à savoir l'équation différentielle, la représentation en espace d'état [18], la fonction de transfert [11], la réponse impulsionnelle [11, 12] et, en fin, la matrice de Schur [19].

Avant d'aborder ces concepts, nous procéderons à la modélisation d'un phénomène lié à l'équation de secousse [2].

2.2.1 Modélisation d'un phénomène

Un cas particulièrement intéressant est l'équation différentielle de secousse [2], laquelle illustre le comportement d'une variable physique en réponse à une accélération changeante.



FIGURE 2.1 – Phénomène réel décrivant l'équation de secousse.

Cette équation où l'évolution de y dépend non seulement de sa vitesse et de son accélération, mais aussi de sa variation de son accélération, est une équation différentielle du troisième ordre.

D'une manière purement théorique, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire homogène de type secousse [2] s'écrit sous la forme

$$\mathbf{D}^{3\alpha} y(t) + \nu \mathbf{D}^{2\alpha} y(t) + \beta \mathbf{D}^{\alpha} y(t) + \gamma y(t) = 0, \quad (2.3)$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec $0 < \alpha \leq 1$.

Pour des raisons pratiques, nous nous intéressons à l'équation non homogène de la forme

$$\mathbf{D}^{3\alpha} y(t) + 7\mathbf{D}^{2\alpha} y(t) + 8\mathbf{D}^{\alpha} y(t) + y(t) = u(t),$$

avec $0 < \alpha < 1$.

2.2.2 De l'équation différentielle à la représentation d'état

L'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire et à coefficients constants, reliant la sortie y au contrôle u , peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{D}^{\alpha m} y(t) + a_{m-1} \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t) + \dots + a_0 y(t) = b_p \mathbf{D}^{\beta p} u(t) + b_{p-1} \mathbf{D}^{\beta(p-1)} u(t) + \dots + b_0 u(t). \quad (2.4)$$

Afin de passer de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire (2.4) à un système différentiel, également connu sous le nom de représentation en espace d'état, notée généralement par $\{A, B, C, D, \alpha\}$, une première étape consiste à considérer une version simplifiée de l'équation (2.4), dans laquelle les dérivées de l'entrée u ne sont pas prises en compte, c'est-à-dire

$$\mathbf{D}^{\alpha m} y(t) + a_{m-1} \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t) + \dots + a_0 y(t) = u(t), \quad (2.5)$$

où $\mathbf{D}^\alpha$ représente la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, avec $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et où $a_i \in \mathbb{R}$ sont les coefficients de l'EDF.

Les conditions initiales associées à l'EDF (2.5) sont données par

$$y^{(i)}(0) = y_{i,0}, \quad 0 \leq i \leq (n-1)m.$$

Pour des raisons de simplification, nous supposons dans la suite que toutes les conditions initiales sont toutes nulles.

Ainsi, nous introduisons le changement de fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \mathbf{D}^\alpha y(t), \\ \vdots \\ x_m(t) = \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) = x_2(t), \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) = x_3(t), \\ \vdots \\ \mathbf{D}^\alpha x_m(t) = u(t) - [a_{m-1} \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t) + \dots + a_0 y(t)]. \end{cases}$$

Par conséquent, la représentation en espace d'état obtenue est

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{D}^\alpha x_{m-1}(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}(t) \\ x_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Les conditions initiales deviennent

$$x_i(0) = 0, \quad i = \overline{0, (n-1)m}.$$

Exemple 2.2 Considérons l'EDF de secousse

$$\mathbf{D}^{3\alpha} y(t) + 7\mathbf{D}^{2\alpha} y(t) + 8\mathbf{D}^\alpha y(t) + y(t) = u(t), \quad (2.6)$$

où $0 < \alpha < 1$, avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $\mathbf{D}^\alpha y(0) = 0$ et $\mathbf{D}^{2\alpha} y(0) = 0$.

On peut réécrire l'équation (2.6) sous la forme d'un système différentiel d'ordre fractionnaire. Posons le changement de fonction suivant

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \mathbf{D}^\alpha y(t), \\ x_3(t) = \mathbf{D}^{2\alpha} y(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) = x_2(t), \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) = x_3(t), \\ \mathbf{D}^\alpha x_3(t) = u(t) - 7x_3(t) - 8x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

Par conséquent, la représentation en espace d'état associée à l'EDF (2.6) est donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Les conditions initiales deviennent

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 De l'équation différentielle à la fonction de transfert

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire (2.4) que l'on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\sum_{i=0}^m a_i \mathbf{D}^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^p b_j \mathbf{D}^{\beta_j} u(t), \quad (2.7)$$

où u est l'entrée, y est la sortie et a_i, b_j sont les coefficients réels de l'EDF (2.7), pour $i = \overline{0, m}$, et $j = \overline{0, p}$.

L'application de la transformation de Laplace à l'équation (2.7), en supposant que toutes les conditions initiales sont nulles, donne

$$\sum_{i=0}^m a_i s^{\alpha_i} Y(s) = \sum_{j=0}^p b_j s^{\beta_j} U(s). \quad (2.8)$$

Ainsi, la définition de la fonction de transfert est donnée par

Définition 2.4 [16] *La fonction de transfert décrivant la relation entre l'entrée u et la sortie y est exprimée par*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$. Y et U sont, respectivement, les transformées de Laplace des fonctions y et u .

De la définition 2.4 et la relation (2.8), nous obtenons

$$G(s) = \frac{b_p s^{\beta_p} + b_{p-1} s^{\beta_{p-1}} + \dots + b_0}{a_m s^{\alpha_m} + a_{m-1} s^{\alpha_{m-1}} + \dots + a_0}.$$

Exemple 2.3 *Considérons l'EDF de secousse*

$$\mathbf{D}^{3\alpha} y(t) + 7\mathbf{D}^{2\alpha} y(t) + 8\mathbf{D}^{\alpha} y(t) + y(t) = u(t), \quad (2.9)$$

où $0 < \alpha < 1$, avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $\mathbf{D}^{\alpha} y(0) = 0$ et $\mathbf{D}^{2\alpha} y(0) = 0$.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (2.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)}, \\ &= \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^{\alpha} + 1}. \end{aligned}$$

La définition suivante introduit une notion fondamentale en lien avec la fonction de transfert : la fonction de transfert commensurable.

Définition 2.5 [15] *Une fonction de transfert est dite commensurable lorsque tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui la régit sont des multiples entiers d'un ordre de base α .*

2.2.4 De la représentation d'état à la fonction de transfert

Considérons un système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire à temps continu, standard et à faisceau régulier

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.10)$$

avec des conditions initiales nulles.

En appliquant la transformée de Laplace au système dynamique (2.10), nous obtenons

$$s^\alpha X(s) = AX(s) + BU(s),$$

et

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \quad (2.11)$$

Étant donné que le système dynamique d'ordre fractionnaire (2.10) est régulier, c'est-à-dire,

$$\det(s^\alpha I_m - A) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, alors, nous déduisons

$$X(s) = (s^\alpha I_m - A)^{-1} BU(s). \quad (2.12)$$

En remplaçant l'expression de X donnée par (2.12) dans l'équation (2.11), nous obtenons

$$Y(s) = [C(s^\alpha I_m - A)^{-1} B + D] U(s).$$

Finalement, la fonction de transfert s'écrit

$$G(s) = C(s^\alpha I_m - A)^{-1} B + D. \quad (2.13)$$

Exemple 2.4 Considérons le système dynamique d'ordre fractionnaire associé à l'équation différentielle fractionnaire de secousse

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1$. Par conséquent, en appliquant la relation (2.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} G(s) &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} s^\alpha & -1 & 0 \\ 0 & s^\alpha & -1 \\ 1 & 8 & s^\alpha + 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}. \end{aligned}$$

2.2.5 De la fonction de transfert à la réponse impulsionnelle

Soit la fonction de transfert exprimée sous la forme générale

$$G(s) = C(s^\alpha I_m - A)^{-1} B + D. \quad (2.14)$$

La réponse impulsionnelle g est obtenue par la transformée inverse de Laplace de la fonction de transfert G , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t), \\ &= C \mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I_m - A)^{-1}](t) \cdot B + D \mathcal{L}^{-1}[1](t). \end{aligned}$$

Par la proposition 1.6, nous avons

$$\mathcal{L}^{-1}[1](t) = \delta(t),$$

où δ est la fonction Delta de Dirac.

Il reste à déterminer la transformée inverse de Laplace du faisceau $(s^\alpha I - A)^{-1}$. Par l'utilisation de la définition de la série de Laurent (2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty} A^i s^{-(i+1)\alpha}\right](t), \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-\alpha} + A s^{-2\alpha} + A^2 s^{-3\alpha} + \dots\right](t), \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha} + A \frac{1}{s^{2\alpha}} + A^2 \frac{1}{s^{3\alpha}} + \dots\right](t), \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\right](t) + A \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2\alpha}}\right](t) + A^2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3\alpha}}\right](t) + \dots. \end{aligned}$$

Sachant que

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s) = \frac{1}{s^\alpha},$$

alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\right](t) + A \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2\alpha}}\right](t) + A^2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3\alpha}}\right](t) + \dots, \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + A \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + A^2 \frac{t^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)} + \dots, \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)}, \\ &= t^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^{i\alpha}}{\Gamma((i+1)\alpha)}, \\ &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A t^\alpha). \end{aligned}$$

Finalement, la réponse impulsionnelle associée à la fonction de transfert (2.14) est donnée

$$g(t) = C t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A t^\alpha) B + D \delta(t). \quad (2.15)$$

Exemple 2.5 Considérons la fonction de transfert associée à l'EDF de secousse

$$G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}.$$

Elle est liée au système dynamique d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Donc, selon l'équation (2.15), nous obtenons

$$g(t) = (1 \ 0 \ 0) t^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.6 De la fonction de transfert à la matrice de Schur

Définition 2.6 [19] Soit la matrice bloc M de dimension $(m+p) \times (m+p)$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} Z & T \\ \hline R & S \end{array} \right],$$

où Z, T, R et S sont des matrices de dimensions respectives $m \times m$, $m \times p$, $q \times m$ et $q \times p$.

Le complément de Schur de la matrice M en Z est donné par

$$M/Z = S - RZ^{-1}T,$$

où la matrice Z est non singulière.

Remarque 2.1 La matrice de Schur associée à la fonction de transfert du système dynamique linéaire (2.1)

$$G(s) = C(s^\alpha I_m - A)^{-1}B + D,$$

est donnée par

$$\left[\begin{array}{c|c} s^\alpha I_m - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right].$$

Exemple 2.6 Considérons la fonction de transfert associée à l'EDF de secousse

$$G(s) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} s^\alpha & -1 & 0 \\ 0 & s^\alpha & -1 \\ 1 & 8 & s^\alpha + 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec $0 < \alpha < 1$.

Ainsi, la matrice de Schur associée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} s^\alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s^\alpha & -1 & 0 \\ 1 & 8 & s^\alpha + 7 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

2.3 Énergie de la réponse impulsionnelle : Norme $\mathcal{H}_2$

Dans cette section, nous rappelons les définitions et les résultats fondamentaux concernant la norme $\mathcal{H}_2$.

Définition 2.7 [18] *La norme $\mathcal{H}_2$ de la fonction de transfert G à plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO), notée $\|G\|_{\mathcal{H}_2}$, est donnée par l'expression suivante*

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[G(jw)G^*(jw)] dw.$$

Définition 2.8 [15, 18] *La norme $\mathcal{H}_2$ de la fonction de transfert G à une entrée et une sortie (SISO), notée $\|G\|_{\mathcal{H}_2}$, est donnée par l'expression suivante*

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(jw)G^*(jw) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(jw)|^2 dw.$$

Remarque 2.2 [18] *Si $G(-jw) = G(jw)$, alors,*

$$\int_{-\infty}^0 \text{tr}[G(jw)G^*(jw)] dw = \int_0^{+\infty} \text{tr}[G(jw)G^*(jw)] dw,$$

ainsi,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{tr}[G(jw)G^*(jw)] dw.$$

Définition 2.9 [18] *La norme $\mathcal{H}_2$ de la réponse impulsionnelle g associée à une fonction de transfert G est donnée par*

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{+\infty} \text{tr}[g(t)g^*(t)] dt.$$

Théorème 2.2 [15] *Soient G et g la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle associée, respectivement. Alors,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s).$$

3 Norme $\mathcal{H}_2$ pour un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel

Cette section constitue le cœur de ce manuscrit. Nous abordons le calcul de la norme $\mathcal{H}_2$, en adoptant une approche novatrice. Celle-ci repose sur l'utilisation de la représentation en espace d'état, ainsi que sur l'application des techniques issues de la théorie des matrices et des transformations intégrales. Avant d'introduire cette méthode, nous commençons par la présentation du système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel associé à une fonction de transfert.

3.1 Système dynamique

Considérons un système dynamique standard unidimensionnel d'ordre fractionnaire linéaire propre, à faisceau régulier et à temps continu

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{cases} \quad (2.16)$$

où $\mathbf{D}^\alpha$ est la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec $0 < \alpha < 2$. $x \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de commande et $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ est la matrice d'observation.

Les conditions initiales associées au système (2.16) sont supposées nulles. De plus, nous supposons que le système (2.16) est BIBO stable, c'est-à-dire qu'il satisfait aux conditions du théorème suivant

Théorème 2.3 [15] *La fonction de transfert commensurable*

$$G(s) = \frac{Y(s^\alpha)}{U(s^\alpha)},$$

d'ordre α est BIBO stable si

$$0 < \alpha < 2,$$

et pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $U(s) = 0$

$$|\arg(s)| > \alpha \frac{\pi}{2}.$$

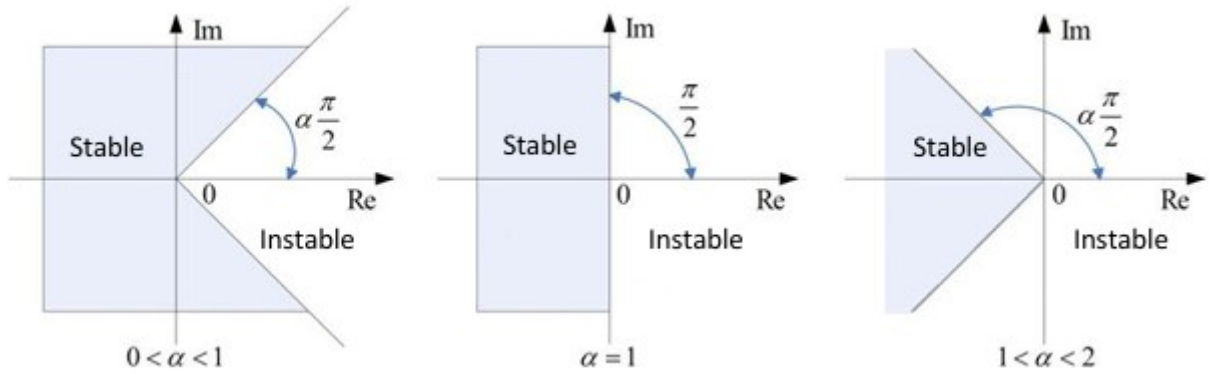


FIGURE 2.2 – Domaine de stabilité des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et commensurable [10].

3.2 Résultat

Le théorème suivant constitue le résultat fondamental de ce manuscrit.

Théorème 2.4 *Étant donnée une fonction de transfert d'ordre fractionnaire associée à la représentation en espace d'état $\{A, B, C, \alpha\}$ où A, B, C sont des matrices de dimensions appropriées et $0 < \alpha < 2$ satisfaisant les conditions du théorème 2.3 avec $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$. La norme $\mathcal{H}_2$ est donnée par*

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = -\frac{1}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \operatorname{tr} \left[(-j)^\alpha C P (-A^*)^{\frac{1}{\alpha}-1} C^* + j^\alpha C (-A)^{\frac{1}{\alpha}-1} P C^* \right].$$

Preuve. Considérons un système dynamique standard d'ordre fractionnaire linéaire propre, à faisceau régulier et à temps continu

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{cases} \quad (2.17)$$

où $0 < \alpha < 2$, avec les conditions initiales

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Étant donné que le système (2.17) est régulier, la transformation de Laplace peut être appliquée afin d'obtenir la fonction de transfert suivante

$$G(s) = C (s^\alpha I_m - A)^{-1} B,$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

La fonction de transfert peut également être illustrée à l'aide de la matrice de Schur

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{c|c} s^\alpha I_m - A & B \\ \hline -C & 0 \end{array} \right].$$

La fonction de transfert complexe conjuguée associée au système dynamique (2.17) est donnée par

$$G^*(s) = B^* (\overline{s}^\alpha I_m - A^*)^{-1} C^*,$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$. Sa matrice de Schur est

$$S_{G^*}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \overline{s}^\alpha I_m - A^* & C^* \\ \hline -B^* & 0 \end{array} \right].$$

La multiplication de la matrice de Schur S_G par son complexe conjuguée S_{G^*} produit une matrice parahermitienne[8] notée S_ϕ

$$\begin{aligned} S_\phi(s) &= S_G(s) S_{G^*}(s), \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{s}^\alpha I_m - A^* & C^* \\ s^\alpha I_m - A & -BB^* & 0 \\ \hline -C & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Son complément de Schur est

$$\begin{aligned} \phi(s) &= -(-C \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \overline{s}^\alpha I_m - A^* \\ s^\alpha I_m - A & -BB^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C^* \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= C (s^\alpha I_m - A)^{-1} BB^* (\overline{s}^\alpha I_m - A^*)^{-1} C^*. \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable

$$s^\alpha = j^\alpha w^\alpha \Rightarrow s^\alpha = j^\alpha \tilde{w},$$

avec $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ et $\tilde{w} = w^\alpha$, nous obtenons

$$\phi(\tilde{w}) = C (j^\alpha \tilde{w} I_m - A)^{-1} BB^* ((-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^*)^{-1} C^*.$$

Cette approche repose principalement sur l'utilisation d'une matrice parahermitienne à diagonale nulle. A cette fin, nous effectuons une multiplication de la matrice parahermitienne S_ϕ par deux matrices de transformations, M_1 et M_2 qui dépendent d'une matrice

inconnue P vérifiant la condition $P = P^*$. Il est à noter que la matrice S_ϕ reste invariante et ne change pas sous ces transformations [8].

En effet,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_\phi(\tilde{w}) &= M_1 S_\phi(\tilde{w}) M_2, \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} I_m & 0 & 0 \\ (-j)^{1-\alpha} P & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^* & C^* \\ j^\alpha \tilde{w} I_m - A & -BB^* & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} I_m & j^{1-\alpha} P & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{array} \right], \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^* & C^* \\ j^\alpha \tilde{w} I_m - A & j^{1-\alpha} (j^\alpha \tilde{w} I_m - A) P + (-j)^{1-\alpha} P ((-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^*) - BB^* & (-j)^{1-\alpha} P C^* \\ -C & -j^{1-\alpha} C P & 0 \end{array} \right],\end{aligned}$$

telle que la matrice P solution de l'équation

$$j^{1-\alpha} (j^\alpha \tilde{w} I_m - A) P + (-j)^{1-\alpha} P ((-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^*) - BB^* = 0,$$

où encore

$$j^{1-\alpha} A P + (-j)^{1-\alpha} P A^* + BB^* = 0,$$

cette dernière est dite équation de Lyapunov.

Par conséquent, la matrice parahermitienne $\tilde{S}_\phi$ devient

$$\tilde{S}_\phi(\tilde{w}) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^* & C^* \\ j^\alpha \tilde{w} I_m - A & 0 & (-j)^{1-\alpha} P C^* \\ -C & -j^{1-\alpha} C P & 0 \end{array} \right],$$

et sa fonction de transfert parahermitienne est

$$\tilde{\Phi}(\tilde{w}) = - \begin{pmatrix} -C & -j^{1-\alpha} C P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^* \\ j^\alpha \tilde{w} I_m - A & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C^* \\ (-j)^{1-\alpha} P C^* \end{pmatrix},$$

où encore

$$\tilde{\Phi}(\tilde{w}) = j^{1-\alpha} C P ((-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^*)^{-1} C^* + (-j)^{1-\alpha} C (j^\alpha \tilde{w} I_m - A)^{-1} P C^*.$$

Par la définition de la norme $\mathcal{H}_2$ (Définition 2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[G(jw) G^*(jw)] dw, \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} \text{tr}[\tilde{\Phi}(\tilde{w}) \tilde{w}^{\frac{1}{\alpha}-1}] d\tilde{w}, \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \left(\text{tr} \left[j^{1-\alpha} C P \left(\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{w}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^*} d\tilde{w} \right) C^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-j)^{1-\alpha} C \left(\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{w}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{j^\alpha \tilde{w} I_m - A} d\tilde{w} \right) P C^* \right] \right). \quad (2.18)\end{aligned}$$

Cependant, l'utilisation des propriétés de la transformation de Mellin (formule (1.7)) permet d'avoir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{w}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(-j)^\alpha \tilde{w} I_m - A^*} d\tilde{w} = \frac{j\pi(-A^*)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)},$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{w}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{j^\alpha \tilde{w} I_m - A} d\tilde{w} = \frac{-j\pi(-A)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

En dernier, le résultat est obtenu en substituant ces expressions dans (2.18). ■

Remarque 2.3 *Il est important de noter que les propriétés de la transformation de Melin ne sont pas applicables lorsque $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}$ avec $0 < \alpha < 2$. Cette limitation ouvre ainsi une nouvelle perspective de recherche, nécessitant une exploration approfondie des méthodes alternatives adaptées à ce cas particulier.*

4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ d'un système dynamique d'ordre fractionnaire. Après avoir rappelé les notions théoriques fondamentales, nous avons établi le résultat obtenu par *Malti et al.* [15], en généralisant une approche récemment développée. Cette nouvelle méthode offre une implémentation numérique plus efficace, particulièrement adaptée aux systèmes unidimensionnels, tout en réduisant la complexité des calculs inhérents à l'approche classique.

Chapitre 3

Validation numérique

1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la validation numérique du résultat théorique établi précédemment, à travers des exemples académiques. Nous y analysons une comparaison entre la nouvelle approche et celle proposée par *Malti et al.* [15], en examinant des fonctions de transfert de premier et de second type. Le résultat théorique obtenu sera également soumis à une validation numérique pour des fonctions de transfert d'ordre supérieur, permettant ainsi d'évaluer sa robustesse et son applicabilité à des systèmes dynamiques de tailles supérieur à 2.

2 Norme $\mathcal{H}_2$ pour des fonctions de transfert de premier et de second type

En utilisant un code MATLAB, une analyse comparative des valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ obtenues par la nouvelle approche et celles rapportées par [15] a été réalisée. Cette étude porte sur des fonctions de transfert de premier et de second type, en fonction des différentes valeurs de α où $0 < \alpha < 2$.

2.1 Fonction de transfert du premier type

Une fonction de transfert de premier type s'exprime sous la forme

$$G(s) = \frac{K}{s^\alpha + \lambda},$$

où $K, \lambda \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{2} < \alpha < 2$.

En prenant $K = 1$ et $\lambda = 2$, nous obtenons la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha + 2}, \tag{3.1}$$

pour $\frac{1}{2} < \alpha < 2$.

Le système dynamique associé à la fonction de transfert (3.1) est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= -2x(t) + u(t), \\ y(t) &= x(t), \end{cases} \tag{3.2}$$

avec des conditions initiales nulles et $\frac{1}{2} < \alpha < 2$.

Supposons que le système (3.2) est régulier, c'est-à-dire

$$s^\alpha + 2 \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, et qu'il satisfait aux conditions de compatibilité suivantes

C.1. $s^{\alpha-1-k} x^{(k)}(0)$ est nulle pour tout $s \in [0, \infty[$, $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ et $k = 0, 1$;

C.2. $u(t)$ existe et $u^{(k)}(0)$ est nulle, $\forall k \geq 0$.

Ainsi, la trajectoire du système dynamique fractionnaire (3.2) est donnée par

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2)^i}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau.$$

De plus, le système dynamique fractionnaire (3.2) satisfait les conditions des théorèmes 2.3 et 2.4. Par conséquent, sa norme $\mathcal{H}_2$ est donnée par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = -\frac{2^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \left[e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} + e^{j\frac{\alpha\pi}{2}} \right] P,$$

où P , solution de l'équation

$$-2 \left(j^{1-\alpha} + (-j)^{1-\alpha} \right) P + 1 = 0,$$

est obtenue à l'aide de la commande `lyap` de MATLAB.

Les résultats obtenus sont illustrés par la figure 3.1

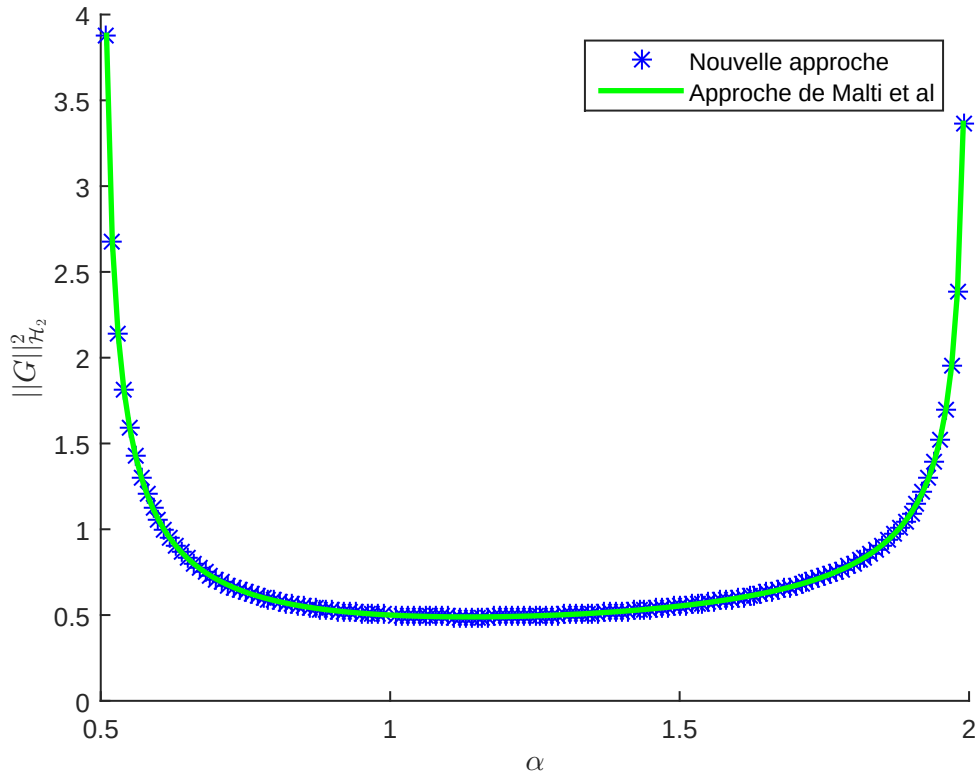


FIGURE 3.1 – Comparaison des valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour une fonction de transfert du premier type entre la nouvelle approche et celle de *Malti et al.* [15].

La similitude des deux courbes confirme l'équivalence des deux approches ainsi que la cohérence des résultats avec ceux présentés dans [14, 15].

2.2 Fonction de transfert du second type

Une fonction de transfert du second type est une fonction de la forme

$$G(s) = \frac{K}{(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda})},$$

où $K \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\frac{1}{4} < \alpha < 2$.

Pour $K = 1$ et $\lambda = 2e^{j\frac{\pi}{12}}$, il découle

$$G(s) = \frac{1}{\left(s^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}}\right)\left(s^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}}\right)}. \quad (3.3)$$

Le système dynamique associé est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

avec $\frac{1}{4} < \alpha < 2$ et les conditions initiales

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Supposons que le système (3.4) est régulier, c'est-à-dire

$$\left(s^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}}\right)\left(s^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}}\right) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, et qu'il satisfait aux conditions de compatibilité suivantes

C.1. $s^{\alpha-1-k} x^{(k)}(0)$ est nulle pour tout $s \in [0, +\infty[$, $\frac{1}{4} < \alpha < 2$ et $k = 0, 1$;

C.2. $u(t)$ existe et $u^{(k)}(0)$ est nulle, $\forall k \geq 0$.

Par conséquent, la trajectoire du système dynamique fractionnaire (3.4) est

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(\tau) d\tau.$$

Puisque le système dynamique fractionnaire (3.4) satisfait les conditions des théorèmes 2.3 et 2.4, ainsi, sa norme $\mathcal{H}_2$ est donnée par

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= -\frac{1}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \operatorname{tr} \left[(-j)^\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \sqrt{6} + \sqrt{2} & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{\alpha}-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + j^\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} + \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\frac{1}{\alpha}-1} P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

où la matrice P solution de l'équation de Lyapunov

$$j^{1-\alpha} \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P + (-j)^{1-\alpha} P \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

est déterminée à l'aide de la commande `lyap` de MATLAB.

Les résultats obtenus sont illustrés par la figure ci-dessous

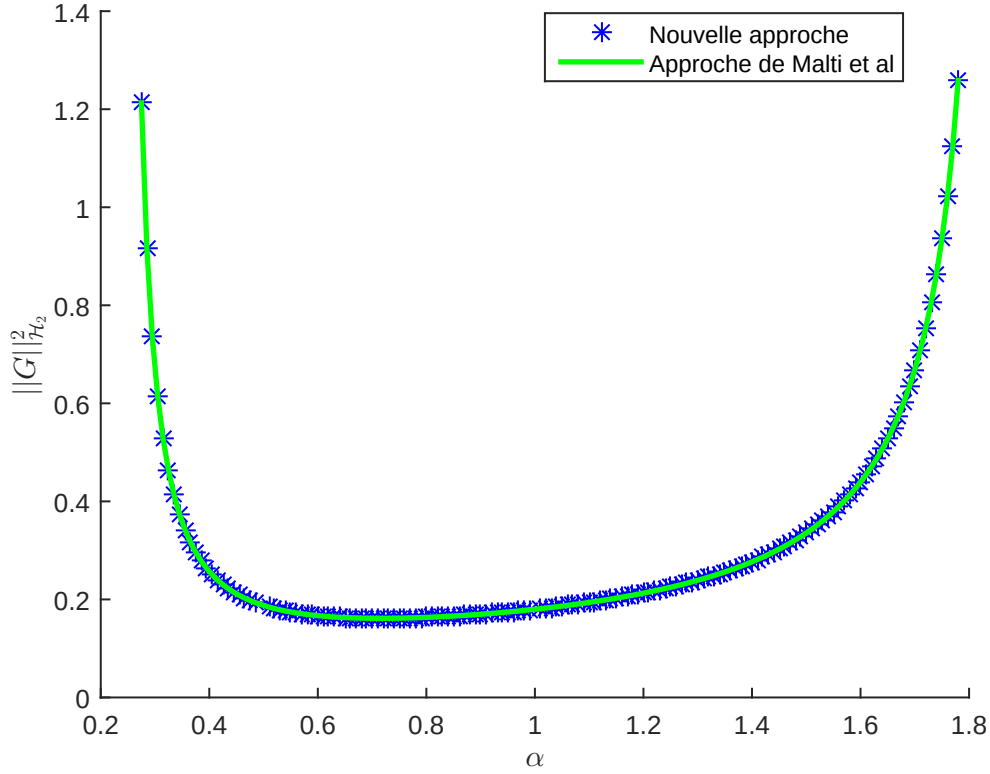


FIGURE 3.2 – Comparaison des valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour une fonction de transfert du second type entre la nouvelle approche et la méthode de *Malti et al.* [15] pour différentes valeurs de α .

Une superposition parfaite des courbes est observée, validant ainsi l'équivalence des approches et de la concordance des résultats avec ceux rapportés dans [4, 15].

3 Norme $\mathcal{H}_2$ d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel

Le résultat théorique obtenu a été soumis à une validation numérique sur plusieurs fonctions de transfert. Dans cette section, nous nous limiterons à la présentation détaillée de deux d'entre elles.

Exemple 3.1 *Considérons la fonction de transfert*

$$G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}, \quad 0 < \alpha < 2,$$

associée à l'EDF de secousse

$$\mathbf{D}^{3\alpha} y(t) + 7\mathbf{D}^{2\alpha} y(t) + 8\mathbf{D}^\alpha y(t) + y(t) = u(t),$$

et à sa représentation en espace d'état

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les conditions initiales associées au système (3.5) sont supposées toutes nulles. De plus, nous considérons que le système est régulier, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} s^\alpha & -1 & 0 \\ 0 & s^\alpha & -1 \\ 1 & 8 & s^\alpha + 7 \end{vmatrix} \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$. Le système (3.5) satisfait également les conditions de compatibilité

- $s^{\alpha-i-1}x^{(i)}(0)$ est bien défini pour tout $s \in [0, \infty[$ et $i = \overline{0, 2}$ avec $0 < \alpha < 2$;
- u existe et vérifie $u^{(i)}(0) = 0, \forall i \geq 0$.

Par conséquent, la trajectoire x du système (3.5) s'exprime par

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}^i \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau) d\tau.$$

Finalement, la norme $\mathcal{H}_2$ du système (3.5) pour les différentes valeurs de α , où $\frac{1}{6} < \alpha < 2$, est donnée par

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = & -\frac{1}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \operatorname{tr} \left[(-j)^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}^{\frac{1}{\alpha}-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + j^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}^{\frac{1}{\alpha}-1} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

où la matrice P , obtenue par la commande `lyap` de MATLAB, est solution de l'équation de Lyapunov

$$j^{1-\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix} P + (-j)^{1-\alpha} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

L'utilisation d'un code MATLAB ainsi que les théorèmes 2.3 et 2.4, permettent de conclure que le système dynamique (3.5) est stable pour $\alpha \in \left] \frac{1}{6}, 2 \right[$ et instable pour $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{6} \right]$ et $\alpha \geq 2$, comme illustré par les figures suivante

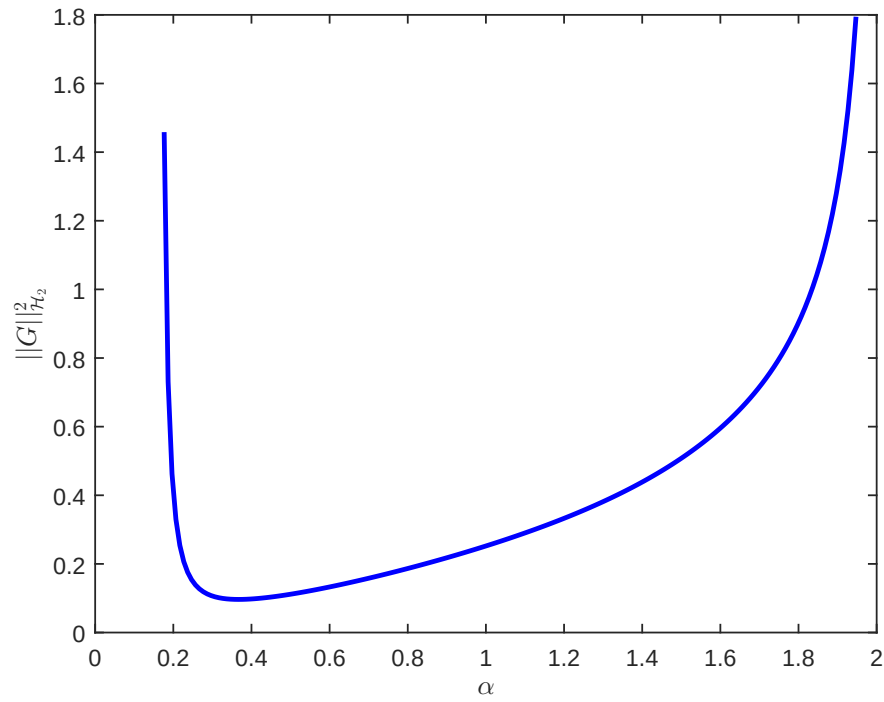


FIGURE 3.3 – Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \in \left[\frac{1}{6}, 2\right]$.

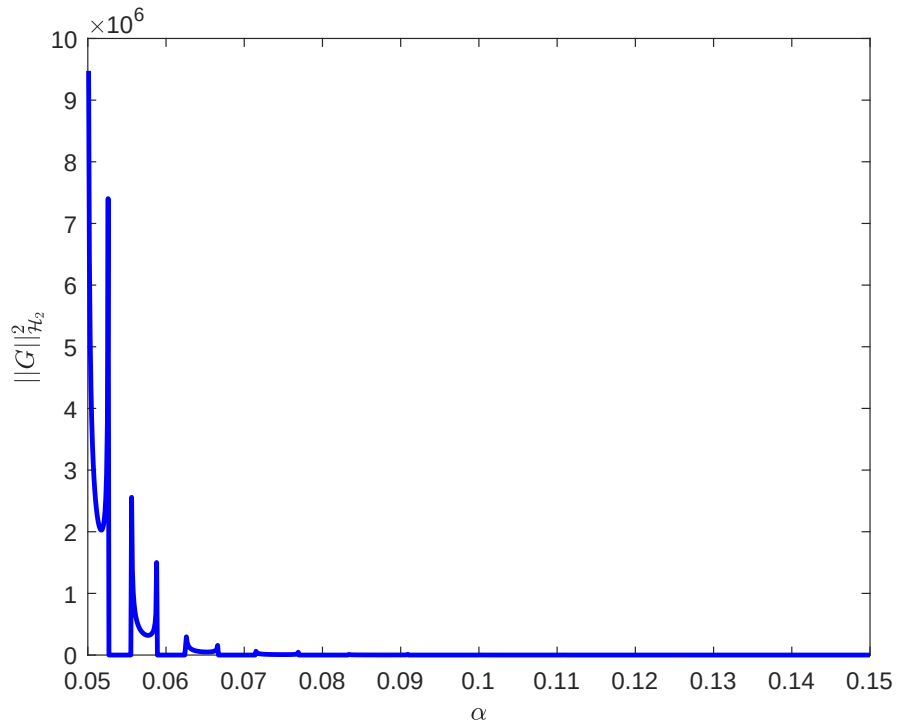


FIGURE 3.4 – Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{6}$.

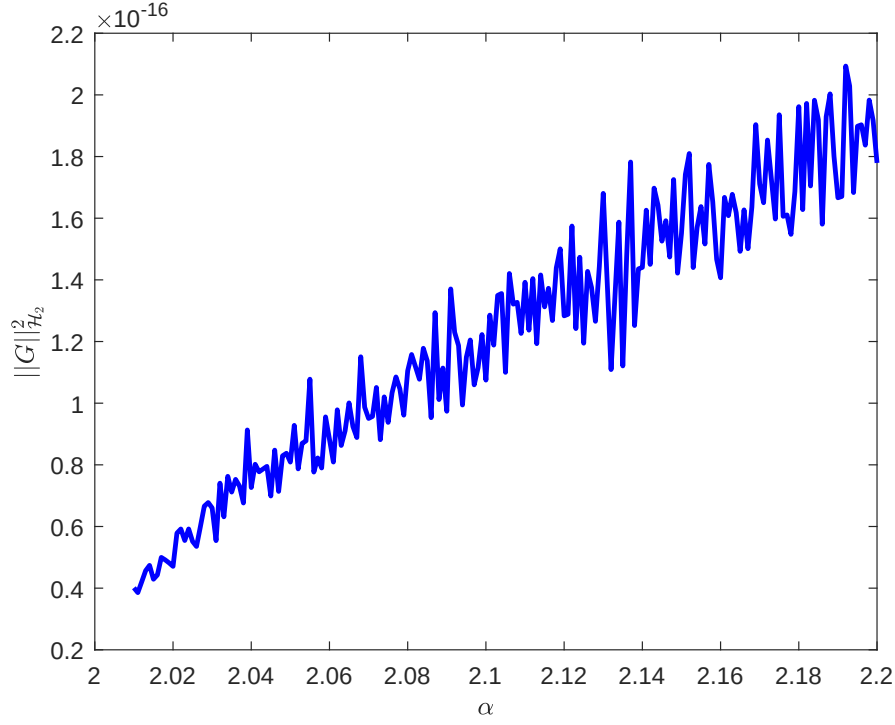


FIGURE 3.5 – Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{3\alpha} + 7s^{2\alpha} + 8s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \geq 2$.

Exemple 3.2 Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{s^{4\alpha} + 4s^{3\alpha} + 6s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 1}, \quad 0 < \alpha < 2,$$

associée à l'EDF

$$\mathbf{D}^{4\alpha} y(t) + 4\mathbf{D}^{3\alpha} y(t) + 6\mathbf{D}^{2\alpha} y(t) + 4\mathbf{D}^\alpha y(t) + y(t) = u(t),$$

et à sa représentation en espace d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

La norme $\mathcal{H}_2$ du système (3.6) pour différentes valeurs de α où $\frac{1}{8} < \alpha < 2$ est donnée par

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = -\frac{1}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \text{tr} \left[(-j)^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{\frac{1}{\alpha}-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + j^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{\frac{1}{\alpha}-1} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

où la matrice P obtenue via la commande `lyap` de MATLAB, est solution de l'équation de Lyapunov

$$j^{1-\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} P + (-j)^{1-\alpha} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

L'utilisation d'un code MATLAB ainsi que les théorèmes 2.3 et 2.4, permettent d'aboutir que le système dynamique (3.6) est stable pour $\alpha \in \left] \frac{1}{8}, 2 \right[$ et instable pour $\alpha \notin \left] \frac{1}{8}, 2 \right[$, comme illustré par les figures suivantes

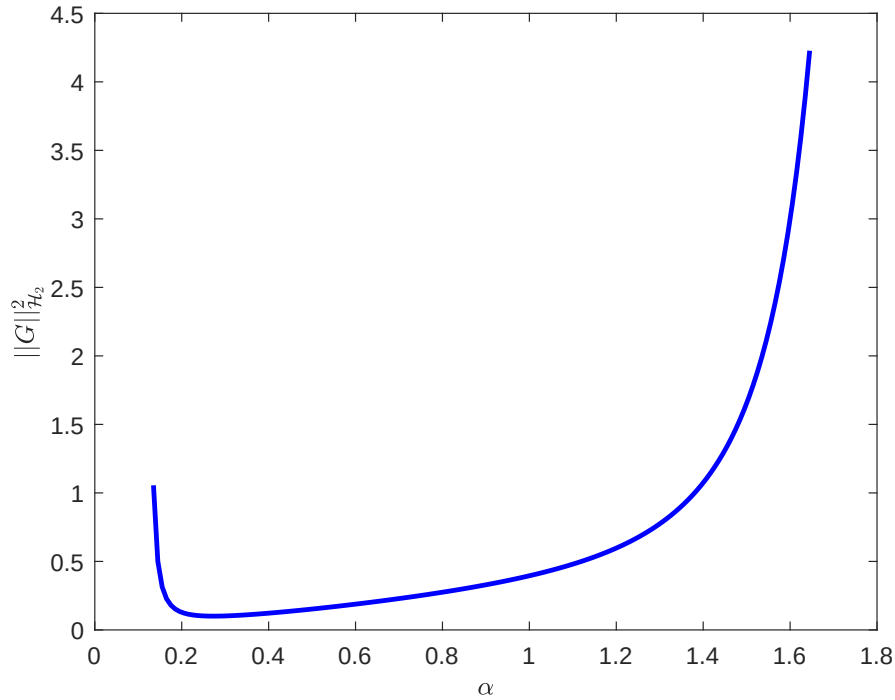


FIGURE 3.6 – Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{4\alpha} + 4s^{3\alpha} + 6s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \in \left] \frac{1}{8}, 2 \right[$.

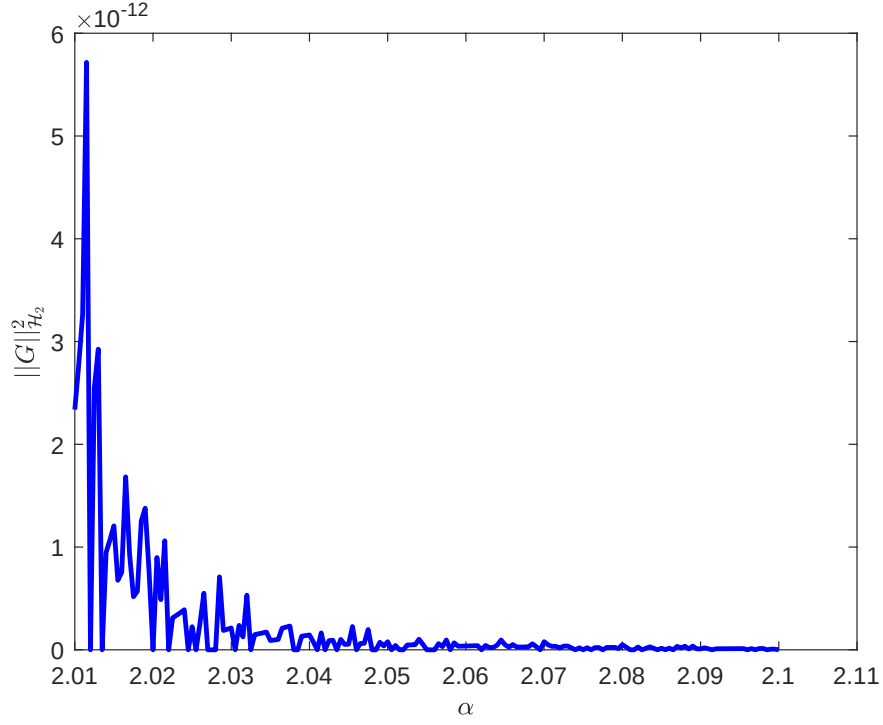


FIGURE 3.7 – Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{4\alpha} + 4s^{3\alpha} + 6s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \in \left]0, \frac{1}{8}\right]$.

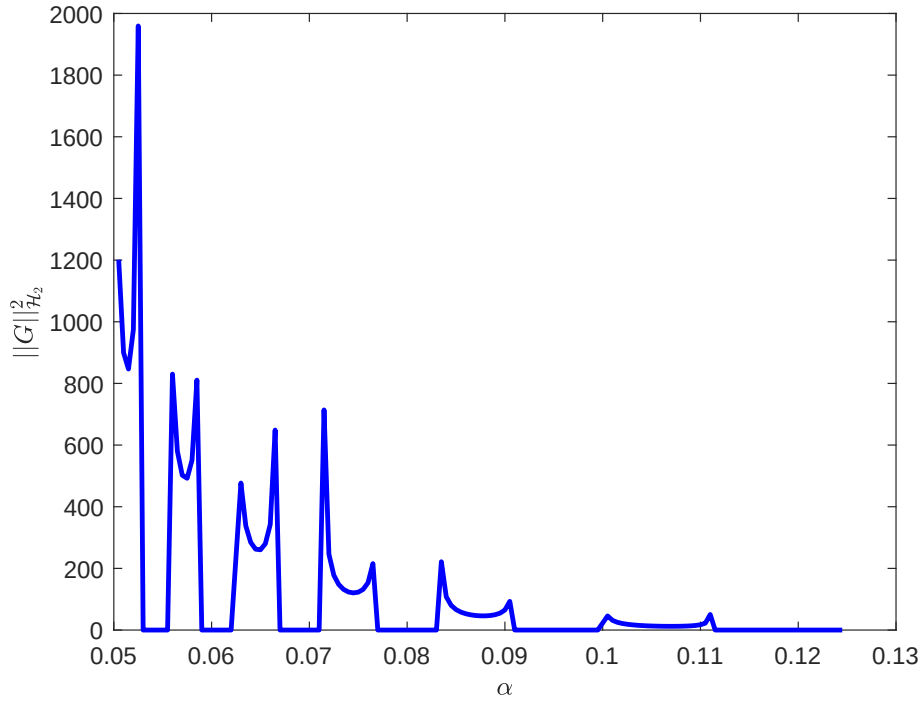


FIGURE 3.8 – Valeurs de la norme $\mathcal{H}_2$ pour $G(s) = \frac{1}{s^{4\alpha} + 4s^{3\alpha} + 6s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 1}$ avec $\alpha \geq 2$.

Les exemples présentés dans ce chapitre ont permis de valider numériquement la généralisation de la nouvelle approche.

Remarque 3.1 *La norme $\mathcal{H}_2$ d'un système dynamique linéaire commensurable d'ordre α , associé à une équation différentielle fractionnaire (EDF) d'ordre αm , est finie si $\frac{1}{2m} < \alpha < 2$, et si les valeurs propres λ_i de l'EDF vérifient la condition $|\arg(\lambda_i)| = \pi$ pour tout i .*

Remarque 3.2 *La principale distinction entre l'approche développée dans ce manuscrit et celle proposée par Malti et al. dans [15] concerne l'aspect numérique.*

En effet, l'approche de Malti et al. nécessite la décomposition de la fonction de transfert G en éléments simples, autrement dit, les pôles de la fonction de transfert doivent être déterminés ainsi que les coefficients associés ; Une étape d'exécution délicate.

Cependant, l'approche présentée dans ce manuscrit se fonde uniquement sur la détermination de la représentation en espace d'état de la fonction de transfert considérée.

4 Conclusion

Cette partie du travail a permis de confirmer expérimentalement la validité du résultat théorique obtenu pour les fonctions de transfert présentées dans ce chapitre. La comparaison effectuée entre la nouvelle approche et celle de *Malti et al.* [15], appliquée aux fonctions de transfert de premier et de second type, a montré une bonne concordance entre les deux méthodes.

Conclusion

L'objectif de ce travail est de proposer une généralisation d'une nouvelle approche pour le calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire unidimensionnel.

Le principe fondamental sur lequel repose cette méthode est l'exploitation de la représentation en espace d'état, l'application des transformations intégrales, ainsi que l'utilisation d'outils issus de la théorie des matrices, notamment les matrices de transformation et la matrice parahermitienne.

Dans un premier temps, nous avons introduit les concepts mathématiques fondamentaux et nécessaires à cette étude.

Ensuite, nous avons rappelé les définitions essentielles de la norme $\mathcal{H}_2$, en étayant son calcul dans le cadre de la nouvelle approche proposée.

Enfin, une étude comparative a été menée entre le résultat que nous avons obtenu et celui proposé par *Malti et al.* [15], à travers l'analyse de fonctions de transfert de premier et de second type, en s'appuyant sur des simulations numériques réalisées sous MATLAB. Des simulations numériques ont également été réalisées pour d'autres types de fonctions de transfert, permettant d'élargir l'analyse et de valider la robustesse de la nouvelle approche sur une classe plus large de systèmes dynamiques fractionnaires.

Ce travail ouvre également des perspectives vers des extensions futures visant l'étude de modèles plus complexes et de dimension supérieurs.

Bibliographie

- [1] **Banks, H.T., and Tran, H.T.** (2009), *Mathematical and Experimental Modeling of Physical and Biological Processes*. Chapman and Hall/CRC, New York. <https://doi.org/10.1201/b17175> 1
- [2] **Bessa, M.** (2023), *Plenty of hyperbolicity on a class of linear homogeneous jerk differential equations*. *Aequationes Mathematicae*. **97**, 467–487. <https://doi.org/10.1007/s00010-023-00948-z> 14, 15
- [3] **Bouagada, D., and Van Dooren, P.** (2012), *State space solution of implicit fractional continuous-time systems*. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **15**(3), 356–361. <https://doi.org/10.2478/s13540-012-0026-z> 13, 14
- [4] **Boukniene, W.** (2023), *Calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ d'une fonction de transfert fractionnaire du second type*. Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques, Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation", Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, Algérie. <http://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/26347> 2, 13, 29
- [5] **Caputo, M.** (1969), *Elasticità e Dissipazione*. Zanichelli, Bologna. 7
- [6] **Cohen, H.** (2007), *Number Theory. Volume II : Analytic and modern tools*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-49894-2> 8, 11
- [7] **Debnath, L., and Bhatta, D.** (2007), *Integral transforms and their applications*. Second Edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton. <https://doi.org/10.1201/9781420010916> 5, 8
- [8] **Genin, Y., Hachez, Y., Nesterov, Yu., Stefan, R., Van Dooren, P., and Xu, S.** (2002), *Positivity and linear matrix inequalities*. *European Journal of Control*, **8**, 275– 298. <https://doi.org/10.3166/ejc.8.275-298> 23, 24
- [9] **Gradshteyn, I.S., and Ryzhik, I.M.** (2007), *Table of integrals, series, and products*. Seventh Edition, Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-22516-5> 8, 9, 10, 11, 12
- [10] **Jiao, Z., and Zhong, Y.** (2012), *Robust stability for fractional-order systems with structured and unstructured uncertainties*. *Computers and Mathematics with Applications*, **64**, 3258– 3266. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.03.011>. iv, 22
- [11] **Kaczorek, T.** (2011), *Selected problems of fractional systems theory*. Lecture Note in Control and Information Sciences, **411**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20502-6> 14
- [12] **Kaczorek, T., and Rogowski, K.** (2015), *Fractional linear systems and electrical circuits*. Studies in Systems, Decision and Control, **13**, Springer International Publishing, Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11361-6> 4, 5, 6, 7, 14

- [13] **Kondepudi, D., and Prigogine, I.** (2014), *Modern Thermodynamics : From Heat Engines to Dissipative Structures*. 2015 John Wiley & Sons, Ltd. <https://doi.org/10.1002/9781118698723> 1
- [14] **Lakeb, A., Kaisserli, Z., and Bouagada, D.** (2023), *Computing the $\mathcal{H}_2$ -norm of a fractional order system using the state-space linear model*. Kragujevac Journal of Mathematics, **47**(4), 531–538. https://imi.pmf.kg.ac.rs/kjm/pdf/accepted-finished/ca8cedb16481f63285ebee6dc4bdc39_2536_11232020_091034/kjm_47_4-4.pdf 2, 13, 28
- [15] **Malti, R., Aoun, M., Levron, F., and Oustaloup, A.** (2011), *Analytical computation of the $\mathcal{H}_2$ -norm of fractional commensurate transfer functions*. Elsevier, **47**(11), 2425–2432. <https://doi.org/10.1016/j.automat.2011.08.021> iv, 2, 3, 13, 17, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36
- [16] **Podlubny, I.** (1999), *Fractional Differential Equations*, **198**, Academic Press, New York. 6, 7, 10, 17
- [17] **Schiff, J.L.** (1999), *The Laplace Transform : Theory and Applications*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1552-2> 9, 10
- [18] **Valerio, D., and Da Costa, J.S.** (2013), *An introduction to fractional control*. The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom. <https://doi.org/10.1049/PBCE091E> 14, 21
- [19] **Zhang, F.** (2005), *The Schur complement and its applications*. Numerical Methods and Algorithms, Springer-Verlag US. <https://doi.org/10.1007/b105056> 14, 20

Calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel

Résumé : Ce travail porte sur le calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle, également appelée norme $\mathcal{H}_2$, d'un système dynamique linéaire unidimensionnel d'ordre fractionnaire, standard, propre, à faisceau régulier et à temps continu.

L'objectif est de généraliser une approche récemment développée, reposant sur la représentation en espace d'état, l'application d'outils de la théorie des matrices, ainsi que l'utilisation de transformations intégrales.

La fiabilité, la robustesse et l'applicabilité de l'approche proposée sont évaluées à travers des simulations numériques réalisées sous MATLAB. Ces simulations permettent de comparer les résultats obtenus avec ceux issus de travaux antérieurs, garantissant ainsi la pertinence et l'efficacité de l'approche développée.

Grâce aux résultats prometteurs obtenus, cette approche ouvre des perspectives majeures en matière de développements théoriques, permettant l'élaboration de nombreux algorithmes adaptés à une grande variété de besoins.

Mots-Clés. Fonction de transfert, Matrices de transformation, Matrice parahermitienne, Norme $\mathcal{H}_2$, Système dynamique, Transformations intégrales.

Computation of the impulse response energy of a one-dimensional fractional-order dynamical system

Abstract : This work emphasizes the generalization of a new approach for computing the impulse response energy, known, also, as the $\mathcal{H}_2$ norm, for a certain class of fractional linear models.

The main concept of this new approach is the use of the state-space realization, the application of matrix theory tools, and the use of integral transformations.

The reliability, robustness, and applicability of the proposed approach are assessed through numerical simulations performed in MATLAB. These simulations enable a comparison between the obtained results and those from previous studies, thereby ensuring the relevance and effectiveness of the developed approach.

Thanks to the promising obtained results, this approach opens great perspectives on theoretical developments that can handle numerous algorithms responding to diverse needs.

Key Words. Transfer function, Transformation matrices, Parahermitian matrix, $\mathcal{H}_2$ norm, Dynamical system, Integral transformations.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم -
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

تصريح شرفي خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية
لإنجاز البحث

أنا الممضي أدناه،

رقم التسجيل الجامعي : 191937034936

الطالبة : غنيم منال

الحامل لبطاقة التعريف الوطنية رقم : 410249064 والصادرة بتاريخ : 2024/03/08

عن بلدية حجاج - مستغانم

قسم : الرياضيات والإعلام الآلي

المسجل بـ : كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

التخصص : النمذجة التحكم والتجويد

شعبة : رياضيات تطبيقية

والمكلف بإنجاز مذكرة ماستر بعنوان :

**Calcul de l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système
dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel**

أصريح بشرفي أنني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات العلمية والنزاهة الأكاديمية
المطلوبة في إنجاز البحث ، وأتحمل المسؤولية الشخصية عن كل المحتوى المتضمن في البحث المذكور أعلاه .

التاريخ : 2025/06/12

إمضاء المعني



* ملحق القرار الوزاري رقم 933 المؤرخ في 28 جويلية 2016 الذي يحدد القواعد المتعلقة بالوقاية من السرقة العلمية ومكافحتها.