Master 2 Mathématique

Spécialité : Modélisation,Controle et Optimisation

Thème

Opérateur de Fredholm

Présenté par

YESSAD Ali

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, les membres du jury qui ont bien voulu lire mon travail.
Je remercie monsieur OULD Ali, directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.
Je remercie : Mr Andasmas et Mme Saidani qui ont accepté d'être membres de mon jury.
Je Salue l'ensemble des membres du département de mathématique de l'université d'ABD EL HAMID IBN BADDIS.

Sommaire

INTRODUCTION

Le mathématicien Fredholm a développé sa théorie à partir du théorème principal connu sous le nom de Alternative de Fredholm qui concerne la résolution de l'équation $\lambda f - Tf = g......(1)$ avec T un opérateur agissant sur X (Par exemple les opérateurs intégraux à noyau) . Ce théorème affirme que l'équation (1) admet une solution unique pour tout g appartenant à X ou bien l'équation homogène $\lambda f - Tf = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes (ce qui équivaut à $co\dim(R(T - \lambda I) = n)$ et dans ce cas l'équation non homogène (1) est résoluble si et seulement si g vérifie n conditions d'orthogonalité.

Ce théorème fondamental a donné naissance à la théorie des opérateurs de Fredholm qui donne des informations sur les solutions de l'équation (1) en utilisant $\dim(N(T))$ et $co\dim(R(T))$.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la description de cette classe d'opérateurs et à l'Alternative de Fredholm.

Le manuscrit se compose de quatre chapitres dont le contenu est comme suit :

- Le premier chapitre est consacré au rappel de différentes notions mathématiques nécessaires à notre travail : opérateur borné, inverse d'opérateurs, adjoint,...
- Dans le deuxième chapitre on s'intéresse à la classe des opérateurs de Fredholm dans le cas des opérateurs bornés et quelques concepts liés à cette classe.
- Le troisième chapitre, est consacré à l'étude des perturbatios des opérateurs compactes.
- Au dernier chapitre on donne quelques applications.

Chapitre 1

Rappel sur les opérateurs

Ce chapitre vise essentiellement à rappeler quelques définitions de base dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail.

Définition 1.0.1 *[1] Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. T est dit borné s'il existe une constante positive telle que :$\|T(x)\|_Y \leq k\|x\|_X$ pour tout $x \in X$.*

On note l'espace des opérateurs bornés par $B(X, Y)$, et l'espace des opérateurs linéaires par $L(X, Y)$.

Définition 1.0.2 *[1] Soient X et Y deux espaces normés et $T \in B(X, Y)$. la norme de T est définie par : $\|T\|_{op} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$.*

Définition 1.0.3 *[1] Soient X et Y deux espaces normés et $T \in B(X, Y)$, on dit que T est inversible s'il existe un opérateur $S \in B(Y, X)$ tel que : $ST = I_d X$, $TS = I_d Y$, dans ce cas S est l'inverse de T est notée par T^{-1}.*

Définition 1.0.4 *[1] Soient $(X, \|\|_x)$ et $(Y, \|\|_y)$ deux espaces normés et $T \in B(X,Y)$ un opérateur borné. Alors, on appelle adjoint de T, l'opérateur*

$$\begin{aligned} T^* \quad &: \quad Y^* \to X^* 9 \\ y^* \quad &\to \quad T^*(y^*) := y^* \circ T \end{aligned}$$

En utilisant la notation $< x,f >:= f(x)$, l'action de l'adjoint sur X est caractérisée par : $\prec x, T^* y^* \succ = \prec Tx, y^* \succ$. Pour tout $x \in X$ et pour tout $y^* \in Y$.

Définition 1.0.5 *[1] Soient E et F deux espaces de Hilbert.*

1. Un opérateur $U \in L(E,F)$ est dit unitaire si $U^*U = I_E$ et $UU^* = I_F$.
2. Un opérateur $J \in L(E,F)$ est dit isométrique si $\|J(x)\| = \|x\|$, pour tout $x \in E$.
3. Un opérateur $N \in L(E)$ est dit normal si $NN^* = N^*N$.
4. Un opérateur $S \in L(E)$ est dit hermitien ou auto-adjoint si $S = S^*$.
5. Un opérateur $P \in L(E)$ est dit positif (notation : $P \geq 0$) si p est auto-adjoint et si pour tout $x \in E : \prec P(x), x \succ \geq 0$.

Définition 1.0.6 *[1] Soient X, Y deux espaces normés et $T : X \to Y$, un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur T est un isomorphisme dans Y, s'il est injectif, continu et si son inverse est continu sur l'image de T. Si de plus, $\| Tx \|_Y = \| x \|_X$, $\forall x \in X$, on dit que T est un isomorphisme isométrique.*

Définition 1.0.7 *[3] Soit T un opérateur d'un espace de Hilbert H dans lui même. On appelle ensemble résolvant l'ensemble (I)*

$$p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \ \textit{tel que } (\lambda I - T) \textit{ est inversible}\} \qquad \textit{(I)}$$

Le spectre de T est le complémentaire de $p(T)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\sigma(T)$ $(\sigma(T) = (\mathbb{C} \backslash p(T))$ avec

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

c'est à dire

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, (T - \lambda I_H) \textit{ non inversible}\}$$

avec

1- $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, (T - \lambda_H)$ est non injectif$\}$ appelé spectre ponctuel de T.
2- $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, (T - \lambda_H)^{-1}$ existe, de domaine non dense dans $H\}$ appelé le spectre résiduel de T .
3- $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, (T - \lambda_H)^{-1}$ existe, et non borné de domaine dense dans $H\}$ appelé le spectre continu de T.

Définition 1.0.8 *soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu. On note $N(T) = \{x \mid Tx = 0\}$ son noyau, et $R(T) = \{Tx \mid x \in X\}$ son image. Si $R(T)$ est fermée, $Y/R(T)$ est un espace de Banach appelé conoyau de T et noté $co\ker(T)$. Sa dimension est la codimension de $R(T)$ dans Y.*

Chapitre 2

Opérateur de Fredholm

2.1 Concepts liés aux opérateurs de Fredholm

2.1.1 Espace quotient

Définition 2.1.1 *[6] Soient V un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et W un sous-espace de V. Alors le quotient V/W, dont l'ensemble quotient est $\{\upsilon+W|\upsilon \in V\}$, est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, appelé espace quotient, muni de la loi interne :*

$$\begin{array}{rcl} + & : & V/W \times\ V/W \rightarrow V/W \\ (\upsilon+W, \vartheta+W) & \rightarrow & (\upsilon+W)+(\vartheta+W) := (\upsilon+\vartheta)+W \end{array}$$

et de la loi externe

$$\begin{array}{rcl} \cdot & : & K \times\ V/W \rightarrow V/W \\ (\lambda, \upsilon+W) & \rightarrow & \lambda\cdot(\upsilon+W) := (\lambda\upsilon)+W. \end{array}$$

Définition 2.1.2 *[6] Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|\ .\|_X)$. La norme quotient de l'espace X/M est l'application*

$$\begin{array}{rcl} \| & . \|_{X/M} \colon & X/M \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x+M & \rightarrow & \| x+M \|_{X/M} := d(x+M, 0+M). \end{array}$$

Remarque 2.1.1 *1- $d(x+M, y+M) = \inf\{\| \upsilon - w \|_X | \ \upsilon \in x+M, w \in y+M\}$.*
2- Pour tout $x \in X$ nous avons, $d(x+M, 0+M) = d(x, 0+M) = d(x, M)$ et $d(x+M, 0+M) = d(0, x+M)$.
Ainsi,$\| x+M \|_{X/M} = inf_{x\in M}\{\| x - M \|_X | \ m \in M\} = inf_{x\in M}\{\| x+M \|_X | \ m \in M\}$

2.1.2 La somme directe et projection

Comme nous le verrons par la suite, certains opérateurs de Fredholm peuvent être obtenus à partir de projections. C'est pourquoi nous y consacrons cette section.

Définition 2.1.3 *[6] (Somme directe extérieure d'espaces normés). Supposons que $X_1, ..., X_n$ des espaces vectoriels. la somme directe de $X_1, ..., X_n$ est l'espace vectoriel obtenu par le produit cartésien $X_1 \times ... \times X_n$ et muni des deux opérations suivantes :*
– $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.
– $\alpha \cdot (x_1, ..., x_n) := (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.
Supposons maintenant que $X_1, ..., X_n$ sont des espaces vectoriels normés munis des normes $\| .\|_{X_1}, \ . \ . \ ,\| .\|_{X_n}$. Leur somme directe (extérieure) est l'espace vectoriel produit $X_1 \times ... \times X_n$ muni de la norme suivante :

$$\|(x_1, ..., x_n) \| := (\sum_{j=1}^{n} \| x_j \|_{X_j}^2)^{1/2}$$

On obtient alors un espace vectoriel normé noté $X_1 \oplus ... \oplus X_n$.

Définition 2.1.4 *[6] (Somme directe intérieure d'espaces normés). Si $M_1, ..., M_n$ sont des sous-espaces fermés d'un espace normé X tel que $\sum_k M_k = X$ et $M_j \cap \sum_{k\neq j} M_k = \{0\}$, alors on dit que X est la somme directe (intérieure) de $M_1, ..., M_n$.*

Définition 2.1.5 *[6] (Somme directe d'opérateurs). Soient $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$, des espaces normés et $T_j : X_j \to Y_j$, des opérateurs linéaires. La somme directe de $T_1, ..., T_n$ est l'opérateur :*

$$T_1 \oplus ... \oplus T_n : X_1 \oplus ... \oplus X_n \to Y_1 \oplus ... \oplus Y_n$$

définie par

$$(T_1 \oplus ... \oplus T_n)(x_1, ..., x_n) := (T_1(x_1), ..., T_n(x_n))$$

avec $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \oplus ... \oplus X_n$.

Définition 2.1.6 *[6] (projection) Soit X un espace de Hilbert. Un élément $p \in L(X)$ est appelé un opérateur de projection orthogonale s'il est auto-adjoint et s'il est idempotent, c'est-à-dire si $p^* = p$ et $p^2 = p$*

Définition 2.1.7 *[6] Soient $(X, \| \, . \, \|_X)$ un espace vectoriel normé, A un sous-ensemble de X et B un sous-ensemble de X^*. O appelle ensemble polaire de A dans X (respectivement de B dans X^*) l'ensemble $A^\circ = \{x^* \in X^* \mid x^*(x) = 0$ pour tout $x \in A\}$;*
(respectivement de ${}^\circ B = \{x \in X \mid x^*(x) = 0$ pour tout $x^* \in B\}$).

Proposition 2.1.1 *[6] Les ensembles A° et ${}^\circ B$ sont fermés.*

Preuve. $\cdot$ L'ensemble ${}^\circ B = \cap_{\ x^* \in X^*} \ker x^*$ est fermé en tant qu'intersection de fermés. montros que A° est fermé
$\cdot$ Soit $\{z_n^*\}$ une suite dans A° qui converge vers un certain $z^* \in X$. Alors en particulier, $z_n^*(x) \to z^*(x)$ pour tout $x \in X$. Or $z_n^*|A = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $z^*|A = 0$. Par conséquent, $z^* \in A^\circ$ et c'est à dire A° fermé. □

Théorème 2.1.1 *[6] Soit M un sous-ensemble fermé d'un espace normé $(X, \| \, . \, \|_X)$. Alors,*
(1) M°est isomorphe à $(X/M)^*$.
(2) M^*est isomorphe à X^*/M°.

Preuve. (1) Soit $\pi : X \to X/M$ l'application quotient et soit $T : y^* \to y^*\pi$. Clairement T est un opérateur linéaire de $(X/M)^*$ dans M°. Si $x^* \in M^\circ$ alors $M \subset \ker x^*$. Alors la propriété universelle du quotient garanti qu'il existe un unique $y^* \in (X/M)^*$ tel que $x^* = y^*\pi$ et de plus $\|y^* \ \|_{(X/M)^*} = \|x^*\|_{X^*}$. Autrement dit, T est bijectif et $\|y^* \ \|_{(X/M)^*} = \|Ty^*\|_{X^*}$. En conséquence, T est même un isomorphisme isométrique de $(X/M)^*$ dans M°.
(2) Soit $T : X^*/M^\circ \to M^*$ l'application qui envoie un élément de $x^* + M^\circ \in X^*/M^\circ$ sur la restriction de x^* à M. Puisque deux éléments $x_1^* + M^\circ$ et $x_2^* + M^\circ$ de X^*/M° sont égaux si et seulement si $x_1^*|M = x_2^*|M$, T est bien défini. Il est aussi injectif par définition et clairement linéaire. Maintenant, si $m^* \in M^*$et $x_{m^*}^*$ est une extension de Hahn-Banach de m^* à X, alors $T(x^*m^* + M^\circ) = m^*$, ainsi T est surjectif. Il s'agit donc d'un isomorphisme. □

Lemme 2.1.1 *[6] Soit* $(X, \|\ .\ \|_X)$ *et* $(Y, \|\ .\ \|_Y)$ *deux espaces normés et* $T \in B(X,Y)$ *un opérateur borné. Alors*
(1) $\ker T^* = (ImT)^\circ$ *;*
(2) $\ker T =^\circ (ImT^*)$*.*

Preuve. 1)

$$\begin{aligned}
\ker T^* &= \{y^* \in Y^* \mid 0 = T^* y^* = y^* \circ T\} \\
&= \{y^* \in Y^* \mid y^*|ImT = 0\} \\
&= \{y^* \in Y^* | y^*(y) = 0 \text{ pour tout } y \in ImT\} \\
&= (ImT)^\circ
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
{}^\circ(ImT^*) &= \{x \in X \mid x^*(x) = 0 \text{ pour tout } x^* \in ImT^*\} \\
&= \{x \in X \mid 0 = (T^* y^*)x \text{ pour tout } y^* \in Y^*\} \\
&= \{x \in X \mid 0 = y^*(Tx) \text{ pour tout } y^* \in Y^*\} \\
&= \{x \in X \mid 0 = Tx\} \\
&= \ker T
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.2 *Il découle du théorème 2.1.1 ainsi que du lemme 2.1.1 que* $\overline{\operatorname{Im} T} =^\circ ((\operatorname{Im} T)^\circ) =^\circ (\ker T^*)$*.*

2.1.3 Opérateurs à image fermeée.

Théorème 2.1.2 *[6] (théorème de l'image fermée) Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach, alors pour tout* $T \in B(X,Y)$ *les assertions suivantes sont équivalentes.*
(1) $\operatorname{Im} T$ *est fermée.*
(2) $\operatorname{Im} T =^\circ (\ker T^*)$*.*
(3) $\operatorname{Im} T^*$ *est fermée.*
(4) $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\circ$*.*

Preuve. (1)$\Longleftrightarrow$(2) Valide, d'après la remarque précédente.

(1))$\Longleftrightarrow$(4) D'après le lemme précédent 2.1.1, $(\ker T)^\circ =^\circ ((\operatorname{Im} T^*)^\circ) \supset \operatorname{Im} T^*$.

En vertu du premier théorème d'isomorphisme, nous avons que l'application

$$S : X/\ker T \to \operatorname{Im} T$$

$$x + \ker T \to T(x)$$

est un isomorphisme. Maintenant, si $x \in (\ker T)$, alors l'unique application $\overline{x} : (x + \ker T) \to x^*(x)$ définie par la propriété universelle du quotient est un élément de $(X/\ker T)^*$. Par conséquent, $\overline{x} \circ S^{\ -1} \in (\operatorname{Im} T)^*$. Donc il existe $y^* \in Y^*$ tel que $y^*| \operatorname{Im} T = \overline{x} \circ S^{\ -1}$. Ainsi, pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned}(T^*y^*)x &= y^*(Tx) = (\overline{x} \circ S^{-1})(Tx)\\ &= (\overline{x} \circ S^{-1})(S(x + \ker T))\\ &= \overline{x}(x + \ker T) = x^*(x)\end{aligned}$$

C'est-à-dire $T^*y^* = x^*$. Par conséquent $(\ker T)^\circ \subset \operatorname{Im} T^*$. Et donc $(\ker T)^\circ = \operatorname{Im} T^*$.

(4)$\Rightarrow$(3) D'après la proposition précédente les ensembles polaires sont des fermés. □

2.1.4 Opérateurs compacts

Définition 2.1.8 *[2] Soient X et Y des espaces normés. Un opérateur $T \in L(X,Y)$ est dit compact si, pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X , la suite $\{Tx_n\}$ dans Y contient une sous-suite convergente. L'ensemble des opérateurs compacts est noté $K(X,Y)$.*

donnons dans cette section quelques propriétés algébriques simples des opérateurs compacts dont nous aurons besoin dans la suite.

Théorème 2.1.3 *Soient X et Y deux espaces normés et $T \in K(X,Y)$. Alors T est borné. Ainsi, $K(X,Y) \subset B(X,Y)$.*

Preuve. Supposons que T n'est pas borné. Alors pour tout entier $n \geq 1$ existe un vecteur unitaire x_n tel que $\|Tx_n\| \geq n$. Puisque la suite$\{x_n\}$ est bornée, par la compacité de T, il existe une sous-suite $\{Tx_{n(r)}\}$ qui converge. Mais ceci contredit le fait que $\|Tx_{n(r)}\| \geq n(r)$, donc T doit être borné. □

Théorème 2.1.4 *Soient X, Y, Z des espaces normés.*
(a) Si $S, T \in K(X, Y)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $\alpha S + \beta T$ est compact.
(b) Si $S \in B(X, Y)$, $T \in B(Y, Z)$ et au moins l'un des opérateurs S, T est compact, alors $TS \in B(X, Z)$ est compact.

Preuve. (a) Soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans X. Puisque S est compact, il exist une sous-suite $\{x_{n(r)}\}$ telle que $\{Sx_{n(r)}\}$ converge dans Y. Ensuite, comme $\{x_{n(r)}\}$ est borné et T étant compact, il existe une sous-suite $\{x_{n(r(s))}\}$ de la suite $\{x_{n(r)}\}$ telle que $\{Tx_{n(r(s))}\}$ converge dans Z. Il s'ensuit que la suite $\{\alpha Sx_{n(r(s))} + \beta Tx_{n(r(s))}\}$ converge dans Z. Donc $\alpha S + \beta T$ est compact.
(b) Soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans X. Si S est compact, alors il existe une sous-suite $\{x_{n(r)}\}$ telle que $\{Sx_{n(r)}\}$ converge dans Y.
comme T est bornée (et donc continue), la suite $\{TSx_{n(r(s))}\}$ converge dans Z. d'ou TS est un opérateur compact.
Maintenant si S est borné mais non compact, alors par la continuitée de S la suite $\{Sx_n\}$ est bornée dans Y. Par la compacité de T, il exist une sous-suite $\{Sx_{n(r)}\}$ telle que $\{TSx_{n(r)}\}$ converge dans Z, D'ou TS est compact. □

Définition 2.1.9 *[2] Un opérateur $T : X \to Y$ est dit de rang finie si* $\dim(\operatorname{Im} T)$ *est fini.* $rg(T) = \dim(\operatorname{Im} T)$.

Théorème 2.1.5 *[2] Soient X et Y des espaces normés et T un opérateur borné de X dans Y :*

1. *Si T est de rang fini alors il est compact.*
2. *Si l'une de dimension de X ou de Y est finie alors T est compact.*

Preuve. (1)-comme T est de rang fini alors l'espace $Z = ImT$ est normé de dimension finie. De plus, pour toute suite bornée $\{x_n\}_n$ dans X, la suite $\{Tx_n\}$ est bornée dans Z, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass cette suite doit contenir une sous-suite convergente. D'où T est compact.
(2)-a) Si la dimension de X est finie, alors $\dim(ImT) = rg(T)$ est finie, Donc d'après la première propriétée T est compact.

b) si la dimension de Y est finie, il est clair que $\dim(ImT)$ est finie car $ImT \subset Y$, par suite T est de rang fini donc compact. $\square$

Exemple 2.1.1 *Soit* $T : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$

$$f \to Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y) f(y) dy$$

on démontre que T *est compact.*

$\mathrm{Im}(T) = \{Tf(x),\ f \in L^2[-\pi,\pi],\ x \in [-\pi,\pi]\}.$

Soient $x \in [-\pi,\pi]$ *et* $f \in L^2[-\pi,\pi]$,*alors :*

$Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)f(y)dy.$

$= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y))f(y)dy.$

$= \cos(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y)f(y)dy + \sin(x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(y)f(y)dy.$

on pose $\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y)f(y)dy$ *et* $\beta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(y)f(y)dy$. *Donc* $T(x) = \alpha\cos x + \beta \sin x$ *avec,* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$

$Tf \in L^2[-\pi,\pi]$ *alors, Comme toute fonction de* $L^2()$ *est décomposable en serie de Fourier, alors* $Tf(x) = (a_0/2)(\sum_{n\geq 0} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ *avec* α_n *et* β_n *des scalaires, D'ou* $\mathrm{Im}\,T$ *est engendré par* $\{\cos x, \sin x\}$

donc $\dim(\mathrm{Im}\,T) = 2 < \infty \Longrightarrow rg(T) < \infty \Longrightarrow T$ *est compact.*

2.2 Opérateur de Fredholm et semi-Fredholm

Définition 2.2.1 *[7] soit* A *un opérateur borné d'un espace de Hilbert* H *dans un autre espace de Hilbert* H_0. A *est dit un opérateur semi-Fredholm à droite et noté par* $\Phi_+(H,H_0)$ *(respectivement à gauche et notée par* $\Phi_-(H,H_0)$*) s'il existe un opérateur borné* $B \in B(H,H_0)$ *et un opérateur* K *compact sur* H_0 *(respectivement sur* H*) tels que* $AB = I + K$ *(respectivement* $BA = I + K$*).*

Définition 2.2.2 *[1]Soit* E *un espace de Banach et* $A \in L(E)$ *un opérateur borné. On dit que* A *est un opérateur de Frédholm si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $R(A)$ *est fermé.*

2. $\dim(\ker A)$ *est finie.*
3. $co\dim(R(A))$ *est fini.*

où la $co\dim R(A) = \dim(E/ImT)$.

L'ensemble des opérateurs de Fredholm de X vers Y est noté $\Phi(X,Y)$.

Définition 2.2.3 *[1] On appelle indice de A est on la note $ind(A)$ l'entier relatif :*

$$ind(A) = \dim \ker(A) - co\dim R(A)$$

L'indice de A est $-\infty$ si cette codimension est infinie.

Exemple 2.2.1 *Considérons deux espaces de Banach X et Y de dimension finie. (Par exemple $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.) Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu.*

On a evidemment que, $\dim(\ker T)$ *et* $\dim(Co\ker T)$ *sont finies et ImT est fermée, étant de dimension finie.*

Alors,

$$\begin{aligned} ind(T) &= \dim(\ker T) - \dim(Co\ker T) = \dim(\ker T) - \dim(Y/\operatorname{Im} T) \\ &= \dim(\ker T) - (\dim(Y) - \dim(\operatorname{Im} T)) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y) + \dim(\operatorname{Im} T) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exemple 2.2.2 *(opérateur non Fredholm)*

L'opérateur nul $T : X \to Y$, défini par $T(x) = 0_Y$ pour tout $x \in X$, entre deux espaces de Banach n'est pas un opérateur de Fredholm si la dimension de X ou de Y est infinie.

En effet, si X est de dimension infinie, alors $\ker T = X$ est de dimension infinie et si Y est de dimension infinie $\operatorname{Im} T = \{0_Y\}$ dont la codimension, qui est la dimension de Y, est infinie.

Théorème 2.2.1 *[6] (Adjoint d'un opérateur de Fredholm) Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \Phi(X,Y)$ un opérateur de Fredholm et soit T^* son adjoint, alors T^* est un opérateur de Fredholm.*

Preuve. Nous allons montrer que :

$\cdot ImT^*$ est fermée ;

$\cdot \dim(\ker T^*) < \infty$;

$\cdot \dim(X^*/ImT^*) < \infty$.

(1) Etant donné que T est Fredholm, son image ImT est fermée, ce qui équivaut à dire que ImT^*est fermée, d'après le théorème de l'image fermée.

(2) En appliquant le théorème 2.1.1 au sous-espace $\ker T$ de X, il vient :

$$(\ker T)^* \cong X^*/(\ker T)^\circ$$

Or le théorème de l'image fermée fournit $(\ker T)^\circ = ImT^*$. Ainsi :

$$(\ker T)^* \cong X^*/(\ker T)^\circ = X^*/ImT^*$$

Donc

$$\dim(X^*/ImT^*) = \dim((\ker T^*) = \dim(\ker T) < \infty$$

par hypothèse.

(3) En appliquant le théorème 2.1.1 au sous-espace ImT de Y, il vient :

$$(Y/ImT)^* \cong (ImT)^\circ$$

En outre le lemme 2.1.1 fournit $(ImT)^\circ = \ker T^*$. Par conséquent :

$$(Y/ImT)^*(ImT)^\circ = \ker T^*$$

Ainsi

$$\dim(\ker T^*) = \dim((Y/ImT)^*) = \dim(Y/ImT)) < \infty$$

par hypothèse. L'opérateur adjoint T^* est donc bien Fredholm. Calculons son indice :

$$\begin{aligned} ind(T^*) &= \dim(\ker T^*) - \dim(X^*/ImT^*) \\ &= \dim(Y/ImT) - \dim(\ker T) \\ &= -ind(T) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.2.1 *[5] soit $T \in L(X, Y)$. les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) T est semi-Fredholm,

2) De toute suite bornée de X dont l'image par T est une suite convergente, on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve. Supposons que 2 soit vérifiée, Il résulte du lemme de Reisz (la boule unité d'un espace normé est relativement compact si et seulement si cet espace est de dimension finie)que le noyau $N(T)$ est de dimension finie. $N(T)$ possède alors des supplémentaires topologiques. Soit X_0 un tel supplémentaire. la propriété 2 implique l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$(3)\ \ \forall u \in X_0,\ \|u\| \leq C\|Tu\|$$

En effet si (3) était fausse, on pourrait construire une suite $u_n \in X_0$, $\|u_n\| = 1$, $\|Tu_n\| \leq \frac{1}{n}$. De cette suite on pourrait extraire d'après l'ypothèse (2) une sous-suite convergente vers $u \in X_0$(car X_0 est normé), $\|u\| = 1$ et $Tu = 0$, ce qui contredit $u \in X_0$.

L'image de T et celle de la restriction de T à X_0 étant égales, l'inégalité (3) (prouve que $R(T)$ est fermée car complète.

Réciproquement, puisque (3) est vérifiée si et seulement si la restrectiuon de T à X_0 est injective et d'image fermée, la propriété 1 implique (3).Soit alors (u_n) une suite borné dans X dont l'image par T est convergente. On décompose u_n sous la forme

$$u_n = v_n + w_n,\ v_n \in N(T),\ w_n \in X_0$$

$Tu_n = Tw_n$, et de (3) on déduit que la suite w_n est de cauchy, donc converge. La suite (v_n) est bornée dans l'espace de dimension finie $N(T)$,et possède donc une sous-suite convergente, ce

qui prouve 2. [5] □

2.3 Alternative de Fredholm

Théorème 2.3.1 *[2] Soit $T : H \to H$ un opérateur compact tel que H un espace de Hilbert de dimension infinie, Si $\lambda \neq 0$, alors :*

1) $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ est fermé.

2) $\ker(T-\lambda I)$ a une dimension finie.

Preuve. 1)Soit $\{y_n\}$ une suite dans $Im(T-\lambda I)$, avec $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Ainsi, pour tout n, on a $y_n = (T-\lambda I)x_n$, pour certain x_n, et comme $Ker(T-\lambda I)$ est fermé, x_n a une décomposition orthogonale de la forme $x_n = u_n + v_n$, avec $u_n \in Ker(T-\lambda I)$ et $v_n \in Ker(T-\lambda I)^{\perp}$.
Nous allons montrer que la suite $\{v_n\}$ est bornée.
Supposons que v_n n'est pas bornée, $\| v_n \|$ 0, et $lim_{n\to\infty} \| v_n \| = \infty$. En mettant $w_n = v_n / \| v_n \|$, $n = 1,2,...$, on a $w_n \in Ker(T-\lambda I)^{\perp}$,$\| w_n \| = 1$ (donc la suite $\{w_n\}$ est bornée) et

$$(T-\lambda I)w_n = (y_n / \| v_n \|) \to 0$$

puisque $\{y_n\}$ est borné (car elle est convergente). En outre, par la compacité de T on peut supposer que $\{Tw_n\}$ converge .
En combinant ces résultats, il s'ensuit que la suite $\{w_n\}$ converge (puisque $\lambda \neq 0$). Soit $w = lim_{n\to\infty} w_n$, on voit que $\| w_n \| = 1$ et

$$(T-\lambda I)w = lim_{n\to\infty}(T-\lambda I)w_n = 0$$

donc $w \in Ker\ (T-\lambda I)$. Cependant, $w_n \in Ker\ (T-\lambda I)\ ^{\perp}$ donc

$$\| w - w_n \|^2 = (w - w_n, w - w_n) = 1 + 1 = 2$$

ce qui contredit $w_n \to w$. Donc la suite $\{v_n\}$ est bornée.
Maintenant, par la compacité de T, nous pouvons supposer que $\{Tv_n\}$ converge. Puis $v_n = \lambda^{-1}(Tv_n - (T-\lambda I)v_n) = \lambda^{-1}(Tv_n - y_n)$, pour $n \in N$, donc la suite $\{v_n\}$ converge. notons v sa limite. Alors $y = lim_{n\to\infty} y_n = lim_{n\to\infty}(T-\lambda I)v_n = (T-\lambda I)v$, et donc $y \in Im(T-\lambda I)$. Cela prouve que $Im(T-\lambda I)$ est fermé.
2) Supposons que $M = Ker(T-\lambda I)$ est de dimension infinie. Puisque le noyau d'un opérateur borné est fermé, l'espace M est un espace de Hilbert de dimension infinie, et il y a une suite orthonormale $\{e_n\}$ dans M. les vecteurs image vérifient pour $m \neq n$:

$$\| Te_n - Te_m \|^2 = \| \lambda e_n - \lambda e_m \|^2 = 2|\lambda|^2.$$

comme $\lambda \neq 0$, la suite (Te_n) ne peut pas avoir de sous-suite de Cauchy, donc pas de sous-suite convergente et T n'est pas compact. Donc contradiction. D'ou M est de dimension finie. $\square$

Proposition 2.3.1 *[7] Soit $A \in B(H, H_0)$ tel que H et H_0 sont des espaces de Hilbert. Si A est bijectif alors A est de Fredholm d'indice nul.*

Preuve. Comme A est bijectif, Alors $kerA = \{0\}$, par conséquent $dimkerA < +\infty$. De plus $R(A) = H_0$ est fermé et $codimR(A) = 0$. donc l'opérateur A est de Fredholm.
$ind(A) = dimkerA - codimR(A) = 0 - 0 = 0$ □

Proposition 2.3.2 *[7] Soit $A \in B(H, H_0)$ tel que H et H_0 sont des espaces de Hilbert. Si*

$\dim H < +\infty$*, et* $\dim H_0 < \infty$*, alors A est de Fredholm. Dans ce cas* $ind(A) = \dim H - \dim H_0$

Preuve. Comme $\dim H < +\infty$, et $\dim H_0 < +\infty$ alors $\dim\ker A < +\infty$, $codimR(A) < +\infty$ et $R(A)$ est fermé donc A est de Fredholm.

$$ind(A) = dimkerA - codimR(A) = dimkerA - dimH_0 + dimR(A) = dimH - dimH_0.$$

□

2.4 Produits d'opérateurs de Fredholm

Lemme 2.4.1 *[4] Soit N un sous-espace vectoriel de X de dimension finie (X espace vectoriel normé) alors il existe X_0 sous-espace vectoriel fermée de X tel que :*
a) $X_0 \cap N = \{0\}$.
b) $\forall x \in X, \exists! x_0 \in X, \exists! x_1 \in N$ *tel que* $x = x_0 + x_1$. *c'est-à-dire : celà veut dire seulement que* $X = X_0 \oplus N$.

Preuve. Soit $x \in X = X_1 \oplus M$.
si $x \in M \Rightarrow \| px \| = \| x \| \leq 1. \| x \|$
si $x \in X_1 \Rightarrow \| px \| = 0 \leq 1. \| x \|$ □

Lemme 2.4.2 *[4] Soit X_1 un sous-espace vectoriel fermé de X et M un sous-espace vectoriel de dimension finie telque $X_1 \cap M = \{0\}$.alors $X_2 = X_1 \oplus M$ est un sous-espace vectoriel fermé de X.*

De plus l'opérateur

$$\begin{aligned} P \quad &: \quad X_2 \to X_2 \\ x \quad &\to \quad Px \end{aligned}$$

où $px = \begin{cases} x & si \qquad x \in M \\ 0 & si\ x \in X_1 \end{cases}$ *est bornée c'est-à-dire* $P \in (X_2)$.

Théorème 2.4.1 *[3] Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach, et soit* $A \in \Phi(X, Y)$. *Alors, il existe un sous-espace fermé* X_0 *de* X, *tel que* $X = X_0 \oplus N(A)$ *et un sous-espace* Y_0 *de* Y *de dimension* A *tel que* $Y = R(A) \oplus Y_0$.

De plus, il existe un opérateur $A_0 \in L(Y, X)$, tel que

$$\begin{aligned} \text{a) } N(A_0) &= Y_0, \\ \text{b) } R(A_0) &= X_0 \\ \text{c) } \quad A_0A &= I \text{ sur } X_0 \\ \text{d) } \quad AA_0 &= I \text{ sur } R(A) \\ \text{e) } \quad A_0A &= I - F_1 \text{ sur } X \\ \text{f) } \quad AA_0 &= I - F_2 \text{ sur } Y \end{aligned}$$

où $F_1 \in L(X)$ avec $R(F_1) = N(A)$ et $F_2 \in L(Y)$ avec $R(F_2) = Y_0$.

Preuve. Les propriétés a), b), c) et d) se déduisent directement des lemmes précédents pour N=N(A) et X_0.

montrons maintenant la propriété (e)

on a $F_1 = I$ sur $N(A)$ et égal à 0 sur X_0 d'après la propriété (c). Donc $F_1 \in L(X)$. un raisonnement similaire donne (f). □

Théorème 2.4.2 *[3] Soit* $A \in L(X, Y)$ *et* $B \in L(Y, Z)$ *où* X, Y *et* Z *sont des espaces de Banach. Si* A *et* B *sont des opérateurs de Fredholm (des opérateurs semi-Fredholm supérieurs, respectivement, des opérateurs semi-Fredholm inférieurs), alors* BA *est un opérateur de Fredholm, (un opérateur semi-Fredholm supérieur, respectivement, un opérateur semi-Fredholm inférieur), et*

$$i(BA) = i(B) + i(A)$$

Preuve. [5] Soit l'opérateur $A : N(BA) \to N(B)$ avec pour noyau $N(A)$.D'où

$$\dim N(BA) \leq \dim N(B) + \dim N(A)$$

Il existe W_1 et W_2 de dimension finie tels que

$$Y = R(A) \oplus W_1,\ Z = R(B) + W_2$$

Donc $R(BA)$ est de codimension finie dans $R(B)$, qui est de codimension finie dans Z. $R(BA)$ est donc de dimension finie dans Z.
Il en résulte que BA est un opérateur de Fredholm. □

Théorème 2.4.3 *[4] Soit X, Y et Z trois espaces de Banach. Supposons que $A \in L(X, Y)$ et $B \in L(Y, Z)$ sont tels que*

$$BA \in \Phi(X, Z).$$

Alors,

$$A \in \Phi(X, Y) \text{ si et seulement si, } B \in \Phi(Y, Z).$$

Preuve. Supposons d'abord que $A \in \Phi(X, Y)$, et soit A_0 un opérateur satisfaisant le théorème 2.4.1, Ainsi, ,

$$BAA_0 = B - BF_2 \text{ sur } Y$$

où $F_2 \in K(Y)$.
Maintenant $A_0 \in \Phi(Y, X)$ et $BA \in \Phi(X, Z)$ par l'hypothèse. Ainsi, $BAA_0 \in \Phi(Y, Z)$ (théorème 2.4.2).Puisque $BF_2 \in K(Y, Z)$ est la suite de $B \in \Phi(Y, Z)$ (théorème 5.10).
Supposons ensuite que $B \in \Phi(Y, Z)$, et soit $B_0 \in L(Z, Y)$ tel que $B_0 B = I - F_3$ sur Y, $BB_0 = I - F_4$ sur Z où $F_3 \in K(Y)$ et $F_4 \in K(Z)$.
Alors

$$B_0 BA = A - F_3 A \text{ sur } X.$$

Maintenant $BA \in \Phi(X, Z)$ par hypothèse, tandis que $B_0 \in \Phi(Y, Z)$. D'où $B_0 BA \in \Phi(X, Y)$, et le même doit être vrai de A. □

Théorème 2.4.4 *[3]Supposons que $A \in L(X, Y)$ et B soit dans $L(Y, Z)$ sont tels que $BA \in \Phi(X, Z)$. si $\dim(\ker B) < \infty$, alors $A \in \Phi(X, Y)$ et $B \in \Phi(Y, Z)$.*

Preuve. puisque $R(B) \supset R(BA)$, on voit que $R(B)$ est fermé. De plus, $\dim R(B) \leq \dim R(BA)$, et donc $B \in \Phi(Y, Z)$. nous appliquons maintenant le théorème 2.4.3.[5] $\square$

Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice d'une composition d'opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices des composants.

Proposition 2.4.1 *[6] Soient $A \in L(H, H_0)$ et M un sous-espace H tel que $co\dim M = n < +\infty$.on pose $A_0 = A/M$. alors :*

$$A \text{ est de Fredholm si et seulement si} : A_0 : M \to H_0 \text{ est de Fredholm}$$

De plus :

$$ind(A) = ind(A_0) + n.$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur la codimension de M.

pour $n = 1$

on pose :

$$H = M \oplus \prec x_1 \succ$$

où $\prec x_1 \succ$ est le sous-espace engendré par un vecteur $x_1 \neq 0$ de H.

$\forall x \in H$, $x = x_0 + \lambda x_1$ alors $Ax = Ax_0 + \lambda Ax_1$, $x_0 \in M$.

Envisageons deux cas :

1) Si $y_1 = Ax_1 \notin R(A_0)$ Alors :

$$R(A) = R(A_0) \oplus \prec y_1 \succ .$$

D'autre part :

$$\ker A_0 = \ker A$$

En effet,

$$\ker A_0 = \{x_0 \in M \, ; \, A_0 x_0 = 0\}$$

et

$$\ker A = \{x_0 \in H \, ; \, Ax_0 = 0\}$$

On a $\ker A_0 \subset \ker A$. Il reste à montrer que, $\ker A \subset \ker A_0$.

Si $x \in \ker A$, Alors $Ax = 0$.

D'autre part

$$x = x_0 + \lambda x_1$$

Alors :

$$Ax = Ax_0 + \lambda x_1 = 0$$

Donc :

$$Ax_0 = A_0 x_0 = -\lambda A x_1$$

Ce qui implique que :

$$y_1 = 0 \text{ et } A_0 x_0 = 0$$

Cela veut dire que

$$x_0 \in \ker A_0.$$

Alors

$$\dim \ker A = \dim \ker A_0$$

et

$$co \dim R(A) = co \dim R(A_0) + 1$$

Donc

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim \ker A_0 - co \dim R(A_0) + 1 \\ &= ind(A_0 + 1) \end{aligned}$$

2) Si $y_1 = Ax_1 \in R(A_0)$ alors

$$R(A) = R(A_0)$$

et il existe un $u \in M$ tell que :

$$y_1 = A_0(u)$$

De plus

$$\ker A = \ker A_0 + \oplus \prec x_1 - u \succ$$

En effet,

$$x = x_0 + \lambda x_1, \text{ où } x_0 \in M \text{ et } x_1 \in H.$$

$$\begin{aligned}
Ax &= Ax_0 + y_1 = A_0x_0 + \lambda A_0 u = A_0(x_0 + \lambda u) \\
Ax &= 0 \Longleftrightarrow A_0(x_0 + \lambda u) = 0 \\
x_0 + \lambda u &\in \ker A_0 \Longleftrightarrow x_0 \in \ker A_0 - \lambda u
\end{aligned}$$

et

$$\dim \ker A = \dim \ker A_0 + 1$$

Donc

$$\begin{aligned}
ind(A) &= \dim \ker A_0 + 1 - co \dim R(A_0). \\
&= ind(A_0) + 1
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $R(A_0)$ est fermé.

Comme $R(A)$ est fermé alors il existe $c > 0$ tel que :

$$\| Ax \|_{H_0} \geq c \| x \| , \forall x \in H.$$

A_0 vérifie aussi la même estimation, par conséquent $R(A_0)$ est fermé dans H_0.

le cas $n = 2$ s'obtient de la même façon en décomposant H de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
H(M\oplus &\prec x_1 \succ)\oplus \prec x_2 \succ = M_0 + \prec x_2 \succ . \\
\text{où } M_0 &= (M\oplus \prec x_1 \succ) \text{et } A_0 = A_0/M_0 \\
indA &= indA_0 + 2
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle resre vraie à l'ordre $(n+1)$, cest-à-dire :

$$H = M \oplus X_0$$

avec $\dim X_0 = n + 1$.

Quitte à enlever un vecteur a de la basse de X_0, On peut écrire

$$X_0 = X\oplus \prec a \succ .$$

où

$$\dim X = n, H = M \oplus X\oplus \prec a \succ = M_0\oplus \prec a \succ = N \oplus X.$$

où

$$M = M \oplus X \text{ et } N = M \oplus \prec a \succ$$

D'aprés les deux cas précédents, On obtient le resultat :

$$ind(A) = ind(A_0) + n.$$

$\square$

Chapitre 3

Perturbation

Dans ce chapitre, on montre que les perturbations compacts n'influent pas sur l'ensemble des opérateurs de Fredholm, ce qui veut dire que si on somme un opérateur de Fredholm et un opérateur compact on obtient un opérateur Fredholm.

Définition 3.0.1 *[3]Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $F \in L(X,Y)$. F est appelé perturbation de Fredholm, si $U + F \in \Phi(X,Y)$ chaque fois que $U \in \Phi(X,Y)$. F est appelée perturbation de Fredholm supérieure (respectivement inférieure), si $U+F \in \Phi_+(X,Y)$ (respectivement $U + F \in \Phi_-(X,Y)$) chaque fois que $U \in \Phi_+(X,Y)$ (respectivement $U \in \Phi_-(X,Y)$). Les ensembles des perturbations de Fredholm, semi-Fredholm à droite et semi-Fredholm à guche sont, respectivement, notés $\mathcal{F}(X,Y)$, $\mathcal{F}_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}_-(X,Y)$. En général, nous avons*

$$\begin{aligned} K(X,Y) &\subseteq \mathcal{F}_+(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y) \\ K(X,Y) &\subseteq \mathcal{F}_-(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y). \end{aligned}$$

Proposition 3.0.2 *Soit A un opérateur compact sur H, Alors $I_d - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

Preuve. D'aprés le théorème 2.3.1, on a $R(I_d - A)$ est fermé et

$$dim(H = R(I_d - A)) = codimR(I_d - A) = dimker(I_d - A) < \infty$$

Alors, $(I_d - A)$ est de Fredholm.

$$ind(I_d - A) = dimker(I_d - A) - codimR(I_d - A) = 0.$$

□

Théorème 3.0.5 *Soit $A \in B(H, H_0)$ un opérateur semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite). Si K est un opérateur compact de H dans H_0, alors $A + K$ est un opérateur semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite), l'indice de $A + K$ est l'indice de A.*

Preuve. comme A est semi-Fredholm à gauche, alors il existe un opérateur B dans $B(H_0, H)$ et un opérateur F compact sur H de sorte que : $BA = I + F$.
Comme K est compact alors BK reste compact, Par conséquent : $BA+BK = I+FalorsB(A+K) = I + (F + BK)$
Or l'opérateur F est compact alors, $F + BK$ est compact, d'où $A + K$ est semi-Fredholm à gauche.
Soit L un opérateur compact tel que : $AB = I + L$
Or d'aprés le théorème BA est de Fredholm de plus $ind(BA) = ind(B) + ind(A)$
Et comme L est compact alors $I + L$ est de Fredholm et $ind(I + L) = 0$,
Donc$ind(A) + ind(B) = 0$ ou bien : $ind(B) = -ind(A)$
D'autre part, On a : $BA + BK = B(A + K) = 1 + (L + Bk)$ et $(L + BK)$ est compact alors $1 + (L + BK)$ est de Fredholm, alors : $ind(B(A + k)) = ind(B) + ind(A + k) = 0$ et : $ind(B) = -ind(A + K)$ par conséquent, on a :$ind(A + K) = ind(A)$. □

Proposition 3.0.3 *[5]Soit $T \in L(X, Y)$ tel qu'il existe K_1 et K_2 compacts de X dans X, et S_1 et S_2 dans $L(X, Y)$ avec :*

$$TS_2 = I + K_2,\ S_1T = I + K_1$$

Alors T, S_1 et S_2 sont de Fredholm,et ind $T = -ind\ S_1 = ind\ S_2$.

Preuve. $I+K_i$ $i = 1, 2$ sont de Fredholm d'indice nul, d'après la proposition 3.0.2. Il résulte des hypothèses que $\dim(N(T)) \leq \dim(N(I + K_1))$ et que $\dim(co\ker(T)) \leq \dim(co\ker(I + K_2))$.
L'opérateur T est donc de Fredholm.

Mais $S_1TS_2 = S_1 + S_1K_2 = S_2 + K_1S_2$. D'ou il résulte que $S_1 - S_2$ est compact (l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal de l'ensemble des opérateurs bornés).
$S_2T - I = (S_2 - S_1)T + S_1T - I = (S_2 - S_1)T + K_1$ donc compact, et de meme $TS_1 - I$.
Donc S_2 et S_1 sont de Fredholm.
$ind\ S_2T = ind\ S_2 + ind\ T = ind(I + K_2) = 0 \Leftrightarrow ind\ T = -ind\ S_2 = -ind\ S_1$. $\square$

Chapitre 4

Applications

1. (Opérateurs de Hilbert-Schmidt à noyau) : Soit k : $[a,b] \times [a,b] \to C (a < b)$ une fonction continue. Pour toute $f \in L^2([a,b])$, on considère la fonction K_f définie pour $t \in [a,b]$ par

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t,s) f(s) ds.$$

Alors

1. K est un opérateur de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert $L^2([a,b])$ sur lui même. Pour tout $t \in [a,b]$ fixé, notons k_t la fonction $s \to k(t,s)$. En termes du produit scalaire de $L^2([a,b])$, on peut écrire

$$(Kf)(t) = < k_t, \overline{f} > \text{...........}(I)$$

Considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2([a,b])$. D'après (I), on a $||Ke_n||^2 = \int_a^b | < k_t, e_n > |^2 dt$. D'où en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} ||Ke_n||^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b | < k_t, \overline{e_n} > |^2 dt \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} | < k_t, \overline{e_n} > |^2 dt. \end{aligned}$$

Mais $\sum_{n=1}^{+\infty} | < k_t, \overline{e_n} > |^2 = ||k_t||^2$ (formule de Bessel-Parseval).

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||Ke_n||^2 = \int_a^b ||k_t||^2 dt = \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dt ds < +\infty.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. L'équation $Tf - f = g$ vérifie l'une ou l'autre des deux assertions suivantes (Alternative de Fredholm) : ou bien, pour tout $g \in L^2([a,b])$, il existe une unique solution f, ou bien il existe un sous-espace strict N de $L^2([a,b])$ tel que si $g \in N$, l'équation admet une infinité de solutions, et si $g \notin N$, l'équation n'admet pas de solution.

2. (Un exemple d'alternative de Fredholm en dimension 1)

   L'existence de K résulte du théorème d'identification de Riesz et de la continuité de l'application trace. K est évidemment auto-adjoint puisque $(Ku,v)_{H^1(\mathbb{R}^+)} = (u,Kv)_{H^1(\mathbb{R}^+)}, \forall u,v \in H^1(\mathbb{R}^+)$, Enfin, il est de rang 1 car $\forall u,v \in H^1(\mathbb{R}^+)$, il existe une combinaison linéaire de u et v qui s'annule en 0 : $au(0) + bv(0) = 0$ d'où $aKu + bKv = 0$.

   Si K admettait deux vecteurs propres linéairement indépendants, il ne serait pas de rang 1 mais au moins 2... $Ku = \lambda u$ donne

$$\begin{cases} -u" + u = 0 \quad (\mathbb{R}^+) \\ u'(0) + \lambda u(0) = 0 \end{cases}$$

   que l'on résoud facilement dans $H^1(\mathbb{R}^+)$ et on trouve : $\lambda = 1$ et $u = e^{-x}$.

   Le problème suivant : $\{$Trouver u tel que $-u" + u = f \quad (\mathbb{R}^+)$ avec $u\prime(0) + \alpha Ku(0) = 0\}$ admet la formulation variationnelle suivante :

   $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$, $\int_{\mathbb{R}^+}(u\prime v0\prime + uv)dx - \alpha u(0)v(0) = \int_{\mathbb{R}^+} fvdx$. pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^+)$. Cela s'écrit aussi, en utilisant le théorème d'identification de Riesz :

$$u - \alpha Ku = g$$

   avec $(g,v)_{H^1(\mathbb{R}^+)} = \int_{\mathbb{R}^+} fvdx$. D'après l'alternative de Fredholm, si $\alpha \neq 1$; le problème admet donc une solution unique $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$.

   - Si $\alpha = 1$, (toujours d'après l'alternative de Fredholm) le problème admet une solution si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^+} fe^{-x}dx = 0$.

   Cette solution n'est pas unique puisque on peut lui rajouter ae^{-x}.

CONCLUSION

Un opérateur de Fredholm est un opérateur qui se pose dans la théorie de Fredholm des équations intégrales. Il est nommé en l'honneur d'Erik Ivar Fredholm.
Un opérateur T linéaire borné $T : X \to Y$ entre deux espaces de Banach est appelé opérateur de Fredholm s'il a un noyau et un conoyau de dimension finie et si son image est fermée.
De manière équivalente, un opérateur $T : X \to Y$ est Fredholm s'il s'agit d'opérateurs compacts modulo inversibles, c'est-à-dire, s'il existe un opérateur linéaire limité $S : Y \to X$ tel que $I_d - ST$ et $I_d - TS$ sont des opérateurs compacts sur X et Y respectivement.
L'indice d'un opérateur T de Fredholm est $ind(T) := \dim \ker T - \dim co \ker T$.

Bibliographie

[1] Anthony Arnold & Caroline Lassueur -Opérateurs de Fredholm -, projet de semestre 2005.

[2] Pierre Lévy-Bruhl. , INTRODUCTION A LA THEORIE SPECTRALE .© Dunod, paris, 2003.

[3] Emmanuel Fricain. , ANALYSE FONCTIONELLE ET THEORIE DES OPERATEURS COURS et EXERCICES.

[4] Aref jeribi. , Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices, © Springer International Publishing Switzerland 2015.

[5] M^{eur}. Khelfaoui Abderrahmane.Univ.Saïda Mémoire de master, Les opérateurs de Fredholm, . Promotion 2012/2013.

[6] Bryan P.Rynne,and Martin A.Youngson. , Lineair Functional Analysis.

[7] Schecher Martin. ,principles of functional analysis. AMS, 2002 (Graduate Stadies in Mathematics).