

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE
DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Estimation des zéros et croissance des solutions
méromorphes d'équations différentielles linéaires
homogènes et non-homogènes du second ordre

Présenté par Amina FERRAOUN

Soutenu le 19/06/2013 devant le Jury

Ahmed MEDEGHRI	Président	Prof.	U. MOSTAGANEM
Saada HAMOUDA	Examineur	MCA	U. MOSTAGANEM
Benharrat BELAÏDI	Encadreur	Prof.	U. MOSTAGANEM

2012/2013

Dédicace

Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Ya Allah "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère ...

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger. Que dieu les gardes et les protège.

A mes sœurs : Soumia et Ikram Nour Elhouda.

A toute ma famille.

A mes amies.

A tous mes professeurs.

A tous ceux qui me sont chères.

A tous ceux qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce travail.

Remerciement

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Les cinq années de maîtrise m'ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

Je tiens à la fin de ce travail à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Mes remerciements vont également à mes parents et mes soeurs.

Je remercie infiniment le professeur Benharrat BELAÏDI, mon directeur de mémoire dont la disponibilité, le savoir faire et le soutien ne m'ont jamais fait défaut et pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie aussi Mr. Ahmed MEDEGHRI, Professeur à l'université de Mostaganem, qui me fera l'honneur de présider le jury d'examination de mon mémoire.

Je remercie avec autant de ferveur Mr. Saada HAMOUDA qui a bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Je remercie également l'ensemble professoral ayant contribué, de près ou de loin, à ma formation et mon évolution.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues de la promotion 2^{ème} année Mathématiques-Master.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

1	Eléments de la théorie de R. Nevanlinna	2
1.1	Fonction caractéristique de R. Nevanlinna	2
1.2	Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna	6
1.3	L'ordre de croissance et l'hyper-ordre	11
1.4	La mesure linéaire, la mesure logarithmique, la densité des ensembles	11
1.5	Eléments de la théorie de Wiman-Valiron	13
1.6	Théorème de factorisation de Hadamard	14
2	Estimation des zéros et croissance des solutions méromorphes d'équations différentielles linéaires homogènes du second ordre	15
2.1	Introduction et résultats	15
2.2	Lemmes préliminaires	17
2.3	Preuves des Théorèmes	18
2.3.1	Preuve du Théorème 2.1.1	18
2.3.2	Preuve du Théorème 2.1.2	21
3	Estimation des zéros et croissance des solutions méromorphes d'équations différentielles linéaires non-homogènes du second ordre	26
3.1	Introduction et résultats	26
3.2	Lemmes préliminaires	28

3.3	Preuves des Théorèmes	33
3.3.1	Preuve du Théorème 3.1.1	33
3.3.2	Preuve du Théorème 3.1.2	34
3.3.3	Preuve du Théorème 3.1.3	37
3.3.4	Preuve du Théorème 3.1.4	44
Bibliographie		49

INTRODUCTION

Les origines de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes remontent aux théorèmes classiques de Sokhotskii-Casorati (1868), Weierstrass (1876) et Picard (1879). Ce dernier a établi le fameux résultat " une fonction entière transcendante prend tout nombre complexe comme valeur, sauf peut-être un", puis Hadamard (1893), Borel (1897) et Blumenthal (1910) ont essayé d'entraîner une description quantitative et étendre le résultat de Picard aux fonctions méromorphes. C'était R. Nevanlinna, qui a obtenu une telle tentative en (1925) en établissant la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes qui a été salué par H. Weyl (1943) comme «l'un des rares grands événements mathématiques de notre siècle».

Depuis une trentaine d'années, cette théorie est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, en particulier la croissance et l'oscillation des solutions. Plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans des pays différents ont joué un rôle remarquable dans ce domaine tels que : B. Belaïdi ([2]), Chen ([4], [6] et [7]), Gundersen ([13]) et Li ([18]). Des résultats importants ont été établis.

Récemment, la recherche des solutions méromorphes d'équations différentielles linéaires sous la condition que tous les pôles des solutions méromorphes sont de multiplicité uniformément bornés suscite de grands intérêts. Ainsi, une question importante se pose : si cette condition n'est pas vérifiée, qu'en est-il pour les propriétés de croissance des solutions méromorphes ? Ce problème sera considéré dans ce travail.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on va citer quelques notions préliminaires de la théorie de R. Nevanlinna ainsi quelques éléments de la théorie de Wiman-Valiron.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier les zéros et la croissance des solutions méromorphes de l'équation homogène

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0,$$

à coefficients méromorphes et améliorer les résultats de [1], [3], [9] et [17] avec des conditions plus générales pour obtenir de meilleures estimations.

Dans le troisième chapitre, on étudiera l'équation non-homogène

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = F(z),$$

à coefficients méromorphes et estimer l'ordre de croissance, l'ordre inférieur, l'hyper-ordre et l'hyper-exposant de convergence des zéros distincts des solutions méromorphes. De plus, on utilisera une nouvelle méthode pour estimer les zéros et étudier la croissance de l'équation non-homogène.

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Voir W. K. Hayman [15] et I. Laine [18].

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.1 (*Formule de Jensen*) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ (respectivement $b_1, b_2, \dots, b_n$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve On démontre le théorème dans le cas où f ne possède ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j| < r} \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z - a_j)} / \prod_{|b_j| < r} \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z - b_j)}.$$

Alors $g \not\equiv 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\ln |g(z)|$ est une fonction harmonique.

D'après la formule de la moyenne d'une fonction harmonique, on a

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (1.1.1)$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j| < r} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{|b_j| < r} \frac{r}{|b_j|},$$

d'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|}. \quad (1.1.2)$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - a_j)} \right| = 1$$

et

$$\left| \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j}re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - b_j)} \right| = 1.$$

D'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$. De (1.1.1) et (1.1.2), on obtient la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 On a les inégalités suivantes

(a) $\ln x \leq \ln^+ x$.

(b) $\ln^+ x \leq \ln^+ y$ (si $0 < x \leq y$).

(c) $\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$.

(d) $|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$.

(e) $\ln^+ \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i$.

(f) $\ln^+ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \ln n + \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i$.

Preuve Montrons (c)-(f)

(c) On a

$$\begin{aligned} \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max\{\ln x, 0\} - \max\{\ln \frac{1}{x}, 0\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} + \min\{-\ln \frac{1}{x}, 0\} \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x} &= \max\{\ln x, 0\} + \max\{\ln \frac{1}{x}, 0\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} + \max\{-\ln x, 0\} \\ &= \max\{\ln x, 0\} - \min\{\ln x, 0\} \\ &= |\ln x|. \end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{i=1}^n x_i \leq 1$, alors l'inégalité est triviale.

Supposons que $\prod_{i=1}^n x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned} \ln^+\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) &= \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i; \text{ d'après (a).} \end{aligned}$$

(f) On a d'après (b) et (e)

$$\begin{aligned} \ln^+\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) &\leq \ln^+(n \max_{1 \leq i \leq n} x_i) \\ &\leq \ln n + \ln^+\left(\max_{1 \leq i \leq n} x_i\right) \\ &\leq \ln n + \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i. \end{aligned}$$

Définition 1.1.2 (Fonction a -points) Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a , on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Posons

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r, \quad a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r.$$

$N(r, a, f)$ est appelée fonction a - points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Lemme 1.1.2 Soit f une fonction méromorphe avec a - points $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tel que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq r$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt = \sum_{0 < |a_j| \leq r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve Posons $|a_j| = r_i$ ($i = 1, \dots, n$). Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 < |a_j| \leq r} \ln \frac{r}{|a_j|} &= \sum_{i=1}^n \ln \frac{r}{r_i} = \ln \frac{r}{r_1 r_2 \dots r_n} = n \ln r - \sum_{i=1}^n \ln r_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} i(\ln r_{i+1} - \ln r_i) + n(\ln r - \ln r_n) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} i \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dt}{t} + n \int_{r_n}^r \frac{dt}{t} \\
 &= \int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt.
 \end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

Preuve Définissons la fonction h par

$$h(z) = f(z)z^{-m}.$$

Il est clair que $m = n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)$ et $h(0) \neq 0, \infty$. En effet, si $m > 0$, alors $n(0, \infty, f) = 0$ et $m = n(0, 0, f)$; si $m < 0$, alors $n(0, \infty, f) = -m$ et $n(0, 0, f) = 0$; et finalement si $m = 0$, alors $n(0, 0, f) = n(0, \infty, f) = 0$. Donc les fonctions h et f ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq r$. La formule de Jensen et le Lemme 1.1.2 impliquent

$$\begin{aligned}
 \ln |c_m| &= \ln |h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})r^{-m}| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi - (n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)) \ln r \\
 &\quad + \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).
 \end{aligned}$$

Définition 1.1.3 (Fonction de proximité) Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \quad a \neq \infty$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Définition 1.1.4 (Fonction caractéristique) On définit la fonction caractéristique de R.Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r, \infty, f) = T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Exemple 1.1.1 Pour la fonction $f(z) = e^{-z}$. Nous avons $n(t, f) = 0$ car f n'admet pas des pôles, par conséquent

$$N(r, f) = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |e^{-r \cos \theta}| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ |e^{-r \cos \theta}| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-r \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) - \ln |c_m| + \varphi(r, a),$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln^+ |a| + \ln 2.$$

Preuve Si $a = 0$, alors d'après le Lemme 1.1.1 (c) et la Proposition 1.1.1, on a

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f})$$

et

$$\ln |c_m| = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}),$$

donc

$$m(r, \frac{1}{f}) - N(r, \frac{1}{f}) = m(r, f) + N(r, f) - \ln |c_m|.$$

D'où

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \ln |c_m| \quad \text{où } \varphi(r, 0) = 0. \quad (1.2.1)$$

Montrons le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Alors

$$N(r, \frac{1}{h}) = N(r, \frac{1}{f-a}), \quad N(r, h) = N(r, f)$$

et

$$m(r, \frac{1}{h}) = m(r, \frac{1}{f-a}).$$

De plus

$$\ln^+ |h| = \ln^+ |f - a| \leq \ln^+ |f| + \ln^+ |a| + \ln^+ 2,$$

$$\ln^+ |f| = \ln^+ |f - a + a| = \ln^+ |h + a| \leq \ln^+ |h| + \ln^+ |a| + \ln^+ 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r, h) \leq m(r, f) + \ln^+ |a| + \ln^+ 2,$$

$$m(r, f) \leq m(r, h) + \ln^+ |a| + \ln^+ 2.$$

Posons

$$\varphi(r, a) = m(r, h) - m(r, f).$$

Alors

$$\varphi(r, a) \leq \ln^+ |a| + \ln^+ 2.$$

En appliquant (1.2.1) pour h , on aura

$$\begin{aligned} T(r, \frac{1}{h}) &= m(r, \frac{1}{h}) + N(r, \frac{1}{h}) \\ &= m(r, h) + N(r, h) - \ln |c_m| \\ &= m(r, f) + N(r, f) + \varphi(r, a) - \ln |c_m| \\ &= T(r, f) + \varphi(r, a) - \ln |c_m|. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1),$$

pour tout nombre complexe $a \neq \infty$.

Proposition 1.2.1 *Soient $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ telles que $ad - bc \neq 0$. Alors*

- 1) $T(r, \prod_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i), (n \geq 1).$
- 2) $T(r, f^n) = nT(r, f), (n \in \mathbb{N}).$
- 3) $T(r, \sum_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \ln n.$
- 4) $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1); f \not\equiv -\frac{d}{c}.$

Preuve

1) On a

$$m(r, \prod_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i)$$

et

$$N(r, \prod_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i),$$

donc

$$T(r, \prod_{i=1}^n f_i) = m(r, \prod_{i=1}^n f_i) + N(r, \prod_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \sum_{i=1}^n N(r, f_i) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i).$$

2) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1$ équivaut à $|f| \leq 1$. Si $|f| \leq 1$, alors $m(r, f^n) = 0$ et $N(r, f^n) = nN(r, f)$. Donc

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = nN(r, f) = n(N(r, f) + m(r, f)) = nT(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nm(r, f) + nN(r, f) \\ &= nT(r, f). \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} T(r, \sum_{i=1}^n f_i) &\leq N(r, \sum_{i=1}^n f_i) + m(r, \sum_{i=1}^n f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n N(r, f_i) + \sum_{i=1}^n m(r, f_i) + \ln n \\ &= \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \ln n. \end{aligned}$$

4) Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r, \frac{af+b}{d}) &= T(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}) \\ &= T(r, \frac{a}{d}f) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af+b}{cf+d} &= \frac{a(f + \frac{b}{a})}{c(f + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} \frac{f + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{f + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \left[1 + \frac{bc-ad}{ac} \frac{1}{f + \frac{d}{c}} \right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{f + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T(r, \frac{af+b}{cf+d}) &= T(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{f+\frac{d}{c}}) \\
&= T(r, \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{f+\frac{d}{c}}) \\
&= T(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}) + O(1) \\
&= T(r, f + \frac{d}{c}) + O(1) \\
&= T(r, f) + O(1).
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.1 Soit $g(z) = \frac{2e^z+3}{5e^z+7}$. Alors

$$\begin{aligned}
T(r, g) &= T(r, \frac{2e^z+3}{5e^z+7}) \\
&= T(r, e^z) + O(1) \\
&= \frac{r}{\pi} + O(1).
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 Soit $R(u)$ une fonction rationnelle de degré d et $f(z)$ une fonction méromorphe. Alors

$$T(r, R(f)) = dT(r, f(z)) + O(1).$$

Exemple 1.2.2 Soit $f(z) = \cos^2 z$. Alors

$$\begin{aligned}
T(r, f) &= T(r, \cos^2 z) \\
&= 2T(r, \cos z) \\
&= 2[2T(r, e^{iz}) + O(1)] \\
&= 2[\frac{2r}{\pi} + O(1)] \\
&= \frac{4r}{\pi} + O(1).
\end{aligned}$$

Lemme 1.2.1 (La dérivée logarithmique) Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors

$$m(r, \frac{f'}{f}) = S(r, f) = o(T(r, f)),$$

où $S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r)$ à l'extérieur d'un ensemble $E \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie.

1.3 L'ordre de croissance et l'hyper-ordre

Définition 1.3.1 Soit f une fonction entière. L'ordre de croissance et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par

$$\rho(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log \log M(r, f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre de croissance et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par

$$\rho(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Exemples

1/ La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}$ est d'ordre $\rho(f) = 2$ et d'hyper-ordre $\rho_2(f) = 0$.

2/ La fonction $g(z) = \exp(\exp z)$ est d'ordre $\rho(g) = \infty$ et d'hyper-ordre $\rho_2(g) = 1$.

Définition 1.3.2 Soit f une fonction entière non constante. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de cette fonction sont définis respectivement par

$$\mu(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{\log \log M(r, f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r}.$$

1.4 La mesure linéaire, la mesure logarithmique, la densité des ensembles

Définition 1.4.1 La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty[$ est définie par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty[$ est définie par

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.4.1 La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 2] \subset [0, +\infty[$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt = \int_1^2 dt = 1.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ est

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

Définition 1.4.2 La densité inférieure et la densité supérieure d'un sous ensemble $H \subset [0, +\infty[$ sont définies respectivement par

$$\underline{dens}H = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{\int_0^r \chi_H(t) dt}{r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf \frac{m(H \cap [0, r])}{r},$$

$$\overline{dens}H = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\int_0^r \chi_H(t) dt}{r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{m(H \cap [0, r])}{r}.$$

Exemple 1.4.2 La densité inférieure et la densité supérieure de l'ensemble $E = [1, 2] \subset [0, +\infty[$ sont

$$\overline{dens}E = \underline{dens}E = 0.$$

Définition 1.4.3 On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log N(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\bar{\lambda}(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log \bar{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

où

$$\bar{N}(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, \frac{1}{f}) - \bar{n}(0, \frac{1}{f})}{t} dt + \bar{n}(0, \frac{1}{f}) \log r,$$

et $\bar{n}(t, \frac{1}{f})$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Remarque 1.4.1 L'exposant de convergence des zéros de la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dit exposant de convergence des pôles de la fonction f .

Exemple 1.4.3 L'exposant de convergence de la fonction $f(z) = e^z + b$ (où $b \neq 0, \infty$) est égal à 1.

1.5 Éléments de la théorie de Wiman-Valiron

Définition 1.5.1 (L'indice central) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière. Pour tout $r > 0$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ est convergente. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| r^n = 0$ et le terme maximal $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n; n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. On définit l'indice central de la fonction f par

$$\nu_f(r) = \max\{m : \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Proposition 1.5.1 Soit f une fonction entière d'ordre $\rho(f)$. Alors

$$\rho(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log \nu_f(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Proposition 1.5.2 Soit f une fonction entière d'ordre infini et d'hyper-ordre $\sigma_2(f)$. Alors

$$\rho_2(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log \log T(r, f)}{\log r},$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de Nevanlinna de f .

Exemple 1.5.1 Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$.

Alors $\mu(r) = \max\{|a_j| r^j; j = 0, \dots, n\} = |a_n| r^n$, r assez grand, et par conséquent

$$\nu_P(r) = \max\{m : |a_m| r^m = |a_n| r^n\} = n.$$

1.6 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.6.1 (*Produits canonique*) Soit f une fonction méromorphe transcendante et soient $z_1, z_2, \dots$ ses zéros avec $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$. Soit p l'entier minimal tel que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}},$$

converge. On appelle

$$E(u, 0) = 1 - u,$$

$$E(u, p) = (1 - u)e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}}, \quad p = 1, 2, \dots$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right),$$

converge uniformément dans chaque domaine fini dans $\mathbb{C}$ et par suite $P(z)$ est entier et s'appelle le produit canonique de f formé à partir des zéros de f . L'entier p est appelé le genre du produit canonique.

Théorème 1.6.1 Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini $\rho(f)$ telle que

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \dots, \quad (c_k \neq 0),$$

au voisinage de $z = 0$ et soient $\{a_1, a_2, \dots\}$ et $\{b_1, b_2, \dots\}$ les zéros et les pôles de f dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, respectivement. Alors

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

avec $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont des produits canonique de f formés à partir des zéros et des pôles non-nuls de f et $Q(z)$ est un polynome de degré $\leq \rho(f)$.

Estimation des zéros et croissance des solutions méromorphes d'équations différentielles linéaires homogènes du second ordre

2.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on va estimer les zéros et étudier la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre deux à coefficients fonctions méromorphes.

Ki-Ho Kwon, Z. X. Chen et C. C. Yang ont étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0, \quad (2.1.1)$$

où $A(z)$ et $B(z) (\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières.

Ki-Ho Kwon a prouvé dans [17] le théorème suivant :

Théorème A : Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant $\overline{\text{dens}}\{ |z| : z \in H \} > 0$ et soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières telles que pour certaines constantes $\alpha > 0, \beta > 0$, on a

$$|A(z)| \leq \exp\{o(1)|z|^\beta\}$$

et

$$|B(z)| \geq \exp\{(1 + o(1))\alpha|z|^\beta\},$$

quand $z \rightarrow \infty$ dans H . Alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.1) est d'ordre infini et vérifie

$$\rho_2(f) \geq \beta.$$

Dans [9], Z. X. Chen et C. C. Yang ont prouvé le théorème suivant :

Théorème B : Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant $\overline{\text{dens}}\{ |z| : z \in H \} > 0$ et soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières avec $\rho(A) \leq \rho(B) = \sigma < \infty$ telles que pour une constante réelle $C > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$|A(z)| \leq \exp\{o(1)|z|^{\sigma-\varepsilon}\}$$

et

$$|B(z)| \geq \exp\{(1+o(1))C|z|^{\sigma-\varepsilon}\},$$

quand $z \rightarrow \infty$ dans H . Alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.1) vérifie

$$\rho(f) = \infty \text{ et } \rho_2(f) = \rho(B).$$

Maintenant, on va étendre ces résultats pour les équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients fonctions méromorphes.

Théorème 2.1.1 [3] *Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant $\overline{\text{dens}}\{ |z| : z \in H \} > 0$ et soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions méromorphes telles que pour des constantes $\alpha > 0$, $\mu > 0$, on a*

$$|A(z)| \leq \exp\{\alpha|z|^\mu\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty \text{ pour } z \in H.$$

Si l'équation (2.1.1) admet des solutions méromorphes, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ vérifie

$$\mu(f) = \rho(f) = \infty \text{ et } \rho_2(f) \geq \mu.$$

De plus, si

$$\max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq \exp\{\beta|z|^\mu\}, \text{ quand } z \rightarrow \infty$$

avec $\beta > 0$ constante, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ avec $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$ vérifie $\rho_2(f) = \mu$.

Théorème 2.1.2 [3] *Soit H un ensemble de nombres complexes vérifiant $\overline{\text{dens}}\{ |z| : z \in H \} > 0$ et soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions méromorphes avec $\max\{\rho(A), \rho(B)\} = \sigma < \infty$ telles que pour une constante réelle $\alpha \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a*

$$|A(z)| \leq \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty \text{ pour } z \in H.$$

Si l'équation (2.1.1) admet des solutions méromorphes, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ vérifie

$$\mu(f) = \rho(f) = \infty \text{ et } \rho_2(f) \geq \max\{\rho(A), \rho(B)\}.$$

De plus, si $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$ alors $\rho_2(f) = \max\{\rho(A), \rho(B)\}$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 ([13]) *Soit f une fonction méromorphe et soient $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ des constantes réelles données. Alors, il existe un ensemble $E \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie et il existe une constante $B > 0$ qui dépend de α uniquement tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E$, on a*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq B(T(\alpha r, f) r^\varepsilon \log T(\alpha r, f))^j, j = 1, 2.$$

Lemme 2.2.2 ([4]) *Soit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ une fonction méromorphe avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que*

$$\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \rho(g) = \rho(f) \leq +\infty \text{ et } \lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \beta < \mu.$$

Soit z un point avec $|z| = r$ sur lequel $|g(z)| = m(r, g)$ et $\nu_g(r)$ est noté l'indice central de $g(z)$. Alors, il existe un ensemble $E \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique $m_l(E) < \infty$ tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, on a

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z} \right)^n (1 + o(1)) \quad (n \geq 1).$$

Lemme 2.2.3 ([9]) *Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini d'hyper-ordre $\rho_2(g) = \sigma$ et ν dénoté l'indice central de g . Alors*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu(r)}{\log r} = \sigma.$$

Lemme 2.2.4 ([6]) *Supposons que $\omega(z)$ est une fonction méromorphe avec $\rho(\omega) = \beta < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et une mesure logarithmique finie tel que*

$$|\omega(z)| \leq \exp\{r^{|\beta+\varepsilon|}\},$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ et $r \rightarrow \infty$.

2.3 Preuves des Théorèmes

2.3.1 Preuve du Théorème 2.1.1

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (2.1.1). Alors de (2.1.1) on peut écrire

$$\frac{f''}{f} + A(z) \frac{f'}{f} + B(z) = 0,$$

ce qui nous donne

$$B(z) = -\frac{f''}{f} - A(z) \frac{f'}{f}$$

d'où

$$|B| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right|. \quad (2.3.1)$$

D'après le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \right| &\leq (T(2r, f) r \log T(2r, f))^j \\ &\leq T(2r, f)^j r T(2r, f) \\ &\leq r T(2r, f)^{j+1}, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

D'autre part, d'après l'hypothèse du Théorème 2.1.1, il existe un ensemble E_2 avec $\overline{\text{dens}}\{ |z| : z \in E_2 \} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \in E_2$, on a

$$|A(z)| \leq \exp\{\alpha|z|^\mu\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \quad (2.3.3)$$

De (2.3.3) on a

$$\exp\{\alpha|z|^\mu\} < |B(z)| \quad (2.3.4)$$

d'où

$$0 \leq \alpha < \frac{\log |B(z)|}{|z|^\mu}.$$

De là, il existe une constante ν telle que

$$0 \leq \alpha < \nu < \frac{\log |B(z)|}{|z|^\mu}.$$

Et par suite

$$|A(z)| \leq \exp\{\alpha|z|^\mu\} < \exp\{\nu|z|^\mu\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \quad (2.3.5)$$

Il s'ensuit de (2.3.1), (2.3.2) et (2.3.5) que pour tout z vérifiant $z \in E_2$ et $|z| = r \notin E_1$, on a

$$\begin{aligned} \exp\{\nu|z|^\mu\} &< |B(z)| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| \\ &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^\mu\} rT(2r, f)^2 \\ &\leq r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3 + r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3 \\ &\leq 2r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

De là, il existe un ensemble $E_3 \subset]0, +\infty[$ de densité supérieure positive tel que

$$\begin{aligned} \exp\{\nu|z|^\mu\} &\leq 2r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3, \text{ quand } z \rightarrow \infty \text{ dans } E_3 \\ \Rightarrow \exp\{(\nu - \alpha)r^\mu\} &\leq 2rT(2r, f)^3, \text{ quand } r \rightarrow \infty \text{ dans } E_3. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

De (2.3.7), on obtient

$$(\nu - \alpha)r^\mu \leq \log 2 + \log r + 3 \log T(2r, f),$$

$$(\nu - \alpha) \frac{r^\mu}{\log r} \leq \frac{\log 2}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r}$$

d'où

$$\mu(f) = \rho(f) = \infty. \quad (2.3.8)$$

Et on a aussi

$$(\nu - \alpha)r^\mu \leq \log 2 + \log r + 3 \log T(2r, f),$$

$$\begin{aligned} \log(\nu - \alpha) + \mu \log r &\leq \log \log 2 + \log \log r + \log 3 + \log \log T(2r, f) + O(1), \\ \frac{\log(\nu - \alpha)}{\log r} + \mu &\leq \frac{\log \log 2}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log \log T(2r, f)}{\log 2r} + \frac{O(1)}{\log r} \end{aligned}$$

d'où

$$\rho_2(f) \geq \mu. \quad (2.3.9)$$

De plus, d'après l'hypothèse du Théorème 2.1.1, il existe un nombre positif R tel que

$$\max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq \exp\{\beta|z|^\mu\}, \quad \beta > 0 \quad (2.3.10)$$

pour $|z| = r > R$. De même, de l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$ et (2.3.8), on obtient

$$\lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f).$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)},$$

avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que

$$\mu(g) = \mu(f) \leq \rho(g) = \rho(f) = +\infty \text{ et } \lambda(d) = \rho(d) = \lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f) = \mu(g). \quad (2.3.11)$$

Donc, d'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_4 \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique $m_l(E_4)$ finie et choisissons z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$ tel que

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z} \right)^n (1 + o(1)) \quad (n \geq 1). \quad (2.3.12)$$

Il s'ensuit de (2.1.1) que

$$\left| \frac{f''}{f} \right| \leq |A| \left| \frac{f'}{f} \right| + |B|. \quad (2.3.13)$$

Remplaçons (2.3.10) et (2.3.12) dans (2.3.13), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\nu_g(r)}{z} \right)^2 (1 + o(1)) \right| &\leq e^{\beta r^\mu} \left| \frac{\nu_g(r)}{z} (1 + o(1)) \right| + e^{\beta r^\mu} \\ \Rightarrow \left(\frac{\nu_g(r)}{r} \right)^2 |1 + o(1)| &\leq e^{\beta r^\mu} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| + e^{\beta r^\mu}, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

avec z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup [0, R] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$.

De (2.3.14) et le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{r} \right)^2 |1 + o(1)| \leq 2e^{\beta r^\mu} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)|,$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu_g(r)}{r} &\leq 2Ke^{\beta r^\mu}, K > 0 \text{ constante} \\ \nu_g(r) &\leq 2rKe^{\beta r^\mu}, \end{aligned}$$

$$\log \nu_g(r) \leq \log 2 + \log r + \beta r^\mu + \log K,$$

$$\log \log \nu_g(r) \leq \log \log 2 + \log \log r + \log \beta + \mu \log r + \log \log K + O(1),$$

$$\frac{\log \log \nu_g(r)}{\log r} \leq \frac{\log \log 2}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log \beta}{\log r} + \mu + \frac{\log \log K + O(1)}{\log r}$$

d'où

$$\rho_2(g) \leq \mu. \quad (2.3.15)$$

De (2.3.9), (2.3.11) et (2.3.15), on obtient

$$\rho_2(f) = \mu.$$

2.3.2 Preuve du Théorème 2.1.2

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (2.1.1). D'après le lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_5 \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_5$, on a (2.3.2).

D'autre part, d'après l'hypothèse du Théorème 2.1.2, il existe un ensemble E_6 avec $\overline{\text{dens}}\{ |z| : z \in E_6 \} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \in E_6$ et pour $\alpha \geq 0$ on a

$$|A(z)| \leq \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty \text{ pour } z \in E_6 \quad (2.3.16)$$

De (2.3.16) on obtient

$$\exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} < |B(z)|$$

d'où

$$0 \leq \alpha < \frac{\log |B(z)|}{|z|^{\sigma-\varepsilon}}. \quad (2.3.17)$$

D'où, il existe une constante γ telle que

$$0 \leq \alpha < \gamma < \frac{\log |B(z)|}{|z|^{\sigma-\varepsilon}}.$$

Et par suite

$$|A(z)| \leq \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} < \exp\{\gamma|z|^{\sigma-\varepsilon}\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \quad (2.3.18)$$

Il s'ensuit de (2.3.1), (2.3.2) et (2.3.18) que pour tout z vérifiant $z \in E_6$ et $|z| = r \notin E_5$, on a

$$\begin{aligned} \exp\{\gamma|z|^{\sigma-\varepsilon}\} &< |B(z)| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| \\ &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} rT(2r, f)^2 \\ &\leq r \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} T(2r, f)^3 + r \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} T(2r, f)^3 \\ &\leq 2r \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} T(2r, f)^3, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

De là, il existe un ensemble $E_7 \subset]0, +\infty[$ de densité supérieure positive tel que

$$\exp\{\gamma|z|^{\sigma-\varepsilon}\} \leq 2r \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} T(2r, f)^3, \text{ quand } z \rightarrow \infty \text{ dans } E_7$$

$$\Rightarrow \exp\{(\gamma - \alpha)r^{\sigma-\varepsilon}\} \leq 2rT(2r, f)^3, \text{ quand } r \rightarrow \infty \text{ dans } E_7. \quad (2.3.20)$$

De (2.3.20), on obtient

$$(\gamma - \alpha)r^{\sigma-\varepsilon} \leq \log 2 + \log r + 3 \log T(2r, f),$$

$$(\gamma - \alpha) \frac{r^{\sigma - \varepsilon}}{\log r} \leq \frac{\log 2}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r}$$

d'où

$$\mu(f) = \rho(f) = \infty.$$

Et on a aussi

$$(\gamma - \alpha) r^{\sigma - \varepsilon} \leq \log 2 + \log r + 3 \log T(2r, f),$$

$$\begin{aligned} \log(\gamma - \alpha) + (\sigma - \varepsilon) \log r &\leq \log \log 2 + \log \log r + \log 3 + \log \log T(2r, f), \\ \frac{\log(\gamma - \alpha)}{\log r} + (\sigma - \varepsilon) &\leq \frac{\log \log 2}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log \log T(2r, f)}{\log 2r} \end{aligned}$$

d'où

$$\rho_2(f) \geq \sigma - \varepsilon.$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\rho_2(f) \geq \sigma = \max\{\rho(A), \rho(B)\}. \quad (2.3.21)$$

D'une autre part, d'après les hypothèses et le Lemme 2.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_8 \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et une mesure logarithmique finie tel que

$$\begin{aligned} |A(z)| &\leq \exp\{r^{\sigma + \varepsilon}\}, \\ |B(z)| &\leq \exp\{r^{\sigma + \varepsilon}\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq \exp\{r^{\sigma + \varepsilon}\}, \quad (2.3.22)$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$, $r \rightarrow \infty$. De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$ et (2.3.8), on obtient

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f).$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)},$$

avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que (2.3.11) est réalisée.

Donc, d'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_9 \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique $m_l(E_9)$ finie et choisissons z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_9$ et $|g(z)| = M(r, g)$ tel que (2.3.12).

De (2.1.1), on obtient (2.3.13).

Remplaçons (2.3.22) et (2.3.12) dans (2.3.13), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\nu_g(r)}{z} \right)^2 (1 + o(1)) \right| &\leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \left| \frac{\nu_g(r)}{z} (1 + o(1)) \right| + e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \\ \Rightarrow \left(\frac{\nu_g(r)}{r} \right)^2 |1 + o(1)| &\leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| + e^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

avec z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8 \cup E_9$ et $|g(z)| = M(r, g)$, $r \rightarrow \infty$.

De (2.3.23) et le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{r} \right)^2 |1 + o(1)| \leq 2e^{r^{\sigma+\varepsilon}} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)|,$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu_g(r)}{r} &\leq 2Ke^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \quad K > 0 \text{ constante} \\ \nu_g(r) &\leq 2rKe^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

$$\log \nu_g(r) \leq \log 2 + \log r + r^{\sigma+\varepsilon} + \log K,$$

$$\log \log \nu_g(r) \leq \log \log 2 + \log \log r + \log \beta + (\sigma + \varepsilon) \log r + \log \log K + O(1),$$

$$\frac{\log \log \nu_g(r)}{\log r} \leq \frac{\log \log 2}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log \beta}{\log r} + \sigma + \varepsilon + \frac{\log \log K + O(1)}{\log r}$$

d'où

$$\rho_2(f) = \rho_2(g) \leq \sigma + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\rho_2(f) \leq \sigma. \quad (2.3.24)$$

De (2.3.21) et (2.3.24), on obtient

$$\rho_2(f) = \sigma = \max\{\rho(A), \rho(B)\}.$$

Exemple 2.1.1 Soit l'équation

$$f'' + \frac{e^z}{z+1} f' + \frac{e^{z^2}}{z} f = 0, \quad (2.3.25)$$

et soit $H =]0, +\infty[$, $x \rightarrow \infty$.

On remarque que les conditions du Théorème 2.1.1 sont vérifiées. En effet, on a $\overline{\text{dens}} H = 1 > 0$ et les fonctions $\frac{e^z}{z+1}$ et $\frac{e^{z^2}}{z}$ sont méromorphes. De plus

$$|A(z)| = \left| \frac{e^z}{z+1} \right| \leq \frac{e^x}{x+1} < e^{\frac{1}{2}x^2} < |B(z)| = \left| \frac{e^{z^2}}{z} \right| < \frac{e^{x^2}}{x},$$

quand $x \rightarrow \infty$ pour $x \in H$.

D'après le Théorème 2.1.1, si l'équation (2.3.25) admet des solutions méromorphes, alors chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ vérifie

$$\mu(f) = \rho(f) = \infty \text{ et } \rho_2(f) \geq 2.$$

De plus, on a

$$\max\{|A(x)|, |B(x)|\} \leq e^{x^2}, \text{ quand } x \rightarrow \infty$$

alors, chaque solution méromorphe $f \not\equiv 0$ avec $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$ vérifie $\rho_2(f) = 2$.

Estimation des zéros et croissance des solutions méromorphes d'équations différentielles linéaires non-homogènes du second ordre

3.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on va estimer les zéros et étudier la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires non-homogènes d'ordre deux à coefficients fonctions méromorphes de la forme

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = F(z), \quad (3.1.1)$$

avec $A(z)$, $B(z)$ ($\neq 0$) et $F(z)$ ($\neq 0$) sont des fonctions méromorphes.

Théorème 3.1.1 [3] *Soient H , $A(z)$ et $B(z)$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1.1 et soit $F(z)(\neq 0)$ une fonction méromorphe avec $\rho(F) < \infty$. Si toutes les solutions de l'équation (3.1.1) sont des solutions méromorphes et chaque solution f vérifie $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$, alors chaque solution méromorphe f vérifie $\mu(f) = \rho(f) = \infty$ et $\rho_2(f) = \mu$, avec au plus une solution exceptionnelle d'ordre fini.*

Théorème 3.1.2 [3] *Soient H , $A(z)$ et $B(z)$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1.2 et soit $F(z)(\neq 0)$ une fonction méromorphe avec $\rho(F) < \infty$. Si toutes les solutions de l'équation (3.1.1) sont méromorphes et chaque solution f vérifie $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$, alors chaque solution*

méromorphe f vérifie

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \mu(f) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \sigma,$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que

$$\rho(f_0) \leq \max\{\bar{\lambda}(f_0), \max\{\sigma, \rho(F)\}\} \text{ et } \rho_2(f_0) = 0.$$

De plus, si $\bar{\lambda}(f_0) < \rho(f_0)$, alors

$$\rho(f_0) \leq \max\{\sigma, \rho(F)\}.$$

Théorème 3.1.3 [3] Soient H , $A(z)$ et $B(z)$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1.1 et soit $F(z) (\neq 0)$ une fonction méromorphe avec

$$|F(z)| \leq \exp\{\alpha |z|^\mu\} \text{ ou } \rho(F) < \mu.$$

Si l'équation (3.1.1) admet une solution méromorphe alors chaque solution méromorphe f avec $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$ vérifie

$$\mu(f) = \rho(f) = \infty \text{ et } \rho_2(f) = \mu.$$

Théorème 3.1.4 [3] Soient H , $A(z)$ et $B(z)$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1.2 et soit $F(z) (\neq 0)$ une fonction méromorphe avec $\rho(F) < \sigma$. Si l'équation (3.1.1) admet une solution méromorphe alors chaque solution méromorphe f avec $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$ vérifie

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \mu(f) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \sigma.$$

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 *Supposons que $A(z)$, $B(z)$, $F(z) (\neq 0)$ sont des fonctions méromorphes telles que $\rho(F) < \infty$ et vérifiant*

1) $\max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq c \exp\{\beta |z|^\mu\}$, $r \rightarrow \infty$, avec $c > 0, \beta > 0$ des constantes ;

ou

2) $\max\{|A(z)|, |B(z)|\} = \mu < \infty$.

Si l'équation (3.1.1) admet des solutions méromorphes f et $\lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f)$, $\rho(f) = \infty$, alors $\rho_2(f) \leq \mu$.

Preuve Supposons que $f \neq 0$ est une solution méromorphe de (3.1.1). Alors de la relation (3.1.1) on a

$$-\frac{f''}{f} = A \frac{f'}{f} + B - \frac{F}{f}. \quad (3.2.1)$$

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)},$$

avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que (2.3.11) est réalisée.

D'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique $m_l(E_1)$ finie et choisissons z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$ et $|g(z)| = M(r, g)$ tel que (2.3.12) est vérifiée.

Remplaçons (2.3.12) dans (3.2.1), on obtient

$$-\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^2 (1 + o(1)) = A \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right) (1 + o(1)) + B - \frac{F}{f}, \quad (3.2.2)$$

avec z vérifie $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$ et $|g(z)| = M(r, g)$.

1^{er} cas : $\max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq c \exp\{\beta |z|^\mu\}$.

Soit $\sigma = \rho(F(z)d(z)) < \infty$. D'après le Lemme 2.2.4, on a pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_2 \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que

$$|F(z)d(z)| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}, \quad (3.2.3)$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$, $r \rightarrow \infty$. Pour un point z pour lequel $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\mu = \mu(g) = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, g)}{\log r}$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{\log \log |g(z)|}{\log r} &\geq \mu - \varepsilon \\ \implies |g(z)| &\geq \exp\{r^{\mu - \varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Comme $\mu(g) \leq \rho(g)$, on prend

$$|g(z)| \geq \exp\{r^{\sigma+1}\}. \quad (3.2.4)$$

De (3.2.3) et (3.2.4), on a

$$\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{F(z)d(z)}{g(z)} \right| \leq \frac{\exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}}{\exp\{r^{\sigma+1}\}} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \quad (3.2.5)$$

tel que z vérifie $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|g(z)| = M(r, g)$, $r \rightarrow \infty$. D'après l'hypothèse (1), il existe $R > 0$ tel que

$$\max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq c \exp\{\beta |z|^\mu\}, \text{ pour } r > R. \quad (3.2.6)$$

De (3.2.2), (3.2.5) et (3.2.6), on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu_g(r)}{r} \right)^2 |1 + o(1)| &= \left| A \left(\frac{\nu_g(r)}{r} \right) (1 + o(1)) + B - \frac{F}{f} \right| \\ &\leq |A| \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| + |B| + \left| \frac{F}{f} \right| \\ &\leq |A| \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| + |B| \\ &\leq c \exp\{\beta r^\mu\} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| + c \exp\{\beta r^\mu\} \\ &\leq 2c \exp\{\beta r^\mu\} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)|, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

où z vérifie $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1 \cup E_2 \cup [0, R]$ et $|g(z)| = M(r, g)$, $r \rightarrow \infty$.

Par conséquent, de (3.2.7) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\nu_g(r)}{r} &\leq 2cK \exp\{\beta r^\mu\}, \quad K > 0 \text{ constante} \\
\nu_g(r) &\leq 2crK \exp\{\beta r^\mu\}, \\
\log \nu_g(r) &\leq \log 2 + \log c + \log r + \beta r^\mu + \log K, \\
\log \log \nu_g(r) &\leq \log \log 2 + \log \log c + \log \log r + \log \beta + \mu \log r + \log \log K + O(1), \\
\frac{\log \log \nu_g(r)}{\log r} &\leq \frac{\log \log 2}{\log r} + \frac{\log \log c}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log \beta}{\log r} + \mu + \frac{\log \log K + O(1)}{\log r}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_2(f) = \sigma_2(g) \leq \mu.$$

2^{ème} cas : $\max\{|A(z)|, |B(z)|\} = \mu < \infty$.

D'après le Lemme 2.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_6 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que

$$\max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq \exp\{\beta |z|^{\mu+\varepsilon}\},$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6$, $r \rightarrow \infty$. Soit $\sigma = \rho(F(z)d(z))$. D'après le Lemme 2.2.4, on a pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_7 \subset (1, +\infty)$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que (3.2.3) pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_7$, $r \rightarrow \infty$. Pour un point z pour lequel $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$|g(z)| \geq \exp\{r^{\mu-\varepsilon}\}.$$

Comme $\mu(g) \leq \rho(g)$, on prend (3.2.4). De (3.2.3) et (3.2.4), on a (3.2.5) tel que z vérifie $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_7$, $r \rightarrow \infty$ et $|g(z)| = M(r, g)$, $r \rightarrow \infty$. D'après l'hypothèse (2), il existe $R > 0$ tel que

$$\max\{|A(z)|, |B(z)|\} = \mu < \infty, \text{ pour } r > R. \quad (3.2.8)$$

De (3.2.2), (3.2.5) et (3.2.8), on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right)^2 |1 + o(1)| &= \left| A \left(\frac{\nu_g(r)}{r}\right) (1 + o(1)) + B - \frac{F}{f} \right| \\
&\leq |A| \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| + |B| + \left| \frac{F}{f} \right| \\
&\leq 2 \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| \max\{|A|, |B|\} \\
&\leq 2 \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| \exp\{r^{\mu+\varepsilon}\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\nu_g(r)}{r} \leq 2K \exp\{r^{\mu+\varepsilon}\}, \quad K > 0 \text{ constante}$$

$$\frac{\log \log \nu_g(r)}{\log r} \leq \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log \log 2}{\log r} + (\mu + \varepsilon) + \frac{\log \log K + O(1)}{\log r}$$

d'où

$$\sigma_2(f) = \sigma_2(g) \leq \mu + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\sigma_2(f) \leq \mu.$$

Lemme 3.2.2 *Supposons que $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions méromorphes non-constantes dans le plan complexe avec $\rho(f)$ est l'ordre de f et $\mu(g)$ est l'ordre inférieur de g . Alors*

$$\mu(f + g) \leq \max\{\rho(f), \mu(g)\}.$$

Lemme 3.2.3 *Soit $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, F (\neq 0)$ des fonctions méromorphes et toute solution méromorphe f de l'équation*

$$f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + a_0f = 0, \quad (3.2.9)$$

vérifie $\mu(f) = \infty$. Si toutes les solutions de l'équation

$$f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + a_0f = F, \quad (3.2.10)$$

sont des solutions méromorphes, alors toute solution méromorphe f de (3.2.10) vérifie $\mu(f) = \infty$, avec au plus une solution exceptionnelle d'ordre fini.

Preuve Il est clair que toute solution méromorphe f de (3.2.10) vérifie $\rho(f) = \infty$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 vérifie $\rho(f_0) < \infty$.

On conclut que toute solution méromorphe $f \not\equiv f_0$ de (3.2.10) vérifie $\mu(f) = \infty$. En effet, s'il existe une solution $f_1 (\not\equiv f_0)$ telle que $\mu(f_1) < \infty$, alors d'après le Lemme 3.2.2, on obtient

$$\mu(f_0 - f_1) \leq \max\{\rho(f_0), \mu(f_1)\} < \infty.$$

Mais $f_0 - f_1$ est une solution de (3.2.9) alors $\mu(f_0 - f_1) = \infty$. Contradiction. D'où, il existe au plus une solution exceptionnelle d'ordre fini.

Lemme 3.2.4 *Supposons que $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions méromorphes non-constantes dans le plan complexe avec $\rho_2(f)$ et $\rho_2(g)$ comme l'hyper-ordre de $f(z)$ et $g(z)$ respectivement. Alors*

$$\rho_2(f + g) \leq \max\{\rho_2(f), \rho_2(g)\}.$$

Preuve Supposons que $\rho_2(f) \leq \rho_2(g) < \infty$. D'après la définition de l'hyper-ordre, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre R positif tel que

$$\frac{\log \log T(r, f)}{\log r} < \rho_2(f) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \log \log T(r, f) < \log r^{\rho_2(f) + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow T(r, f) < \exp\{r^{\rho_2(f) + \varepsilon}\},$$

et

$$\frac{\log \log T(r, g)}{\log r} < \rho_2(g) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \log \log T(r, g) < \log r^{\rho_2(g) + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow T(r, g) < \exp\{r^{\rho_2(g) + \varepsilon}\},$$

pour $r \geq R$. Notons que

$$T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + \log 2$$

$$\Rightarrow T(r, f + g) \leq \exp\{r^{\rho_2(f) + \varepsilon}\} + \exp\{r^{\rho_2(g) + \varepsilon}\} + \log 2, \text{ pour } r \geq R$$

$$\leq 2 \exp\{r^{\rho_2(g)+\varepsilon}\} + \log 2, \text{ pour } r \geq R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log T(r, f+g) &\leq \log 2 + r^{\rho_2(g)+\varepsilon} + \log \log 2 + O(1), \text{ pour } r \geq R \\ \Rightarrow \frac{\log \log T(r, f+g)}{\log r} &\leq \frac{\log 2}{\log r} + \frac{r^{\rho_2(g)+\varepsilon}}{\log r} + \frac{\log \log 2}{\log r} + \frac{O(1)}{\log r}, \text{ pour } r \geq R \\ \Rightarrow \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f+g)}{\log r} &\leq \rho_2(g) + \varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\rho_2(f+g) \leq \rho_2(g).$$

Lemme 3.2.5 *Soit $g(z)$ une fonction entière non-constante d'ordre fini. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $G \subset [0, +\infty[$ avec $\overline{\text{dens}} G = 1$ tel que*

$$M(r, g) \geq \exp\{r^{\rho(g)-\varepsilon}\}, \text{ pour tout } r \in G.$$

Lemme 3.2.6 *Soit $\omega(z)$ une fonction méromorphe avec $\lambda(\frac{1}{\omega}) < \rho(\omega) < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $H \subset [0, +\infty[$ avec $\overline{\text{dens}} H = 1$ tel que*

$$M(r, \omega) \geq \exp\{r^{\rho(\omega)-\varepsilon}\}, \text{ pour tout } r \in H.$$

Preuve Définissons la fonction ω par

$$\omega(z) = z^k \frac{g(z)}{d(z)},$$

avec k un entier, $g(z)$ est une fonction entière et $d(z)$ est le produit canonique formé avec les pôles non-nuls de $\omega(z)$. D'où

$$\lambda(d) = \rho(d) = \lambda(\frac{1}{\omega}) < \rho(\omega) \text{ et } \rho(g) = \rho(\omega).$$

D'après le Lemme 3.2.5, pour tout ε donné ($0 < 2\varepsilon < \rho(\omega) - \lambda(\frac{1}{\omega})$), il existe un ensemble $H_1 \subset [0, +\infty[$ avec $\overline{\text{dens}} H_1 = 1$ tel que

$$M(r, g) \geq \exp\{r^{\rho(g)-\varepsilon}\} = \exp\{r^{\rho(\omega)-\varepsilon}\}, \text{ pour tout } r \in H_1. \quad (3.2.11)$$

Maintenant, prenons un point z_r vérifiant $|z_r| = r \in H_1$ et $|g(z_r)| = M(r, g)$. Comme il existe $R > 0$ tel que pour $r > R$, on a

$$\exp\{-r^{\lambda(\frac{1}{\omega})+\varepsilon}\} \leq |d(z_r)| \leq \exp\{r^{\lambda(\frac{1}{\omega})+\varepsilon}\}. \quad (3.2.12)$$

Posons $H = H_1 - [0, R]$, alors $\overline{\text{dens}} H = 1$. De (3.2.11) et (3.2.12), on a

$$M(r, \omega) \geq \left| z_r^k \frac{g(z_r)}{d(z_r)} \right| \geq r^k \frac{\exp\{r^{\rho(\omega)-\varepsilon}\}}{\exp\{-r^{\lambda(\frac{1}{\omega})+\varepsilon}\}} \geq r^k \exp\{r^{\rho(\omega)-\varepsilon} + r^{\lambda(\frac{1}{\omega})+\varepsilon}\} \geq \exp\{r^{\rho(\omega)-\varepsilon}\},$$

pour $|z_r| = r \in H$.

3.3 Preuves des Théorèmes

3.3.1 Preuve du Théorème 3.1.1

Supposons que f est une solution méromorphe de (3.1.1). Il est clair que $\rho(f) = \infty$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 vérifiant $\rho(f_0) < \infty$.

D'après (2.3.8) et le Lemme 3.2.3, on obtient $\mu(f) = \infty$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 . De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$, on a $\lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f)$ ($f \not\equiv f_0$). Alors, d'après le Lemme 3.2.1 on a

$$\rho_2(f) \leq \mu \ (f \not\equiv f_0).$$

Clairement on a $\rho_2(f_0) \leq \mu$. Alors, chaque solution méromorphe f de (3.1.1) vérifie $\rho_2(f) \leq \mu$. On conclut que $\rho_2(f) = \mu$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 . En effet, s'il existe une deuxième solution f_1 de (3.1.1) vérifiant $\rho_2(f_1) < \mu$, alors, d'après le Lemme 3.2.4, on obtient

$$\rho_2(f_1 - f_0) \leq \max\{\rho_2(f_1), \rho_2(f_0)\} < \mu,$$

mais, $f_1 - f_0$ est une solution de l'équation (3.1.1) vérifiant $\rho_2(f_1 - f_0) = \mu$. Contradiction.

3.3.2 Preuve du Théorème 3.1.2

Supposons que f est une solution méromorphe de (3.1.1). Il est clair que $\rho(f) = \infty$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 vérifiant $\rho(f_0) < \infty$.

D'après (2.3.8) et le Lemme 3.2.3, on obtient $\mu(f) = \infty$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 . De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \infty$, on a $\lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f)$ ($f \not\equiv f_0$). Alors, d'après le Lemme 3.2.1 on a

$$\rho_2(f) \leq \sigma, \ (f \not\equiv f_0).$$

Clairement on a $\rho_2(f_0) \leq \sigma$. Alors, chaque solution méromorphe f de (3.1.1) vérifie $\rho_2(f) \leq \sigma$.

On conclut que $\rho_2(f) = \sigma$, avec au plus une solution exceptionnelle f_0 d'ordre fini. En effet, s'il existe une deuxième solution f_1 de (3.1.1) vérifiant $\rho_2(f_1) < \sigma$, alors d'après le Lemme 3.2.4 on obtient

$$\rho_2(f_1 - f_0) \leq \max\{\rho_2(f_1), \rho_2(f_0)\} < \sigma,$$

mais, $f_1 - f_0$ est une solution de l'équation (2.1.1) vérifiant $\rho_2(f_1 - f_0) = \sigma$. Contradiction. D'après (3.1.1), il est clair que si f admet comme zéro z_0 d'ordre $m > 2$ et $A(z)$, $B(z)$ sont analytiques en z_0 , alors F admet nécessairement comme zéro z_0 d'ordre $m - 2$. D'où on obtient pour $F \not\equiv 0$

$$N(r, \frac{1}{f}) \leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{F}) + N(r, A) + N(r, B). \quad (3.3.1)$$

De (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{f''}{F} + A(z)\frac{f'}{F} + B(z)\frac{f}{F} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{1}{F}(f'' + A(z)f' + B(z)f) \\ \Rightarrow \frac{1}{f} &= \frac{1}{F}(\frac{f''}{f} + A(z)\frac{f'}{f} + B(z)) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m(r, \frac{1}{f}) &\leq m(r, \frac{1}{F}(\frac{f''}{f} + A(z)\frac{f'}{f} + B(z))) \\ &\leq m(r, \frac{1}{F}) + m(r, \frac{f''}{f}) + m(r, A) + m(r, \frac{f'}{f}) + m(r, B) + O(1). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

De (3.3.1) et (3.3.3), on obtient

$$\begin{aligned} N(r, \frac{1}{f}) + m(r, \frac{1}{f}) &\leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{F}) + N(r, A) + N(r, B) + m(r, \frac{1}{F}) \\ &\quad + m(r, \frac{f''}{f}) + m(r, A) + m(r, \frac{f'}{f}) + m(r, B) + O(1) \\ \Rightarrow T(r, \frac{1}{f}) &\leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + T(r, \frac{1}{F}) + T(r, A) + T(r, B) + O(1) \\ \Rightarrow T(r, \frac{1}{f}) &= T(r, f) + O(1) \leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + T(r, \frac{1}{F}) + T(r, A) \\ &\quad + T(r, B) + M \log(rT(r, f)) + O(1) \\ \Rightarrow T(r, f) &= T(r, \frac{1}{f}) + O(1) \leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + M \log(rT(r, f)) \\ &\quad + T(r, F) + T(r, A) + T(r, B), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

pour $|z| = r$ à l'extérieur d'un ensemble $E \subset]0, \infty[$ de mesure linéaire finie, avec $M > 0$ une constante convenable.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour r suffisamment large, on obtient

$$M \log(rT(r, f)) \leq \frac{1}{2}T(r, f). \quad (3.3.5)$$

Comme $\rho(F) < \infty$, alors

$$\begin{aligned} \rho(F) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup \frac{\log T(r, F)}{\log r} \Rightarrow T(r, F) \leq r^{\rho(F)+\varepsilon}, \\ \max\{\rho(A), \rho(B)\} &= \sigma < \infty \Rightarrow T(r, A) + T(r, B) \leq 2r^{\max\{\rho(A), \rho(B)\}+\varepsilon} \leq 2r^{\sigma+\varepsilon} \end{aligned}$$

d'où

$$T(r, F) + T(r, A) + T(r, B) \leq 3r^{\max\{\sigma, \rho(F)\}+\varepsilon}. \quad (3.3.6)$$

D'après (3.3.4), (3.3.5) et (3.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq 2\bar{N}(r, \frac{1}{f}) + \frac{1}{2}T(r, f) + 3r^{\max\{\sigma, \rho(F)\}+\varepsilon} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}T(r, f) \leq 2\bar{N}(r, \frac{1}{f}) + 3r^{\max\{\sigma, \rho(F)\}+\varepsilon} \\ &\Rightarrow T(r, f) \leq 4\bar{N}(r, \frac{1}{f}) + 6r^{\max\{\sigma, \rho(F)\}+\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

pour $|z| = r \notin E$. Par conséquent de (3.3.7) on obtient

$$\begin{aligned} \log T(r, f) &\leq \log 4 + \log \bar{N}(r, \frac{1}{f}) + \log 6 + (\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon) \log r, \\ &\Rightarrow \frac{\log T(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log 4}{\log r} + \frac{\log \bar{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r} + \frac{\log 6}{\log r} + (\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon) \\ &\Rightarrow \rho(f) \leq \bar{\lambda}(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \log T(r, f) &\leq \log 4 + \log \bar{N}(r, \frac{1}{f}) + \log 6 + (\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon) \log r \\ &\Rightarrow \log \log T(r, f) \leq \log \log 4 + \log \log \bar{N}(r, \frac{1}{f}) + \log \log 6 + \log(\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon) \\ &\quad + \log \log r + O(1) \\ &\Rightarrow \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log \log 4}{\log r} + \frac{\log \log \bar{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r} + \frac{\log \log 6}{\log r} + \frac{\log(\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon)}{\log r} \\ &\quad + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{O(1)}{\log r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f).$$

Comme $\rho(f) = \infty$ alors $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \mu(f) = \rho(f) = \infty$, et comme $\rho_2(f) = \sigma$ alors $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \sigma$. De (3.3.7), on a

$$T(r, f_0) \leq 4\bar{N}(r, \frac{1}{f_0}) + 6r^{\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon}, \quad (3.3.8)$$

pour $|z| = r \notin E$.

Donc

$$\begin{aligned} \log T(r, f_0) &\leq \log 4 + \log \bar{N}(r, \frac{1}{f_0}) + \log 6 + (\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon) \log r \\ &\Rightarrow \rho(f_0) \leq \max\{\bar{\lambda}(f_0), \max\{\sigma, \rho(F)\}\} \end{aligned}$$

et

$$\rho_2(f_0) = 0.$$

Si $\bar{\lambda}(f_0) < \rho(f_0)$, alors

$$\begin{aligned} \log T(r, f_0) &\leq \log 4 + \log \bar{N}(r, \frac{1}{f_0}) + \log 6 + (\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon) \log r \\ &\Rightarrow \log \log T(r, f_0) \leq \log \log 4 + \log \log \bar{N}(r, \frac{1}{f_0}) + \log \log 6 + \log(\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon) \\ &\quad + \log \log r + O(1) \\ &\Rightarrow \frac{\log \log T(r, f_0)}{\log r} \leq \frac{\log \log 4}{\log r} + \frac{\log \log \bar{N}(r, \frac{1}{f_0})}{\log r} + \frac{\log \log 6}{\log r} + \frac{\log(\max\{\sigma, \rho(F)\} + \varepsilon)}{\log r} \\ &\quad + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{O(1)}{\log r} \\ &\Rightarrow \rho_2(f_0) \leq \bar{\lambda}_2(f_0). \end{aligned}$$

3.3.3 Preuve du Théorème 3.1.3

1^{er} cas : $|F(z)| \leq \exp\{\alpha |z|^\mu\}$, $z \rightarrow \infty$.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (3.1.1) et $\rho(f) < \infty$. Alors de (3.1.1)

on a

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f} + A(z) \frac{f'}{f} + B(z) &= F(z) \\ \Rightarrow B(z) &= -\frac{f''}{f} - A(z) \frac{f'}{f} - F(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |B| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right| \quad (3.3.9)$$

D'après le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_1 \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1$, on a (2.3.2).

D'après l'hypothèse du Théorème 2.1.1, il existe un ensemble E_2 avec $\overline{\text{dens}}\{ |z| : z \in E_2 \} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \in E_2$, on a (2.3.3).

De la relation (2.3.3) on obtient (2.3.4). D'où, il existe une constante ζ telle que

$$0 \leq \alpha < \zeta < \frac{\log |B(z)|}{|z|^\mu}$$

Et par suite

$$|A(z)| \leq \exp\{\alpha|z|^\mu\} < \exp\{\zeta|z|^\mu\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty.$$

D'où

$$\max\{|A(z)|, |F(z)|\} \leq \exp\{\alpha|z|^\mu\} < \exp\{\zeta|z|^\mu\} < |B(z)|, \quad (3.3.10)$$

quand $\zeta > \alpha, z \rightarrow \infty$ pour $z \in H$.

De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$ et le Lemme 3.2.6, on obtient pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \rho(f)$), il existe un ensemble $H_1 \subset [0, +\infty[$ avec $\overline{\text{dens}} H_1 = 1$ tel que

$$M(r, f) \geq \exp\{r^{\rho(f)-\varepsilon}\}, \quad (3.3.11)$$

pour tout $r \in H_1$.

Soit z un point tel que $|z| = r$ où $|f(z)| = M(r, f)$. Alors, de (3.3.11) on obtient

$$|f(z)| \geq \exp\{r^{\rho(f)-\varepsilon}\} \geq 1, \quad (3.3.12)$$

pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_1$ et $|f(z)| = M(r, f)$.

D'où, il résulte de (2.3.2), (3.3.9), (3.3.10) et (3.3.12) pour tout $z \in H, |z| = r \in H_1 \setminus E_1$ et $|f(z)| = M(r, f)$

$$\begin{aligned} \exp\{\zeta|z|^\mu\} &< |B(z)| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right| \\ &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^\mu\} rT(2r, f)^2 + \exp\{\alpha|z|^\mu\} \\ &\leq 3r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Ainsi, il existe un ensemble $E = \{|z| : z \in H\} \cap H_1 \subset]0, +\infty[$ de densité supérieure positive tel que

$$\begin{aligned} \exp\{\zeta|z|^\mu\} &\leq 3r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3 \\ \Rightarrow \exp\{(\zeta - \alpha)r^\mu\} &\leq 3r T(2r, f)^3, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

quand $z \rightarrow \infty$ dans $E \setminus E_1$ et $|f(z)| = M(r, f)$. D'où, de (3.3.14), on obtient

$$\begin{aligned} (\zeta - \alpha)r^\mu &\leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f) \\ \Rightarrow (\zeta - \alpha) \frac{r^\mu}{\log r} &\leq \frac{\log 3}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(f) \geq \infty$$

$$\Rightarrow \rho(f) = \infty,$$

contradiction avec $\rho(f) < \infty$. D'où, on conclut que $\rho(f) = \infty$.

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)},$$

avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que

$$\rho(g) = \rho(f) = \infty \text{ et } \lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \rho(f).$$

Alors, d'après le Lemme 2.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_3 \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que

$$|d(z)| \leq \exp\{r^{\rho(d)+\varepsilon}\}, \quad (3.3.15)$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $r \rightarrow \infty$. De (3.3.15), on obtient

$$|F(z)d(z)| \leq \exp\{\alpha r^\mu + r^{\rho(d)+\varepsilon}\}, \quad (3.3.16)$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $r \rightarrow \infty$.

Comme $\rho(g) = \infty$, alors pour un point z vérifiant $|g(z)| = M(r, g)$ et pour r suffisamment grand, on obtient

$$|g(z)| \geq \exp\{r^{\mu+\rho(d)+1}\}. \quad (3.3.17)$$

De (3.3.16) et (3.3.17), on voit que pour un point z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, $|g(z)| = M(r, g)$ et $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{F(z)d(z)}{g(z)} \right| \leq \frac{\exp\{\alpha r^\mu + r^{\rho(d)+\varepsilon}\}}{\exp\{r^{\mu+\rho(d)+1}\}} \rightarrow 0. \quad (3.3.18)$$

Il résulte de (2.3.2), (3.3.9), (3.3.10) et (3.3.18) que pour tout z vérifiant $z \in H$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1 \cup E_3$, $|g(z)| = M(r, g)$ et $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \exp\{\zeta|z|^\mu\} &< |B(z)| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right| \\ &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^\mu\} rT(2r, f)^2 + O(1) \\ &\leq 3r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Ainsi, il existe un ensemble $E' = \{|z| : z \in H, |z| = r \notin ([0, 1] \cup E_1 \cup E_3)\}$ de densité supérieure positive vérifiant (3.3.14) quand $r \rightarrow \infty$ dans E' et $|g(z)| = M(r, g)$.

D'où, de (3.3.14) on a

$$\begin{aligned} (\zeta - \alpha)r^\mu &\leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f) \\ \Rightarrow (\zeta - \alpha) \frac{r^\mu}{\log r} &\leq \frac{\log 3}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r \log T(2r, f)}{\log r \log 2r} \\ \Rightarrow \mu(f) &= \infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\zeta - \alpha)r^\mu &\leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f) \\ \Rightarrow \log(\zeta - \alpha) + \mu \log r &\leq \log \log 3 + \log \log r + \log 3 + \log \log T(2r, f) + O(1) \\ \Rightarrow \frac{\log(\zeta - \alpha)}{\log r} + \mu &\leq \frac{\log \log 3}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log 2r \log \log T(2r, f)}{\log r \log 2r} + \frac{O(1)}{\log r} \\ \Rightarrow \rho_2(f) &\geq \mu. \end{aligned}$$

De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$, on obtient $\lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f)$. Alors de (3.1.1) on obtient (3.2.1).

D'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_4 \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie et choisissons z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$ tel que (2.3.12).

Substituons (2.3.12) dans (3.2.1), on obtient (3.2.2), avec z vérifie $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$.

De l'hypothèse du Théorème 2.1.1, il existe $R > 0$ tel que

$$\max\{|A(z)|, |B(z)|\} \leq \exp\{\beta|z|^\mu\}, \quad (3.3.20)$$

pour $r > R$.

De (3.2.2), (3.3.18) et (3.3.20), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\nu_g(r)}{z} \right)^2 (1 + o(1)) \right| &\leq |A| \left| \frac{\nu_g(r)}{z} (1 + o(1)) \right| + |B| + \left| \frac{F}{f} \right| \\ &\leq e^{\beta r^\mu} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)| + e^{\beta r^\mu} + o(1) \\ &\leq 3e^{\beta r^\mu} \frac{\nu_g(r)}{r} |1 + o(1)|, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

avec z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup [0, R] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$ quand $r \rightarrow \infty$.

De (3.3.21) et le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\frac{\nu_g(r)}{r} \leq 3Ke^{\beta r^\mu}, K > 0 \text{ constante}$$

$$\nu_g(r) \leq 3rKe^{\beta|z|^\mu},$$

$$\log \nu_g(r) \leq \log 3 + \log r + \beta r^\mu + \log K,$$

$$\begin{aligned} \log \log \nu_g(r) &\leq \log \log 3 + \log \log r + \log \beta + \mu \log r + \log \log K + O(1), \\ \frac{\log \log \nu_g(r)}{\log r} &\leq \frac{\log \log 3}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log \beta}{\log r} + \mu + \frac{\log \log K + O(1)}{\log r}, \end{aligned}$$

$$\rho_2(f) = \rho_2(g) \leq \mu.$$

D'où

$$\rho_2(f) = \mu.$$

2^{ème} cas : $\rho(F) < \mu$.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (3.1.1) et $\rho(f) < \infty$.

D'après le Lemme 2.2.4, on a pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \mu - \rho(F)$), il existe un ensemble $E_5 \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que

$$|F(z)| \leq \exp\{r^{\rho(F)+\varepsilon}\},$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, $r \rightarrow \infty$

D'après le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_6 \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_6$, on a (2.3.2).

D'après l'hypothèse du Théorème 2.1.1, il existe un ensemble E_7 avec $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E_7\} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \in E_7$, on a (2.3.3).

D'où, il existe une constante η telle que

$$0 \leq \alpha < \eta < \frac{\log |B(z)|}{|z|^\mu}.$$

Et par suite

$$|A(z)| < \exp\{\alpha|z|^\mu\} < \exp\{\eta|z|^\mu\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty.$$

De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$ et le Lemme 3.2.6, on obtient pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \rho(f)$), il existe un ensemble $H_2 \subset [0, +\infty[$ avec $\overline{\text{dens}} H_2 = 1$ tel que (3.3.11) pour tout $r \in H_2$.

Soit z un point tel que $|z| = r$ où $|f(z)| = M(r, f)$. Alors, de (3.3.11) on obtient (3.3.12) pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_2$ et $|f(z)| = M(r, f)$.

D'où, il résulte de (2.3.2), (3.3.9), (3.3.10) et (3.3.12) que pour tout $z \in H$, $|z| = r \in H_2 \setminus E_6$ et $|f(z)| = M(r, f)$

$$\begin{aligned} \exp\{\eta|z|^\mu\} &< |B(z)| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right| \\ &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^\mu\} rT(2r, f)^2 + \exp\{r^{\rho(F)+\varepsilon}\} \\ &\leq 3r \exp\{\alpha|z|^\mu + r^{\rho(F)+\varepsilon}\} T(2r, f)^3, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Ainsi, il existe un ensemble $E = \{|z| : z \in H\} \cap H_2 \subset]0, +\infty[$ de densité supérieure positive tel que

$$\exp\{\eta r^\mu\} \leq 3r \exp\{\alpha r^\mu + r^{\rho(F)+\varepsilon}\} T(2r, f)^3$$

$$\Rightarrow \exp\{(\eta - \alpha)r^\mu - r^{\rho(F)+\varepsilon}\} \leq 3rT(2r, f)^3, \quad (3.3.23)$$

quand $z \rightarrow \infty$ dans $E \setminus E_6$ et $|f(z)| = M(r, f)$.

D'où, de (3.3.23), on obtient

$$\begin{aligned} (\eta - \alpha)r^\mu &\leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f), \\ (\eta - \alpha) \frac{r^\mu}{\log r} &\leq \frac{\log 3}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(f) \geq \infty$$

$$\Rightarrow \rho(f) = \infty,$$

contradiction avec $\rho(f) < \infty$. D'où, on conclut que $\rho(f) = \infty$.

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)},$$

avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que

$$\rho(g) = \rho(f) = \infty \text{ et } \lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \rho(f).$$

Alors, d'après le Lemme 2.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_8 \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que on a (3.3.15) pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$, $r \rightarrow \infty$.

De (3.3.15), on obtient

$$|F(z)d(z)| < \exp\{r^\mu + r^{\rho(d)+\varepsilon}\}, \quad (3.3.24)$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$, $r \rightarrow \infty$.

Comme $\rho(g) = \infty$, alors pour un point z vérifiant $|g(z)| = M(r, g)$ et pour r suffisamment grand, on obtient

$$|g(z)| \geq \exp\{r^{\mu+\rho(d)+1}\}. \quad (3.3.25)$$

De (3.3.24) et (3.3.25), on voit que pour un point z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_8$, $|g(z)| = M(r, g)$ et $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{F(z)d(z)}{g(z)} \right| < \frac{\exp\{r^\mu + r^{\rho(d)+\varepsilon}\}}{\exp\{r^{\mu+\rho(d)+1}\}} \rightarrow 0. \quad (3.3.26)$$

Il résulte de (2.3.2), (3.3.9), (3.3.10) et (3.3.25) que pour tout z vérifiant $z \in H$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6 \cup E_8$, $|g(z)| = M(r, g)$ et $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \exp\{\eta|z|^\mu\} &< |B(z)| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right| \\ &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^\mu\} rT(2r, f)^2 + o(1) \\ &\leq 3r \exp\{\alpha|z|^\mu\} T(2r, f)^3. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un ensemble $E'' = \{|z| : z \in H, |z| = r \notin ([0, 1] \cup E_6 \cup E_8)\}$ de densité supérieure positive vérifiant (3.3.14) quand $r \rightarrow \infty$ dans E'' et $|g(z)| = M(r, g)$.

d'où, de (3.3.14) on obtient

$$\begin{aligned} (\eta - \alpha)r^\mu &\leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f) \\ \Rightarrow (\eta - \alpha) \frac{r^\mu}{\log r} &\leq \frac{\log 3}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r \log T(2r, f)}{\log 2r} \\ \Rightarrow \mu(f) &= \infty, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\eta - \alpha)r^\mu &\leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f) \\ \Rightarrow \log(\eta - \alpha) + \mu \log r &\leq \log \log 3 + \log \log r + \log 3 + \log \log T(2r, f) + O(1) \\ \Rightarrow \frac{\log(\eta - \alpha)}{\log r} + \mu &\leq \frac{\log \log 3}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log 2r \log \log T(2r, f)}{\log r \log 2r} + \frac{O(1)}{\log r} \\ \Rightarrow \rho_2(f) &\geq \mu. \end{aligned}$$

De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$, on obtient $\lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f)$. Alors de (3.1.1) on obtient (3.2.1).

D'après le Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_4 \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie et choisissons z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$ tel que (2.3.12).

Substituons (2.3.12) dans (3.2.1), on obtient (3.2.2), avec z vérifie $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$.

De l'hypothèse du Théorème 2.1.1, il existe $R > 0$ tel que (3.3.20) pour $r > R$.

De (3.2.2), (3.3.18) et (3.3.20), on obtient (3.3.21) avec z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup [0, R] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$ quand $r \rightarrow \infty$.

De (3.3.21) et le Lemme 2.2.3, on obtient $\rho_2(f) \leq \mu$.

D'où

$$\rho_2(f) = \mu.$$

3.3.4 Preuve du Théorème 3.1.4

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (3.1.1) et $\rho(f) < \infty$.

D'après le Lemme 2.2.4, on a pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \frac{\sigma - \rho(F)}{2}$), il existe un ensemble $E_1 \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que

$$|F(z)| \leq \exp\{r^{\rho(F) + \varepsilon}\}.$$

D'après le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_2 \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2$, on a (2.3.2).

D'après l'hypothèse du Théorème 2.1.2, il existe un ensemble E_3 avec $\overline{\text{dens}}\{|z| : z \in E_3\} > 0$ tel que pour tout z vérifiant $z \in E_3$, on a (2.3.3).

D'où, il existe une constante ξ telle que

$$0 \leq \alpha < \xi < \frac{\log |B(z)|}{|z|^{\sigma - \varepsilon}}.$$

Et par suite

$$|A(z)| < \exp\{\alpha |z|^{\sigma - \varepsilon}\} < \exp\{\xi |z|^{\sigma - \varepsilon}\} < |B(z)|, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \quad (3.3.27)$$

De l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$ et le Lemme 3.2.6, on obtient pour tout ε donné ($0 < \varepsilon < \rho(f)$), il existe un ensemble $H_3 \subset [0, +\infty[$ avec $\overline{\text{dens}} H_3 = 1$ tel que (3.3.11) pour tout $r \in H_3$.

Soit z un point tel que $|z| = r$ où $|f(z)| = M(r, f)$. Alors, de (3.3.11) on obtient (3.3.12) pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_3$ et $|f(z)| = M(r, f)$.

D'où, il résulte de (2.3.2), (3.3.9), (3.3.27) et (3.3.12) que pour tout $z \in H$, $|z| = r \in H_3 \setminus E_2$

et $|f(z)| = M(r, f)$

$$\begin{aligned}
 \exp\{\xi|z|^{\sigma-\varepsilon}\} &< |B(z)| \leq \left|\frac{f''}{f}\right| + |A| \left|\frac{f'}{f}\right| + \left|\frac{F}{f}\right| \\
 &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} rT(2r, f)^2 + \exp\{r^{\rho(F)+\varepsilon}\} \\
 &\leq 3r \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon} + r^{\rho(F)+\varepsilon}\} T(2r, f)^3, \text{ quand } z \rightarrow \infty. \quad (3.3.28)
 \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un ensemble $E = \{|z| : z \in H\} \cap H_3 \subset]0, +\infty[$ de densité supérieure positive tel que

$$\begin{aligned}
 \exp\{\xi r^{\sigma-\varepsilon}\} &\leq 3r \exp\{\alpha r^{\sigma-\varepsilon} + r^{\rho(F)+\varepsilon}\} T(2r, f)^3 \\
 \Rightarrow \exp\{(\xi - \alpha)r^{\sigma-\varepsilon} - r^{\rho(F)+\varepsilon}\} &\leq 3rT(2r, f)^3, \quad (3.3.29)
 \end{aligned}$$

quand $z \rightarrow \infty$ dans $E \setminus E_1$ et $|f(z)| = M(r, f)$.

D'où, de (3.3.29), on obtient

$$\begin{aligned}
 \exp\{(\xi - \alpha)r^{\sigma-\varepsilon}(1 + o(1))\} &\leq 3rT(2r, f)^3, \\
 (\xi - \alpha)r^{\sigma-\varepsilon}(1 + o(1)) &\leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f), \\
 (\xi - \alpha)(1 + o(1)) \frac{r^{\sigma-\varepsilon}}{\log r} &\leq \frac{\log 3}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r}, \\
 \Rightarrow \rho(f) &\geq \infty \\
 \Rightarrow \rho(f) &= \infty,
 \end{aligned}$$

contradiction avec $\rho(f) < \infty$. D'où, on conclut que $\rho(f) = \infty$.

D'après le théorème de factorisation de Hadamard, f peut être définie par

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)},$$

avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que

$$\rho(g) = \rho(f) = \infty \text{ et } \lambda(d) = \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \rho(f).$$

Alors, d'après le Lemme 2.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_4 \subset]1, +\infty[$ de mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie tel que (3.3.15) pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$, $r \rightarrow \infty$. De (3.3.15), on obtient

$$|F(z)d(z)| \leq \exp\{r^{\rho(F)+\varepsilon} + r^{\rho(d)+\varepsilon}\}, \quad (3.3.30)$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$, $r \rightarrow \infty$.

Comme $\rho(g) = \infty$, alors pour un point z vérifiant $|g(z)| = M(r, g)$ et pour r suffisamment grand, on obtient

$$|g(z)| \geq \exp\{r^{\sigma+\rho(d)+1}\}. \quad (3.3.31)$$

De (3.3.16) et (3.3.17), on voit que pour un point z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$, $|g(z)| = M(r, g)$ et $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$\left| \frac{F(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{F(z)d(z)}{g(z)} \right| \leq \frac{\exp\{r^{\rho(F)+\varepsilon} + r^{\rho(d)+\varepsilon}\}}{\exp\{r^{\sigma+\rho(d)+1}\}} \rightarrow 0. \quad (3.3.32)$$

Il résulte de (2.3.2), (3.3.9), (3.3.10) et (3.3.18) que pour tout z vérifiant $z \in H$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2 \cup E_4$, $|g(z)| = M(r, g)$ et $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \exp\{\xi|z|^{\sigma-\varepsilon}\} &< |B(z)| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A| \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{F}{f} \right| \\ &\leq rT(2r, f)^3 + \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} rT(2r, f)^2 + O(1) \\ &\leq 3r \exp\{\alpha|z|^{\sigma-\varepsilon}\} T(2r, f)^3. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Ainsi, il existe un ensemble $E''' = \{|z| : z \in H, |z| = r \notin ([0, 1] \cup E_2 \cup E_4)\}$ de densité supérieure positive vérifiant (3.3.14) quand $r \rightarrow \infty$ dans E''' et $|g(z)| = M(r, g)$.

D'où, de (3.3.33) on obtient

$$(\xi - \alpha)r^{\sigma-\varepsilon} \leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\xi - \alpha) \frac{r^{\sigma-\varepsilon}}{\log r} &\leq \frac{\log 3}{\log r} + 1 + 3 \frac{\log 2r}{\log r} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r} \\ \Rightarrow \mu(f) &= \infty, \end{aligned}$$

et

$$(\xi - \alpha)r^{\sigma-\varepsilon} \leq \log 3 + \log r + 3 \log T(2r, f)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \log(\xi - \alpha) + (\sigma - \varepsilon) \log r \leq \log \log 3 + \log \log r + \log 3 + \log \log T(2r, f) + O(1) \\
&\Rightarrow \frac{\log(\xi - \alpha)}{\log r} + (\sigma - \varepsilon) \leq \frac{\log \log 3}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log 2r \log \log T(2r, f)}{\log r \log 2r} + \frac{O(1)}{\log r} \\
&\Rightarrow \rho_2(f) \geq \sigma - \varepsilon.
\end{aligned}$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\rho_2(f) \geq \sigma = \max\{\rho(A), \rho(B)\}.$$

D'une autre part, de l'hypothèse $\lambda(\frac{1}{f}) < \rho(f)$, on obtient $\lambda(\frac{1}{f}) < \mu(f)$. Alors d'après le Lemme 3.2.1, on obtient $\rho_2(f) \leq \sigma$. Et par conséquent $\rho_2(f) = \sigma$.

D'après (3.1.1), il est clair que si f admet comme zéro z_0 d'ordre $m > 2$ et $A(z)$, $B(z)$ sont analytiques en z_0 , alors F admet nécessairement comme zéro z_0 d'ordre $m - 2$. D'où on obtient pour $F \not\equiv 0$ (3.3.1).

De (3.1.1), on obtient (3.3.2). Et par suite, on a (3.3.3).

De (3.3.1) et (3.3.3), on obtient (3.3.4) pour $|z| = r$ à l'extérieur d'un ensemble $E \subset]0, \infty[$ de mesure linéaire finie, avec $M > 0$ une constante convenable.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour r suffisamment large, on obtient (3.3.5).

Comme $\rho(F) < \infty$, alors

$$T(r, F) \leq r^{\rho(F)+\varepsilon},$$

$$\max\{\rho(A), \rho(B)\} = \sigma < \infty \Rightarrow T(r, A) + T(r, B) \leq 2r^{\max\{\rho(A), \rho(B)\}+\varepsilon} = 2r^{\sigma+\varepsilon}$$

d'où

$$T(r, F) + T(r, A) + T(r, B) \leq 3r^{\max\{\sigma, \rho(F)\}+\varepsilon} = 3r^{\sigma+\varepsilon}. \quad (3.3.34)$$

D'après (3.3.4), (3.3.5) et (3.3.34), on obtient

$$\begin{aligned}
T(r, f) &\leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \frac{1}{2}T(r, f) + 3r^{\sigma+\varepsilon} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}T(r, f) \leq 2\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + 3r^{\sigma+\varepsilon} \\
&\Rightarrow T(r, f) \leq 4\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + 6r^{\sigma+\varepsilon}, \quad (3.3.35)
\end{aligned}$$

pour $|z| = r \notin E$. Par conséquent, de (3.3.35) on aura

$$\log T(r, f) \leq \log 4 + \log \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \log 6 + (\sigma + \varepsilon) \log r$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\log T(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log 4}{\log r} + \frac{\log \bar{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r} + \frac{\log 6}{\log r} + (\sigma + \varepsilon) \\
&\Rightarrow \rho(f) \leq \bar{\lambda}(f),
\end{aligned}$$

et

$$\log T(r, f) \leq \log 4 + \log \bar{N}(r, \frac{1}{f}) + \log 6 + (\sigma + \varepsilon) \log r$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \log \log T(r, f) \leq \log \log 4 + \log \log \bar{N}(r, \frac{1}{f}) + \log \log 6 + \log(\sigma + \varepsilon) + \log \log r + O(1) \\
&\Rightarrow \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log \log 4}{\log r} + \frac{\log \log \bar{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r} + \frac{\log \log 6}{\log r} + \frac{\log(\sigma + \varepsilon)}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r} + \frac{O(1)}{\log r} \\
&\Rightarrow \rho_2(f) \leq \bar{\lambda}_2(f).
\end{aligned}$$

Comme $\rho(f) = \infty$ alors $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \mu(f) = \rho(f) = \infty$, et comme $\rho_2(f) = \sigma$ alors $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \sigma$.

Bibliographie

- [1] B. Belaïdi, Estimation of the hyper order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ, N°5, (2002), 1-8.
- [2] B. Belaïdi, On the meromorphic solutions of linear differential equations, Jrl Syst Sci & Complexity (2007) 20 : 41-46.
- [3] Y. Chen, Estimates of the zeros and growths of meromorphic solutions of homogeneous and non-homogeneous second order linear differential equations, Math. Appl. (Wuhan) 23(2010), no. 1, 18-26.
- [4] Z.X. Chen, On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Acta Math. Sinica, Vol. 42(1999), No. 3, 551-558 (in Chinese).
- [5] Z. X. Chen, The growth of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients, Kodai Math. J., 22(1999), 208-221.
- [6] Z.X. Chen, The zero, pole and orders of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients, Kodai Math. J., 19(1996), 341-354.
- [7] Z. X. Chen, Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Analysis, 14 (1994), 425-438.
- [8] Z. X. Chen and C. C. Yang, Some oscillation theorems for linear differential equations with meromorphic coefficients, Southeast Asian Bull. Math. (1999) 23/ 409-417.

- [9] Z. X. Chen and C. C. Yang, Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations, *Kodai Mathematical Journal*, vol. 22, no. 2, pp. 273–285, 1999.
- [10] W. Cherry, Z. Ye, *Nevanlinna's Theory of Value Distribution*, Springer, 2001.
- [11] A. A. Goldberg and I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.
- [12] F. Gross, On factorization of meromorphic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 215–222.
- [13] G. G. Gundersen, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, *J. London Math. Soc.* (2) 37 (1988), no. 1, 88–104.
- [14] G. G. Gundersen, Finite order solutions of second order linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 305 (1988), 415–429.
- [15] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [16] G. Jank, L. Volkman; *Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*, Birkhäuser, 1985.
- [17] K. H. Kwon, On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations. *Bull Korean Math Soc*, 1996, 33(3) : 487–496.
- [18] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1993.
- [19] X.Y. Li, The complex oscilation theory of $f'' + Af' + Bf = F$; where A , B et F are transcendental meromorphic functions, *Kodai math. J* 17 (1994), 299–310
- [20] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable* (translated by R. A. Silverman), Vol. II, , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [21] L. Yang, *Value distribution theory*, Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, Bei- jing :Science Press, 1993.
- [22] H. X. Yi and C. C. Yang, *The uniqueness theory of meromorphic functions*, Science Press, Beijing, 2003.